Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.2, с. 20–35

УДК 519.833.2
ББК 22.18

ЯДРО И СУПЕРДИФФЕРЕНЦИАЛ НЕЧЕТКОЙ TU-КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ

Валерий А. Васильев*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

В работе изучаются требования, обеспечивающие совпадение ядер и супердифференциалов нечетких кооперативных игр с побочными платежами. Среди простейших достаточных условий – некоторый слабый аналог однородности таких игр. Особое внимание уделяется рассмотрению неоднородного случая. Применяя так называемое S^*-представление нечеткой игры, удается показать, что для произвольной игры v с непустым ядром существует некоторая игра u такая, что ядро v совпадает с супердифференциалом игры u. Полученная общая теорема представления ядра в виде супердифференциала (исходной игры, или подходящей ее модификации) позволяет использовать аппарат субдифференциального исчисления для описания структуры ядер как для классических нечетких расширений обычных кооперативных игр, так и для некоторых новых продолжений типа обобщенной игры «Аэропорт».

Ключевые слова: нечеткая кооперативная игра, S^*-представление, супердифференциал, ядро, слабая однородность.

Поступила в редакцию: 21.02.20 *После доработки*: 14.06.20 *Принята к публикации*: 25.06.20

---

* Работа поддержана грантом РФФИ 19-010-00910.

1. Введение

Работа посвящена анализу взаимосвязи между ядрами и супердифференциалами нечетких TU-кооперативных игр n лиц. Изучаются требования, обеспечивающие совпадение указанных ядер и супердифференциалов. Среди простейших достаточных условий – некоторый слабый аналог однородности нечетких игр. Особое внимание уделяется рассмотрению неоднородного случая. Используя предложенное автором так называемое S^*-представление нечеткой игры [3], удается показать, что для произвольной игры v с непустым ядром существует некоторая игра u такая, что ядро v совпадает с супердифференциалом игры u. Полученная общая теорема представления ядра в виде супердифференциала подходящей модификации рассматриваемой игры позволяет использовать аппарат субдифференциального исчисления [5,6,9] для описания структуры ядер как классических нечетких расширений обычных игр (например, для расширений Обэна [9]), так и некоторых новых продолжений типа обобщения известной игры «Аэропорт» [4,11].

Основное содержание работы разбито на три раздела. Первый (часть 2) содержит необходимые в дальнейшем обозначения и определения. Здесь же приводится формулировка критерия непустоты ядра нечеткой игры с побочными платежами, а также определение S^*-представления такой игры и некоторые свойства указанного представления. В частности, отмечается совпадение ядер нечетких игр и ядер их S^*-представлений. Второй раздел (часть 3) посвящен установлению основного результата – теоремы о совпадении ядра нечеткой V-сбалансированной игры и супердифференциала ее однородной модификации. Наконец, в третьем разделе (часть 4) иллюстрируются возможные приложения субдифференциального исчисления на примере анализа ядра расширения Обэна v_{Aub} «почти положительной» кооперативной игры v и анти-ядра одного обобщения известной игры «Аэропорт», моделирующей рациональное распределение издержек на строительство взлетнопосадочной полосы (подробности см. в [4,11]). Особого упоминания заслуживает установленное здесь описание ядра расширения Обэна v_{Aub}: это ядро одноэлементно и состоит из вектора Шепли игры v.

2. Основные определения

Для замкнутости изложения начнем с определения нечеткой TU-кооперативной игры n лиц. Напомним сначала определение нечеткой коалиции [8,9]. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – совокупность игроков рассматриваемой игры. Обозначим через I^N единичный гиперкуб, определяемый формулой $I^N := \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbf{R}^N \mid \tau_i \in [0,1],\ i \in N\}$. *Нечеткими коалициями* будем называть элементы множества $\sigma_F := I^N \setminus \{0\}$. Напомним также, что каждая стандартная коалиция $S \subseteq N$ отождествляется с ее индикаторной функцией e_S, определяемой формулой: $(e_S)_i = 1$ для $i \in S$, и $(e_S)_i = 0$ для $i \in N \setminus S$. Далее, для каждой нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$ через $N(\tau)$ будем обозначать ее носитель $N(\tau) := \{i \in N \mid \tau_i > 0\}$. Как обычно, для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^N$ и множества $S \subseteq N$ через $x_S \in \mathbf{R}^S$ будем обозначать сужение x на $S : (x_S)_i = x_i,\ i \in S$. Для сужения $\tau \in \sigma_F$ на ее носитель $N(\tau)$ используется сокращение $\tau^+ := \tau_{N(\tau)}$. Для $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^m$ через $a \cdot b$, как обычно, обозначаем скалярное произведение векторов a и $b : a \cdot b = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b_k$. Наконец, полагая $\mathbf{R}^\tau := \mathbf{R}^{N(\tau)}$, введем следующее определение.

