

УДК 519.837.3

ББК 22.18

ИГРА ФОРМИРОВАНИЯ СЕТИ СВЯЗИ АГЕНТОВ С НАПРАВЛЕННЫМИ АНТЕННАМИ

АЛЕКСАНДР В. КУЗНЕЦОВ*

Воронежский государственный университет
394018, Воронеж, Университетская площадь, 1
e-mail: avkuz@bk.ru

В работе исследуется некооперативная повторяющаяся игра, описывающая поведение мобильных агентов с направленными антеннами или беспроводную сенсорную сеть. Периодически агенты должны разворачивать антенны по направлению друг к другу, чтобы обменяться информацией. Однако, действия по развороту антенны энергозатратны и должен сохраняться баланс между актуальностью информации и расходом энергии на поддержание актуальности информации. Агенты проигрывают в тот ход, в котором решают обменяться информацией, но выигрывают в последующих ходах за счет повышения актуальности информации.

Ключевые слова: теория игр, игра координации, последовательная игра, повторяющаяся игра, сетевая игра, сенсорная сеть, направленные антенны.

Поступила в редакцию: 02.06.20 *После доработки:* 01.09.20 *Принята к публикации:* 29.09.20

1. Введение

Пусть агенты из множества $Ag = \{ag_1, \dots, ag_m\}$ перемещаются по местности и должны периодически синхронизировать по радиосвязи информацию друг о друге и о других объектах, замеченных

в процессе движения. За каждым агентом $ag_i \in Ag$ закреплен свой участок ответственности и агент должен, во-первых, выполнить свои непосредственные задачи на этом участке (эта задача имеет приоритет α_i), а затем – поддерживать актуальность информации a_i о других агентах системы с наименьшими возможными издержками e_i (рис. 1). Поддержание актуальности информации о других агентах фактически соответствует поддержанию линии связи между данным агентом и другими агентами.

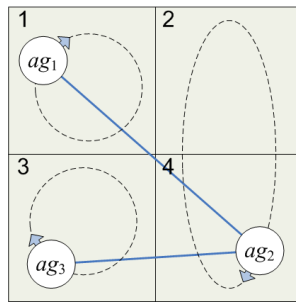


Рисунок 1. Агенты, патрулирующие свои участки. Пунктирные линии обозначают траектории агентов, сплошные – линии связи

Если каждый агент обладает всенаправленной антенной и нет ограничений на время передачи данных, то задача тривиальна, так как обмен информации возможен практически в любой момент времени. Однако, если в целях повышения скрытности и для экономии ресурса электропитания агенты снабжены направленными антеннами и (или) если агенты могут обмениваться информацией только в определенные моменты времени, то синхронизация агентов сильно затрудняется. Становится необходимым выбирать компромисс между актуальностью информации и расходами энергии на разворот агентов, включение передатчика и возможным снижением скрытности.

Примером описанной системы может быть беспроводная сенсорная сеть которая, например, должна выявлять нарушителя и поддерживать связь между своими элементами с возможно меньшим расходом заряда аккумулятора. Беспроводная сенсорная сеть – это распределенная самоорганизующаяся сеть множества узлов, до нескольких сотен или даже тысяч датчиков и исполнительных устройств, объединенных между собой посредством радиоканала. Технология ор-

ганизации связи в сенсорных сетях аналогична применяемой в беспроводных *ad hoc* сетях. Область покрытия подобной сети может составлять от нескольких метров до нескольких километров за счет способности ретрансляции сообщений от одного узла к другому. Развитие беспроводных сенсорных сетей было мотивировано военными приложениями, такими как наблюдение за полем боя. В настоящее время такие сети используются во многих промышленных и бытовых приложениях [6]. Автор принимал участие в исследовании свойств подобной сети, описанной в [2]. Для сетей такого типа экономия заряда аккумулятора имеет первостепенное значение, так как в силу миниатюрности датчика невозможно обеспечить его долговечным источником энергии. По этой причине датчики не могут поддерживать информационный обмен непрерывно и включаются периодически.

Другим примером описываемой системы может быть беспроводная сеть, в которой узлы оснащены направленными антеннами, описанная в работе [4] и более поздних работах [1,8,3] и др. Использование направленных антенн обусловлено соображениями энергоэффективности и безопасности. В этих статьях каждый узел, расположенный в определенной точке на плоскости, использует направленную антенну, смоделированную сектором с заданным углом и радиусом. Авторы решали задачу ориентации антенн таким образом, чтоб граф, индуцированный передачами узлов, был сильно связан. Однако, легко представить ситуацию, в которых невозможно построить сеть устройств, образующую связный граф (например, есть ограничения на взаимное расположение узлов). В этих случаях для поддержания информационного обмена необходимо периодически переориентировать некоторые узлы и разработать оптимальный в каком-то смысле алгоритм переориентации.

Применение теории игр к моделированию сетевых структур и, в частности, к беспроводным *ad hoc* и сенсорным сетям довольно широко распространено (см., например, монографию [11], в которой рассматриваются игры энергоэффективного управления питанием, игры доступа к общему каналу связи и т.п.). В настоящей статье, в сущности, рассмотрена модель, подобная известной модели сетевой игры из [10], однако для иного класса функций выплат. Также работа имеет определенное сходство с работами по теории последовательных

сетевых игр [14,13]. В этих работах авторы добавляли к стандартной методологии некооперативных многоступенчатых игр сетевой компонент. В системе взаимодействий игроки связаны друг с другом и предполагается, что во время игрового процесса игроки могут учитывать текущую систему взаимодействий, добавляя или разрывая новые соединения, поскольку каждое соединение содержит некоторую полезность для игрока (положительную или отрицательную). Однако, авторы моделировали существенно более эгоистичных агентов, которые организовывали связь только если это полезно для них.

В настоящей работе агенты обязаны установить связь, но пытаются сделать это в момент, в котором они понесут наименьшие издержки. Ранее автор сообщал общую идею предлагаемой модели в докладе [9] (однако, на тот момент автор планировал описание кооперативной игры). В отличие от многих подобных игр, моделирующих поведение сети связи, в настоящей работе в целевую функцию включаются не только энергозатраты, но и актуальность информации в сети. Автор полагает, что предложенная игра может применяться не только для описания мобильных сетей связи, но и для некоторых типов социальных сетей, в которых установление необходимой агенту связи сопряжено с риском.

К предлагаемой в статье модели близка также глобальная игра координации, которой агент имеет возможность отложить свой выбор [7]. Агенты, задерживающие выбор, имеют доступ к точной частной информации на втором этапе, но получают более низкие выплаты. Авторы моделировали таким образом ситуацию, в котором более позднее инвестирование приносит большую выгоду в отдаленной перспективе, в силу роста осведомленности агента о ситуации, но снижает выгоду в ближайшем будущем. Также и в настоящей статье агенты проигрывают на стадии синхронизации, но затем восполняют свой проигрыш в результате обновления информации и поддержания сети.

2. Постановка задачи

Как обычно, \mathbb{N} – это множество натуральных чисел, \mathbb{R} – множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ – множество неотрицательных чисел, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора в m -мерном вещественном линейном

пространстве \mathbb{R}^m , $T \subseteq \mathbb{N}$ – множество моментов времени функционирования системы. Для упрощения будем далее предполагать, что $T = \{t \in \mathbb{N} | t \leq N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Округление числа x к ближайшему большему целому будем обозначать как $\lceil x \rceil$, к ближайшему меньшему целому как $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$.

Сопоставим агенту ag_i , $i = \overline{1, m}$, в момент времени $t \in T \subseteq \mathbb{N}$ вектор актуальности информации

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{S}) = (a_1(t; S_1, \dots, S_m), \dots, a_m(t; S_1, \dots, S_m))$$

и вектор расходов на поддержание актуальности информации

$$\mathbf{e}(t, \mathbf{S}) = (e_1(t; S_1, \dots, S_m), \dots, e_m(t; S_1, \dots, S_m)).$$

Здесь $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m)$, $S_i \subseteq T$ – множество моментов времени, в которые агент ag_i осуществляет обновление информации, $a_i : T \times (2^T)^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – функция актуальности информации у агента ag_i , $e_i : T \times (2^T)^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – функция затрат на поддержание актуальности информации у агента ag_i .

Задача состоит в том, чтоб подобрать набор моментов синхронизации \mathbf{S} , максимизирующий в каком-то смысле $\mathbf{a}(t, \mathbf{S})$ и минимизирующую $\mathbf{e}(t, \mathbf{S})$.

