Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.3, с. 89–118

УДК 517.988+517.977.8
ББК 22.18

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ФИКСИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКЕ

Андрей В. Чернов
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа посвящена отысканию достаточных условий существования ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в антагонистических играх, связанных с нелинейным неавтономным управляемым дифференциальным уравнением в банаховом пространстве и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Понятие кусочно-программных стратегий в такой игре вводится на основе понятия вольтерровой цепочки оператора правой части соответствующего интегрального уравнения, управляемого противниками, и соответствующей заданному разбиению отрезка времени. В качестве примера применения абстрактных результатов рассматривается игровая задача, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных псевдопараболического типа, описывающим эволюцию электрического поля в полупроводнике.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, вольтеррова цепочка, кусочно-программные стратегии, ε-равновесие.

Поступила в редакцию: 14.01.20 *После доработки*: 20.09.20 *Принята к публикации*: 29.09.20

1. Введение

Как известно, на данный момент уже достаточно хорошо развита теория дифференциальных игр, связанных с сосредоточенными управляемыми системами, как линейными, так и нелинейными. Одним из наиболее эффективных подходов к исследованию таких игр оказался подход, основанный на понятии кусочно-программных стратегий (см., например, [13, глава V],[23]). Этот подход, в частности, позволяет получать достаточные условия существования ε-оптимальных чистых стратегий в играх с непрерывной функцией выигрыша и динамикой, описываемой нормальными системами дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями общего вида.

Что касается распределенных управляемых систем, то соответствующие игровые задачи (даже в линейном случае) изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. Одними из первых работ в этом направлении явились [12,28]. В частности, в [28] приводятся примеры практических постановок задач, допускающих формализацию в виде дифференциальных игр, связанных с линейными уравнениями в частных производных. В том числе и такие, где ни одна из независимых переменных не может трактоваться как время. Условия оптимальности выводятся из соответствующих условий оптимальности для игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, путем дискретизации уравнений с частными производными. Обсуждается также и другой подход, основанный на разложении функции состояния в ряд Фурье.

Значительное число исследований было посвящено играм сближения-уклонения (преследования-убегания) с динамикой, описываемой линейными эволюционными уравнениями – см., например, [3,4,12, 14,24]. Среди известных результатов, касающихся дифференциальных игр, связанных с теми или иными уравнениями в частных производных, укажем также работы [2,15,22,25,26].

Из работ (других авторов), наиболее близких по тематике к данной статье, подробнее остановимся на [27,29].

В [27] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра с кусочно-программными стратегиями в стиле [23]. Динамика описывается полулинейным эволюционным уравнением вида

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad x(0) = x_0,$$

где u, v – управления игроков со значениями в метрических компактах, функция состояния $x(t)$ принимает значения в гильбертовом пространстве $\mathbb{E}$, A – генератор эволюционной полугруппы – максимальный монотонный линейный неограниченный оператор, функция f и функционал выигрыша предполагаются липшицевыми по фазовой переменной на всем пространстве $\mathbb{E}$. При использовании аппроксимаций типа Иосиды (Yosida) для инфинитезимального генератора A линейными ограниченными операторами, доказываются теоремы о сходимости для функции значения аппроксимирующей игры к функции значения исходной игры. За счет этого конструируются приближенные равновесные стратегии в форме обратной связи для исходной игры. Во введении подробно описывается предыстория теории дифференциальных игр и приводится соответствующая библиография.

В [29] доказывается существование ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в бескоалиционной игре n лиц, управляющих каждый своим линейным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. Управления игроков являются конечномерными и входят линейно в правые части уравнений как коэффициенты при аддитивно входящей мере Дирака.

Отметим, что для эволюционных дифференциальных уравнений достаточно характерным свойством является вольтерровость разрешающего оператора. В работе [17] было произведено обобщение подхода кусочно-программных стратегий на распределенные управляемые системы, которые путем обращения главной части дифференциального уравнения могут быть сведены к вольтеррову функционально-операторному уравнению (типа Гаммерштейна) в банаховом идеальном пространстве. Там же были получены достаточные условия существования ситуации ε-равновесия в игровых задачах, связанных с управляемыми функционально-операторными уравнениями в банаховых идеальных пространствах, при условии фиксированной вольтерровой цепочки и дискриминации второго игрока. В [18] указанный результат был распространен на случай нефиксированной вольтерровой цепочки и отсутствия дискриминации. В [19] рассматривалась функционально-операторная игра многих игроков на фиксированной цепочке при наличии дискриминации в соответствии с заданной иерархией. Укажем, наконец, работы [20,21], где рассматривалась дифференциальная игра, связанная с неэволюционными уравнениями в частных производных эллиптического типа.