Определение 2.1. *Нечеткой TU-кооперативной игрой n лиц, порождаемой обобщенной характеристической функцией $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$, будем называть многозначное отображение $\tau \mapsto G_v(\tau)$, сопоставляющее каждой нечеткой коалиции τ множество достижимых ею дележей, определяемое формулой $G_v(\tau) = \{x \in \mathbf{R}^\tau \mid \tau^+ \cdot x \leq v(\tau)\}$.*

Итак, согласно определению 2.1 и терминологии, принятой в [9,11], нечеткая TU-кооперативная игра v является нечеткой NTU-игрой специального вида, когда множества дележей, достижимых коалициями τ, представляют собой некоторые полупространства с нормалями τ^+ в соответствующих пространствах $\mathbf{R}^\tau$.

Напомним [3,9] основные понятия работы – определение блокирования в нечеткой игре v и понятие ядра этой игры. Всюду далее, как обычно, дележи, достижимые «большой коалицией» e_N, будем называть дележами игры v.

Определение 2.2. *Нечеткая коалиция* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *блокирует дележ* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *игры* v, *если существует вектор* $y = (y_i)_{i \in N(\tau)} \in \mathbf{R}^\tau$ *такой, что*

$(b.1)$ $\sum\limits_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \leq v(\tau)$;

$(b.2)$ $y_i > x_i,\ i \in N(\tau)$.

Определение 2.3. *Ядром нечеткой кооперативной игры* v *будем называть совокупность всех дележей этой игры, неблокируемых никакой коалицией* $\tau \in \sigma_F$. *Ядро игры* v *будем обозначать через* $C(v)$.

Переходя к формулировке критерия непустоты ядра $C(v)$, напомним [3], что конечное семейство коалиций $\{\tau_k\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F$ называется *F-сбалансированным*, если существуют числа $\lambda_k \geq 0$, $k \in K$, такие, что выполняется равенство $\sum\limits_{k \in K} \lambda_k \tau_k = e_N$. Неотрицательные числа λ_k, фигурирующие в этом равенстве, как и в [1], будем называть *весами*, отвечающими семейству $\{\tau_k\}_{k \in K}$.

Определение 2.4. *Нечеткую TU-кооперативную игру* $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$ *будем называть V-сбалансированной, если для любого F-сбалансированного семейства нечетких коалиций* $\{\tau_k\}_{k \in K}$ *и отвечающих ему весов* λ_k, $k \in K$, *выполняется неравенство* $\sum\limits_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.

Легко убедиться (см., например, [3]), что ядро нечеткой TU-кооперативной игры v имеет вид

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^N \big| x \cdot e_N = v(e_N),\ x \cdot \tau \geq v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}. \tag{2.1}$$

На основании указанного представления в [3] получен следующий критерий непустоты $C(v)$.

Теорема 2.1. *Ядро* $C(v)$ *нечеткой TU-кооперативной игры* v *непусто тогда и только тогда, когда игра* v *является V-сбалансированной.*

Для получения основного результата работы, касающегося ядер и супердифференциалов нечетких игр, полезно использование введенного в [3] так называемого S^*-представления таких игр. Напомним [3], что S^*-представление v^* игры v задается формулой

$$v^*(\tau^*) := \sup\ \{v(t\tau^*)/t \ \big|\ t \in (0, \frac{1}{\|\tau\|_\infty}]\}, \quad \tau^* \in \sigma_F^*, \tag{2.2}$$

где $\|\tau\|_\infty = \max\{|\tau_i| \;\big|\, i \in N\}$ для любого $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$, а симплекс σ^*_F - часть гиперкуба I^N : $\sigma^*_F := \{\tau \in \sigma_F \big| \sum\limits_{i \in N} \tau_i = 1\}$.

В дальнейшем основное внимание уделяется важному классу S^*-регулярных нечетких кооперативных игр.

Определение 2.5. *Игра v называется S^*-регулярной, если ее S^*-представление v^* удовлетворяет следующим условиям:*

$(S^*.1)$ $v^*(\tau^*) < \infty$ для каждого $\tau^* \in \sigma^*_F$,

$(S^*.2)$ $v^*(e_N/n) = v(e_N)/n$.

Как установлено в [3], S^*-регулярность игры v является необходимым условием непустоты ее ядра.

