

УДК 517.977.8

ББК 22.17

МОДЕЛЬ КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ОБНОВЛЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

ОВАНЕС Л. ПЕТРОСЯН*

Школа Автоматики

Университет Циндао

266071, Китай, Циндао, Нингся Роуд, 308

Санкт-Петербургский Государственный университет

198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru

АННА В. ТУР**

ЦЗЭЯН ВАН

Санкт-Петербургский Государственный университет

198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

e-mail: tur.anna.v@gmail.com, wangzeyang0504@outlook.com

ХУАВЕЙ ГАО ***

Школа математики и статистики

Университет Циндао

266071, Китай, Циндао, Нингся Роад, 308

e-mail: gaohongwei@qdu.edu.cn

©2020 О.Л. Петросян, А.В. Тур, Ц. Ван, Х. Гао

* Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных научных исследований 18-00-00727 (18-00-00725); работа поддержана Международной программой обмена кандидатами наук Китая

** Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных научных исследований 18-00-00727 (18-00-00725)

*** Работа поддержана Государственным фондом естественных наук Китая (71571108)

В работе рассмотрен и описан класс кооперативных дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации. Подобный класс дифференциальных игр является новым, поскольку на данный момент изучались только модели неантагонистических игр с непрерывным обновлением информации. В данной работе приводится описание процесса построения кооперативных стратегий, кооперативной траектории, характеристической функции и кооперативного решения в игре с непрерывным обновлением информации. Рассматривается кооперативная постановка модели выработки ограниченного ресурса с обновлением информации. В явном виде строятся оптимальные стратегии и характеристическая функция, определяется способ распределения кооперативного выигрыша между игроками. В качестве принципа оптимальности используется вектор Шепли. Приведены результаты численного моделирования в среде Matlab.

Ключевые слова: дифференциальные игры, непрерывное обновление информации, кооперативные игры.

Поступила в редакцию: 25.12.19 *После доработки:* 17.05.20 *Принята к публикации:* 25.06.20

1. Введение

Теория дифференциальных игр сформировалась как отдельная часть общей теории игр в 1950-х годах. Ее изучение началось с игр с нулевой суммой или антагонистических игр [3], [6], [12], [28], [25]. Мотивацией для изучения антагонистических дифференциальных игр были проблемы, связанные с участием нескольких игроков, имеющих разные цели или функции выигрыша и, следовательно, действующих индивидуально. В качестве принципа оптимальности в антагонистических дифференциальных играх в основном используется равновесие по Нэшу в программных или позиционных стратегиях [1], [4], [10], [11].

Кооперативные модели дифференциальных игр также представляют некоторый интерес, они были рассмотрены в работах [22], [26], [32], [34]. Теория кооперативных дифференциальных игр изучает проблемы построения условий кооперативного соглашения, в частности

кооперативных стратегий, соответствующей траектории, совместного кооперативного выигрыша, правил распределения совместного выигрыша между игроками и свойств динамической устойчивости. Проблема динамической неустойчивости арбитражного решения Нэша в динамической модели переговорной игры рассмотрена в работе [9]. Петросян Л.А. впервые математически сформулировал понятие динамической устойчивости [23] и сильной динамической устойчивости в кооперативных дифференциальных играх [24]. В целях предотвращения нарушения условий кооперативного соглашения или динамической устойчивости, в [21] была предложена схема выплат, которая называется процедурой распределения дележа (ПРД).

Большинство реальных конфликтных процессов непрерывно эволюционируют во времени, а их участники постоянно получают обновленную информацию и адаптируются. Для такого рода процессов был предложен подход, позволяющий строить более реалистичные модели, а именно игры с динамическим обновлением [17], [19] и игры с непрерывным обновлением информации [13], [20].

Классические модели дифференциальных игр не учитывают тот факт, что во многих реальных процессах игроки в начальный момент времени не имеют всей информации об игре. Таким образом, существующие подходы не могут быть непосредственно использованы для построения достаточно большого спектра теоретико-игровых моделей реальной жизни.

В данной работе впервые представлен подход непрерывного обновления информации для кооперативной постановки и исследован вопрос построения кооперативных стратегий и классических кооперативных решений для игровых моделей с непрерывным обновлением информации (рис. 1). В игровых моделях с непрерывным обновлением информации предполагается, что игроки

1. имеют информацию об уравнениях движения и функциях выигрыша на усеченном временном интервале с продолжительностью \bar{T} , которая называется информационным горизонтом,
2. получают обновленную информацию об уравнениях движения и функциях выигрыша и как результат постоянно адаптируются к обновленной информации.

Очевидно, что трудно получить кооперативные стратегии из-за

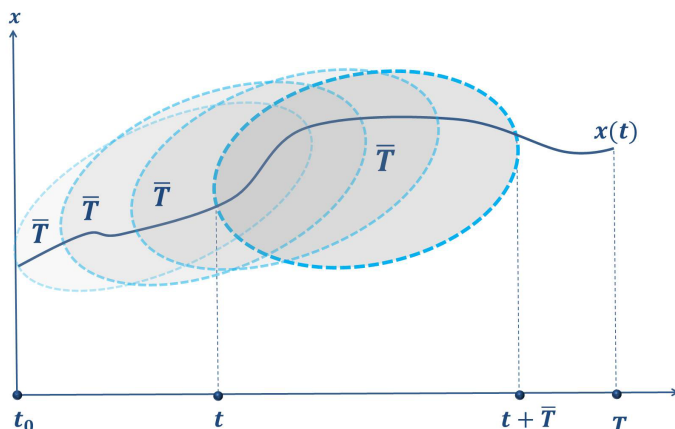


Рисунок 1. Каждый овал показывает информацию доступную или используемую игроками в момент времени t , а именно информацию на интервале $[t, t + \bar{T}]$, где \bar{T} – это информационный горизонт.

отсутствия фундаментального подхода к решению задач управления с подвижным информационным горизонтом. Классические методы, такие как динамическое программирование и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, не позволяют непосредственно построить оптимальное управление в задачах с подвижным информационным горизонтом.

Помимо задачи построения кооперативных стратегий и кооперативной траектории для класса игр с непрерывным обновлением, существует также задача определения характеристической функции, определения кооперативного решения (правила распределения выигрыша в кооперативных играх с трансферабельными выигрышами и играми переговоров), исследования свойства динамической устойчивости в классе игр с непрерывным обновлением информации.

Кооперативная постановка игровых моделей с обновлением информации до сих пор изучалась только для класса кооперативных игр с динамическим обновлением [7], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [33], [31], где авторы заложили основу для дальнейшего изучения класса игр с динамическим обновлением информации. Предполагается, что информация об уравнениях движения и функциях выигрыша обновляется в дискретные моменты времени, а интервал, на котором игроки имеют или используют информацию, определяется значением

информационного горизонта.

