Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.3, с. 3–18

УДК 519.83
ББК 22.18

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ИГР НА КВАДРАТЕ С РАВНОВЕСИЯМИ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Виктория Л. Крепс*
Институт проблем региональной экономики РАН
190013, Санкт-Петербург, ул. Серпуховская, 38
НИУ Высшая школа экономики
194100, Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3
e-mail: vita_kreps@mail.ru

Рассматривается множество всех линейных пространств непрерывных игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате, имеющих ситуации равновесия в чистых стратегиях. Показано, что это множество содержит максимальные линейные пространства любой конечной размерности, большей трех.

Ключевые слова: игры с нулевой суммой, непрерывные функции выигрыша, ситуации равновесия в чистых стратегиях, линейные пространства игр, максимальность.

Поступила в редакцию: 20.03.20 *После доработки*: 17.09.20 *Принята к публикации*: 29.09.20

---

* Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы (ИПРЭ РАН п.169) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2020 году.

1. Введение

В теории игр, как правило, теоремы существования равновесия доказываются не для отдельных игр, а для целых классов игр; зачастую эти классы оказываются линейными пространствами. Например, теорема Нэша [2] устанавливает существование ситуаций равновесия у всех элементов линейного пространства конечных бескоалиционных игр фиксированного размера. При фиксированном пространстве ситуаций линейные операции над играми естественным образом определяются как результат линейных операций над их функциями выигрыша.

Другим источником объектов, для которых важно существование ситуаций равновесия у всех элементов некоторого линейного пространства игр, являются дифференциальные игры. В дифференциальных играх необходимым условием существования ситуации равновесия в чистых стратегиях является равенство минимакса и максимина левой части уравнения Айзекса [1], где в качестве коэффициентов стоят производные значения игры, о которых, вообще говоря, ничего не известно. Следовательно, приходится считать их произвольными действительными числами и проверять равенство минимакса и максимина при любых коэффициентах, что равносильно проверке существования ситуации равновесия у всех элементов соответствующего линейного пространства.

Отметим также, что линейные комбинации игр появляются в теории игр с неполной информацией, где выигрыши игроков не полностью известны, то есть игроки не знают, как именно игра разыгрывается. В таких играх уровень знаний игрока представлен линейной комбинацией всех возможный игр, см. Harsanyi [5] и Aumann, Maschler [4].

Если имеется какое-либо множество линейных пространств игр, имеющих ситуации равновесия, то для описания структуры этого множества достаточно охарактеризовать его максимальные элементы. Для игр двух лиц с нулевой суммой максимальность можно понимать в смысле частичного упорядочения по вложению. В общем случае максимальность линейного пространства игр означает, что его можно расширить разве лишь несущественным образом, а именно, не расширив ни для одного из игроков класс функций, которые ему приходится максимизировать.

А. Соболевым [3] было рассмотрено множество всех линейных пространств матричных игр размера $n \times n$, имеющих ситуации равновесия в чистых стратегиях (седловые точки), и установлено, что размерность максимального линейного пространства из этого множества не превосходит $(n-1)^2+1$, $(n \geq 3)$.

В работе В. Крепс [6] рассматриваются линейные пространства конечных бескоалиционных игр N лиц фиксированного размера, то есть с фиксированным числом m_i чистых стратегий каждого игрока $i = 1, \dots, N$. Конечная бескоалиционная игра в смешанных стратегиях задается набором вещественных функций выигрыша игроков, заданных на произведении единичных симплексов $S = \prod_1^N S_i$, размерность симплекса S_i равна $m_i - 1$. Функция выигрыша игрока аффинна по стратегиям каждого игрока при всевозможных фиксированных стратегиях других игроков. В [6] доказано, что линейное пространство конечных бескоалиционных игр максимально в множестве линейных пространств непрерывных игр на S, имеющих ситуации равновесия, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\max_{i=1,\dots,N}(m_i - 1) = (m_{i_0} - 1) \leq \sum_{i \neq i_0}(m_i - 1).$$

Для игр двух лиц это неравенство превращается в равенство $m_1 = m_2$.

В настоящей работе рассматривается множество всех линейных пространств непрерывных (то есть с непрерывной функцией выигрыша) игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате, имеющих ситуации равновесия в чистых стратегиях. Показано, что это множество содержит максимальные линейные пространства любой конечной размерности, большей трех.

2. Обозначения и основной результат

Множество непрерывных игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате $I \times I$, где I — отрезок $[0, 1]$, задается непрерывной функцией выигрыша F Игрока 1: $F : I \times I \to \mathbb{R}^1$.

Пара стратегий игроков $(x^* \in I, y^* \in I)$ является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях в игре F на $I \times I$ (эквивалентно, седловой точкой функции F), если для всех $x \in I$ и всех $y \in I$ выполняется неравенство

$$F(x, y^*) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x^*, y).$$

Линейная комбинация $\alpha H + \beta F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ двух игр с нулевой суммой H, F на $I \times I$ определяется как игра на $I \times I$ с функцией выигрыша $\alpha H + \beta F$.