Будем полагать, что функция актуальности информации и функция затрат на поддержание актуальности информации у всех агентов имеет один и тот же вид:

$$a_i(t, \mathbf{S}) = a(t, \mathbf{S}, \alpha_i(t)), \quad (2.1)$$

$$e_i(t, \mathbf{S}) = e(t, \mathbf{S}). \quad (2.2)$$

Здесь $\alpha_i : T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ – ограниченная функция, определяющая занятость агента. Если агент занят, например наблюдает нечто очень важное, то ему может быть не до рутинной синхронизации. Функция a строго возрастает по третьему аргументу.

Одинаковый вид функций (2.1), (2.2) для всех агентов связан с тем, что агенты либо сами являются однотипными устройствами, либо снабжены одинаковыми устройствами связи. Эта обычная ситуация в государственных ведомствах, когда на вооружение принимается строго определенный тип оборудования. Более того, проектирование систем связи из разнородных устройств приводит к неоправданным сложностям в последующей эксплуатации.

Каждому агенту ag_i в момент времени $t \in T$ достоверно известны лишь α_i и $S_j \cap \{1, \dots, t-1\}$, $j = \overline{1, m}$. Агент ag_i может делать вывод о росте α_j в момент времени \tilde{t} , если ag_j долгое время не синхронизируется с ag_i , то есть если $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k \in S_i$ и $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k \notin S_j$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \tilde{t}$. Таким образом, t_0 – первый момент времени, в котором синхронизация ожидается, но не происходит, t_i , $i = \overline{1, k}$ – последующие моменты времени, в которых синхронизация ожидается, но не происходит.

Поясним введенные обозначения примером. Пусть $Ag = \{ag_1, ag_2\}$, $S_1 = \{1, 2, 5, 7, 10\}$, $S_2 = \{1, 2, 9, 10\}$. В момент времени $t = 5$ агент ag_1 знает лишь об уже прошедших моментах синхронизации с агентом ag_2 , а именно о моментах

$$S_1 \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$$

и не знает, что в момент $t = t_0 = 5$ синхронизации не будет, так как $5 \notin S_2$. Причина такого несовпадения моментов возможной синхронизации может быть в том, что ag_2 не должен выходить в $t = 5$ в эфир для снижения своей заметности (о чем он тоже заранее может не знать) или же ag_2 неожиданно стал свидетелем вторжения неприятеля и должен срочно собирать информацию о вторжении, а не следовать рутинной процедуре. Далее, в $t_1 = 7$ синхронизация опять не происходит и ag_1 на основании этого делает вывод, что с ag_2 происходит что-то экстраординарное и т.д. Поэтому изначально ag_1 устанавливает для себя $\alpha_2 = 1$ (нормальный режим работы ag_2), а, например, в $\tilde{t} = 8$ устанавливает $\alpha_2 = 2$ (предполагаемый экстраординарный режим работы ag_2 , который дважды не вышел на связь).

3. Термины и определения

Далее нам потребуются некоторые определения. Пусть задана некооперативная игра m лиц в нормальной форме $(Ag, \tilde{\mathbf{S}}, \mathcal{H})$, где $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{S}_1 \times \tilde{S}_2 \times \dots \times \tilde{S}_m$ – набор возможных профилей чистых стратегий, а \mathcal{H} – набор функций выплат, $\mathcal{H}_i : \tilde{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$.

Определение 1. Пусть каждый игрок $ag_i \in Ag$ выбирает действие $\bar{t}_i \in \tilde{S}_i$, в результате чего получается профиль стратегий

$$\mathbf{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \in \tilde{\mathbf{S}}.$$

Тогда выигрыш ag_i будет $\mathcal{H}_i(\mathbf{t})$. Выигрыш зависит не только от стратегии \bar{t}_i , выбранной самим игроком ag_i , но и от чужих стратегий \bar{t}_{-i} , то есть всех стратегий \bar{t}_j при $j \neq i$. Профиль стратегий $\mathbf{t}^* = (\bar{t}_i^*; \bar{t}_{-i}^*) \in \tilde{\mathbf{S}}$ является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии с \bar{t}_i^* на \bar{t}_i не выгодно ни одному игроку i , т.е. для любых $\bar{t}_i \in \tilde{S}_i$

$$\mathcal{H}_i(\mathbf{t}^*) \geq \mathcal{H}_i(\bar{t}_i; \bar{t}_{-i}^*), \quad i = \overline{1, m}.$$

Поскольку синхронизация системы агентов происходит не однократно, а периодически, то нам потребуется также представление игры в развернутой форме, в виде дерева, конструкция которого описана в разделе 7. Вершины это дерева называются позициями, а ребра – ходами.

Определение 2. Информационным множеством называют множество позиций в игре в развернутой форме, которые неразличимы между собой для игрока, совершающего в них ход, в связи с неполнотой информации о действиях других участников игры.

Определение 3. Подыгрой называется любая часть (подмножество) игры, которая удовлетворяет следующим критериям:

1. Она имеет одну начальную позицию, находящуюся в одноточечном информационном множестве.
2. Содержит все позиции исходной игры, следующие за любой содержащейся в ней позицией.
3. Содержит все элементы информационных множеств, если в нее входит хотя бы один их элемент.

Определение 4. Набор стратегий игроков называется равновесием, совершенным по подыграм, если его сужение на любую подыгру данной игры есть равновесие Нэша в данной подыгре.

Определение 5. Пусть $\psi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вектор критериев задачи многокритериальной оптимизации. Вектор решения $\mathbf{S}^* \in \mathbf{T}$ называется оптимальным по Парето, если не существует $\mathbf{S} \in \mathbf{T}$ такого, что $\psi_i(\mathbf{S}) \geq \psi_i(\mathbf{S}^*)$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $\psi_i(\mathbf{S}) > \psi_i(\mathbf{S}^*)$ для хотя бы одного i .

Множество оптимальных по Парето решений называют фронтом Парето.

Определение 6. n -м обобщенным гармоническим числом порядка s называется сумма ряда

$$H_n^{(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}.$$

Определение 7. ζ -функцией Римана называется сумма ряда Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1,$$

Хорошо известно, что обобщенные гармонические числа $H_n^{(s)}$, $Re(n) > 0$, $Re(s) > 1$, выражаются через ζ -функцию Гурвица:

$$H_n^{(s)} = \zeta(s, 1) - \zeta(s, n+1), \quad \zeta(s, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+q)^s}, \quad \zeta(s, 0) = \zeta(s).$$

При $s = 1$ известно интегральное представление Эйлера

$$H_n^{(1)} = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

4. Актуальность информации

Пусть $Ag = \{ag_1, ag_2\}$ и оба агента перемещаются на плоскости \mathbb{R}^2 . Предположим, что основным типом информации, которым оперируют агенты, является информация о координатах различных объектов, в том числе – самих агентов. Если из точки $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ с начального момента времени $t_c = 0$ равномерно движется агент ag_1 со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, то через время t_c этот агент находился бы в точке $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + t_c \mathbf{v}$. Тогда расстояние от неподвижного агента ag_2 , находившегося все это время в точке \mathbf{r}_2 , до агента ag_1 будет

$$l(t_c) = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + t_c \mathbf{v}\|.$$

Определим в это случае актуальность информации об агенте ag_1 у агента ag_2 на момент времени t_c как

$$A(t_c) = \frac{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\|}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\| + t_c \|\mathbf{v}\|} \leq \frac{l(0)}{l(t_c)}.$$

Соотношение может быть переписано как

$$A(t_c) = \frac{1}{1 + t_c \rho}, \quad \rho = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\|}.$$

Перейдем к времени $t = 1 + \rho t_c$ и положим, что

$$A(t) = \frac{1}{t}.$$

Если предположить, что агент движется не с одной и той же скоростью, а его траектория, начиная с момента $t_d = 1$, является случайным блужданием

$$\mathbf{r}(t_d + 1) = \mathbf{r}(t_d) + (\xi, \eta),$$

где $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ – нормально распределенный случайный вектор с независимыми компонентами, с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением σ . В этом случае, согласно центральной предельной теоремы, при достаточно больших t_d случайный вектор $r(t_d)$ будет иметь распределение, близкое к двумерному нормальному распределению с ковариационной матрицей $\text{diag}\left(\frac{\sigma^2}{t_d}, \frac{\sigma^2}{t_d}\right)$.