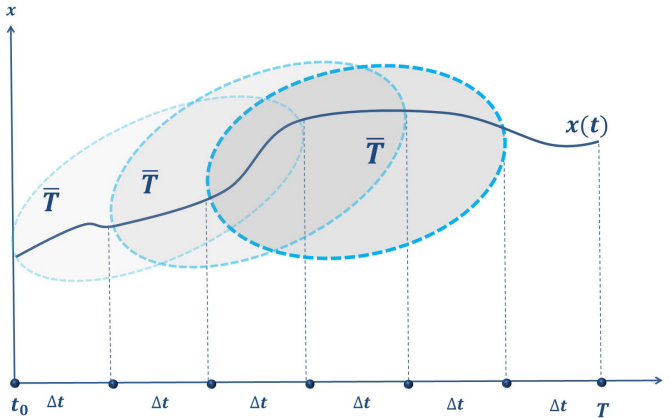


Рисунок 2. Каждый овал показывает информацию доступную или используемую игроками в момент времени t , а именно информацию на интервале $[t_0 + j\Delta t, t_0 + (j + 1)\Delta t]$, а именно $[t_0 + j\Delta t, t_0 + j\Delta t + \bar{T}]$, $j = 0, \dots, l$, $l = \frac{T-t_0}{\Delta t}$.

В первой работе [17], посвященной этому классу игр, была построена модель кооперативной дифференциальной игры с заданной продолжительностью и динамическим обновлением информации (рис.2). Введено понятие усеченной подыгры и определены результирующие кооперативные стратегии, условно кооперативная траектория, результирующее кооперативное решение, доказана теорема, показывающая, что произвольное результирующее кооперативное решение является Δt динамически устойчивым в этом классе игр. Работа [19] посвящена играм с динамическим обновлением информации, стохастическим прогнозом и динамической адаптацией. В работе [7] изучена зависимость выигрышей игроков от величины информационного горизонта изучена. Работы [15] и [16] посвящены применению игровых моделей с динамическим обновлением к олигопольной модели нефтяного рынка. Численное моделирование проводилось в среде Matlab с использованием данных по ценам на нефть марки Brent и Light. В работе [18] представленный выше подход был применен к игровым моделям с бесконечной продолжительностью. Работа [31] посвящена исследованию дискретно-временной динамической модели обновления рекламы. Работа [14] посвящена исследованию свойств коопера-

тивного решения в классе игровых моделей с динамическим обновлением информации. Работа [33] посвящена построению специального класса уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана для неантагонистической динамической игровой модели, определяющей различные типы информационной структуры. Полученные результаты могут быть использованы для построения моделей, где игроки используют различные информационные структуры.

Класс неантагонистических дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации рассматривался в работах [13], [20], где предполагается, что процесс обновления развивается непрерывно во времени. В работе [13] был рассмотрен класс линейно-квадратичных дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации и полученная явная форма равновесия Нэша. В статье [20] система уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана построена для равновесия по Нэшу в игре с непрерывным обновлением информации.

Данная работа посвящена изучению кооперативных дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации. В моделях такого типа рассмотрены проблемы построения кооперативных стратегий, кооперативного решения, характеристической функции, исследовано свойство динамической устойчивости кооперативного решения. Теоретические результаты проиллюстрированы на примере модели разработки невозобновляемого ресурса [5].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана исходная модель дифференциальной игры. В разделе 3 представлена модель дифференциальной игры с непрерывным обновлением информации. Раздел 4 посвящен описанию кооперативных стратегий в игре с непрерывным обновлением информации. В разделе 5 представлено понятие характеристической функции с непрерывным обновлением, получены соответствующие теоретические результаты. Кооперативное решение для игр с непрерывным обновлением информации обсуждается в разделе 6. В 7 предложенный подход решения кооперативной игры с непрерывным обновлением применяется к модели игры невозобновляемого ресурса, в разделе 8 приведены выводы.

2. Модель исходной игры

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с предписанной продолжительностью $T - t_0$, начинающуюся в момент време-

ни t_0 из начального состояния x_0 . Динамика игры задается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x \in R^n, \quad u_i \in U_i \subset \text{comp}R^k, \quad t \in [t_0, T], \quad i = \overline{1, n}, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Предполагается, что для системы (2.1) выполнены условия существования, единственности и продолжительности решения $x(t)$ для любых допустимых измеримых управлений $u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)$. Обозначим множество игроков через $N = \{1, \dots, n\}$. Синтезирующее управление $u_i(t, x)$ – стратегия игрока $i \in N$.

Выигрыш игрока i имеет вид:

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x(\tau), u_1(\tau, x), \dots, u_n(\tau, x)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.2}$$

где $h_i(x, u_1, \dots, u_n)$, $i = \overline{1, n}$ и $f(x, u_1, \dots, u_n)$ – интегрируемые функции, $x(t)$ – решение задачи Коши для системы (2.1), замкнутой управлением $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$.

2.1. Кооперативная дифференциальная игра

Предположим, что игроки имеют возможность кооперироваться с целью получения максимального суммарного выигрыша. Задание принципа оптимальности в кооперативной игре с трансферабельными выигрышами сводится к решению двух задач:

1. Построение набора стратегий игроков, максимизирующего суммарный выигрыш. Такие стратегии $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ будем называть оптимальными кооперативными стратегиями, а соответствующую траекторию $x^*(t)$ – кооперативной траекторией.
2. Определение правила распределения между игроками суммарного выигрыша, соответствующего оптимальным кооперативным стратегиям $u^*(t, x)$ и кооперативной траектории $x^*(t)$.

Пусть $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ набор оптимальных программных стратегий игроков, т.е. набор, максимизирующий суммарный выигрыш

игроков:

$$u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*) = \arg \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n). \quad (2.3)$$

Предполагается, что максимум в (2.3) достигается в классе допустимых стратегий.

Правило распределения суммарного выигрыша между игроками обычно определяется при помощи использования характеристической функции, которая показывает «силу» каждой коалиции $S \subset N$ и позволяет определить «вклад» игрока в каждую коалицию. Предположим, что в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ характеристическая функция $V(S; x_0, T - t_0)$, $S \subseteq N$ построена любым из известных способом (например, как в [8]). Пусть для этой функции выполняется свойство супераддитивности:

$$\begin{aligned} V(S_1 \cup S_2; x_0, T - t_0) &\geq V(S_1; x_0, T - t_0) + V(S_2; x_0, T - t_0), \\ \forall S_1, S_2 \subseteq N, S_1 \cap S_2 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Обозначим через $L(x_0, T - t_0)$ множество дележей в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$:

$$\begin{aligned} L(x_0, T - t_0) &= \left\{ \xi(x_0, T - t_0) = (\xi_1(x_0, T - t_0), \dots, \xi_n(x_0, T - t_0)) : \right. \\ &\quad \sum_{i=1}^n \xi_i(x_0, T - t_0) = V(N; x_0, T - t_0), \\ &\quad \left. \xi_i(x_0, T - t_0) \geq V(\{i\}; x_0, T - t_0), i \in N \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $V(\{i\}; x_0, T - t_0)$ – значение характеристической функции $V(S; x_0, T - t_0)$ для одноэлементной коалиции $S = \{i\}$.