Между тем, существует широкий класс распределенных систем, которые (при тех или иных условиях на входные параметры) не могут быть представлены в виде функционально-операторного уравнения в банаховом идеальном пространстве, но при этом естественным образом сводятся к нелинейному дифференциальному уравнению в банаховом (вообще говоря, неидеальном) пространстве X с решениями в пространстве $\mathbb{C}\big([0;T];X\big)$ непрерывных функций времени $t \in [0;T]$ со значениями в X. Речь, в первую очередь, идет о псевдопараболических дифференциальных уравнениях в частных производных, в том числе, существенно нелинейных (то есть с нелинейным дифференциальным оператором). Пример такого уравнения см. в разделе 6.

В соответствии со сказанным выше, представляется актуальным распространение метода кусочно-программных стратегий на игры, связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве. Как раз этой задаче и посвящена данная статья. А именно, выводятся достаточные условия существования ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в антагонистических играх, связанных с нелинейным неавтономным управляемым дифференциальным уравнением в банаховом пространстве и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Понятие кусочно-программных стратегий в такой игре вводится на основе понятия вольтерровой цепочки оператора правой части соответствующего интегрального уравнения, управляемого противниками и соответствующей заданному разбиению отрезка времени. В качестве примера рассматривается игровая задача, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных псевдопараболического типа, описывающим эволюцию электрического поля в полупроводнике.

2. Управляемое уравнение и некоторые его свойства

Пусть X, Y_1, Y_2 — банаховы пространства, $a \in X$ — заданный элемент, $\mathcal{D}_i$ — некоторое множество функций $[0;T] \to Y_i$, $i = 1,2$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$; $w \in \mathcal{D}$ — управление; $f : [0;T] \times X \times Y_1 \times Y_2 \to X$.

По аналогии с [5,глава V, §1] рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f\big(t, \varphi(t), w(t)\big),\ t \in (0;T],\ \varphi(0) = a, \quad \varphi \in \mathbb{C}^1\big([0;T];X\big). \quad (2.1)$$

Примем $E = \mathbb{C}\big([0;T];X\big)$. В случае, когда правая часть принадлежит классу E для всех $\varphi \in E$, $w \in \mathcal{D}$, задача (2.1) равносильна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера):

$$\varphi(t) = a + \int\limits_0^t f\big(s, \varphi(s), w(s)\big)\, ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in E. \qquad (2.2)$$

Для уравнения (2.2), будем рассматривать правые части, удовлетворяющие более слабому требованию, и введем понятие п.в.-решения исходной задачи. Назовем функцию $\varphi(t)$ со значениями в X абсолютно непрерывной, если для нее существуют $b \in X$ и $z \in L_1\big([0;T];X\big)$ такие, что

$$\varphi(t) = b + \int\limits_0^t z(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [0;T]. \qquad (2.3)$$

Соответствующий класс функций обозначим $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$. Если $\varphi \in \mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ и выполнено (2.3), то для п.в. $t \in [0;T]$ существует производная $\varphi'(t) = z(t)$, см. [5, глава IV, § 1, теорема 1.7]. Кроме того, исходя из [5, глава IV, § 1, теорема 1.6], а также из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big) \subset \mathbb{C}\big([0;T];X\big)$. *Более того, пространство* $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ *является банаховым относительно нормы:*

$$\|\varphi\|_{\mathbb{AC}\left([0;T];X\right)} = \|\varphi\|_{\mathbb{C}\left([0;T];X\right)} + \|\varphi'\|_{L_1\left([0;T];X\right)}.$$

Доказательство леммы 2.1 см. в разделе 7.

Далее будем предполагать, что правая часть f удовлетворяет следующим условиям.

F$_1$) Для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to f\big(t, \varphi(t), w(t)\big)$ принадлежит классу $L_1\big([0;T];X\big)$.