Тогда $\|r(t_d)\|$ будет иметь распределение, близкое к распределению Рэлея с дисперсией $(2 - \pi/2)\sigma^2/t_d$. Соответственно, актуальность информации можно будет определить как

$$A(t_d) = \frac{\sigma\sqrt{2 - \pi/2}}{\sqrt{t_d}} = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t_d = t\sigma^2(2 - \pi/2).$$

Исходя из изложенного, пусть $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – невозрастающая неотрицательная невыпуклая функция, $A(1) = 1$. Пусть

$$t_0, t_1 \in S_1 \cap S_2, \quad t_0 < t_1 \quad \wedge \quad \nexists (\tau \in S_1 \cap S_2) \quad t_0 < \tau < t_1, \quad (4.1)$$

тогда для $t \in T$, $t_0 < t \leq t_1$ будем полагать

$$a_i(t, \mathbf{S}, \alpha_i(t)) = \alpha_i(t)A(t - t_0), \quad (4.2)$$

$i = 1, 2$. Правая часть выражения (4.2) не зависит от \mathbf{S} , так как это выражение описывает актуальность информации только между двумя ближайшими моментами синхронизации t_0, t_1 из \mathbf{S} .

Если агентов более двух, то надо учесть снижение актуальности информации из-за неполной синхронизации. Пусть, например, $t_0 < t_1$, I_0 – множество номеров агентов, с которыми произошла синхронизация в момент времени t_0 , I_1 – множество номеров агентов, с которыми произошла синхронизация в момент времени t_1 , таким образом,

$$t_0 \in \bigcap_{k \in I_0} S_k, \quad t_1 \in \bigcap_{k \in I_1} S_k,$$

$I_0 \subseteq I_1$, не существует

$$\tau \in \bigcap_{k \in I_0} S_k,$$

$t_0 < \tau < t_1$, тогда для $t \in T$, $t_0 < t < t_1$, $i = 1, 2$ будем полагать

$$a_i(t, \mathbf{S}, \alpha_i) = \alpha_i \varphi(|Ag| - |I_0|) A(t - t_0).$$

Здесь $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – невозрастающая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(|Ag|) = 0$. Как изменяется актуальность информации непосредственно в сами моменты синхронизации, следует определять в каждом конкретном случае по-разному.

5. Расходы на поддержание системы

Поддержание актуальности информации для агента требует затрат (расхода энергии на разворот антенны, перемещение в пространстве на позицию, видную другими агентами и т.п., возможность обнаружения сигнала недоброжелательно настроенными агентами). Поэтому можно задать функцию расходов агента в момент времени $t \in T$ следующим образом

$$e(t, \mathbf{S}) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{i=1, m} S_i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}.$$

6. Задача оптимизации

Осталось только понять, что значит «минимизировать» и «максимизировать» для ранее введенных вектор-функций. Если агенты действуют на закрепленном за каждым агентом участке в одиночку, то первостепенное значение для них имеет актуальность своей

собственной информации, к тому же, они не имеют непрерывного доступа к информации в других агентах.

В соответствии с (2.1), будем полагать, что

$$a_j(t, \mathbf{S}) = a(t, \mathbf{S}, \alpha_j(t)) = \alpha_j(t) \tilde{a}(t, \mathbf{S}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначим $\mathbf{g}_i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_m^i)$, $\mathbf{a}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ и

$$\begin{aligned} F_i(t, \mathbf{S}; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta) &= \sum_{\tau=1}^t \sum_{j=1}^m \gamma_j^i (a_j(\tau, \mathbf{S}) - \beta e_j(\tau, \mathbf{S})) = \\ &= \sum_{\tau=1}^t \sum_{j=1}^m \gamma_j^i (\alpha_j(\tau) \tilde{a}(\tau, \mathbf{S}) - \beta e(\tau, \mathbf{S})). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Разумным кажется предположить, что каждый агент $ag_i \in Ag$ решает относительно \mathbf{S} в момент времени $t' \in T$, $t' \leq t \in T$ задачу оптимизации типа

$$F_i(t, \mathbf{S}; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta) \rightarrow \max, \quad (6.2)$$

где $\gamma_i^i = 1$, $0 \leq \gamma_j^i \leq 1$, $j = \overline{1, m}$, $j \neq i$ – веса, определяющие важность других агентов для агента ag_i , β – вес расходов на синхронизацию.

В выражении (6.1) входят члены, относящиеся не только к $ag_i \in Ag$, но и к прочим агентам из Ag , потому что все агенты должны действовать как единая система и агент ag_i не может максимизировать только разность своей собственной актуальности информации и расходов на поддержание актуальности своей информации $a_i(t, \mathbf{S}, \alpha_j(t)) - \beta e_i(t, \mathbf{S})$ полностью в ущерб разности $a_j(t, \mathbf{S}, \alpha_j(t)) - \beta e_j(t, \mathbf{S})$ актуальности информации и расходам на ее поддержание у другого агента $ag_j \in Ag$. Иначе говоря, агент ag_i должен не только пользоваться информацией других агентов, но и отдавать им информацию сам. Но так как для агента ag_i свое функционирование обычно важнее, чем функционирование других агентов, то параметр γ_i^i может быть выбран больше, чем γ_j^i , $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$.

Если антенны двух агентов $ag_i, ag_j \in Ag$ не направлены друг на друга в момент времени t или передача информации хотя бы одним из агентов невозможна по иной причине, то $t \notin S_i \cap S_j$. Таким образом, S_i и S_j редактируются в процессе функционирования системы агентов и

учет изменения направлений антенн агентов может быть реализован как ограничение на возможный вид искомым множеств S_i , $i = \overline{1, m}$:

$$\mathbf{S} \in \mathbf{T} \subseteq (2^T)^n. \quad (6.3)$$

Основная трудность здесь, что агенты не видят будущего и даже не всегда видят друг друга, отчего компоненты векторов \mathbf{g}_i , $\mathbf{a}(t)$, \mathbf{S} известны им лишь частично и время от времени. Поэтому далее будем рассматривать задачу (6.2), (6.3) в методологии теории игр. В разделах 7, 8 будут рассмотрены случаи, когда агенты знают направление антенн и возможность выхода на связь друг друга и выходят на связь только тогда, когда это возможно, а в разделе 9 рассмотрен случай, когда агенты не обладают полной информацией о возможности выхода на связь друг у друга.

7. Игра поддержки актуальности информации

Агент $ag_i \in Ag$ в такте t имеет альтернативы:

- s_0 – запросить синхронизацию;
- s_1 – не запрашивать синхронизацию.

Остальные агенты $ag_j \in Ag$, $i \neq j$ могут по очереди

- r_0 – подтвердить синхронизацию;
- r_1 – не подтверждать синхронизацию.

Предположим, что все агенты синхронизируются по принципу «точка-точка» и не конкурируют при этом. В этом случае для синхронизации агентов ag_i , ag_j имеет значение лишь компоненты S_i , S_j вектора моментов синхронизации \mathbf{S} . Вектор моментов синхронизации с этими значимыми компонентами S_i , S_j далее обозначим как $[S_j, S_i]$.

Альтернатива s_0 , выбранная агентом ag_i в момент времени t , соответствует тому, что $t \in S_i$, альтернатива r_0 агента ag_j в момент времени t соответствует тому, что $t \in S_j$, таким образом, альтернатива s_0 агента ag_i в момент времени t , за которой следует r_0 агента ag_j в то же момент времени соответствует $t \in S_i \cap S_j$. Все остальные

сочетания альтернатив соответствуют тому, что $t \notin S_i \cap S_j$. Обозначим $S_i^t \subseteq T$ – множество тактов синхронизации, уже осуществленных агентом ag_i к моменту $t > 1$,

$$\begin{aligned} p_{00}^{ij}(t) &= F_i(t, [S_i^{t-1} \cup \{t\}, S_j^{t-1} \cup \{t\}]; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta), \\ p_{01}^{ij}(t) &= F_i(t, [S_i^{t-1} \cup \{t\}, S_j^{t-1}]; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta), \\ p_{10}^{ij}(t) &= F_i(t, [S_i^{t-1}, S_j^{t-1} \cup \{t\}]; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta), \\ p_{11}^{ij}(t) &= F_i(t, [S_i^{t-1}, S_j^{t-1}]; \mathbf{g}_i, \mathbf{a}(t), \beta). \end{aligned}$$

Таким образом, здесь $p_{qk}^{ij}(t)$ – это часть выигрыша агента $ag_i \in Ag$ обусловленная синхронизацией в такт t с любым другим агентом $ag_j \in Ag$, при условии, что ag_i выбрана альтернатива s_q , а агентом ag_j выбрана альтернатива r_k .