В множестве непрерывных игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате $I \times I$, где I — отрезок $[0, 1]$, рассмотрим подмножество игр, имеющих ситуации равновесия в чистых стратегиях, обозначив его $Eq(I \times I)$. Очевидно, множество $Eq(I \times I)$ не является линейным пространством, так как игра, равная сумме (линейной комбинации) двух игр на квадрате, имеющих седловые точки, может седловой точки не иметь. Однако, множество $Eq(I \times I)$ содержит линейные пространства игр. Например, рассмотрим четырех-мерное линейное пространство 2×2-матричных игр в смешанных стратегиях, или что то же самое четырех-мерное линейное пространство игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате с функцией выигрыша вида

$$\alpha_1 xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 \qquad (2.1),$$

где $x \in I$ (соответственно $y \in I$) — смешанная стратегия Игрока 1 (Игрока 2) в 2×2-матричной игре или, другими словами, $x \in I$ (соответственно $y \in I$) — чистая стратегия Игрока 1 (Игрока 2) в соответствующей игре на единичном квадрате, а коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}^1$. Обозначим это пространство $\mathcal{M}(4)$. Очевидно, линейное пространство $\mathcal{M}(4)$ содержится в $Eq(I \times I)$.

Определение максимальности. Будем говорить, что $\mathbf{H}(I \times I)$ — линейное пространство непрерывных игр на квадрате с нулевой суммой, имеющих седловые точки, *максимально в* $Eq(I \times I)$, если вложение

$$\mathbf{H}(I \times I) \subset \mathbf{H}'(I \times I) \subset Eq(I \times I),$$

где $\mathbf{H}'(I \times I)$ линейное пространство, влечет $\mathbf{H}(I \times I) = \mathbf{H}'(I \times I)$.

Из упомянутого во Введении результата работы [6] следует, что описанное выше четырех-мерное линейное пространство игр $\mathcal{M}(4)$ максимально в $Eq(I \times I)$. Таким образом, в множестве $Eq(I \times I)$ существует подмножество, являющееся максимальным линейным пространством размерности четыре.

Теорема 2.1. *Для любого $n \geq 4$ в множестве $Eq(I \times I)$ существует подмножество, являющееся максимальным линейным пространством размерности n.*

3. Предварительные результаты

Доказательство основного результата опирается на две нижеследующие леммы.

На единичном отрезке I ведем функцию ϕ, положив

$$\phi(x) = x, \quad \text{если} \quad 0 \leq x \leq 1/2; \quad \phi(x) = -x + 1, \quad \text{если} \quad 1/2 \leq x \leq 1.$$

Рассмотрим шести-мерное линейное пространство $\mathcal{F}$ игр на единичном квадрате $I \times I$, являющееся расширением пространства $\mathcal{M}(4)$, а именно, рассмотрим функции выигрыша вида

$$F(x, y) = \alpha_1 xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 + \alpha_5 \phi(x) + \alpha_6 \phi(x) y.$$

Ввиду максимальности пространства $\mathcal{M}(4)$, при некоторых наборах коэффициентов α_i, $i = 1, \ldots, 6$, функции F не имеют седловых точек на квадрате $I \times I$. Лемма 3.1 дает необходимое и достаточное условие их отсутствия.

Лемма 3.1. *Для того, чтобы функция $F \in \mathcal{F}$ не имела седловых точек на квадрате $I \times I$, необходимо и достаточно выполнения трех условий:*

$$1.\ 0 < -\alpha_2/\alpha_1 < 1, \quad 2.\ 0 < -\alpha_3/\alpha_1 < 1, \quad 3.\ \alpha_5 < \alpha_2 \alpha_6/\alpha_1.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия 1-3 и пусть для определенности $\alpha_1 < 0$. Положим $y_0 = -\alpha_2/\alpha_1$. По условию 1 $y_0 \in (0, 1)$. Переписав функцию F как

$$F(x, y) = x(\alpha_1 y + \alpha_2) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \phi(x)(\alpha_5 + \alpha_6 y)$$

и учитывая условие 1, замечаем, что $\alpha_1 y + \alpha_2 > 0$ при $0 \leq y \leq y_0$ и $\alpha_1 y + \alpha_2 < 0$ при $y_0 \leq y \leq 1$. Отсюда, принимая во внимание симметричность функции ϕ относительно $x = 1/2$, получаем

$$\max_{x \in I} F(x, y) = \max_{1/2 \leq x \leq 1} F(x, y), \quad \text{если} \quad 0 \leq y \leq y_0;$$

$$\max_{x\in I} F(x,y) = \max_{0\le x\le 1/2} F(x,y), \quad \text{если} \quad y_0 \le y \le 1.$$

Следовательно, если у функции F есть седловые точки на $I\times I$, то все они расположены в замкнутой области $[0,1/2]\times[y_0,1]\cup[1/2,1]\times[0,y_0]$.