Пусть $M(x_0, T - t_0) \subset L(x_0, T - t_0)$ – некоторый принцип оптимальности (кооперативное решение) в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Для построения более реалистичной модели необходимо учесть возможность игроков в любой момент времени $t \in [t_0, T]$ изменить выбранный принцип оптимальности и использовать новое правило распределения кооперативного выигрыша. Для этого введем в рассмотрения семейство подыгр вдоль кооперативной траектории. Для

любого момента времени $t \in [t_0, T]$ через $\Gamma(x^*(t), T - t)$ обозначим подыгру, начинающуюся в момент $t \in [t_0, T]$ из состояния $x^*(t)$.

Пусть $V(S; x^*(t), T - t)$, $S \subseteq N$ ($V(S; x^*(t), 0) = 0$) – супераддитивная характеристическая функция в подыгре $\Gamma(x^*(t), T - t)$, заданная тем же способом, что и характеристическая функция в исходной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Дележ в подыгре $\Gamma(x^*(t), T - t)$ обозначим через $\xi(x^*(t), T - t)$. $L(x^*(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$ – множество всех возможных дележей в подыгре $\Gamma(x^*(t), T - t)$:

$$L(x^*(t), T - t) = \left\{ \xi(x^*(t), T - t) = (\xi_1(x^*(t), T - t), \dots, \xi_n(x^*(t), T - t)) : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \xi_i(x^*(t), T - t) = V(N; x^*(t), T - t), \right. \\ \left. \xi_i(x^*(t), T - t) \geq V(\{i\}; x^*(t), T - t), i \in N \right\}. \quad (2.5)$$

Выполнение свойства супераддитивности (2.4) для характеристической функции $V(S; x^*(t), T - t)$ гарантирует непустоту множества дележей $L(x^*(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$. Принцип оптимальности (кооперативное решение) в подыгре $\Gamma(x^*(t), T - t)$ обозначим через $M(x^*(t), T - t)$.

3. Дифференциальная игра с непрерывным обновлением информации

Рассмотрим теперь дифференциальную игру n лиц $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ с предписанной продолжительностью $T - t_0$, начинающуюся в момент времени t_0 из начального состояния x_0 . Динамика игры задается уравнением (2.1), а выигрыши игроков имеют вид (2.2). Отличие от исходной игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ состоит в том, что в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроки обладают информацией лишь на период времени длиной \bar{T} и при выборе стратегий в этот момент времени ориентируются на выигрыши, которые они могут получить за промежуток $[t, t + \bar{T}]$.

Каждому моменту времени $t \in [t_0, T]$ поставим в соответствие вспомогательную подыгру $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$, которая начинается в момент t из состояния x и имеет продолжительность \bar{T} . Опишем динамику

и выигрыши игроков для вспомогательных подыгр. Для начального момента времени t_0 рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\tilde{\Gamma}^{t_0}(x_0, \bar{T})$, заданную на промежутке $[t_0, t_0 + \bar{T}]$, где $0 < \bar{T} < T$.

Динамика задается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{t_0}(s) &= f(s, x_{t_0}, u^{t_0}), \\ x_{t_0}(t_0) &= x_0, \\ x_{t_0} \in \mathbb{R}^l, \quad u^{t_0} &= (u_1^{t_0}, \dots, u_n^{t_0}), \quad u_i^{t_0} = u_i^{t_0}(s, x) \in U_i \subset \text{comp} \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выигрыш игрока i определяется следующим образом:

$$K_i^{t_0}(x_0, t_0, \bar{T}; u^{t_0}) = \int_{t_0}^{t_0 + \bar{T}} h^i[s, x_{t_0}(s), u^{t_0}(s, x)] ds, \quad i \in N, \quad (3.2)$$

где $x_{t_0}(s)$, $u^{t_0}(s, x)$ – траектория и набор стратегий в игре $\tilde{\Gamma}^{t_0}(x_0, \bar{T})$.

Для каждого момента времени $t \in (t_0, T]$ поставим в соответствие игру $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$, заданную на интервале $[t, t + \bar{T}]$, с уравнениями динамики вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(s) &= f(s, x_t, u^t), \\ x_t(t) &= x, \\ x_t \in \mathbb{R}^l, \quad u^t &= (u_1^t, \dots, u_n^t), \quad u_i^t = u_i^t(s, x) \in U_i \subset \text{comp} \mathbb{R}^k, \quad s \in [t, t + \bar{T}]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выигрыш игрока i в подыгре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$ имеет вид:

$$K_i^t(x, t; u^t) = \int_t^{t + \bar{T}} h^i[s, x_t(s), u^t(s, x)] ds, \quad i \in N, \quad (3.4)$$

где $x_t(s)$, $u^t(s, x)$ – траектория и набор стратегий в игре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$.

Дифференциальная игра с непрерывным обновлением развивается во времени по следующему правилу:

Непрерывно во времени в каждый текущий момент $t \in [t_0, T]$ игроки получают информацию об уравнении движения и функциях выигрышей игроков в игре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$. Игроки выбирают стратегии $\tilde{u}_i^t(s, x)$, $s \in [t, t + \bar{T}]$ оптимальные в рассматриваемой подыгре. Полученный набор стратегий используется для нахождения оптимальных стратегий $\bar{u}(t, x)$ в дифференциальной игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ с непрерывным обновлением информации, которые имеют вид:

$$\bar{u}(t, x) = \tilde{u}^t(s, x)|_{s=t}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.5)$$

Тогда, если набор стратегий (3.5) в игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ с непрерывным обновлением информации является допустимым, траекторию $x(t)$ в этой игре получаем из системы дифференциальных уравнений (2.1), замкнутой этим набором стратегий.

4. Кооперативные стратегии в игре с непрерывным обновлением информации.

В рамках подхода с непрерывным обновлением информации необходимо построить модель поведения игроков в случае, когда информация о процессе обновляется непрерывно. В данной работе мы рассматриваем кооперативную постановку и важным элементом этой модели являются кооперативные стратегии с непрерывным обновлением информации:

- для каждого фиксированного текущего момента времени $t \in [t_0, T]$ кооперативные стратегии в игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ $\bar{u}^*(t, x) = (\bar{u}_1^*(t, x), \dots, \bar{u}_n^*(t, x))$ совпадают с кооперативными стратегиями в игре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$, определенными на интервале $[t, t + \bar{T}]$ в текущий момент времени t .

Из-за особенностей построения игры с непрерывным обновлением информации использование классических подходов для определения кооперативных стратегий подобного типа не представляется возможным. Продемонстрируем это на следующем теоретическом примере, рассмотрим два временных интервала $[t, t + \bar{T}]$ и $[t + \epsilon, t + \bar{T} + \epsilon]$, $\epsilon \ll \bar{T}$. Тогда в соответствии в видом кооперативных стратегий:

- кооперативные стратегии с непрерывным обновлением информации $\bar{u}^*(t, x)$ в момент времени t совпадают с кооперативными стратегиями в дифференциальной игре, определенной на интервале $[t, t + \bar{T}]$,
- $u^*(t + \epsilon, x)$ в момент времени $t + \epsilon$ должны совпадать с кооперативными стратегиями в игре определенной на интервале $[t + \epsilon, t + \epsilon + \bar{T}]$.