Можно предполагать, что ag_i пытается синхронизироваться в один такт только с одним другим агентом, так как время такта ограничено и за него можно успеть развернуть антенну только в направлении одного агента. Однако, если ширина основного лепестка диаграммы направленности достаточно велика, то можно считать, что за один такт агент ag_i пытается синхронизироваться с несколькими другими агентами $ag_j \in Ag, j \in I_0 \subseteq \{1, \dots, m\}$ (рис. 2). Тогда полный выигрыш агента ag_i в такт t запишется как

$$p_{q,\mathbf{k}}^{i,I_0}(t) = \sum_{j \in I_0} p_{qk_j}^{ij}(t), \quad \mathbf{k} = (k_{j_1}, \dots, k_{j_{|I_0|}}).$$

Если синхронизация с несколькими агентами происходит в пределах одного такта, то очередность синхронизации не важна. Однако, если синхронизация происходит за несколько тактов, то агенты, синхронизирующие последними, будут всегда иметь наименее актуальную информацию, по каковой причине необходимо, например, периодически менять порядок синхронизации.

Неизвестная часть компонентов параметров $\mathbf{a}(t)$, β и \mathbf{g}_i подбираются каждым агентом исходя из своих потребностей и представлений о других агентах. Имеет смысл полагать, что обычно $\mathbf{a}(t) = (1, \dots, 1)$, изменяясь лишь в некоторые критические моменты.

Рассмотрим случай двух агентов и обозначим $p_{qk}^{ij}(t) = p_{qk}^i(t)$. В нормальной форме два хода игры в такт t будут записаны в таблице 1.

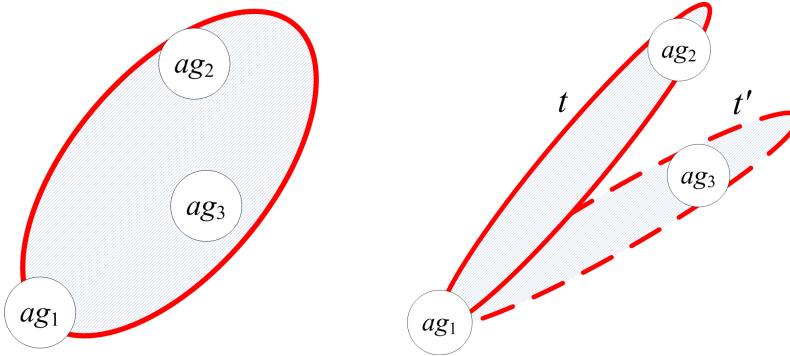


Рисунок 2. Синхронизация трех агентов в один такт (слева) и в несколько тактов (справа). Пунктиром показано новое положение диаграммы направленности в такт $t' > t$

Таблица 1. Игра синхронизации в нормальной форме

		Агент ag_2	
		r_0	r_1
Агент ag_1	s_0	$(p_{00}^1(t), p_{00}^2(t))$	$(p_{01}^1(t), p_{01}^2(t))$
	s_1	$(p_{10}^1(t), p_{10}^2(t))$	$(p_{11}^1(t), p_{11}^2(t))$

В развернутой форме игра запишется в виде бинарного дерева. В случае двух агентов дерево приведено на рисунке 3. Узлы δ —го яруса этого дерева, соответствующего ходу δ , $\delta = 0, 1, 2, \dots$, можно обозначать как $u(\delta, k)$, $k = \overline{0, 2^\delta - 1}$, причем $u(\delta, k)$ смежен с $u(\delta - 1, l)$, если $l = \lfloor k/2 \rfloor$ и ребру между $u(\delta, k)$ и $u(\delta - 1, l)$ будет соответствовать альтернатива s_i , $i = k \bmod 2$, если δ четное и r_i , $i = k \bmod 2$, если δ нечетное. Каждому узлу на четном ярусе δ будет соответствовать вектор выигрышей (u_1, u_2) за такт $t = \delta/2$, u_i — выигрыш i -го агента.

Предполагается, что заданы значения выигрышей до начала игры $p_{kl}^1(0) = P_1 \geq 0$, $p_{kl}^2(0) = P_2 \geq 0$, $k, l = 0, 1$. Будем считать, что одному такту дискретного времени из T соответствует m ходов игры. Если в системе 2 агента, синхронизация которых занимает один такт дискретного времени, то за N тактов произойдет $2N$ ходов игры. Последовательность всех ходов игры за один такт времени функционирования системы назовем туром игры синхронизации.

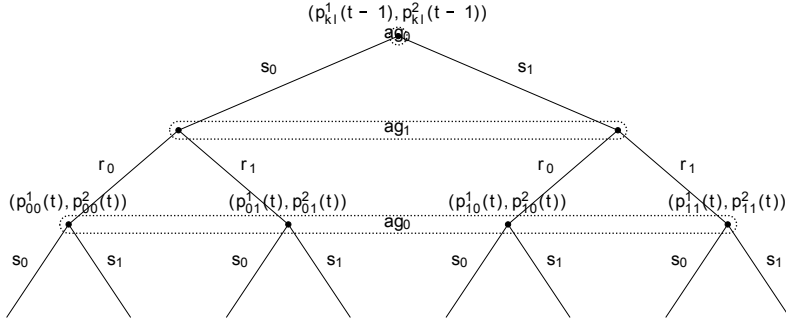


Рисунок 3. Игра синхронизации в развернутой форме

8. Пример полной определенности

8.1. Простейший случай

Пусть $m = 2$, $\gamma_j^i = 0$, $i \neq j$ и $\gamma_j^i = 1$, $i = j$, $i, j = \overline{1, m}$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 1$, $A(t) = t^{-p}$, $p = 1$ или $p = 1/2$, $T = \{t \in \mathbb{N} | t \leq N\}$.

Таблица 2. Игра синхронизации $M(t)$ в пределах одного такта функционирования системы

		Агент ag_2	
		r_0	r_1
Агент ag_1	s_0	$(-\beta, -\beta)$	$(-\beta, 1/(t - \tau))$
	s_1	$(1/(t - \tau), -\beta)$	$(1/(t - \tau), 1/(t - \tau))$

Обозначим $\tau = \mathfrak{T}(M(t))$, $t > 1$,

$$\mathfrak{T}(M(t)) = \begin{cases} t - 1, & \text{если в такт } t - 1 \text{ выбрана стратегия } (s_0, r_0), \\ \mathfrak{T}(M(t - 1)) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $t - 1 = 0$, то полагается, что $\tau = 0$.

Если использовать представление игры в виде последовательности матриц нормальной формы игры $M(t)$, τ – время последнего перед t выбора (r_0, s_0) , то матрица игры может быть представлена таблицей 2. Здесь, в отличие от таблицы 1, в ячейках не сами значения функции F_i , а приращения этих значений в один такт.

Пусть $S = (t_1, \dots, t_r, \dots, t_l) \subseteq T$ – вектор моментов синхронизации рассматриваемого агента, являющийся соответствующей компонентой набора моментов синхронизации всех агентов \mathbf{S} . Нулевой момент синхронизации, происходящий до начала игры, обозначим как $t_0 = 0$, конец игры как $t_{l+1} = N$. Ситуации вида (s_1, r_0) и (s_0, r_1) заведомо уменьшают выигрыш одного из агентов без какой-либо пользы для него в будущем и не должны применяться, поэтому далее имеет смысл рассматривать только $S = S_1 \cap S_2$. Обозначим выигрыш агента ag_i к моменту времени t как

$$F_i(t, S^m; \mathbf{g}_i, \mathbf{1}^m, \beta) = F_{i,\beta}(t, S). \quad (8.1)$$

Очевидно, что ситуация (s_0, r_0) не является равновесной по Нэшу ни в одной игре $M(t)$, $t \in T$, поскольку ей соответствует отрицательный выигрыш для обоих игроков, а в остальных ситуациях хотя бы один игрок имеет положительный выигрыш.