Предложение 2.1. *Если нечеткая TU-кооперативная игра v имеет непустое ядро, то она является S^*-регулярной.*

Еще одно полезное для дальнейшего свойство S^*-представления v^* игры v (Теорема 5.2 из [3]) имеет следующий вид.

Теорема 2.2. *Если нечеткая игра v удовлетворяет условию $(S^*.2)$, то ее ядро $C(v)$ непусто тогда и только тогда, когда непусто ядро $C(v^*)$ ее S^*-представления v^*[1]. При этом имеет место равенство $C(v) = C(v^*)$.*

Наконец, полезный признак непустоты ядра нечеткой кооперативной игры формулируется в терминах ее однородности и «ослабленной» вогнутости.

Теорема 2.3. *Если нечеткая кооперативная игра $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$ является однородной, то для непустоты ядра $C(v)$ необходимо и достаточно, чтобы сужение v на симплекс σ^*_F было вогнутой игрой относительно центра тяжести e^*_N[2].*

---

[1]Напомним [3], что $C(v^*) = \{x \in \mathbf{R}^N \;\big|\; e^*_N \cdot x = v^*(e^*_N),\; \tau^* \cdot x \geq v^*(\tau^*), \quad \tau^* \in \sigma^*_F\}$.

[2]Функция v на σ^*_F называется вогнутой относительно центра тяжести e^*_N[3], если для любого представления e^*_N в виде выпуклой комбинации $e^*_N = \sum\limits_{k \in K} \lambda_k \tau_k, \tau_k \in \sigma^*_F$, $k \in K$, выполняется неравенство $v(e^*_N) \geq \sum\limits_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k)$.

3. О представлении ядра в форме супердифференциала

Переходя к представлению ядра нечеткой игры в форме супердифференциала подходящей модификации этой игры, напомним соответствующие понятия субдифференциального исчисления [5,7,9]. Из соображений удобства в качестве основного объекта вместо субдифференциала используется супердифференциал (отличающийся от субдифференциала лишь «ориентацией» соответствующих неравенств).

Определение 3.1. *Пусть v - нечеткая TU-кооперативная игра n лиц. Будем говорить, что вектор $x \in \mathbf{R}^n$ является суперградиентом игры v в точке $\bar{\tau} \in \sigma_F$, если выполняются соотношения*

$$v(\tau) - v(\bar{\tau}) \leq x \cdot (\tau - \bar{\tau}), \quad \tau \in \sigma_F. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Ясно, что градиент гладкой вогнутой игры v во внутренней точке множества σ_F является ее единственным суперградиентом в этой точке [5,7].

Определение 3.2. *Совокупность всех суперградиентов игры v в точке $\bar{\tau}$ обозначим через $\hat{\partial} v(\bar{\tau})$ и назовем ее супердифференциалом v в этой точке.*

Ниже, как и ранее, используется обозначение $e_N^* = \frac{1}{n} e_N$. Одно из основных понятий работы дается следующим определением.

Определение 3.3. *Супердифференциалом нечеткой TU-кооперативной игры v будем называть супердифференциал v в точке e_N^*.*

Из формулы (3.1) и определения субдифференциала [5,7] вытекает простая формула, связывающая супердифференциал $\partial(v)(\bar{\tau})$ нечеткой игры v в точке $\bar{\tau}$

$$\hat{\partial} v(\bar{\tau}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid v(\tau) - v(\bar{\tau}) \leq x \cdot (\tau - \bar{\tau}), \quad \tau \in \sigma_F\}$$

с ее субдифференциалом

$$\partial(v)(\bar{\tau}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid v(\tau) - v(\bar{\tau}) \geq x \cdot (\tau - \bar{\tau}), \quad \tau \in \sigma_F\}$$

в этой же точке. Именно, справедливы следующие соотношения

$$\hat{\partial} v(\bar{\tau}) = -\partial(-v)(\bar{\tau}), \quad \bar{\tau} \in \sigma_F.$$

Супердифференциал и ядро нечеткой игры v тесно связаны между собой. В частности, непосредственно из их определения и представления ядра $C(v)$ в виде решения системы линейных неравенств (формула (2.1) из предыдущей части; см. также Предложение 3.1 из работы [3]) вытекает следующий простой, но важный результат: если $v(e_N^*) = v(e_N)/n$, то каждый элемент ядра $C(v)$ является суперградиентом игры v в точке e_N^*.