Покажем, что сужение функции F на $[0,1/2]\times[y_0,1]$ имеет единственную седловую точку $(0,y_0)$, которая не является седловой точкой на $I\times I$, а сужение F на $[1/2,1]\times[0,y_0]$ имеет единственную седловую точку $(1,y_0)$, которая также не является седловой точкой на $I\times I$, то есть функция F на $I\times I$ не имеет седловых точек.

Рассмотрим сечение функции F при $y=y_0$:

$$F(x,y_0) = \phi(x)(\alpha_5+\alpha_6 y_0)+\alpha_3 y_0+\alpha_4 = \phi(x)(\alpha_5-\alpha_6\alpha_2/\alpha_1)+\alpha_3 y_0+\alpha_4.$$

Так как по условию 3 $\alpha_5 < \alpha_6\alpha_2/\alpha_1$, имеем

$$F(0,y_0) = F(1,y_0) = \max_{x\in I} F(x,y_0) > F(1/2,y_0).$$

Далее рассмотрим сечение функции F при $x=0$ и при $x=1$. Из условия 2 и того, что $\alpha_1<0$, получаем, что $\alpha_3>0$, $\alpha_3+\alpha_1<0$ и, следовательно,

$$F(0,y) = \alpha_3 y_0 + \alpha_4, \quad \text{где} \quad \alpha_3 > 0;$$

$$F(1,y) = y(\alpha_3+\alpha_1)+\alpha_2+\alpha_4, \quad \text{где} \quad \alpha_3+\alpha_1 < 0.$$

Таким образом, точки $(0,y_0)$ и $(1,y_0)$ — седловые точки сужения F на $[0,1/2]\times[y_0,1]$ и на $[1/2,1]\times[0,y_0]$ соответственно, причем они не являются седловыми точками F на $I\times I$. Нетрудно также показать, что точки $(0,y_0)$ и $(1,y_0)$ — единственные седловые точка сужения F на $[0,1/2]\times[y_0,1]$ и на $[1/2,1]\times[0,y_0]$ соответственно. Это завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Покажем, что если не выполнено какое-либо из условий 1-3, то функция F имеет седловую точку на $I\times I$. Пусть не выполняется условие 1. Тогда для всех $y\in[0,1]$ двучлен $\alpha_1 y+\alpha_2$ имеет один и тот же знак, для определенности $\alpha_1 y+\alpha_2\ge 0$. Учитывая симметричность функции ϕ относительно $x=1/2$, получаем, что любая седловая точка сужения F на $[1/2,1]\times[0,y_0]$, которая очевидно существует, является седловой точкой F на $I\times I$ и, следовательно, условие 1 необходимо.

Предположим теперь, что условие 1 выполняется, то есть $0 < y_0 = -\alpha_2/\alpha_1 < 1$, но не выполняется условие 3 и пусть для определенности $\alpha_1 < 0$, то есть $\alpha_5 + \alpha_6 y_0 \geq 0$.

По условию 1 снова имеем, что седловые точки F, если они существуют, содержатся в $[0, 1/2] \times [y_0, 1] \cup [1/2, 1] \times [0, y_0]$. Отметим, что если сужение F на $[0, 1/2] \times [y_0, 1]$ имеет седловую точку $(x*, y*)$, в которой $y* \neq y_0$, то $(x*, y*)$ является седловой точкой F на $I \times I$. Аналогично с сужением F на $[1/2, 1] \times [0, y_0]$. Если же эти сужения не имеют седловых точек с $y* \neq y_0$, то при условии $\alpha_5 + \alpha_6 y_0 \geq 0$, получаем, что сужения F как на $[0, 1/2] \times [y_0, 1]$, так и на $[1/2, 1] \times [0, y_0]$ имеют единственную седловую точку $(1/2, y_0)$, которая является и седловой точкой F на $I \times I$. Следовательно, условие 3 необходимо.

Пусть теперь выполняются условия 1 и 3, но не выполняется условие 2, и пусть снова $\alpha_1 < 0$. Тогда если $a_3 \leq 0$, то сужение F на $[0, 1/2] \times [y_0, 1]$ имеет седловую точку с $y* \neq y_0$, а если $a_3 > 0$, то такую седловую точку имеет сужение на $[1/2, 1] \times [0, y_0]$. Следовательно, условие 2 необходимо и Лемма 3.1 доказана. □

Прежде, чем формулировать Лемму 3.2, разобьем интервал $I = [0, 1]$ на интервалы $A_i = [(i-1)/m, i/m]$. $i = 1, \ldots, m$, где $m \geq 2$ — натуральное число, и определим на I непрерывную кусочно-линейную функцию f следующим образом: при $x \in A_i = [(i-1)/m, i/m]$, $i = 1, \ldots, m$,

$$f(x) = \begin{cases} (x - (i-1)/m)m, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ -(x - (i-2)/m)m + 2, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases}$$

Рассмотрим на I функции k_i, $i = 1, \ldots, m-1$,

$$k_i(x) = \begin{cases} \phi(f(x)), & \text{если } x \in A_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

функция ϕ на I введена в начале раздела.