Обозначим $\Delta_k = t_k - t_{k-1} - 1$ и получим соотношение

$$\begin{aligned} F_{i,\beta}(N, S) &= -l\beta + \sum_{k=1}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} \tau^{-p} = -(l-1)\beta + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} \tau^{-p} + \left(-\beta + \right. \\ &+ \left. \sum_{\tau=1}^{\Delta_r} \tau^{-p} \right) = -(l-1)\beta + \sum_{\substack{k=1 \wedge k \neq r \\ k \neq r+1}}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} \tau^{-p} + \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} \tau^{-p} + \left(-\beta + \sum_{\tau=1}^{\Delta_r} \tau^{-p} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+1}} \tau^{-p} - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} \tau^{-p} \right) = F_{i,\beta}(N, S \setminus \{t_r\}) + \left(-\beta + \sum_{j=0}^1 \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+j}} \tau^{-p} - \right. \\ &\left. - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} \tau^{-p} \right). \quad (8.2) \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы ситуация (s_0, r_0) в момент времени $t = t_r \neq N$ привела к неотрицательному выигрышу, необходимо чтобы

$$\Phi_{i,\beta}(t_{r-1}, t_r, t_{r+1}) = -\beta + \sum_{j=0}^1 \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+j}} \tau^{-p} - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} \tau^{-p} \geq 0. \quad (8.3)$$

Видно также, что для максимизации $\Phi_{i,\beta}$ надо было, чтобы $\Delta_{r+1} = \Delta_r$. Также из (8.2) видно, что если все $\Delta_j = \Delta$, $j = \overline{1, l}$, то $l =$

$\lfloor N/(\Delta + 1) \rfloor$ и

$$F_{i,\beta}(N, S) = \left\lfloor \frac{N}{\Delta + 1} \right\rfloor \left(-\beta + \sum_{\tau=1}^{\Delta} \tau^{-p} \right) = \left\lfloor \frac{N}{\Delta + 1} \right\rfloor \left(-\beta + H_{\Delta}^{(p)} \right),$$

где $H_{\Delta}^{(p)}$ – обобщенное Δ -е гармоническое число порядка p . Функция

$$\tilde{F}_{\beta}(N, S) = \frac{N}{\Delta + 1} \left(-\beta + H_{\Delta}^{(p)} \right)$$

дифференцируема и имеет максимум $\tilde{\Delta}$ в корне уравнения

$$-H_{\tilde{\Delta}}^{(p)} + (\Delta + 1)p \left(\zeta(p + 1) - H_{\tilde{\Delta}}^{(p+1)} \right) + \beta = 0, \quad (8.4)$$

где ζ – дзета-функция Римана. Соответственно, агентам необходимо применять (s_0, r_0) через каждые Δ тактов после начала игры, где Δ выбрано как можно ближе к $\tilde{\Delta}$. При этом очевидно, что в последнем такте N синхронизация никогда не повлечет положительного выигрыша и должно применяться (s_1, r_1) .

Поскольку $F_{1,\beta}(N, S) = F_{2,\beta}(N, S)$, то полученная максимизацией (8.1) стратегия S^{*o} будет и Парето-оптимальной, и равновесием по Нэшу.

8.2. Более общий случай

Необходимо исследовать вопрос выбора моментов синхронизации S , максимизирующих функцию

$$F_{i,\beta}(N, S) = -Q(S)\beta + \sum_{k=1}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} (\gamma_1^i A(\tau) + \gamma_2^i \alpha(\tau + t_{k-1})A(\tau)), \quad (8.5)$$

где $Q(S)$ – количество компонент вектора S . Здесь $\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_2 \equiv \alpha$. Обозначим $f_i(\tau, k, S) = \gamma_1^i A(\tau) + \gamma_2^i \alpha(\tau + t_{k-1})A(\tau)$ и применим тот

же подход, что и в (8.2), тогда

$$\begin{aligned}
F_{i,\beta}(N, S) &= -Q(S)\beta + \sum_{k=1}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} f_i(\tau, k, S) = \\
&= -Q(S \setminus \{t_r\})\beta + \sum_{\substack{k=1 \wedge k \neq r \\ k \neq r+1}}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} f_i(\tau, k, S) + \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, r, S) + \\
&\quad + \left(-\beta + \sum_{i=0}^1 \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+i}} f_i(\tau, r, S) - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, k, S) \right) = \\
&= F_{i,\beta}(N, S \setminus \{t_r\}) + \left(-\beta + \sum_{j=0}^1 \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+j}} f_i(\tau, r, S) - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, r, S) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, опять возникает вопрос о том, когда

$$-\beta + \sum_{j=0}^1 \sum_{\tau=1}^{\Delta_{r+j}} f_i(\tau, r, S) - \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, r, S) \geq 0. \quad (8.6)$$

Пусть $T = \{t \in \mathbb{N} | t \leq N\}$, θ – функция Хевисайда (единичная ступенька)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases},$$

$$\mu(T) = \sum_{i=1}^N \theta(t-i)$$

– дискретная мера. Тогда неравенство (8.6) можно переписать с использованием интеграла Лебега-Стилтьеса как

$$\begin{aligned}
-\beta + \int_1^{\Delta_r} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau) + \int_1^{t_{r+1}-t_{r-1}-1-\Delta_r} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau) - \\
- \int_1^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau) \geq 0. \quad (8.7)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,\beta}(t_r) &= -\beta + \int_1^{t_r-t_{r-1}} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau) + \int_1^{t_{r+1}-t_r-1} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau) - \\
&\quad - \int_1^{t_{r+1}-t_{r-1}-1} f_i(\tau, r, S) d\mu(\tau).
\end{aligned}$$

Для того, чтобы найти экстремум $\Phi_{i,\beta}(t_r)$, необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t_r} \Phi_{i,\beta}(t_r) = f_i(t_r - t_{r-1}, r, S) - f_i(t_{r+1} - t_r - 1, r, S) = 0. \quad (8.8)$$

По определению f получаем из (8.8) уравнение

$$(\gamma_1^i + \gamma_2^i \alpha(t_r)) A(t_r - t_{r-1}) = (\gamma_1^i + \gamma_2^i \alpha(t_{r+1} - t_r - 1 + t_{r-1})) A(t_{r+1} - t_r - 1). \quad (8.9)$$

Матрицу $MC(t)$ всей игры в нормальной форме в такт $t \in T$ можно записать следующим образом. Столбцы r_0, r_1 будут соответствовать двум возможным стратегиям агента ag_2 , а строки будут соответствовать предшествующим ситуациям:

$$\left(\prod_{\tau=1}^{t-1} (s_{i_\tau} \cdot r_{j_\tau}) \right) \cdot s_k, \quad k = 0, 1,$$

где « \prod » и « \cdot » – конкатенация строк. Таким образом, в матрице будет два столбца и 2^{2t-1} строк, а номер каждой компоненты (k, l) будет соответствовать последовательности моментов синхронизации S^{kl} . Причем если в строке, соответствующей

$$(s_{i_0} \cdot r_{j_0}) \cdot \dots \cdot (s_{i_{t-1}} \cdot r_{j_{t-1}})$$

в скобках под номером t_r $s_{i_r} = s_0, r_{i_r} = r_0$, то $t_r \in S_1 \cap S_2$ – момент успешной синхронизации. Будем обозначать множество номеров строк $I(t)$ и строку, маркированную $(s_{i_0} \cdot r_{j_0}) \cdot \dots \cdot (s_{i_{t-1}} \cdot r_{j_{t-1}})$ будем отождествлять с числом в двоичной форме $i = (i_0 j_0 \dots i_{t-1} j_{t-1})_2 + 1$ и с набором моментов синхронизации S .

Определение 8. Назовем оптимальным решением игры синхронизации $MC(N)$ с конечным числом туров N множество моментов синхронизации S_{OP} , соответствующее оптимуму Парето для задачи многокритериальной оптимизации

$$F_{1,\beta}(N, S) \rightarrow \max, \quad F_{2,\beta}(N, S) \rightarrow \max.$$

Замечание 1. Пусть $i, j = 1, 2, i \neq j$. Обозначим

$$\mathcal{S}_i = \text{Arg max}_{S \in 2^T} F_{i,\beta}(N, S)$$

Тогда оптимумами Парето являются, например, точки

$$S_{OP}^j \in \text{Arg max}_{S \in S_i} F_{j,\beta}(N, S).$$

Утверждение 1. Ситуация, соответствующая оптимальному решению игры синхронизации с конечным числом туров N и с функцией выплат (8.5), не содержит сочетания стратегий вида s_0r_1 или s_1r_0 в один такт.

Доказательство. Пусть S – оптимальная ситуация, содержащая стратегии s_0r_1 или s_1r_0 в один такт t . Заменим в этой ситуации в позиции, соответствующей t , s_0r_1 или s_1r_0 на s_1r_1 , получив ситуацию S^* . В силу (8.5), $F_{i,\beta}(N, S) < F_{i,\beta}(N, S^*)$ для $i \in \{1, 2\}$, что противоречит предположению об оптимальности S . \square

Таким образом, агенты выбирают (s_0, r_0) в момент времени t , если t является решением уравнения (8.9) и выполнено неравенство (8.6) и так далее, аналогично случаю в подразделе 8.1. В противоположном случае, в силу Утверждений 1–3, агенты выбирают (s_1, r_1) . В зависимости от вида функции α , интервалы синхронизации могут быть неравными, удлиняясь при возрастании α и укорачиваясь при убывании. В этом случае при неудачном округлении может получиться неоптимальная ситуация. Если все промежутки Δ_r одинаковы и равны Δ , то это можно исправить, используя синхронизацию через c_1 тактов $\lfloor \Delta \rfloor$ и c_2 тактов $\lceil \Delta \rceil$ тактов, выбирая c_1 и c_2 таким образом, чтоб

$$\frac{c_1 \lfloor \Delta \rfloor + c_2 \lceil \Delta \rceil}{c_1 + c_2} \approx \Delta. \quad (8.10)$$

Утверждение 2. Существует оптимальное решение игры синхронизации с конечным числом туров N и с функцией выплат (8.5), соответствующее равновесному решению игры.