F$_2$) Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi, \psi \in E$, $\|\varphi\|_E$, $\|\psi\|_E \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\left\| f\big(t, \varphi(t), w(t)\big) - f\big(t, \psi(t), w(t)\big)\right\|_X \le \mathcal{N}(t,M)\left\|\varphi(t) - \psi(t)\right\|_X .$$

Замечание 2.1. Условие **F**$_2$) можно переформулировать в эквивалентной форме:

F$'_2$) Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in \mathcal{D}$, $x, y \in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\left\| f\big(t, x, w(t)\big) - f\big(t, y, w(t)\big)\right\|_X \le \mathcal{N}(t,M)\,\|x - y\|_X .$$

Действительно, если выполнено **F**$_2$), то принимая $\varphi(t) \equiv x$, $\psi(t) \equiv y$, получаем **F**$'_2$). И наоборот, если выполнено **F**$'_2$), то принимая при произвольно фиксированном $t \in [0;T]$ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, получаем **F**$_2$).

Решение уравнения (2.2) будем искать в классе E. В силу сделанных предположений и леммы 2.1, всякое решение класса E на самом деле будет принадлежать классу $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$. Это и есть п.в.-решение исходной задачи (2.1). Положим

$$B(w)[\varphi](t) = a + \int\limits_0^t f\big(s, \varphi(s), w(s)\big)\,ds, \quad t \in [0;T]; \quad \varphi \in E.$$

Теперь уравнение (2.2) можно переписать в виде:

$$\varphi = B(w)[\varphi], \quad \varphi \in E; \quad w \in \mathcal{D}.$$

Лемма 2.2. *Для любого управления $w \in \mathcal{D}$ и числа $M > \|a\|_X$ найдется число $T = T(M,w) > 0$ такое, что на $[0;T]$ уравнение* (2.2) *имеет решение $\varphi \in E$.*

Доказательство. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется число $T = T(M, w) > 0$ такое, что:

$$\|a\|_X + M\gamma + \int_0^T \big\|f(t,0,w)\big\|_X \, dt < M, \ \gamma = \int_0^T \mathcal{N}(t,M)\, dt < 1.$$

Обозначим $\Psi = \big\{\varphi \in E : \ \|\varphi\|_E \le M\big\}$, $B = B(w)$, Покажем, что $B : \Psi \to \Psi$. Выберем произвольно $\varphi \in \Psi$ и оценим:

$$\big\|B[\varphi](t)\big\|_X \le \|a\|_X + \int_0^T \big\|f\big(t, \varphi(t), w(t)\big)\big\|_X \, dt \le$$

$$\le \|a\|_X + \int_0^T \big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big) - f\big(t,0,w(t)\big)\big\|_X \, dt + \int_0^T \big\|f\big(t,0,w(t)\big)\big\|_X \, dt \le$$

$$\le \|a\|_X + M\gamma + \int_0^T \big\|f(t,0,w)\big\|_X \, dt < M.$$

Таким образом, $B\varphi \in \Psi$. Теперь для произвольных φ, $\psi \in \Psi$ оценим:

$$\big\|(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)\big\|_X \le$$

$$\le \int_0^T \big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big) - f\big(t,\psi(t),w(t)\big)\big\|_X \, dt \le \gamma \, \|\varphi - \psi\|_E.$$

Следовательно, $\|B\varphi - B\psi\|_E \le \gamma\, \|\varphi - \psi\|_E$. Это означает, что оператор B является сжимающим на множестве Ψ. Стало быть, имеет на нем единственную неподвижную точку. □

Понятно, что на самом деле горизонт T существования решения может быть существенно больше той оценки, которая устанавливается при доказательстве леммы 2.2. Более того, ясно, что при увеличении M указанная оценка T будет уменьшаться. Кроме того, он будет зависеть от управления. Поэтому актуальным является вопрос о тотальном (по всем допустимым управлениям) сохранении глобальной (то есть при фиксированном горизонте $T > 0$) разрешимости (ТСГР) уравнения (2.2). Достаточные условия ТСГР устанавливаются в разделе 5.

3. Определение дифференциальной игры и стратегий игроков

Далее будем считать, что уравнение (2.2) управляется игроками 1 и 2 с помощью соответствующих управлений $u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$, и более того, что каждое из множеств $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$, инвариантно относительно кусочных рекомбинаций своих элементов. Последнее означает следующее. Предположим, что задано разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$ отрезка $[0; T]$, $h_1 = [0; \tau_1]$, $h_j = (\tau_{j-1}; \tau_j]$, $j = \overline{2, k}$, и для произвольного индекса $j \in \overline{1, k}$, u_j есть сужение произвольного (своего для каждого индекса j) элемента множества $\mathcal{D}_1$ на промежуток h_j. Имеется в виду, что функция

$$u(t) = \big\{u_i(t),\ t \in h_i;\ i = \overline{1, k}\big\}, \quad t \in [0; T],$$

тоже должна принадлежать множеству $\mathcal{D}_1$.