Предложение 3.1. *Для любой нечеткой TU-кооперативной игры v, удовлетворяющей условию $v(e_N^*) = v(e_N)/n$, справедливо вложение $C(v) \subseteq \hat{\partial} v(e_N^*)$.*

Доказательство. Случай $C(v) = \emptyset$ не нуждается в обосновании. Поэтому будем предполагать, что ядро $C(v)$ не пусто. Для проверки вложения $C(v) \subseteq \hat{\partial} u(e_N^*)$ рассмотрим произвольный дележ $x \in C(v)$ и какую-либо нечеткую коалицию τ. Поскольку $x \cdot \tau \geq v(\tau)$, справедливо неравенство $x \cdot \tau - v(e_N^*) \geq v(\tau) - v(e_N^*)$. Отсюда, в силу условия $v(e_N^*) = v(e_N)/n$ и равенства $v(e_N)/n = x(e_N^*)$, вытекающего из включения $x \in C(v)$, получаем искомое соотношение $x \cdot \tau - x(e_N^*) \geq v(\tau) - v(e_N^*)$. Значит, в силу произвольности τ имеем: x принадлежит супердифференциалу $\hat{\partial} v(e_N^*)$, что и требовалось установить. □

Для получения более содержательных утверждений потребуются некоторые дополнительные условия. Напомним [3], что нечеткая игра v называется *однородной*, если $v(t\tau) = tv(\tau)$ для всех $t > 0$ и $\tau \in \sigma_F$ таких, что $t\tau$ принадлежит σ_F. Введем два ослабленных варианта однородности.

Определение 3.4. *Будем говорить, что игра v является слабо однородной, если существуют положительные числа μ, ν такие, что $\mu < 1 < \nu \leq n$ и при этом $v(\mu e_N^*) = \mu v(e_N^*)$ и $v(\nu e_N^*) = \nu v(e_N^*)$.*

Определение 3.5. *Нечеткую игру v будем называть диагонально однородной (D-однородной), если $v(te_N) = tv(e_N)$ для каждого $t \in [0, 1]$.*

Замечание 3.2. Нетрудно проверить, что условие, фигурирующее в определении диагональной однородности, эквивалентно следующему: $v(te_N^*) = tv(e_N^*)$ для каждого $t \in [0, n]$.

Справедливо следующее простое, но важное утверждение.

Теорема 3.1. *Для любой V-сбалансированной слабо однородной нечеткой TU-кооперативной игры v, удовлетворяющей условию $v(e_N^*) = v(e_N)/n$, справедлива формула $C(v) = \hat{\partial} v(e_N^*)$.*

Доказательство. Справедливость соотношения $C(v) \subseteq \hat{\partial} v(e_N^*)$ установлена в Предложении 3.1. Докажем вложение $\hat{\partial} v(e_N^*) \subseteq C(v)$. Пусть x - произвольный элемент из $\hat{\partial} v(e_N^*)$. На основании слабой однородности v существуют числа $\mu \in (0,1)$, $\nu \in (1, n]$ такие, что $v(\mu e_N^*) = \mu v(_N^*)$ и $v(\nu e_N^*) = \nu v(e_N^*)$. Положим $\delta = 1 - \mu$, $\gamma = \nu - 1$. Согласно определению суперградиента в точке e_N^* и с учетом слабой однородности игры v имеем:

$$x \cdot \delta e_N^* = x \cdot e_N^* - x \cdot \mu e_N^* \leq v(e_N^*) - v(\mu e_N^*) = \delta v(e_N^*),$$
$$x \cdot \gamma e_N^* = x \cdot \nu e_N^* - x \cdot e_N^* \geq v(\nu e_N^*) - v(e_N^*) = \gamma v(e_N^*),$$

и, следовательно, ввиду положительности чисел δ, γ получаем соотношение $x \cdot e_N^* = v(e_N^*)$. Значит, ввиду неравенств

$$x \cdot \tau - x \cdot e_N^* \geq v(\tau) - v(e_N^*), \quad \tau \in \sigma_F^*,$$

вытекающих из включения $x \in \hat{\partial} v(e_N^*)$, имеем: $x \cdot \tau \geq v(\tau)$ для всех коалиций $\tau \in \sigma_F$. Для завершения доказательства включения $x \in C(v)$ остается заметить, что из условия $v(e_N^*) = v(e_N)/n$ и вышеустановленного равенства $x \cdot e_N^* = v(e_N^*)$ вытекает соотношение $x \cdot e_N = v(e_N)$. □

Следствие 3.1. *Если $C(v) \neq \emptyset$ и v диагонально однородная игра, то $C(v) = \hat{\partial} v(e_N^*)$.*

Следствие 3.2. *Если $C(v) \neq \emptyset$ и v однородная игра, то $C(v) = \hat{\partial} v(e_N^*)$.*

Замечание 3.3. Нетрудно проверить, что для диагонально однородной игры v (с непустым ядром) ее супердифференциалы во всех точках интервала $(0, ne_N^*) := \{te_N^* \mid t \in (0, n)\}$ совпадают между собой.