Для того, чтобы построить подобные стратегии нам необходимо определить понятие обобщенных кооперативных стратегий с непрерывным обновлением информации:

$$\tilde{u}^*(t, s, x) = (\tilde{u}_1^*(t, s, x), \dots, \tilde{u}_n^*(t, s, x)), \quad t \in [t_0, T], \quad s \in [t, t + \bar{T}], \quad (4.1)$$

которые мы будем использовать далее для построения стратегий $\bar{u}^*(t, x)$. Стратегии $\tilde{u}^*(t, s, x) = (\tilde{u}_1^*(t, s, x), \dots, \tilde{u}_n^*(t, s, x))$ для каждого фиксированного текущего момента времени t определяются следующим образом:

$$\tilde{u}^*(t, s, x) = (\tilde{u}_1^*(t, s, x), \dots, \tilde{u}_n^*(t, s, x)) = \arg \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i^t(x, t; u^t(s, x)), \quad (4.2)$$

где для каждого фиксированного момента времени t оптимизационная задача (4.2) строится на основе информации доступной игрокам в текущий момент времени t , т.е. на интервале $[t, t + \bar{T}]$. Предположим, что максимум в (4.2) достигается на множестве допустимых стратегий $\tilde{u}^*(t, s, x)$ для фиксированного t .

Определение 4.1. Стратегии $\tilde{u}^*(t, s, x) = (\tilde{u}_1^*(t, s, x), \dots, \tilde{u}_n^*(t, s, x))$ называются обобщенными кооперативными стратегиями с непрерывным обновлением информации, если для любого фиксированного $t \in [t_0, T]$ стратегии $\tilde{u}^*(t, s, x)$ являются оптимальными кооперативными в игре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$.

Важно заметить, что обобщенные кооперативные стратегии $\tilde{u}^*(t, s, x)$ для фиксированного момента времени t являются функцией параметров s и x , где параметр s определен на интервале $[t, t + \bar{T}]$. Параметр s показывает «воображаемое» время, которое используется для моделирования развития процесса от текущего момента времени t до $t + \bar{T}$. Используя обобщенные кооперативные стратегии представляется возможным определить кооперативные стратегии, которые реализуются в игре с непрерывным обновлением информации.

Определение 4.2. Набор стратегий $\bar{u}^*(t, x)$ называются кооперативными стратегиями с непрерывным обновлением информации, если они определены следующим образом:

$$\bar{u}^*(t, x) = \tilde{u}^*(t, s, x)|_{s=t} = (\tilde{u}_1^*(t, s, x)|_{s=t}, \dots, \tilde{u}_n^*(t, s, x)|_{s=t}), \quad t \in [t_0, T], \quad (4.3)$$

где стратегии $\tilde{u}^*(t, s, x)$ являются обобщенными кооперативными стратегиями, заданными в Определении 4.1.

В отличие от обобщенных кооперативных стратегий, $\bar{u}^*(t, x)$ не содержит кооперативные стратегии для каждого $s \in [t, t + \bar{T}]$, только для случая $s = t$. Набор стратегий $\bar{u}^*(t, x)$ содержит только стратегии игроков, которые они реализуют в соответствии с процедурой, описанной в разделе 3, т.е. в рамках непрерывного обновления информации, когда $s = t$. Стратегии $\bar{u}^*(t, x)$ будут использоваться в качестве кооперативных для класса игр с непрерывным обновлением информации. Пусть $\bar{x}^*(t)$ – оптимальная кооперативная траектория в игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$, т.е. стратегия, которая реализуется при замыкании системы (2.1) стратегиями $\bar{u}^*(t, x)$.

5. Характеристическая функция в игре с непрерывным обновлением информации.

Для того, чтобы определить характеристическую функцию в игре с непрерывным обновлением информации определим понятие характеристической функции $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s)$, $S \subseteq N$, заданной для каждой подыгры $\tilde{\Gamma}^t(\tilde{x}_t^*(s), \bar{T})$, для каждого текущего момента времени $t \in [t_0, T]$ и параметра $s \in [t, \bar{T} + t]$. Здесь $\tilde{x}_t^*(s)$ – оптимальная кооперативная траектория в подыгре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$. Предположим, что $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s)$, $S \subseteq N$ построена при использовании некоторого классического метода (например, как в работе [8]). Предположим, что условия супераддитивности выполнены:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^t(S_1 \cup S_2; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) &\geq \tilde{V}^t(S_1; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) + \\ &+ \tilde{V}^t(S_2; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s), \forall S_1, S_2 \subseteq N, S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Предположим, что функция $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s)$, $S \subseteq N$ является непрерывно дифференцируемой по параметру $s \in [t, \bar{T} + t]$ и интегрируемой по $t \in [t_0, T]$. В игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ определим характеристическую функцию с непрерывным обновлением информации $\bar{V}(S; \bar{x}^*(t), t)$ следующим образом:

Определение 5.1. Функция $\bar{V}(S; \bar{x}^*(t), T - t)$, $t \in [t_0, T]$, $S \subseteq N$ является характеристической функцией с непрерывным обновлением

информации, если она имеет следующий вид:

$$\bar{V}(S; x^*(t), T - t) = \int_t^T -\frac{d}{ds} \tilde{V}^\tau(S; \tilde{x}_\tau^*(s), \tau + \bar{T} - s)|_{s=\tau} d\tau, \quad (5.1)$$

$$t \in [t_0, T], \quad S \subseteq N, \quad (5.2)$$

где $\tilde{V}^\tau(S; \tilde{x}_\tau^*(s), \tau + \bar{T} - s)$, $s \in [t, \bar{T} + t]$, $t \in [t_0, T]$, $S \subseteq N$ - это характеристическая функция в подыгре $\tilde{\Gamma}^\tau(\tilde{x}_\tau^*(s), \tau + \bar{T} - s)$, начинающейся из точки $\tilde{x}_\tau^*(s)$, с продолжительностью $\tau + \bar{T} - s$, а $\tilde{x}_\tau^*(s)$ - оптимальная кооперативная траектория в подыгре $\tilde{\Gamma}^\tau(x, \bar{T})$.

Здесь важно заметить, что поскольку подыгры рассматриваются вдоль оптимальной траектории игры $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$, для траекторий $\tilde{x}_t^*(s)$ выполняется $\tilde{x}_t^*(t) = \bar{x}^*(t)$.

Покажем, что найденное согласно (5.1) значение $\bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t)$ действительно является суммарным выигрышем игроков, вдоль оптимальной кооперативной траектории $\bar{x}^*(t)$, при использовании кооперативных стратегий (4.3) с непрерывным обновлением информации.