Доказательство. Пусть $MC(N)$ – матрица игры с компонентами (g_{ij}, h_{ij}) ,

$$P^* = \{(l, k) | k \in \{1, 2\}, l \in \text{Arg max}_{i \in I(N)} g_{ik}\},$$

$$P^\circ = \{(l, k) | l \in I(N), k \in \text{Arg max}_{i \in \{1, 2\}} h_{li}\}.$$

По определению, равновесной будет ситуация, соответствующая компонентам с номером $(l^*, k^\circ) \in P^* \cap P^\circ$, которой соответствует множество моментов синхронизации $S^{l^*k^\circ}$.

Ситуация S^{l^*1} не может быть оптимальной, поскольку применение (s_0, r_0) и (s_1, r_0) в конце игры не увеличивает выигрыш ни одного из участников. Возьмем, учитывая Замечание 1, $S_{OP}^2 = S^{l^*2}$ и соответствующую оптимальную ситуацию $(l^*, 2) \in P^*$. Эта ситуация будет и равновесным по Нэшу решением, поскольку

$$h_{l^*2} = F_{2,\beta}(t, S^{l^*2}) \geq F_{2,\beta}(t, S^{l^*k}) = h_{l^*k}, \quad k = 1, 2.$$

□

Далее (раздел 10) мы увидим, что у этой игры бывает и равновесное по Нэшу, но неоптимальное решение.

Утверждение 3. Профиль стратегий игры синхронизации с конечным числом туров N и с функцией выплат (8.5), равновесный по подыграм, не содержит сочетания стратегий вида s_0r_1 или s_1r_0 в один такт.

Доказательство. Пусть $S = (s_{i_1}r_{i_1}) \dots (s_{i_t}r_{i_t}) \dots (s_{i_N}r_{i_N})$ – равновесная по подыграм ситуация, содержащая стратегии s_0r_1 или s_1r_0 в один такт t . В этом случае в подыгре, начинающейся с момента t включительно, $(s_{i_t}r_{i_t}) \dots (s_{i_N}r_{i_N})$ также будет равновесной ситуацией. Однако, если ag_1 заменит s_0r_1 или если ag_2 заменит s_1r_0 на s_1r_1 , то, в силу (8.5), выигрыш ag_2 или ag_1 соответственно не изменится, а выигрыши ag_1 или ag_2 возрастут, что противоречит предположению о равновесности. □

Описанный в разделе метод не вполне подходит, если получившиеся числа Δ_r таковы, что в N тактов нельзя уместить целое число Δ_r и соответствующих моментов синхронизации. Однако, несмотря на недостатки, данный метод позволяет определять во многих случаях моменты синхронизации без помощи перебора, а решая достаточно простое уравнение.

9. Случай неопределенности

В предыдущем разделе, хотя мы и использовали обозначения теории игр, но, по сути, решали оптимизационную задачу обычными для таких задач методами. Однако, если параметры α и β заранее не известны, то свести проблему к оптимизационной задаче не получится.

Пусть функция α не известна для ag_1 , а известно лишь, что $1 \leq \alpha \leq Z$. В этом случае решить уравнение (8.9) невозможно и выбрать однозначно применение стратегий $s_i, r_i, i = 0, 1$ тоже нельзя. Агент ag_1 может лишь предполагать, что если он отправил s_0 в тот момент t_r , когда ag_2 должен был бы ответить, исходя из предположения $\alpha(t_r) = \alpha_r$, а ответа не последовало, то, следовательно, $\alpha(t)$ изменилось и $\alpha(t_r) \neq \alpha_r$.

Например, пусть $\alpha(t_{r-1}) = 1, \alpha(t_r) = \alpha(t_{r+1}) = 2, A(\tau) = t^{-1/2}, \gamma_1^i = \gamma_1^i = 1, i = \overline{1, m}$ и $t_{r-1} = 5, t_{r+1} = 10$. Тогда необходимо максимизировать по t_r функцию

$$\sum_{\tau=1}^{t_r-t_{r-1}} 2t^{-1/2} + \sum_{\tau=1}^{t_{r+1}-t_r-1} 3t^{-1/2} = 2H_{t_r-5}^{(1/2)} + 3H_{10-t_r-1}^{(1/2)},$$

получив в результате $t_r \approx 6.01743$.

Но агент ag_1 пытается максимизировать по t_r функцию

$$2H_{t_r-5}^{(1/2)} + 2H_{10-t_r-1}^{(1/2)},$$

получая в результате $t_r \approx 7.0$. Таким образом, агенты ожидают синхронизацию в разные моменты времени, «промахиваются» и положительного выигрыша не получают.

Аналогично, пусть теперь β зависит от t и может изменяться неизвестным для агентов образом. Оба агента могут найти оптимальный момент времени синхронизации t_r , решая уравнение (8.9), но условие (8.6) будет не выполнено и положительного выигрыша никто из агентов не получит. Эта ситуация соответствует, например, случаю, когда внезапно увеличивается опасность обнаружения агентов при попытке синхронизации, но сами агенты об этом не знают.

Пусть \mathcal{B} – множество всех ступенчатых с не более чем счетным количеством точек разрыва функций стоимости синхронизации агента

$$\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \max_{t \in \mathbb{R}} |\beta(t)| \leq B, \beta \geq 1,$$

\mathcal{A} – множество всех ступенчатых с не более чем счетным количеством точек разрыва функций занятости агента

$$\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \max_{t \in \mathbb{R}} |\alpha(t)| \leq Z, \alpha \geq 1.$$

Обозначим $S_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2$ – множество всех моментов синхронизации, рассчитанных для данных $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$.

Теперь можно иначе проинтерпретировать возникновение ситуаций (s_0, r_1) , за которой в один из следующих тактов следует ситуация (s_1, r_0) . Агент ag_1 в такт t_1 применяет s_0 , не зная об изменении значения функции α , а агент ag_2 отказывается синхронизироваться и применять r_0 для избежания проигрыша. Но при уменьшении значения функции α в такт t_2 , агент ag_2 отвечает на запрос, отправленный в такт t_1 . Точнее

1. Пусть в момент времени t_0 в реальности параметры функции выплат $\alpha_r = \alpha(t_0)$, $\beta_r = \beta(t_0)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ и агент ag_2 знает эти функции.

2. Агент ag_1 при этом ошибочно полагает, что $\alpha^* = \alpha^*(t_0)$, $\beta^* = \beta^*(t_0)$ (т.е. что параметры функции выплат описываются функциями $\alpha^* \in \mathcal{A}$, $\beta^* \in \mathcal{B}$) и что, исходя из уравнения (8.9) и неравенства (8.6) t_0 – оптимальный момент для применения s_0 .

3. Агент ag_2 , получив s_0 в неоптимальный такт (и зная, что ближайший оптимальный такт – это $t_r > t_0$), понимает, что ag_1 имеет ложное представление о функциях α , β и применяет r_1 . Из того, насколько t_r отличается от t_0 , агент ag_2 реконструирует ошибочное представление ag_1 о виде функций α , β .

4. Агент ag_1 , не получив синхронизации в такт, который он полагал оптимальным для этого, заключает, что либо ag_2 вышел из строя, либо он сам, ag_1 , имеет ложное представление о α , β и что $\alpha(t) > \alpha^*(t)$, $\beta(t) > \beta^*(t)$.

5. Агент ag_1 применяет s_1 в каждый $t > t_0$, пока не получит в t_1 ответ r_0 , соответствующее стратегии s_0 , примененной в t . Из того, насколько $t_1 > t_0$, агент ag_1 реконструирует настоящий вид функций α , β .

Таким образом, для описания этой игры нам нужно модифици-

ровать условия (4.1)–(4.2) как

$$t_0 \in S_1(\alpha^*, \beta^*) \cap S_2(\alpha^*, \beta^*), \quad t_2 \in S_1(\alpha, \beta) \cap S_2(\alpha, \beta), \quad t_0 < t_1 \wedge \\ \wedge \nexists(\tau \in S_1 \cap S_2) \quad t_0 < \tau < t_1,$$

$$\forall(t \in T, t_1 < t < t_2) \quad a_1(t, \mathbf{S}, 1) = A(t - t_0),$$

$$\forall(t \in T, t_0 < t < t_1) \quad a_2(t, \mathbf{S}, \alpha(t)) = \alpha(t)A(t - t_0),$$

где t_2 – очередной момент успешной синхронизации ag_1, ag_2 .