Это вытекает из их равенства ядру $C(v)$ (доказательство почти дословно повторяет аргументацию Теоремы 3.1). Поэтому в определении супердифференциала диагонально однородной игры можно вместо e_N^* брать любую другую точку интервала $(0, ne_N^*)$.

Перейдем к рассмотрению общего (не обязательно слабо однородного) случая[3] и покажем, что для любой V-сбалансированной нечеткой TU-кооперативной игры v существует нечеткая игра u, чей супердифференциал в точке e_N^* совпадает с ядром $v : C(v) = \hat{\partial} u(e_N^*)$. При этом один из вариантов игры u можно сконструировать с помощью S^*-представления v^* нечеткой игры v. Именно, по S^*-представлению v^* игры v построим так называемое *однородное расширение* $\hat{v}$ игры v на σ_F и покажем, что это расширение может выполнять роль вышеуказанной игры u.

Определение 3.6. *Однородным расширением игры v называется функция $\hat{v}$, определяемая формулой*

$$\hat{v}(\tau) := tv^*(\tau^*) \quad \textit{при} \quad \tau = t\tau^* \in \sigma_F,\ \tau^* \in \sigma_F^*. \tag{3.2}$$

Замечание 3.4. Анализ основных свойств однородного расширения $\hat{v}$ игры v представляет значительный самостоятельный интерес. Помимо рассматриваемой далее связи между ядрами игр v и $\hat{v}$ отметим здесь важное в теоретическом плане свойство сохранения вогнутости игры v^* : если v^* – вогнутая игра, то таковой является и игра $\hat{v}$. Действительно, пусть v^* – вогнутая игра. Рассмотрим произвольные нечеткие коалиции $\tau^*, \tau'^* \in \sigma_F^*$, $\tau = t\tau^*$, $\tau' = t'\tau'^*$ и неотрицательные числа λ и λ' такие, что $\lambda + \lambda' = 1$. Покажем, что выполняется неравенство $\hat{v}(\lambda\tau + \lambda'\tau') \geq \lambda\hat{v}(\tau) + \lambda'\hat{v}(\tau')$. Для этого, используя формулу (3.2) получаем:

$$\hat{v}(\lambda\tau + \lambda'\tau') = \hat{v}\big((\lambda t + \lambda' t')\big[\frac{\lambda t\tau^* + \lambda' t'\tau'^*}{\lambda t + \lambda' t'}\big]\big) = (\lambda t + \lambda' t')v^*(\bar{\tau}^*), \tag{3.3}$$

где

$$\bar{\tau}^* = \frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda' t'}\tau^* + \frac{\lambda'\tau'}{\lambda t + \lambda' t'}\tau'^*.$$

---

[3]К неоднородным относится, например, известное мультилинейное расширение Оуэна [10].

Ясно, что элемент $\bar{\tau}^*$, будучи выпуклой комбинацией элементов τ^* и τ'^* из σ_F^*, принадлежит симплексу σ_F^*. Поэтому соотношение (3.3) является определяющим для $\hat{v}(\lambda\tau+\lambda'\tau')$. Именно, согласно построению $\hat{v}$ имеем: $\hat{v}(\lambda\tau+\lambda'\tau') = (\lambda t+\lambda' t')v^*(\bar{\tau}^*)$. Отсюда, в силу вогнутости функции v^*, получаем:

$$\hat{v}(\lambda\tau+\lambda'\tau') \geq (\lambda t+\lambda' t')\Big[\frac{\lambda t}{\lambda t+\lambda' t'}v^*(\tau^*) + \frac{\lambda' t'}{\lambda t+\lambda' t'}v^*(\tau'^*)\Big].$$

Следовательно, с учетом соотношений $\hat{v}(t\tau^*) = tv^*(\tau^*)$, $\hat{v}(t'\tau'^*) = t'v^*(\tau'^*)$ и $\tau = t\tau^*$, $\tau' = t'\tau'^*$, получаем искомое: $\hat{v}(\lambda\tau+\lambda'\tau') \geq \lambda\hat{v}(\tau)+\lambda'\hat{v}(\tau')$.

Перейдем к анализу взаимосвязи между ядрами игр v и $\hat{v}$.