Рассмотрим линейное $(m+3)$-мерное пространство игр на квадрате, задаваемых функциями выигрышей вида

$$F(x, y) = \alpha_1 f(x) y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_5^i k_i(x). \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Для любого* $y_0 \in (0,1)$ *и любого* $x_0 : f(x_0) \neq 0, 1/2, 1$ *существуют наборы* α_i^0, $i^0 = 1, \ldots 4$ *и* $\alpha_{5^0}^i$, $i = 1, \ldots m-1$, *такие что* (x_0, y_0) *— единственная седловая точка на* $I \times I$ *функции* F^0 *вида (3.1), соответствующей этим наборам. Также* (x_0, y_0) *— единственная седловая точка сужения функции* F^0 *на* $A_{i_0} \times I$, *где* $x_0 \in A_{i_0}$, $1 \leq i_0 \leq m$.

Доказательство. Сначала пусть $x_0 \in A_{i_0}$, где $1 \leq i_0 \leq m-1$, и для определенности $0 < f(x_0) < 1/2$ (случай $1/2 < f(x_0) < 1$ доказывается аналогично). Положим $\alpha_1^0 = 1$, $\alpha_2^0 = -y_0 - 1$, $\alpha_3^0 = -f(x_0)$, $\alpha_4^0 = f(x_0)y_0$, $\alpha_{5^0}^{i_0} = 1$ и $\alpha_{5^0}^{i_0} = 0$ в противном случае. При всех $y \in I$

$$\max_{x \in I} F^0(x,y) = \max_{x \in A_{i_0}} F^0(x,y).$$

Таким образом, каждая седловая точка сужения F^0 на $A_{i_0} \times I$ является седловой точкой F^0 на $I \times I$.

При $x \in A_{i_0}$ функция $F^0(x,y)$ имеет вид

$$F^0(x,y) = f(x)(y - y_0 - 1) + \phi(f(x)) - f(x_0)y + f(x_0)y_0.$$

Так как $y - y_0 - 1 < 0$ для всех $y \in I$ и функция ϕ симметрична относительно $u = 1/2$. все седловые точки сужения F_0 на $A_{i_0} \times I$ содержатся в $[A_{i_0} \cap (f(x) \leq 1/2)] \times I$. Сужение F_0 на $[A_{i_0} \cap (f(x) \leq 1/2)] \times I$, равное

$$F^0(x,y) = (f(x) - f(x_0))(y - y_0),$$

имеет единственную седловую точку (x_0, y_0), являющуюся также седловой точкой F_0 на $I \times I$.

Покажем, что (x_0, y_0) единственная седловая точка функции F^0 и на $I \times I$. Рассмотрим сужение F^0 на $A_i \times I$, где $i \neq i_0$,

$$F^0(x,y) = f(x)(y - y_0 - 1) - f(x_0)y + f(x_0)y_0.$$

Это сужение имеет единственную седловую точку (x_i^*, y^*), в которой $f(x_i^*) = 0$, $y^* = 1$ и $F^0(x_i^*, y^*) \neq 0$. Следовательно, (x_i^*, y^*) не является седловой точкой F_0 на $I \times I$.

Для завершения доказательства Леммы 3.2 осталось рассмотреть случай $x_0 \in A_m$. В этом случае положим $\alpha_1^0 = 1$, $\alpha_2^0 = -y_0$, $\alpha_3^0 =$

$-f(x_0)$, $\alpha_4^0 = f(x_0)y_0$, $\alpha_{5^0}^i = -1$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$. Легко проверить, что сужение F_0 на $A_m \times I$ имеет единственную седловую точку (x_0, y_0), являющуюся также седловой точкой F_0 на $I \times I$, а сужения F_0 на $A_i \times I$, где $1 \le i \le m-1$, седловых точек не имеют, так как набор коэффициентов $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_4^0$, $\alpha_{5^0}^i$, $\alpha_6^0 = 0$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1. □

Заметим, что результаты, которые будут установлены в следующем разделе, покажут, что все функции выигрышей вида (3.1) имеют седловые точки на квадрате и соответствующее линейное $(m+3)$-мерное пространство игр не максимально.

4. Доказательство основного результата

Приступим к доказательству Теоремы 2.1: приведем примеры максимальных линейных n-мерных пространств непрерывных игр двух лиц с нулевой суммой на единичном квадрате, имеющих ситуации равновесия в чистых стратегиях. Для $n = 4$ пример такого пространства дает приведенное в разделе 2 линейное четырех-мерное пространство $\mathcal{M}(4)$ функций выигрыша вида (2.1).