Предложение 5.1. Значение $\bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t)$ характеристической функции, построенной по правилу (5.1), для любого $t \in [t_0, T]$ имеет вид:

$$\bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t) = \sum_{i \in N} K_i(\bar{x}^*(t), T - t; \bar{u}_1^*(t, x), \dots, \bar{u}_n^*(t, x)). \quad (5.3)$$

Для доказательства выпишем определение характеристической функции с непрерывным обновлением информации:

$$\begin{aligned} \bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t) &= \int_t^T -\frac{d}{ds} \tilde{V}^\tau(N; \tilde{x}_\tau^*(s), \tau + \bar{T} - s)|_{s=\tau} d\tau = \\ &= \int_t^T -\frac{d}{ds} \left(\int_s^{\tau + \bar{T}} \sum_{i \in N} h_i(\tilde{x}_\tau^*, \tilde{u}_1^*(\tau, l, x), \dots, \tilde{u}_n^*(\tau, l, x)) dl \right) |_{s=\tau} d\tau = \\ &= \int_t^T \sum_{i \in N} h_i(\tilde{x}_\tau^*, \tilde{u}_1^*(\tau, s, x), \dots, \tilde{u}_n^*(\tau, s, x)) |_{s=\tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$\int_t^T \sum_{i \in N} h_i(\bar{x}^*, \bar{u}_1^*(\tau, x), \dots, \bar{u}_n^*(\tau, x)) d\tau = \sum_{i \in N} K_i(\bar{x}^*(t), T - t; \bar{u}_1^*(t, x), \dots, \bar{u}_n^*(t, x)). \quad (5.4)$$

6. Кооперативное решение в игре с непрерывным обновлением информации.

Если построенная характеристическая функция в игре $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$ с непрерывным обновлением информации окажется супераддитивной, то далее можно воспользоваться любым из известных принципов оптимальности для кооперативных игр.

Пусть $\bar{\xi}(\bar{x}^*(t), T - t)$ – дележ в игре с непрерывным обновлением информации вдоль кооперативной траектории с непрерывным обновлением информации $\bar{x}^*(t)$, $t \in [t_0, T]$. По аналогии с (2.4), (6.1) зададим множество всевозможных дележей игры $\bar{\Gamma}(x_0, T - t_0, \bar{T})$:

$$\begin{aligned} \bar{L}(\bar{x}^*(t), T - t) = \left\{ \bar{\xi}(\bar{x}^*(t), T - t) = (\bar{\xi}_1(\bar{x}^*(t), T - t), \dots, \bar{\xi}_n(\bar{x}^*(t), T - t)) : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i(\bar{x}^*(t), T - t) = \bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t), \right. \\ \left. \bar{\xi}_i(\bar{x}^*(t), t, T) \geq \bar{V}(\{i\}; \bar{x}^*(t), T - t), i \in N \right\}. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Кооперативное решение подыгры игры с непрерывным обновлением информации обозначается соответственно $\bar{M}(\bar{x}^*(t), T - t)$.

7. Модель разработки невозобновляемого ресурса с непрерывным обновлением информации

Рассмотрим дифференциальную игру с непрерывным обновлением информации, моделирующую процесс разработки невозобновляемого ресурса [5]. Предполагается, что n игроков участвуют в извлечении некоторого невозобновляемого ресурса, запас которого в момент времени t обозначим через $x(t)$. Количество ресурса зависит от интенсивностей выработки u_i , выбираемых игроками.

Уравнение динамики имеет вид:

$$\dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^n a_i u_i(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (7.1)$$

Здесь коэффициенты $a_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $x_0 > 0$.

Игроки имеют логарифмические функции полезности:

$$h_i(x(t), u_i(t, x)) = \ln u_i(t, x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.2)$$

Функция выигрыша игрока i имеет вид

$$K_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^T \ln u_i(s, x) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.3)$$

Предполагается, что в каждый момент времени игроки обладают информацией только на период длиной $\bar{T} < T$ и могут руководствоваться только этой информацией при выборе оптимального управления в момент t .

Также предполагается, что игроки имеют возможность кооперироваться с целью достижения максимального суммарного выигрыша:

$$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, T - t_0) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^T \ln u_i(s, x) ds \longrightarrow \max_{u_1, \dots, u_n}. \quad (7.4)$$

7.1. Оптимальные кооперативные стратегии

Согласно разделу 4, для получения оптимальных позиционных стратегий в игре с непрерывным обновлением информации, необходимо рассмотреть вспомогательную подыгру $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$ с продолжительностью \bar{T} , начинающуюся в момент t из состояния x .

Динамика игры $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$ описывается уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(s) &= - \sum_{i=1}^n a_i u_i^t(s, x_t), \\ x_t(t) &= x, \\ x_t &\in \mathbb{R}^l, \quad u^t = (u_1^t, \dots, u_n^t), \quad u_i^t = u_i^t(s, x) \in U_i \subset \text{comp} \mathbb{R}^k, \quad s \in [t, t + \bar{T}]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Функция выигрыша игрока i для подыгры $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$:

$$K_i^t(x, t; u^t) = \int_t^{t+\bar{T}} \ln u_i^t(s, x_t) ds, \quad i \in N. \quad (7.6)$$

Найдем набор стратегий $\tilde{u}^*(t, s, x)$, максимизирующий суммарный выигрыш игроков в подыгре. Для этого воспользуемся методом динамического программирования [2]. Обозначим через $W(t, s, x)$ функцию Беллмана в подыгре, начинающейся в момент s :

$$W(t, s, x) = \max_{u^1, \dots, u^n} \sum_{i=1}^n K_i^t(x, s; u^t). \quad (7.7)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial W(t, s, x)}{\partial s} = \max_{u^1, \dots, u^n} \left\{ \sum_{i=1}^n \ln u_i^t(s, x) - \frac{\partial W(t, s, x)}{\partial x} \sum_{i=1}^n a_i u_i^t(s, x) \right\}. \quad (7.8)$$

$$\lim_{s \rightarrow t+\bar{T}} W(t, s, x) = 0.$$

Будем искать решение уравнения (7.8) в виде $W(t, s, x) = A(t, s) \ln x_t + B(t, s)$. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial W(t, s, x)}{\partial s} = \dot{A}(t, s) \ln x_t + \dot{B}(t, s); \quad \frac{\partial W(t, s, x)}{\partial x} = \frac{A(t, s)}{x_t}. \quad (7.9)$$

Проведя максимизацию в правой части уравнения (7.8), учитывая (7.9) получаем

$$\tilde{u}^*(t, s, x) = \frac{x_t}{a_i A(t, s)}. \quad (7.10)$$

После подстановки (7.9), (7.10) в (7.8) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t, s) \ln x_t + \dot{B}(t, s) &= n \ln A(t, s) - n \ln x_t + \ln a^N + n, \\ \lim_{s \rightarrow t+\bar{T}} A(t, s) \ln x_t + B(t, s) &= 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где $a^N = \prod_{i=1}^n a_i$.