Теорема 3.2. *Для каждой функции v игра $\hat{v}$ является однородной. При этом в случае непустоты ядра $C(v)$ выполняется равенство $C(v) = C(\hat{v})$.*

Доказательство. Однородность $\hat{v}$ вытекает непосредственно из построения этой игры. Действительно, пусть $\tau = r\tau^*$, а t – произвольное неотрицательное число. Тогда $t\tau = t'\tau^*$, где $t' = tr$. Следовательно, по определению $\hat{v}$ имеем: $\hat{v}(t\tau) = t'v^*(\tau^*) = trv^*(\tau^*) = t\hat{v}(r\tau^*) = t\hat{v}(\tau)$.

Покажем теперь, что выполняется соотношение $C(\hat{v}) = C(v)$. В силу Теоремы 2.2 (доказывающей, в частности, равенство $C(v) = C(v^*)$ при непустоте $C(v)$), достаточно убедиться в справедливости соотношения $C(\hat{v}) = C(v^*)$.

1) $C(v^*) \subseteq C(\hat{v})$.

Рассмотрим произвольный элемент x из $C(v^*)$. Для него выполняются соотношения

$x\cdot\tau^* \geq v^*(\tau^*), \quad \tau^*\in\sigma_F^*,$

$x\cdot e_N^* = v^*(e_N^*).$

Зафиксируем какую-либо нечеткую коалицию $\tau = t\tau^*\in\sigma_F$. В силу вышеприведенных соотношений имеем: $x\cdot t\tau^* \geq tv^*(\tau^*) = \hat{v}(\tau)$ и, кроме того, $x\cdot e_N = v(e_N) = \hat{v}(e_N)$. Действительно, на основании равенства $v^*(e_N^*) = v(e_N)/n$, вытекающего ввиду Предложения 2.1 из допущения $C(v)\neq\emptyset$, имеем: $\hat{v}(e_N) = nv^*(e_N^*) = v(e_N)$. Значит $x\cdot e_N = \hat{v}(e_N)$. Отсюда, ввиду произвольности $\tau\in\sigma_F$ получаем искомое: $C(v^*)\subseteq C(\hat{v})$.

2) $C(\hat{v}) \subseteq C(v^*)$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in C(\hat{v})$, какую-либо нечеткую коалицию $\tau^* \in \sigma_F^*$ и число $t > 0$ такое, что $\tau = t\tau^*$ принадлежит σ_F. По определению $\hat{v}$ и в силу принадлежности x ядру $C(\hat{v})$, выполняются соотношения

$x \cdot \tau = x \cdot t\tau^* \geq \hat{v}(\tau) = tv^*(\tau^*)$,

$x \cdot e_N = x \cdot ne_N^* = \hat{v}(e_N) = nv^*(e_N^*)$.

Из последних равенств получаем: $x \cdot e_N = nv^*(e_N^*) = v(e_N)$ и, следовательно, $x \cdot e_N^* = v^*(e_N^*)$ (ввиду уже упоминавшегося равенства $v^*(e_N^*) = v(e_N)/n$). Деля первое из вышеуказанных соотношений на t получаем неравенство $x \cdot \tau^* \geq v^*(\tau^*)$, завершающее, в силу произвольности выбора $x \in C(\hat{v})$ и $\tau^* \in \sigma_F^*$, доказательство вложения $C(\hat{v}) \subseteq C(v^*)$. □

Суммируя Следствие 3.2 и Теорему 3.2, получаем основной результат работы.

Теорема 3.3. *Для любой V-сбалансированной нечеткой TU-кооперативной игры v справедлива формула $C(v) = \hat{\partial}\hat{v}(e_N^*)$.*

4. Приложения Теоремы 3.3

Итак, согласно Теореме 3.3, для любой нечеткой кооперативной игры v с побочными платежами, имеющей непустое ядро $C(v)$, существует представление этого ядра в виде супердифференциала $\hat{\partial}u(e_N^*)$ некоторой подходящей нечеткой игры u (в качестве таковой можно взять саму игру v, когда она однородна, или ее однородное расширение $u = \hat{v}$ в противном случае). Как уже отмечалось, наличие такого представления дает возможность широкого использования аппарата субдифференциального исчисления – от вопросов существования неблокируемых дележей для конкретных классов нечетких игр до описания структуры их ядер. Приведем два примера, демонстрирующих указанную возможность. Укажем сразу же, что непустота ядер (антиядер) рассматриваемых в них игр вытекает из их суперлинейности в первом примере и сублинейности во втором (Теорема 2.3 из предыдущего раздела; см. также Следствие 5.3 из работы [3]).