Произведем адаптацию построений работы [17] на указанный случай. Для заданного разбиения отрезка $[0; T]$ вида

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$$

и соответственно, множеств $H_0 = \emptyset$, $H_1 = [0; \tau_1]$, $H_i = (\tau_{i-1}; \tau_i]$, $i = \overline{2, k}$, кортеж $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\}$ будем называть *вольтерровой цепочкой* оператора правой части уравнения (2.2), а также вольтерровой цепочкой в нашей игре. Число $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}}(\tau_i - \tau_{i-1})$ естественно назвать *мелкостью вольтерровой цепочки*. По вольтерровой цепочке однозначно определяется *вольтеррово разбиение* $\mathcal{T}^{(-)} = \{H_i \setminus H_{i-1},\ i = \overline{1, k}\}$, и наоборот.

Так же, как и в [17], в данной статье мы ограничимся лишь случаем фиксированной цепочки. Распространение на случай нефиксированной цепочки требует преодоления определенных технических трудностей, представление о которых и о том, как их преодолевать, можно получить из работы [18]. Отметим, что непосредственное воспроизведение конструкций [18] не проходит, поскольку пространство $E = \mathbb{C}\big([0; T]; X\big)$, в котором мы работаем на этот раз, не является лебеговым и вообще банаховым идеальным пространством. Вообще говоря, можно было бы перейти к пространству $L_q\big([0;T];X\big)$. Тогда в случае $X = L_q(\Omega)$ можно было бы непосредственно использовать результаты [17,18]. Но это был бы уже существенно более частный случай.

Пусть Z — некоторое банахово пространство.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала:

$$J[u,v] = \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T F\big(t,\varphi[u,v](t),u(t),v(t)\big)\,dt\right],$$

где $\mathcal{F}$ — линейный непрерывный функционал, определенный на Z, то есть $\mathcal{F} \in Z^*$; $\varphi[u,v] \in E$ — решение уравнения (2.2), отвечающее выбору управлений $u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$.

Относительно функции F предполагаем, что она удовлетворяет следующим условиям.

Φ_1) Для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$ отображение $[0;T] \ni t \to F\big(t,\varphi(t),w(t)\big)$ принадлежит классу $L_1\big([0;T];Z\big)$.

Φ_2) Существует функция $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0(t,M) : [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0;T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w \in \mathcal{D}$, $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_E \le M$, п.в. $t \in [0;T]$ имеем:

$$\big\|F\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_Z \le \mathcal{N}_0(t,M)\,.$$

Для того, чтобы игра была сформулирована корректно, далее будем предполагать, что выполняются следующие априорные предположения.

H$_1$) Любому управлению $w \in \mathcal{D}$ отвечает единственное решение $\varphi = \varphi[w] \in E$ уравнения (2.2). Более того, это решение удовлетворяет оценке:

$$\big\|\varphi[w](t)\big\|_X \le \Phi(t) \quad \forall\, t \in [0;T], \quad w \in \mathcal{D},$$

при некоторой $\Phi \in \mathbb{AC}[0;T]$.

H$_2$) Для любых $w \in \mathcal{D}$ и $H = [0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$ уравнение (2.2) не может иметь более одного H-локального решения.

Достаточные условия, гарантирующие выполнение предположений **H**), можно найти в разделе 5.

Отметим, что из выполнения предположений **H**) следует выполнение аналогичных предположений и для всех локальных аналогов уравнения (2.2).

Будем считать, что игра проводится с дискриминацией второго игрока в следующем смысле: на каждом шаге (о понятии шага в исследуемой игре см. ниже) игроку 1 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах и на данном шаге, а игроку 2 – свой выбор на данном шаге, а также свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах. Уравнение (2.2) предполагается известным обоим противникам (игра с полной информацией).

Далее мы введем понятие шага в игре, а также определим кусочно-программные стратегии, которые используются в данной игре.