Тогда:

$$\begin{aligned} A(s, t) &= n(t + \bar{T} - s), \\ B(s, t) &= -(t + \bar{T} - s)(\ln a^N + n \ln n(t + \bar{T} - s)), \\ t &\in [t_0, T), \quad s \in (t, t + \bar{T}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Оптимальные кооперативные стратегии имеют вид:

$$\tilde{u}_i^*(t, s, x) = \frac{1}{W_x} = \frac{x}{a_i n(t + \bar{T} - s)}, \quad s \in [t, t + \bar{T}]. \quad (7.13)$$

При этом

$$W(t, s, x) = n(t + \bar{T} - s) \ln \frac{x}{n(t + \bar{T} - s)} - (t + \bar{T} - s) \ln a^N, \quad s \in [t, t + \bar{T}]. \quad (7.14)$$

Оптимальная кооперативная траектория для вспомогательной подыгры имеет вид:

$$\tilde{x}_t^*(s) = x \frac{(t + \bar{T} - s)}{\bar{T}}. \quad (7.15)$$

Согласно правилу (4.3) кооперативные стратегии в игре с непрерывным обновлением информации определяются следующим образом:

$$\bar{u}^*(t, x) = \tilde{u}^*(t, s, x)|_{s=t} = \frac{x}{a_i n \bar{T}}, \quad s \in [t, t + \bar{T}] \quad (7.16)$$

Соответствующая оптимальная кооперативная траектория:

$$\bar{x}^*(t) = x_0 e^{\frac{t_0 - t}{\bar{T}}}.$$

7.2. Характеристическая функция

При построении характеристической функции в подыгре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$ будем использовать подход, предложенный в работе [27]:

$$\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n K_i^t(x, s; \tilde{u}^*(t, s, x)), & S = N, \\ \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i^t(x, s; \tilde{u}^{NE} \setminus u^S), & S \subset N, \\ 0, & S = \emptyset, \end{cases} \quad (7.17)$$

где $\max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i^t(x, s; \tilde{u}^{NE} / \tilde{u}^S)$ – максимальный выигрыш коалиции S при условии, что игроки из $N \setminus S$ используют управление из некоторого фиксированного равновесия по Нэшу $\tilde{u}^{NE} = (\tilde{u}_1^{t, NE}, \dots, \tilde{u}_n^{t, NE})$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(x, t, \bar{T})$. Заметим, что данная характеристическая функция удобна для вычисления, но не является супераддитивной в общем случае.

Для получения $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s)$ найдем равновесие по Нэшу в подыгре $\tilde{\Gamma}^t(x, \bar{T})$. Воспользуемся принципом оптимальности Беллмана.

Через $W^i(t, s, x)$ обозначим функцию Беллмана – выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу в подыгре, начинающейся в момент s . Система уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана имеет вид (см. [20]):

$$-\frac{\partial W^i(t, s, x)}{\partial s} = \max_{u_i} (\ln u_i^t(s, x) - \frac{\partial W^i(t, s, x)}{\partial x} (a_i u_i + \sum_{j \neq i} a_j \tilde{u}_j^{NE})), \quad i \neq j,$$

$$\lim_{s \rightarrow t + \bar{T}} W^i(s, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.18)$$

Будем искать $W_i(t, s, x)$ в виде $W_i(t, s, x) = A_i(t, s) \ln x + B_i(t, s)$. Максимируя правую часть уравнения (7.18) и решая соответствующие дифференциальные уравнения относительно $A_i(t, s)$ и $B_i(t, s)$, получаем:

$$A_i(t, s) = \bar{T} + t - s,$$

$$B_i(t, s) = (\bar{T} + t - s)(-\ln(\bar{T} + t - s) - \ln a_i - n - 1),$$

$$\tilde{u}_i^{NE}(t, s, x) = \frac{x_t}{a_i(\bar{T} + t - s)}.$$

Можно заметить также, что при построении характеристической функции по предложенному методу, значение характеристическую функции от одноэлементной коалиции совпадает с выигрышем игрока из этой коалиции в ситуации равновесия по Нэшу, значит:

$$V^t(\{i\}; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) = W^i(s, x) = (\bar{T} + t - s) \left(\ln \frac{x_t}{\bar{T} + t - s} - \ln a_i - n - 1 \right).$$

Перейдем теперь к построению $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s)$. Пусть $W^S(t, s, x)$ – функция Беллмана, максимальный выигрыш коалиции S в подыгре, начинающейся в момент s , при условии, что игроки, не входящие в S , используют стратегии $\tilde{u}_i^{NE}(t, s, x)$. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial W^S(t, s, x)}{\partial s} = \max_{u_i \in S} \left(\sum_{i \in S} \ln u_i^t(s, x) - \frac{\partial W^S(t, s, x)}{\partial x} \left(\sum_{i \in S} a_i u_i + \sum_{j \in N \setminus S} a_j \tilde{u}_j^{NE} \right) \right),$$

$$S \subset N,$$

$$\lim_{s \rightarrow t + \bar{T}} W^S(s, x) = 0. \quad (7.19)$$

Функцию Беллмана будем искать в виде $W^S(t, s, x) = A^S(t, s) \ln x + B^S(t, s)$.

Стратегии игроков $i \in S$, максимизирующие правую часть (7.7), имеют вид:

$$\tilde{u}_i^S(t, s, x) = \frac{x_t}{a_i A^S(t, s)}. \quad (7.20)$$

Пусть $|S| = k$. После подстановки (7.20) в () построение сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}^S(t, s) &= -k, \\ \dot{B}^S(t, s) &= k \ln A^S(t, s) + \ln a^S + k + \frac{A^S(t, s)(n-k)}{\bar{T}+t-s}, \\ \lim_{s \rightarrow t+\bar{T}} (A^S(t, s) \ln x + B^S(t, s)) &= 0, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где $a^S = \prod_{i \in S} a_i$.

Найдем решение системы (7.21):

$$\begin{aligned} A^S(s, t) &= k(t + \bar{T} - s), \\ B^S(s, t) &= -k(t + \bar{T} - s)(\ln k(t + \bar{T} - s) + \frac{\ln a^S}{k} + n - k), \\ t \in [t_0, T), \quad s &\in (t, t + \bar{T}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Тогда стратегии игроков из коалиции S , максимизирующие суммарный выигрыш коалиции S , принимают вид:

$$\tilde{u}_i^S(t, s, x) = \frac{x}{a_i k(t + \bar{T} - s)}, \quad s \in [t, t + \bar{T}). \quad (7.23)$$

Можно также вычислить $\tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*, s, t + \bar{T} - s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) &= W^S(t, s, x) = \\ &= -k(t + \bar{T} - s)(-\ln \tilde{x}_t^*(s) + \ln k(t + \bar{T} - s) + \frac{\ln a^S}{k} + n - k), \quad s \in [t, t + \bar{T}). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Согласно (7.24) выигрыш максимальной коалиции имеет вид:

$$\tilde{V}^t(N; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) = n(t + \bar{T} - s) \ln \frac{\tilde{x}_t^*(s)}{n(t + \bar{T} - s)} - (t + \bar{T} - s) \ln a^N.$$

Покажем, что построенная функция является супераддитивной. Пусть $S \subset N, P \subset N, S \cap P = \emptyset$, тогда:

$$\begin{aligned} & \tilde{V}^t(S \cup P; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) - \tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) - \tilde{V}^t(P; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) = \\ & = (t + \bar{T} - s) (k \ln k + p \ln p - k \ln(k + p) - p \ln(k + p) + 2pk) = \\ & = (t + \bar{T} - s) \left(k \left(\ln \frac{k}{k+p} + p \right) + p \left(\ln \frac{p}{k+p} + k \right) \right). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Заметим, что для любых $k > 1$ и $p > 1$ выполняются неравенства $\frac{k+p}{k} < e^p$, $\frac{k+p}{p} < e^k$. Откуда следует, что $(\ln \frac{k}{k+p} + p) > 0$, $(\ln \frac{p}{k+p} + k) > 0$.