В рамках предложенной в статье [5] методологии, можно вместо конкретного агента ag_1 рассматривать классы Ag_1 возможных состояний агента ag_1 ,

$$Ag_1 = \{ag_1(\alpha^*, \beta^*) | \alpha^* \in \mathcal{A}, \beta^* \in \mathcal{B}\},$$

где $ag_1(\alpha^*, \beta^*)$ – агент, предполагающий, что значения параметров α, β агента ag_2 описываются функциями α^*, β^* . Множество возможных состояний природы задается как $\Theta = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. В нашем простом примере множеству миров будет соответствовать множество

$$\Omega = \Theta \times Ag_1 \times \{ag_2\}.$$

Функция информированности агентов η такова, что

$$\eta(ag_1) = \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \quad \eta(ag_2) = (\alpha, \beta).$$

В качестве обобщения равновесия Нэша в простейшем случае, подобным нашему, в [5] предложено понятие информационного равновесия. В нашем примере информационным равновесием будет, например,

$$\chi_1(ag_1) = \text{Arg} \max_{x \in \{s_0, s_1\}} \min_{(\alpha, \beta \in \Theta)} F(\alpha, \beta; t, S_{t-1} \cdot (\chi_2(ag_2)x)),$$

$$\chi_2(ag_2) = \text{Arg} \max_{x \in \{r_0, r_1\}} F(\alpha^*, \beta^*; t, S_{t-1} \cdot (x\chi_1(ag_1))),$$

где $S_{t-1} = (s_{k_0} r_{l_0}) \dots (s_{k_{t-1}} r_{l_{t-1}})$, $k_\tau, l_\tau = 0, 1$, $\tau = \overline{1, t-1}$,

$$F(\alpha, \beta; t, S) = -Q(S)\beta(t) + \sum_{k=1}^l \sum_{\tau=1}^{\Delta_k} (A(\tau) + \alpha(t)(\tau + t_{k-1})A(\tau)). \quad (9.1)$$

Можно, используя методологию [12], пойти далее и ввести дополнительные уровни рефлексии, в которых второй агент будет делать предположения о том, насколько первый агент ошибается в текущем значении функций α и β и так далее. Это имеет смысл, если известны дополнительные условия на α и β , причем одни условия известны только первому агенту, а другие – только второму.

10. Вычислительный эксперимент

Смоделируем вначале случай из подраздела 8.1, в котором $\gamma_1^2 = \gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^1 = \gamma_2^2 = 1$. Возьмем число тактов функционирования системы $N = 10$, и, соответственно, 20 ходов, чтоб успел проявиться рост выигрыша за счет периодической синхронизации. На рис. 4 приведен пример для $\beta = 0.1$, $A(t) = t^{-1}$. Если решать напрямую уравнение (8.4), то получим $\Delta \approx 1.57874$. Так как все такты у нас целые, то это может означать, что, как минимум, на каждые четыре такта синхронизации приходится два промежутка без синхронизации продолжительностью в два такта и два промежутка без синхронизации продолжительностью в такт в соответствии с соотношением (8.10).

Красной вертикальной чертой справа выделены выигрыши, соответствующий равновесным по Нэшу стратегиям, сами красная и зеленая черты также подчеркивают фронт Парето. На пересечении красной и зеленой линии находится точка, соответствующая оптимальной стратегии (с выигрышем (5.6, 5.6) в данном примере). Видно, что кроме оптимальных, присутствуют и другие равновесные ситуации. Оптимальными ситуациями будут ситуации, соответствующие, как и следует из (8.4), компонентам матрицы игры $MC(10)$ с номерами (104936, 2), (106088, 2), (106106, 2), (124520, 2), (124538, 2), (124826, 2), например

$$s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1.$$

Видно, что чем больше β , тем меньше выигрыш и тем большая часть стратегий приводит к отрицательному выигрышу. Для $\beta = 0.5$ (рис. 5) $\Delta \approx 2.43704$. Это значит, что должно быть не менее, чем два промежутка без синхронизации в два такта и один промежуток без синхронизации в три такта и не более, чем два промежутка без синхронизации продолжительностью в два такта и два промежутка

без синхронизации продолжительностью в три такта. Оптимальные ситуации соответствуют компонентам матрицы игры $MC(10)$ с номерами $(124832, 2)$, $(124904, 2)$, $(129512, 2)$, например

$$s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1.$$

Для функции $A(t) = t^{-1/2}$, $\beta = 0.1$ (рис. 6) картина незначительно изменится. Здесь $\Delta \approx 2.8311$ и оптимальные стратегии будут соответствовать компонентам матрицы игры $MC(10)$ с номерами $(124832, 2)$, $(124904, 2)$, $(129512, 2)$, например

$$s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1, s_0r_0, s_1r_1, s_1r_1.$$

Здесь в среднем $2\frac{1}{3}$ такта без синхронизации.

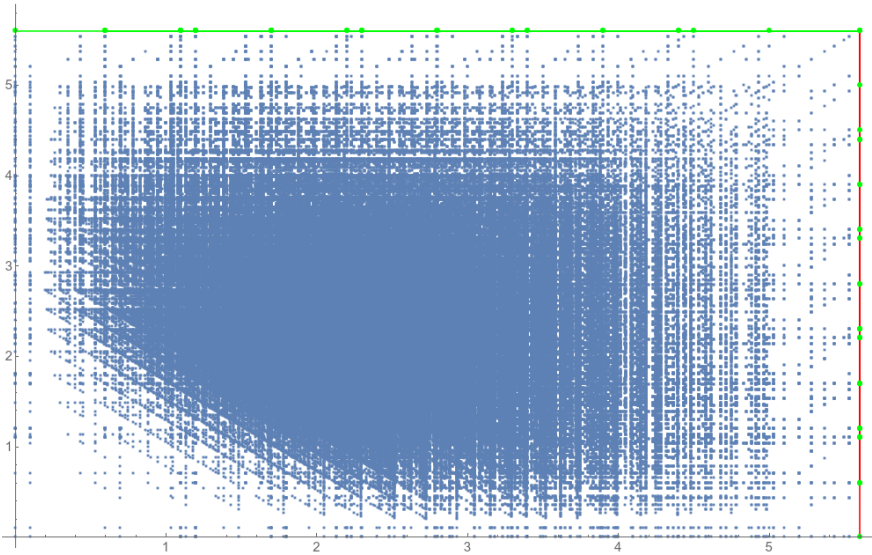


Рисунок 4. Выигрыши при $N = 10$, по осям $F_{i,\beta}$ для первого и второго агента, $\beta = 0.1$, $A(t) = t^{-1}$. Линиями выделен фронт Парето (одна точка), равновесные решения вертикально друг над другом справа

В более общем случае игры из подраздела 8.2, когда $\gamma_i^j \neq 0$, $i \neq j$ картина будет меняться (см. рис. 7) – расположение выигрышей теряет симметричность, а в фронте Парето появляется еще одна точка.

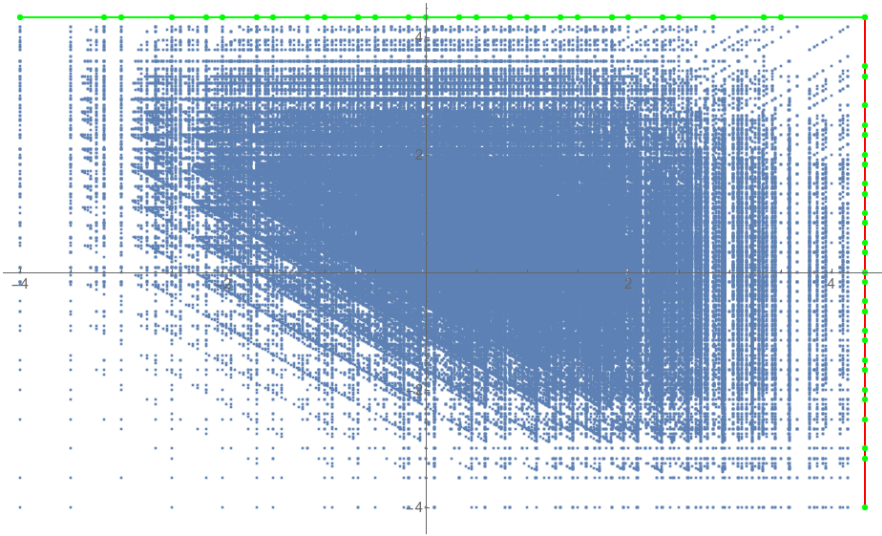


Рисунок 5. Выигрыши при $N = 10$, по осям $F_{i,\beta}$ для первого и второго агента, $\beta = 0.5$, $A(t) = t^{-1}$