Пусть $n \ge 6$, случай $n = 5$ будет разобран отдельно. Положим $m = n - 4 > 1$; множества A_i, $i = 1, \ldots, m$, функции f, ϕ и k_i, $i = 1, \ldots, m-1$ те же, что и в Лемме 3.2. Положим $k_0(x, y) = y \sum_{i=1}^{m-1} k_i(x)$ и рассмотрим линейное n-мерное пространство $\mathcal{M}(n)$ функций F на $I \times I$ следующего вида

$$F(x,y) = \alpha_1 f(x) y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_5^i k_i(x) + \alpha_6 k_0(x,y). \quad (4.1)$$

4.1. Существование седловых точек

Отметим, что пространство $\mathcal{M}(n)$ является расширением $(n-1)$-мерного линейного пространства функций вида (3.1), рассмотренных в Лемме 3.2.

Покажем, что все функции из $\mathcal{M}(n)$ имеют седловые точки на $I \times I$. Фиксируем произвольные коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, α_5^i, $i = 1, \ldots, m$ и α_6. При любом $y \in I$ для функций $F \in \mathcal{M}(n)$ справедливо

$$\max_{x \in I} F(x,y) = \max_{x \in f^{-1}(\{0\} \cup \{1/2\} \cup \{1\})} F(x,y),$$

причем при $x \in f^{-1}(\{0\} \cup \{1\})$, как и при $x \in A_m$,

$$F(x, y) = \alpha_1 f(x)y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4;$$

а при $x \in A_i,\ \ i = 1, \ldots, m-1$,

$$\alpha_1 f(x)y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + (\alpha_5^i + \alpha_6 y) f(x).$$

Очевидно, что сужение $F \in \mathcal{M}(n)$ на $A_m \times I$ имеет седловую точку, обозначим её (x^*, y^*).

Если $(\alpha_5^i + \alpha_6 y^*) \le 0$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$, то

$$\max_{x \in A_m} F(x, y) = \max_{x \in I} F(x, y),$$

и (x^*, y^*) седловая точка F на $I \times I$.

Пусть $(\alpha_5^i + \alpha_6 y^*) > 0$ для некоторых i. Обозначим через i_0 номер, на котором достигается максимум коэффициентов α_5^i, $i = 1, \ldots, m-1$ и, следовательно, максимум коэффициентов $(\alpha_5^i + \alpha_6 y^*)$.

Заметим, что если (x', y') седловая точка сужения F на $A_{i_0} \times I$, то она является седловой точкой на F на $I \times I$, поскольку

$$\max_{x \in A_{i_0}} F(x, y') \ge \max_{x \in A_i} F(x, y') \quad \text{при всех} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Покажем, что сужение F на $A_{i_0} \times I$ имеет седловую точку. Для этого достаточно показать, что функция

$$\alpha_1 xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 + \alpha_5^{i_0} \phi(x) + \alpha_6 \phi(x) y \tag{4.2}$$

имеет седловую точку на $I \times I$. Проверим, что для коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_4,\ \ \alpha_5^{i_0}$ и α_6 не выполняется по крайней мере одно из трех условий Леммы 3.1. При выполненных условиях 1 $(0 < -\alpha_2/\alpha_1 < 1)$ и 2 $(0 < -\alpha_3/\alpha_1 < 1)$ имеет место $y^* = -\alpha_2/\alpha_1$ и

$$\alpha_5^{i_0} - \alpha_2 \alpha_6/\alpha_1 = \alpha_5^{i_0} + \alpha_6 y^* > 0,$$

то есть нарушается условие 3 Леммы 3.1. Следовательно, функция (4.2) имеет седловую точку на $I \times I$.

4.2. Максимальность

Начнем со случая $n \geq 6$. Чтобы установить максимальность линейного пространства $\mathcal{M}(n)$ функций F на $I \times I$ вида (4.1), докажем, что если для любых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, α_5^i, $i = 1, \ldots, m-1$, и α_6 функция на $I \times I$

$$F(x,y) = \alpha_1 f(x)y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_5^i k_i(x) + \alpha_6 K(x,y), \quad (4.3)$$

где K — непрерывная функция на $I \times I$, имеет седловую точку, то функция $K \in \mathcal{M}(n)$. Заметим, что формула (4.3) отличается от формулы (4.1) заменой последнего слагаемого $\alpha_6 k_0(x,y) = \alpha_6 y \sum_{i=1}^{m-1} k_i(x)$ на слагаемое $\alpha_6 K(x,y)$.