Пример 4.1. Начнем с описания ядра классического расширения Обэна [9] для «почти положительных» кооперативных игр v, характеризующихся тем, что их дивиденды Харшаньи, отвечающие более, чем одноэлементным коалициям, неотрицательны (совокупность таких игр будем обозначать через V_{+2}). Покажем, что ядро расширения Обэна для любой игры $v \in V_{+2}$ состоит из единственного элемента – вектора Шепли $\Phi(v)$ этой игры: $C(v) = \{\Phi(v)\}$.

Перейдем к детальному рассмотрению. Напомним (см., например, [2]), что *дивидендами Харшаньи* обычной игры v называются числа v_T, однозначно определяемые из системы линейных уравнений

$$\sum_{T \subseteq S} v_T = v(S), \quad S \subseteq N$$

(по определению $v(\emptyset) = 0$). *Расширением Обэна* [9] игры v называется нечеткая игра v_{Aub}, определяемая формулой

$$v_{Aub}(\tau) := \sum_{T \subseteq N} v_T \prod_{i \in T} \tau_i^{1/|T|}, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F \tag{4.1}$$

(через $|T|$ обозначается количество элементов конечного множества T). Ясно, что при неотрицательности дивидендов v_T при $|T| \geq 2$ функция v_{Aub} является вогнутой на множестве $I^N = \{x \in \mathbf{R}^N \mid x_i \in [0,1],\ i \in N\}$. Напомним также, что в силу теоремы 25.1 из [7], в случае вогнутости функции f из ее дифференцируемости в точке x^* вытекает равенство $\hat{\partial} f(x^*) = \{\nabla f(x^*)\}$, где $\nabla f(x^*)$ – градиент функции f в точке x^* (т.е. в указанном случае супердифференциал функции f в точке x^* состоит из единственного элемента – градиента $\nabla f(x^*)$). Отсюда, учитывая дифференцируемость расширения v_{Aub} в точке e_N^*, получаем

$$\hat{\partial} v_{Aub}(e_N^*) = \{\nabla v_{Aub}(e_N^*)\}, \quad v \in V_{+2},$$

где, как уже отмечалось, V_{+2} – совокупность всех (обычных) TU - кооперативных игр n лиц v , таких, что $v_T \geq 0$ при $|T| \geq 2$. Следовательно, на основании V-сбалансированности и однородности игры v_{Aub} из Теоремы 3.1 вытекает соотношение

$$C(v_{Aub}) = \{\nabla v_{Aub}(e_N^*)\}, \quad v \in V_{+2}. \tag{4.2}$$

Наконец, согласно одной из известных формул для вектора Шепли $\Phi(v)$ игры v (см., например, [6]), имеем

$$\Phi(v)_i = \sum_{T \in \sigma_i} v_T/|T|, \quad i \in N, \tag{4.3}$$

где $\sigma_i := \{S \subseteq N \mid i \in S\}$, $i \in N$. Используя формулу (4.3) получаем, что ядро $C(v_{Aub})$ расширения Обэна для любой игры $v \in V_{+2}$ состоит из единственного элемента – вектора Шепли этой игры

$$C(v_{Aub}) = \{\Phi(v)\}, \quad v \in V_{+2}. \tag{4.4}$$

Действительно, вычисляя частные производные функции v_{Aub}, определяемой формулой (4.1), в точке e_N^*, имеем

$$\frac{\partial v_{Aub}}{\partial \tau_i}(e_N^*) = \sum_{T \in \sigma_i} \frac{1}{|T|} v_T \big[\big(\prod_{j \in T \setminus i} \tau_j^{1/|T|} \big) \tau_i^{(1-|T|)/|T|} \big](e_N^*) =$$
$$\sum_{T \in \sigma_i} \frac{1}{|T|} v_T \big[\big(n^{(1-|T|)/|T|} \big) n^{(|T|-1)/|T|} \big] = \sum_{T \in \sigma_i} \frac{v_T}{|T|},$$

что, в силу формулы (4.3) и дает требуемое равенство (4.4).

Суммируя вышесказанное, получаем следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть дивиденды Харшаньи кооперативной игры $v : S \to \mathbf{R}$, $S \subseteq N$, отвечающие коалициям с двумя и большим числом участников, неотрицательны. Тогда ядро расширения Обэна v_{Aub} этой игры является одноэлементным и состоит из ее вектора Шепли: $C(v_{Aub}) = \{\Phi(v)\}$.*

Пример 4.2. В заключение дадим описание анти-ядер нечетких игр типа игры «Аэропорт» [4,11], возникающих в рамках кооперативного анализа рационального распределения издержек при реализации совместных проектов. Напомним надлежащие аналоги классического блокирования и ядра для таких игр и укажем получающуюся модификацию представления (2.1).