Значит

$$\tilde{V}^t(S \cup P; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) - \tilde{V}^t(S; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) - \tilde{V}^t(P; \tilde{x}_t^*(s), t + \bar{T} - s) \geq 0, \quad (7.26)$$

для любого $s \in [t, t + \bar{T})$, что доказывает супераддитивность характеристической функции.

Построим характеристическую функцию с непрерывным обновлением информации (5.1).

$$\begin{aligned} \bar{V}(S, \bar{x}^*(t), t, T - t) &= \int_t^T - \frac{d\tilde{V}^\tau(S; \tilde{x}_\tau^*(s), \bar{T} + \tau - s)}{ds} \Big|_{s=\tau} d\tau = \\ &= k(T - t) \left(\ln \frac{x_0}{k\bar{T}} - \frac{\ln a^S}{k} + \frac{t_0}{\bar{T}} - \frac{t + T}{2\bar{T}} - n + k \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Для характеристической функции (7.27) в игре с непрерывным обновлением информации свойство супераддитивности также выполняется. Действительно:

$$\begin{aligned} & \bar{V}(S \cup P; \bar{x}^*(t), T - t) - \bar{V}(S; \bar{x}^*(t), T - t) - \bar{V}(P; \bar{x}^*(t), T - t) = \\ & = (T - t) (k \ln k + p \ln p - k \ln(k + p) - p \ln(k + p) + 2pk) = \\ & = (T - t) \left(k \left(\ln \frac{k}{k+p} + p \right) + p \left(\ln \frac{p}{k+p} + k \right) \right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Неотрицательность выражения в правой части была показана ранее. Значит:

$$\bar{V}(S \cup P; \bar{x}^*(t), t, T - t) \geq \bar{V}(S; \bar{x}^*(t), T - t) + \bar{V}(P; \bar{x}^*(t), T - t).$$

После построения супераддитивной характеристической функции для получения кооперативного решения возможно использование любого из известных принципов оптимальности. Найдём вектор Шепли [29] в игре с непрерывным обновлением информации.

$$\begin{aligned} \overline{sh}_i(\bar{x}^*(t), T - t) = \sum_{K \subseteq N, i \in K} \frac{(k - 1)!(n - k)!}{n!} [\bar{V}(K; \bar{x}^*(t), T - t) - \\ - \bar{V}(K \setminus i; \bar{x}^*(t), T - t)] = (T - t) \left(\ln \frac{x_0}{a_i n T} + \frac{t_0}{T} - \frac{t + T}{2T} \right). \end{aligned} \quad (7.29)$$

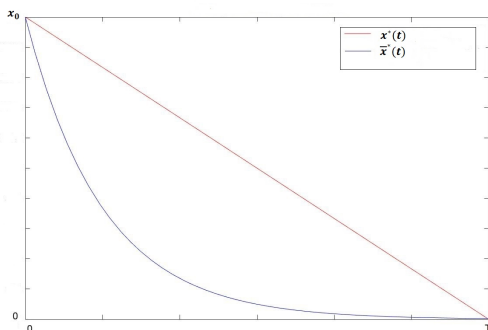


Рисунок 3. Кооперативная траектория $\bar{x}^*(t)$ в игре с непрерывным обновлением информации (синяя линия) и кооперативная траектория в исходной игре $x^*(t)$ (красная линия).

Для сравнения полученных результатов с решением исходной кооперативной игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ выпишем для неё кооперативные стратегии, траекторию и кооперативное решение. Оптимальные кооперативные стратегии для исходной игры:

$$u_i^*(t, x) = \frac{x}{a_i n (T - t)}, \quad t \in [t_0, T), \quad (7.30)$$

а оптимальная кооперативная траектория для исходной игры:

$$x^*(t) = x_0 \frac{(T - t)}{T - t_0}. \quad (7.31)$$

Характеристическая функция для игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$:

$$V(S, x^*(t), t, T - t) = k(T - t) \left(\ln \frac{x_0}{k(T - t_0)} - \frac{\ln a^S}{k} - n + k \right), \quad (7.32)$$

а вектор Шепли:

$$Sh_i(x^*(t), T - t) = (T - t) \ln \frac{x_0}{a_i n (T - t_0)}. \quad (7.33)$$

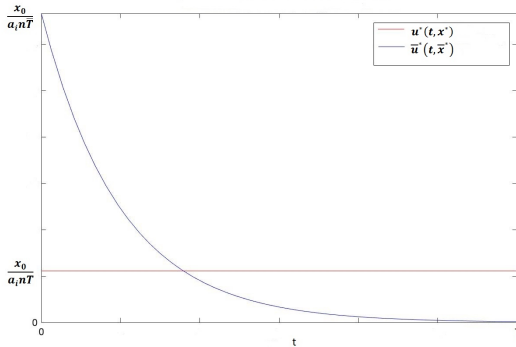


Рисунок 4. Кооперативные стратегии $\bar{u}^*(t, \bar{x}^*)$ в игре с непрерывным обновлением информации (синяя линия) и кооперативные стратегии в исходной игре $u^*(t, x^*)$ (красная линия).

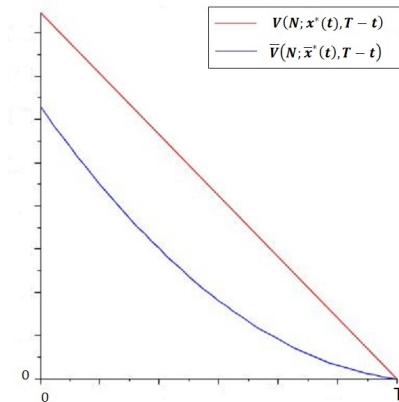


Рисунок 5. Значение характеристической функции $\bar{V}(N; \bar{x}^*(t), T - t)$ в игре с непрерывным обновлением информации (синяя линия) и значение характеристической функции в исходной игре $V(N; x^*(t), T - t)$ (красная линия).

Рисунки 3-6 наглядно показывают как отличается кооперативное решение игры с непрерывным обновлением информации от кооперативного решения исходной игры. Видно, что в игре с непрерывным обновлением информации игроки, рассчитывая на короткую продолжительность процесса, начинают игру с интенсивностью выработки ресурса выше, чем в исходной игре (рис. 4). Соответственно запас ресурса в каждый момент времени в игре с непрерывным обновлением меньше (рис. 3). Рис. 5-6 показывают, что в игре с непрерывным обновлениям выигрыши игроков меньше, чем в исходной игре.