Сначала покажем, что на каждом из $(2m-1)$ интервалов

$$[(i-1)/m, i/m-1/2m],\ [i/m-1/2m, i/m],\ i = 1, \ldots, m-1,\ [(m-1)/m, 1]$$

функция K линейна по x при любом $y \in I$. Определим на $I \times I$ непрерывную линейную на перечисленных интервалах функцию $K_y(x)$, значения которой при любом $y \in I$ в точках $x : f(x) = 0, 1/2, 1$ совпадают со значениями $K(x,y)$. Функцию $K_y(x)$ можно представить в следующем виде

$$K_y(x) = \begin{cases} \beta_1^i f(x)y + \beta_2^i f(x) + \beta_3^i y + \beta_4^i + \beta_5^i \phi(x) + \\ \qquad\qquad\qquad + \beta_6^i \phi(x) y, \ x \in A_i, i < m, \\ \beta_1^m f(x)y + \beta_2^m f(x) + \beta_3^m y + \beta_4^m, \quad x \in A_m, \end{cases}$$

где коэффициенты β_j^i, $i = 1, \ldots, m-1$, $j = 1, \ldots, 6$ и β_j^m, $j = 1, \ldots, 4$ определяются значениями $K_y(x) = K(x,y)$ на концах интервалов линейности.

Покажем, что для всех $0 \leq x \leq 1$ и $0 < y < 1$ имеет место равенство $K(x,y) = K_y(x)$. Из непрерывности обеих функций K и K_y из этого будет следовать их совпадение на $I \times I$.

Пусть для некоторого $0 < y_0 < 1$ существует $x_0 \in I$ такое, что $K(x_0, y_0) \neq K_{y_0}(x_0)$. Очевидно, $f(x_0) \neq 0, 1/2, 1$. Из непрерывности этих функций следует сохранение неравенства в некоторой ϵ-окрестности точки (x_0, y_0).

По Лемме 3.2 мы можем выбрать функцию F^0 вида (3.1) так, что (x_0, y_0) — единственная седловая точка F^0 на $I \times I$. Рассмотрим функцию $F^0 + \alpha_6 K(x, y)$ вида (4.3), которая по предположению имеет седловые точки при любом α_6. Так как при $\alpha_6 = 0$ эта функция имеет единственную седловую точку (x_0, y_0), то при $|\alpha_6| < \delta$, $\delta > 0$, все седловые точки $F^0 + \alpha_6 K(x, y)$ принадлежат ϵ-окрестности точки (x_0, y_0).

Пусть (x^*, y^*) произвольная седловая точка функции $F^0 + \alpha_6 K(x, y)$, где $|\alpha_6| < \delta$ и α_6 соответствующего знака. Так как $\alpha_6 K(x^*, y^*) < \alpha_6 K_{y^*}(x^*)$ и

$$\max_{x \in I}(F^0(x, y^*) + \alpha_6 K_{y^*}(x)) \leq \max_{x \in I}(F^0(x, y^*) + \alpha_6 K(x, y^*)),$$

справедливо неравенство

$$F^0(x^*, y^*) + \alpha_6 K(x^*, y^*) < \max_{x \in I}(F^0(x, y^*) + \alpha_6 K(x, y^*)),$$

что противоречит определению седловой точки. Таким образом, установлено равенство $K(x, y) = K_y(x)$ для всех $(x, y) \in I \times I$.

Теперь,чтобы убедиться в максимальности линейного пространства $\mathcal{M}(n)$ функций F на $I \times I$ вида (4.1), нужно проверить независимость от номера интервала i коэффициентов β_j^i, $j = 1, \ldots, 4$, $i = 1, \ldots, m$, и коэффициентов β_6^i, $i = 1, \ldots, m-1$, то есть установить равенство коэффициентов $\beta_j^1 = \beta_j^2 = \ldots = \beta_j^m$, $j = 1, \ldots, 4$ и $\beta_6^1 = \beta_6^2 = \ldots = \beta_6^{m-1}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\beta_j^m = 0$, $\; j = 1, \ldots, 4$ и $\beta_5^i = 0$, $i = 1, , \ldots, m-1$. Тогда нужно показать, что для всех $i = 1, \ldots, m-1$ также справедливо $\beta_j^i = 0$, $\; j = 1, \ldots, 4$ и значение коэффициента β_6^i не зависит от номера i.

Установим сначала равенства $\beta_1^i + \beta_3^i = 0$ и $\beta_2^i + \beta_4^i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$. Предположим противное: существует такой номер i_0, что $|\beta_1^{i_0} + \beta_3^{i_0}| + |\beta_2^{i_0} + \beta_4^{i_0}| \neq 0$. Выпишем коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, α_5^i, $i = 1, \ldots, m-1$, и α_6, при которых функция F вида (4.3) не имеет седловых точек. Для этого возьмем такие $c_2 > 1$ и $c_1 > c_2 + 2$ что $-c_2/c_1(\beta_1^{i_0} + \beta_3^{i_0}) + \beta_2^{i_0} + \beta_4^{i_0} \neq 0$. Положим

$$\alpha_1 = -c_1 \sum_{j=1}^{4} \max_i |\beta_j^i| \neq 0, \quad \alpha_6 = Sign(-c_2/c_1(\beta_1^{i_0} + \beta_3^{i_0}) + \beta_2^{i_0} + \beta_4^{i_0}) \neq 0,$$