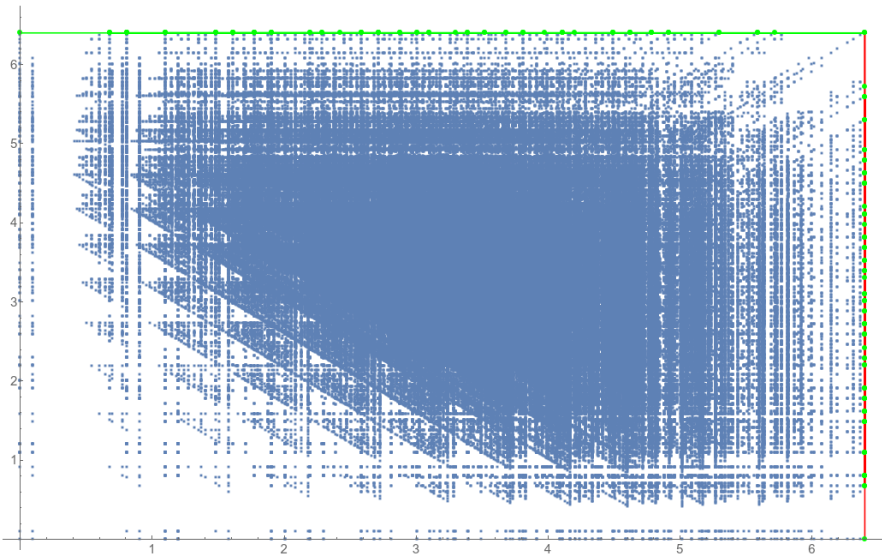


Рисунок 6. Выигрыши при $N = 10$, по осям $F_{i,\beta}$ для первого и второго агента, $\beta = 0.1$, $A(t) = t^{-1/2}$

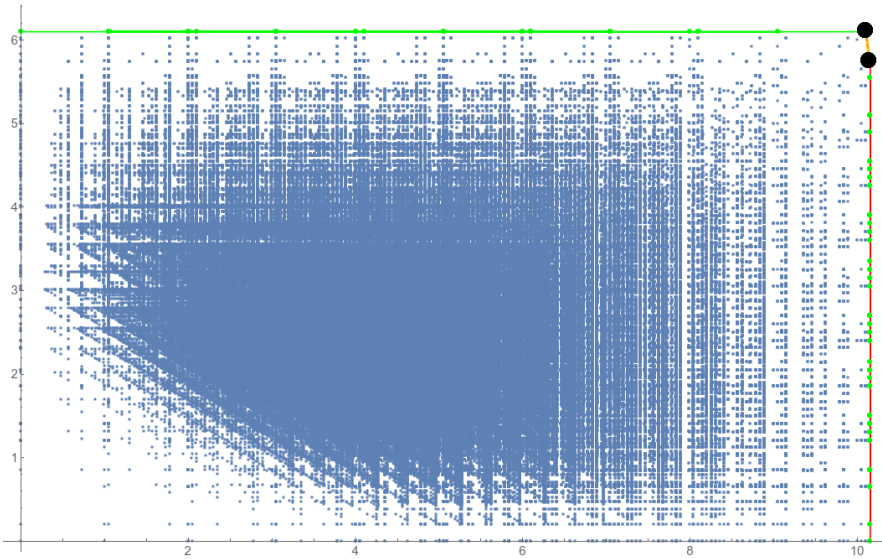


Рисунок 7. Выигрыши при $N = 10$, по оси абсцисс $F_{1,\beta}$ с $\gamma_1^2 = 0.9$, по оси ординат $F_{2,\beta}$ с $\gamma_2^1 = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\alpha \equiv 1$, $A(t) = t^{-1}$, жирными точками выделен фронт Парето

В примере на рисунке оптимальная и равновесная стратегия соответствует позиции в матрице игры $MC(10)$ за номером (499322, 2).

Видно, что во всех рассмотренных случаях любая равновесная стратегия будет давать наибольший возможный выигрыш хотя бы для одного из агентов. При этом, в случае игры из подраздела 8.1 только оптимальная ситуация будет ситуацией, равновесной по подыграм. Остальные равновесные ситуации будут содержать сочетания стратегий типа s_0r_1 или r_1s_0 , которые сделают ситуацию неравновесной в одной из подыгр. Также в этой игре существует ситуация, дающая наибольший возможный выигрыш и для первого, и для второго агентов одновременно. В более сложном случае игры из подраздела 8.2, когда фронт Парето состоит из более чем одной точки, такой ситуации не существует.

11. Заключение

В статье предложена очень упрощенная модель поддержания связности системы агентов, выбирающих компромисс между затратами на организацию связи, своей первоочередной задачей и необходи-

мостью обмениваться актуальной информацией. Рассмотрен случай, когда агенты обладают совершенной информацией и случай неопределенности и выявлены некоторые простые закономерности, необходимые оптимального выбора моментов синхронизации для агентов системы. Модель может быть применена для описания мобильных сенсорных сетей или роботов с направленными антеннами, а также для взаимодействия любых агентов, которым надо скрывать присутствие при выполнении своих задач с разными приоритетами, но при этом им необходим регулярный информационный обмен.

Дальнейшим развитием идеи статьи могло бы быть отождествление предложенной игры с ячейкой клеточного автомата, которая бы соответствовала обособленному во времени или в пространстве фрагменту системы агентов. При этом результаты игры в одних ячейках влияли бы на результаты игры в других.

Автор благодарит заместителя директора ИПУ РАН М.В. Губко за плодотворное обсуждение статьи и превосходную книгу по теории игр, а также начальника сектора НТЦ-54 АО «Концерн «Созвездие» М.П. Сличенко за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астраков С.Н., Ерзин А.И. *Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами* // Вычислительные технологии. 2013. № 2. С. 3–11.
2. Жарков С.Н. *Моделирование мобильной беспроводной сенсорной сети с одним узлом-стоком* // Теория и техника радиосвязи. 2015. № 1. С. 54–65.
3. Aschner R., Katz M.J. *Bounded-Angle Spanning Tree: Modeling Networks with Angular Constraints* // Algorithmica. 2017. Vol. 77, no. 2. P. 349–373.
4. Caragiannis I., Kaklamanis C., Kranakis E. et al. *Communication in Wireless Networks with Directional Antennas* // Proceedings of the Twentieth Annual Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures. SPAA '08. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery. P. 344–351.

5. Chkhartishvili A.G. *Reflexive games: Transformation of awareness structure* // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71. P. 1208–1216.
6. Dargie W., Poellabauer C. *Fundamentals of Wireless Sensor Networks: Theory and Practice*. Wiley Publishing, 2010.
7. Dasgupta A. *Coordination and delay in global games* // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 134, no. 1. P. 195–225.
8. Kranakis E., MacQuarrie F., Ponce O.M. *Connectivity and stretch factor trade-offs in wireless sensor networks with directional antennae* // Theoretical Computer Science. 2015. Vol. 590. P. 55–72.
9. Kuznetsov A.V. *Algorithm of group movement of agents with directional antennas and the related game* // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. P. 012035.
10. Lageras A.N., Seim D. *Strategic complementarities, network games and endogenous network formation* // International Journal of Game Theory. 2016. Vol. 45. P. 497–509.
11. Lasaulce S., Tembine H. *Game Theory and Learning for Wireless Networks: Fundamentals and Applications*. USA: Academic Press, Inc., 2011.
12. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. London: CRC Press, 2014.
13. Petrosjan L., Sedakov A. *On a Multistage Link Formation Game* // Contributions to Game Theory and Management. 2011. Vol. 4. P. 368–377.
14. Petrosjan L., Sedakov A. *Multistage network games with perfect information* // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. P. 1532–1540.

GAME OF OPERATION OF A TELECOMMUNICATION NETWORK OF AGENTS WITH DIRECTIONAL ANTENNAE

Alexander V. Kuznetsov, Voronezh State University, Dr.Sc.,
associate professor (avkuz@bk.ru).

Abstract: The paper studies a non-cooperative repeated game that describes the behaviour of mobile agents with directional antennae or a wireless sensor network. Periodically, agents should direct their antennae towards each other to exchange information. However, the actions to turn the antenna are energy-consuming and agents should maintain a balance between the actuality of the information and the energy consumption for maintaining the actuality of the information. Agents receive lesser payoff on the stage in which they decide to exchange information but win in subsequent stages by increasing the actuality of the information.

Keywords: game theory, coordination game, sequential game, repeated game, network game, sensor network, directional antennas.