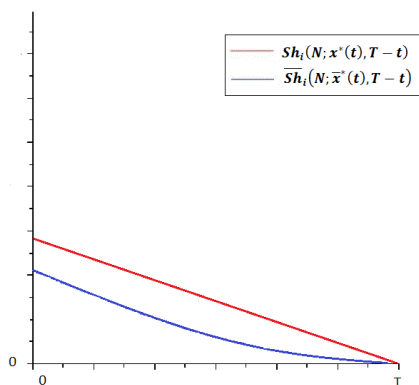


Рисунок 6. Компонента вектора Шепли $\overline{Sh}(\overline{x}^*(t), T - t)$ в игре с непрерывным обновлением информации (синяя линия) и значение характеристической функции в исходной игре $Sh(x^*(t), T - t)$ (красная линия).

8. Заключение

В работе детально описана процедура построения кооперативных стратегий, характеристической функции и кооперативного решения для класса дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации. Рассмотрена модель разработки невозобновляемого ресурса с непрерывным обновлением информации. Приведено численное моделирование с использованием Matlab и сравнение решений исходной игры с предписанной продолжительностью и игры с непрерывным обновлением информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory*. Academic Press, London. 1995.
2. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton. 1957.
3. Bercovitz L. *A variational approach to differential games* // Adv. in game theory, Ann. of Math. Studies. 1964. P. 127–175.
4. Chistyakov S. *On non-cooperative differential games* // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1981. V. 259(5). P. 1052–1055.
5. Dockner E., Jorgensen S., Long N., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, Cambridge. 2000.
6. Fleming W. *The convergence problem for differential games* // Adv. in game theory, Ann. of Math. Studies. 1964. P. 175–195.
7. Gromova E., Petrosian O. *Control of informational horizon for cooperative differential game of pollution control* // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2016. P. 1–4
8. Gromova E.V., Petrosyan L.A. *Strongly dynamically stable cooperative solution in one differential game of harmful emissions management* // Managing large systems. 2015. V.55. P.140-159.
9. Haurie A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1976. V. 18(1). P. 31–39.
10. Kleimenov A. *Non-antagonistic positional differential games*. Science, Ekaterinburg. 1993.
11. Kononenko A. *On equilibrium positional strategies in non-antagonistic differential games* // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1976. V. 231(2). P. 285–288.

12. Krasovsky N. *Control of Dynamical System. Problem of minimum guaranteed result*. Science, Moscow. 1985.
13. Kuchkarov I., Petrosian O. *On class of linear quadratic non-cooperative differential games with continuous updating* // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11548.
14. Petrosian O., Gromova E. *Cooperative differential games with dynamic updating* // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51(32). P. 413–417.
15. Petrosian O.L., Nastych M.A., Volf D.A. *Non-cooperative differential game model of oil market with looking forward approach* // Frontiers of Dynamic Games, Game Theory and Management, Birkh Hauser, Basel, 2018.
16. Petrosian O.L., Nastych M.A., Volf D.A. *Differential game of oil market with moving informational horizon and non-transferable utility* // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov). 2017.
17. Petrosian O. *Looking forward approach in cooperative differential games* // International Game Theory Review. 2016. V. 18(2). P. 1–14.
18. Petrosian O. *Looking forward approach in cooperative differential games with infinite-horizon* // Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.4. 2016. P. 18–30.
19. Petrosian O., Barabanov A. *Looking forward approach in cooperative differential games with uncertain-stochastic dynamics* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. V. 172(1). P. 328–347.
20. Petrosian O., Tur A. *Hamilton-Jacobi-Bellman Equations for Non-cooperative Differential Games with Continuous Updating* // Communications in Computer and Information Science. 2019. Vol. 1090. P. 178–191.

21. Petrosyan L.A., Danilov N.N. *Time consistency of solutions for non-antagonistic differential games with transferable payoffs* // Vestnik of Leningrad University. Ser. 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy. 1979. V. (1). P. 52–59
22. Petrosyan L.A., Danilov N.N. *Cooperative differential games and their applications*. Publishing house of Tomsk University. 1985.
23. Petrosyan L. *Time consistency of solutions for differential games with many participants* // Vestnik of Leningrad University. Ser. 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy. 1977. V. (4). P. 46–52.
24. Petrosyan, L. *Strong time consistent differential optimality principles* // Vestnik of Leningrad University. Ser. 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy. 1993. V. (4). P. 35–40.
25. Petrosyan L.A., Murzov N.V. *Game-theoretic problems in mechanics* // Lithuanian Mathematical Collection. 1966. V. (3). P. 423–433.
26. Petrosyan L.A., Tomsky G.V. *Dynamic games and their applications*. Ed. Leningrad State University, Leningrad. 1982.
27. Petrosyan L.A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // J. Econ. Dyn. Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
28. Pontryagin L. *On theory of differential games* // Successes of Mathematical Sciences. 1966. V. (26, 4(130)). P. 219–274.
29. Shapley L.: *A value for n-person games* // In: H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds., *Contributions to the Theory of Games II*, Annals of Mathematics Studies. 1953. V. 28. P. 307–317.
30. Shevkoplyas E.: *Optimal solutions in differential games with random duration* // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 199(6). P. 715–722.
31. Shi L., Petrosian O. *A dynamic oligopoly marketing model of advertising* // Contributions to Game Theory and Management. 2018. V. 11. P. 207–223.

32. Tolwinski B., Haurie A., Leitmann G. *Cooperative equilibria in differential games* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. V. 119(1). P. 182–202.
33. Yeung D., Petrosian O. *Cooperative stochastic differential games with information adaptation* // International Conference on Communication and Electronic Information Engineering (CEIE2016). 2017. P. 1–13.
34. Zaccour, G. *Time consistency in cooperative differential games: A tutorial* // INFOR: Information Systems and Operational Research. 2008. V. 46(1). P. 81–92.

COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME MODEL WITH CONTINUOUS UPDATING

Ovanes L. Petrosian, School of Automation, Qingdao University,
Saint Petersburg State University, Cand.Sc.
(petrosian.ovanes@yandex.ru),

Anna V. Tur, Saint Petersburg State University, Cand.Sc.
(tur.anna.v@gmail.com),

Zeyang Wang, Saint Petersburg State University
(wangzeyang0504@outlook.com),

Hongwei Gao, Qingdao University, PhD (gaohongwei@qdu.edu.cn).

Abstract: The paper considers and describes the class of cooperative differential games with continuous updating. Such a class of differential games is new, at the moment only the class noncooperative game models with continuous updating have been studied. This paper describes the process of constructing cooperative strategies, cooperative trajectory, characteristic function and cooperative solution with continuous updating. Cooperative case of limited resource extraction game model with continuous updating is considered. Optimal strategies, characteristic function and cooperative solution are constructed. The Shapley vector is used as a cooperative solution. The numerical simulation results are demonstrated in the Matlab environment.

Keywords: differential games, continuous updating.