$\alpha_2 = \alpha_3 = -c_2/c_1\alpha_1,\ \ \alpha_4 = 0,$

$$\alpha_5^i = \begin{cases} -1, & \text{если } \beta_6^i = 0, \\ -\alpha_6\beta_6^i, & \text{если } \alpha_6\beta_6^i > 0 \\ -\alpha_6\beta_6^i \frac{\alpha_2+\alpha_6\beta_2^i}{2(\alpha_1+\alpha_6\beta_1^i)}, & \text{если } \alpha_6\beta_6^i < 0. \end{cases}$$

Проверим, что с такими коэффициентами функция F вида (4.3) не имеет седловых точек. Сужение F на $A_m \times I$, очевидно, имеет единственную седловую точку (x^*, y^*), где $f(x^*) = c_2/c_1,\ \ x^* \in A_m,\ \ y^* = c_2/c_1$. Точка (x^*, y^*) не является седловой точкой F на $I \times I$, так как при $x' \in A_{i_0}$ таком, что $f(x') = 1$,

$$[F(x', y^*) + \alpha_6 K(x', y^*)] - [F(x^*, y^*) + \alpha_6 K(x^*, y^*)] =$$

$$= |c_2/c_1(\beta_1^{i_0} + \beta_3^{i_0}) + \beta_2^{i_0} + \beta_4^{i_0}| > 0.$$

Покажем далее, что для всех $i = 1, , \ldots, m-1$ сужение F на $A_i \times I$ не имеет седловых точек. Введя обозначения

$$\gamma_j^i = \alpha_j + \alpha_6\beta_j^i,\ 1 \le j \le 4, \quad \gamma_5^i = \alpha_5^i, \quad \gamma_6^i = \alpha_6\beta_6^i,$$

для $x \in A_i$ получаем

$$F(x, y) + \alpha_6 K(x, y) = \gamma_1 f(x) y + \gamma_2 f(x) + \gamma_3 y + \gamma_4 + \gamma_5^i k_i(x) + \gamma_6^i k_i(x) y.$$

Проверим, что для всех $i = 1, , \ldots, m-1$ коэффициенты этой функции удовлетворяют трем условиям Леммы 3.1.

Для любого $i = 1, , \ldots, m-1$

$$\gamma_1^i = -c_1 \sum_{j=1}^{4} \max_i |\beta_j^i| + \alpha_6\beta_1^i < 0, \quad \gamma_2^i = c_2 \sum_{j=1}^{4} \max_i |\beta_j^i| + \alpha_6\beta_2^i > 0,$$

поскольку $c_1 > 1$, $c_2 > 1$, а $|\alpha_6| = 1$. А так как $(c_2 - 1)/(c_1 + 1) < 1$, получаем $0 < -\gamma_2^i/\gamma_1^i < 1$. Аналогично, $0 < -\gamma_3^i/\gamma_1^i < 1$.

Выполнение условия 3, которое в данном случае имеет вид $\alpha_5^i < \frac{\alpha_6\beta_6^i\gamma_2^i}{\gamma_1^i}$, вытекает из определения коэффициентов α_5^i. Следовательно, наше предположение неверно и для любого $i = 1, , \ldots, m-1$ справедливы равенства $\beta_1^i + \beta_3^i = 0$ и $\beta_2^i + \beta_4^i = 0$.

Теперь покажем, что $\beta_3^i = \beta_4^i = 0$ для всех $i = 1, , \ldots, m-1$. Пусть существует такое i_0, что $|\beta_3^{i_0}| + |\beta_4^{i_0}| \ne 0$. Возьмем $c_1, c_2 > 1,\ c_1 > c_2 + 2$ такие, что $c_2/c_1\beta_3^{i_0} + \beta_4^{i_0} \ne 0$.

Положим $\alpha_6 = Sign(c_2/c_1 \cdot \beta_3^{i_0} + \beta_4^{i_0}) \neq 0$, а коэффициенты α_1, $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_4 = 0$, α_5^i определим также, как и в предыдущем случае. Из предыдущих же рассуждений следует, что если с такими коэффициентами функция F вида (4.3) имеет седловую точку (x^*, y^*), то $x^* \in A_m$. Но на A_m эта функция имеет единственную седловую точку, в которой $f(x^*) = y^* = c_2/c_1$. Эта точка не является седловой на $I \times I$, так как при $x' \in A_{i_0}$, таком что $f(x') = 0$,

$$F(x', y^*) - F(x^*, y^*) = \alpha_6(y^* \beta_3^{i_0} + \beta_4^i) = |c_2/c_1 \cdot \beta_3^{i_0} + \beta_4^{i_0}| > 0.$$

Таким образом, получаем, что $\beta_j^i = 0$ для всех $j = 1, \ldots, 4$, $i = 1, , \ldots, m-1$.