Заметим, что для всякого вольтеррова разбиения

$$\mathcal{T}^{(-)} = \bigl\{ h_i = H_i \setminus H_{i-1} :\; i = \overline{1,k} \bigr\},$$

состоящего из k элементов, и управления $w = (u,v)$ уравнение (2.2) распадается в систему k уравнений вида:

$$\varphi_i(t) = a_i + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} f\bigl(s, \varphi_i(s), w_i(s)\bigr)\, ds, \quad \varphi_i \in E, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3.1}$$

где приняты обозначения:

$$a_i = a + \sum_{j=1}^{i-1} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\bigl(s, \varphi_j(s), w_j(s)\bigr)\, ds, \quad w_j \in \mathcal{D}^{(j)},$$

$\mathcal{D}^{(j)}$ — множество сужений функций из $\mathcal{D}$ на промежуток h_j.

В свою очередь, систему (3.1) можно решать последовательно от 1-го уравнения к k-му: зная решение 1-го уравнения φ_1, находим решение 2-го уравнения φ_2; зная решения φ_1, φ_2 первых двух уравнений, находим решение 3-го уравнения φ_3 и т.д. Соответственно этому,

i-м шагом в нашей игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ на фиксированной цепочке $\mathcal{T}$ для первого игрока будем называть задачу выбора управления $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$, для второго игрока — задачу выбора управления $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$. По выбранным шаговым управлениям $w_i = (u_i, v_i)$ определяется решение $\varphi_i[w_i]$ i-го уравнения системы (3.1). В силу предположений **H**) решение $\varphi_i[w_i]$ на i-м шаге существует и единственно как решение i-го уравнения системы (3.1).

Следующее понятие мы вводим по сути дела аналогично понятию кусочно-программной стратегии в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [13, глава V]. (но с учетом того, что вольтеррово разбиение фиксировано).

Кусочно-программной стратегией первого игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будем называть отображение $\mathcal{P}$, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j \in \mathcal{D}_1^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in \mathcal{D}_2^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, а также (с учетом дискриминации второго игрока) элементу $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$ управление $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$. Кусочно-программной стратегией второго игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будем называть отображение $\mathcal{P}$, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j \in \mathcal{D}_1^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in \mathcal{D}_2^{(j)} : j = \overline{1, i-1}\}$ управление $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$.

Множество всех кусочно-программных стратегий первого игрока обозначим $\Sigma^{(1)}$, второго – $\Sigma^{(2)}$. Управления

$$u(t) = \big\{u_i(t),\ t \in h_i;\ i = \overline{1, k}\big\}, \quad t \in [0; T],$$

$$v(t) = \big\{v_i(t),\ t \in h_i;\ i = \overline{1, k}\big\}, \quad t \in [0; T],$$

реализовавшиеся в результате выбора пары стратегий

$$\sigma = \big\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\big\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)},$$

будем обозначать u_σ, v_σ, а соответствующее им решение уравнения (2.2), построенное описанным выше движением по цепочке, – φ_σ. Тогда выигрыш первого игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будет определяться как

$$K[\sigma] = J[u_\sigma, v_\sigma] = \mathcal{F}\left[\int_0^T F\big(t, \varphi_\sigma(t), u_\sigma(t), v_\sigma(t)\big)\, dt\right].$$

Напомним (см., например, [13]), что для любого $\varepsilon > 0$ пара (чистых) стратегий $\sigma_\varepsilon = \big\{\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\big\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ называется *ε-оптимальной* в игре Γ, если для всех $\sigma = \big\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\big\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ выполняется неравенство

$$K\left[\sigma^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)}\right]-\varepsilon\le K\left[\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)}\right]\le K\left[\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma^{(2)}\right]+\varepsilon.$$

Если такая пара σ_ε существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε-равновесия.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Для любой фиксированной вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$ и любого числа $\varepsilon>0$ игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ имеет ситуацию ε-равновесия. При этом значение игры определяется формулой:*

$$\overline{K}=\inf_{v_1\in\mathcal{D}_2^{(1)}}\ \sup_{u_1\in\mathcal{D}_1^{(1)}}\ \inf_{v_2\in\mathcal{D}_2^{(2)}}\ \sup_{u_2\in\mathcal{D}_1^{(2)}}\ldots$$

$$\ldots\inf_{v_k\in\mathcal{D}_2^{(k)}}\ \sup_{u_k\in\mathcal{D}_1^{(k)}}\mathcal{F}\left[\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}F\big(t,\varphi_j[\vec{u}_j,\vec{v}_j](t),u_j(t),v_j(t)\big)\,dt\right],$$

где $\vec{u}_j=(u_1,\ldots,u_j)$, $\vec{v}_j=(v_1,\ldots,v_j)$.