Определение 4.1. *Нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ a-блокирует дележ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_v(e_N)$, если существует $y = (y_i)_{i \in N(\tau)} \in \mathbf{R}^\tau$ такой, что*

$(ab.1)$ $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \geq v(\tau)$;

$(ab.2)$ $y_i < x_i$, $i \in N(\tau)$.

Определение 4.2. *Анти-ядром (кратко, a-ядром) нечеткой кооперативной игры v будем называть совокупность всех дележей этой* *игры, которые не являются а-блокируемыми никакой коалицией* $\tau \in \sigma_F$. *Анти-ядро игры* v *будем обозначать через* $C^-(v)$.

Легко убедиться, что a-ядро нечеткой TU-кооперативной игры v имеет вид

$$C^-(v) = \{x \in \mathbf{R}^N \big| x \cdot e_N = v(e_N),\ x \cdot \tau \leq v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}.$$

Кроме того, связь a-ядра с обычным ядром дается формулой

$$C^-(v) = -C(-v), \quad v \in V.$$

Приведем пример приложения Теоремы 3.3 и одного известного результата субдифференциального исчисления к описанию анти-ядра так называемой обобщенной игры «Аэропорт» v_A. Последняя определяется конечным набором векторов $A = \{a^k\}_{k \in K} \subseteq \mathbf{R}^n$ по формуле

$$v_A(\tau) := \max_{k \in K} a^k \cdot \tau, \quad \tau \in \sigma_F$$

(нечеткий аналог классической игры «Аэропорт» [4,11] определяемой параметрами $K = \{1, \ldots, n\}$, $a^k = c_k e^k$, $k \in K$, где векторы e^k являются k-ми единичными ортами пространства $\mathbf{R}^n$, а c_k - положительные числа). С учетом однородности игры v_A, на основании Теоремы 3.3 и известного результата субдифференциального исчисления (субдифференциальная форма теоремы об очистке из [5], стр.50) получаем следующее описание анти-ядра игры v_A.

Предложение 4.2. *Для любого конечного набора векторов* $A = \{a^k\}_{k \in K}$ *справедлива формула*

$$C^-(v_A) = \mathrm{co}\ \{a^r \mid r \in R(N)\},$$

где $R(N) := \{r \in K \mid a^r \cdot e_N = \max_{k \in K} a^k \cdot e_N\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарева О.Н. *Теория ядра для игры n лиц* // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон. 1962. Вып. 13(3). С. 141–142.

2. Васильев В.А. *Крайние точки многогранника Вебера* // Дискретный анализ и исследование операций. 2003. Серия 1, вып. 10(2). С. 17–55.

3. Васильев В.А. *Аналог теоремы Бондаревой-Шепли I. Непустота ядра нечеткой игры* // Математическая теория игр и ее приложения. 2017. Т. 9, вып. 1. С. 3–26.

4. Васильев В.А. *Аналог теоремы Бондаревой-Шепли II. Примеры V-сбалансированных нечетких игр* // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, вып. 2. С. 3–18.

5. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ и его приложения.* М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

6. Розенмюллер И. *Кооперативные игры и рынки.* М.: Мир, 1974.

7. Рокафеллар Р.Т. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

8. Экланд И. *Элементы математической экономики.* М.: Мир, 1983.

9. Aubin J.-P. *Optima and equilibria.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

10. Owen G. *Multilinear extensions of games* // Journal of Management Sciences. 1972. Vol. 18(5). P. 64–79.

11. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Boston/Dordrecht/London: Kluver Academic Publishers, 2003.

THE CORE AND SUPERDIFFERENTIAL OF A FUZZY TU-COOPERATIVE GAME

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Dr.Sc., professor (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: In the paper, we consider conditions providing coincidence of the cores and superdifferentials of fuzzy cooperative games with side payments. It turned out that one of the most simple sufficient conditions consists of weak homogeneity. Moreover, by applying so-called S^*-representation of a fuzzy game introduced by the author, we show that for any v with nonempty core $C(v)$ there exists some game u such that $C(v)$ coincides with the superdifferential of u. By applying subdifferential calculus we describe a structure of the core for both classic fuzzy extensions of the ordinary cooperative game (e.g., Aubin and Owen extensions) and for some new continuations, like Harsanyi extensions and generalized Airport game.

Keywords: fuzzy cooperative game, S^*-representation, superdifferential, the core of a fuzzy game, weak homogeneity.