Осталось, принимая во внимание только такие K, что

$$K(x,y) = \begin{cases} \beta_i \phi(x) y, & x \in A_i,\ i = 1, \ldots, m-1 \\ 0, & x \in A_m, \end{cases}$$

установить независимость коэффициентов β_i от номера i. Предположим, что среди β_i есть неравные, для определенности пусть $\beta_1 > \beta_2$. Покажем, что в этом предположении функция F, определяемая как

$$\alpha_1 f(x) y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_5^i k_i(x) + \alpha_6 k_0(x,y) + \alpha_7 K(x,y), \quad (4.4)$$

при некоторых коэффициентах не имеет седловых точек. Это противоречит тому, что при любых коэффициентах функция F принадлежит $\mathcal{M}(n)$, поскольку

$$\alpha_6 k_0(x,y) + \alpha_7 K(x,y) = \alpha_6' K'(x,y),$$

где

$$K'(x,y) = \begin{cases} \beta_i' \phi(x) y, & x \in A_i,\ i = 1, \ldots, m-1 \\ 0, & x \in A_m, \end{cases}$$

и таким образом, при любых коэффициентах функция F вида (4.4) должна иметь седловую точку. Положим $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 7/4$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5^1 = 4$, $\alpha_5^2 = 17/4$,

$$\alpha_5^i = -2\left|\frac{10\beta_i - \beta_2 - 9\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\right|, \text{ если } i > 2,\ \ \alpha_6 = -\frac{\beta_2 + 9\beta_1}{\beta_1 - \beta_2},\ \ \alpha_7 = \frac{10}{\beta_1 - \beta_2},$$

при этом $\beta'_1 = 1$, $\beta'_2 = -9$, $\beta'_i = \frac{10\beta_i - \beta_2 - 9\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$, если $i > 2$, и $\alpha'_6 = 1$. Покажем, что в этом случае функция F не имеет седловых точек. Сужение функции F на $A_m \times I$ имеет единственную седловую точку, в которой $f(x^*) = 7/8$, $y^* = 1/2$ и $F(x^*, y^*) = 7/8$. Эта точка не является седловой на $I \times I$, так как для $x' \in A_1$, $f(x') = 7/8$

$$F(x', y^*) = F(x', y^*) + (\alpha_5^1 + \alpha'_6 \beta'_1 y^*)(-f(x') + 1) > F(x^*, y^*).$$

Далее заметим, что $0 < -\alpha_2/\alpha_1 = 1/2 < 1$, $0 < -\alpha_3/\alpha_1 = 7/8 < 1$ и $\alpha_5^i \alpha_1 = -2\alpha_5^i < \alpha_2 \alpha'_6 \beta'_i = \beta'_i$ для всех $i \geq 2$, то есть на всех сужениях F на $A_i \times I$, $i \geq 2$, применима Лемма 3.1, и функция F на них не имеет седловых точек.

Осталось лишь рассмотреть сужение F на $A_1 \times I$. Нетрудно проверить, что функция F на этом сужении имеет единственную седловую точку (x^1, y^1), где $x^1 \in A_1$, $f(x^1) = 1/2$, $y^1 = 0$. Эта точка не является седловой уже на $(A_1 \cup A_2) \times I$, так как значение $F(x^1, y^1) < F(x^2, y^1)$, где $x^2 \in A_2$ и $f(x^2) = 1/2$, поскольку $\alpha_5^1 = 4 < \alpha_5^2 = 17/4$. Следовательно, наше предположение неверно и все β_i равны, таким образом максимальность $\mathcal{M}(n)$ при $n \geq 6$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы нужно рассмотреть случай $n = 5$. Обозначим $[0, 1/2] = A_1$ и $[1/2, 1] = A_2$. Рассуждениями, аналогичными случаю $n > 5$, можно показать, что

$$\mathcal{M}(5) = \{\alpha_1 f(x) y + \alpha_2 f(x) + \alpha_3 y + \alpha_4 + \alpha_5 k(x)\},$$

где

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1, & \text{если } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

максимально. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* Мир, 1967.
2. Нэш Дж. *Бескоалиционные игры.* В сб.: Матричные игры. Физматгиз. 1961. С. 205–221.
3. Соболев А.И. *О размерности линейного пространства матричных игр, имеющих седловую точку.* Успехи теории игр. Вильнюс. Минтис. 1975. С. 66–68.
4. Aumann R. and M. Maschler, Repeated Games with Incomplete Information. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts - London, England, 1995.
5. Harsanyi J. *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players* // Management Science. 1968. V. 14. P. 486–502.
6. Kreps V. *On maximal vector spaces of finite non-cooperative games* // International Game Theory Review. 2017. V.19. I.2.

LINEAR SPACES OF GAMES ON THE UNIT SQUARE WITH PURE EQUILIBRIUM POINTS

Victoria L. Kreps, IRES RAS and NRU HSE, Dr.Sc.
(vita_kreps@mail.ru).

Abstract: The set of all linear spaces of continuous two-person zero-sum games on the unit square with pure equilibrium points is considered. It is shown that the set contains maximal linear spaces of any finite dimension greater than three.

Keywords: zero-sum games, continuous payoff functions, pure equilibrium points, linear spaces of games, maximality.