4. Доказательство основного результата

Лемма 4.1. *Пусть выполнены предположения $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{H}_1$), $\mathbf{H}_2$), Φ_1), Φ_2). Тогда множество $\big\{J[u,v],\ u\in\mathcal{D}_1,\ v\in\mathcal{D}_2\big\}$ ограничено. Ограничены также и все локальные аналоги вида*

$$\mathcal{F}\left[\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}F\big(t,\varphi[w](t),w(t)\big)\,dt\right],\quad j=\overline{1,k}.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами интеграла Бохнера (см., например, [5]), для всякого $w=(u,v)\in\mathcal{D}$, получаем:

$$\left\|\int\limits_0^T F\big(t,\varphi[w](t),w(t)\big)\,dt\right\|_Z\le\int\limits_0^T\Big\|F\big(t,\varphi[w](t),w(t)\big)\Big\|_Z\,dt.$$

В силу предположения $\mathbf{H}_1$),

$$\big\|\varphi[w](t)\big\|_X\le\Phi(t)\le M=\|\Phi\|_{\mathbb{C}[0;T]}.$$

Таким образом, согласно предположению Φ_2),

$$\left\| \int_0^T F\bigl(t, \varphi[w](t), w(t)\bigr)\, dt \right\|_Z \leq \int_0^T \mathcal{N}_0(t, M)\, dt \equiv M_0.$$

Стало быть,

$$\bigl|J[u,v]\bigr| = \left| \mathcal{F} \left[\int_0^T F\bigl(t, \varphi[w](t), w(t)\bigr)\, dt \right] \right| \leq$$

$$\leq \|\mathcal{F}\|_{Z^*} \left\| \int_0^T F\bigl(t, \varphi[w](t), w(t)\bigr)\, dt \right\|_Z \leq \|\mathcal{F}\|_{Z^*} M_0.$$

Ограниченность локальных аналогов доказывается теперь очевидным образом. $\square$

Теперь доказательство теоремы 3.1 получается очевидной компиляцией доказательства теоремы 3.1 из [17]. Поэтому укажем лишь основные отличия.

1. Выражение вида $u_i \in P_i\mathcal{D}$ заменяется выражением $u_i \in \mathcal{D}_1^{(i)}$.

2. Выражение вида $v_i \in P_i\mathcal{D}$ заменяется выражением $v_i \in \mathcal{D}_2^{(i)}$.

3. Формула (5.1) из [17] заменяется следующей цепочкой равенств:

$$K_m(\sigma) = \mathcal{F} \left[\sum_{j=1}^{k-m} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} F\bigl(t, \varphi_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j], u_j, v_j\bigr)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k-m+1}^{k} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} F\bigl(t, \varphi_j[\vec{u}_{k-m}, \sigma; \vec{v}_{k-m}, \sigma], u_j[\sigma], v_j[\sigma]\bigr)\, dt \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-m} \mathcal{F} \left[\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} F\bigl(t, \varphi_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j], u_j, v_j\bigr)\, dt \right] +$$

$$+\sum_{j=k-m+1}^{k}\mathcal{F}\left[\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} F\big(t,\varphi_j[\vec{u}_{k-m},\sigma;\vec{v}_{k-m},\sigma],u_j[\sigma],v_j[\sigma]\big)\,dt\right]\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{k-m} g_j[\vec{u}_j,\vec{v}_j]+\sum_{j=k-m+1}^{k} g_j[\vec{u}_{k-m},\vec{v}_{k-m}](\sigma)\equiv K'_m+K''_m(\sigma),$$

$$\sigma=(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}),\quad \sigma^{(i)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}\{\vec{u}_{k-m},\vec{v}_{k-m}\},\quad i=1,2.$$

4. Выражение вида $x_j[\vec{u}_j]$ заменяется выражением $\varphi_j[\vec{u}_j,\vec{v}_j]$.

5. Выражение вида $y_j[\vec{v}_j]$ ликвидируется.

6. Выражение вида $x_j[\vec{u}_{k-m};\sigma]$ заменяется на $\varphi_j[\vec{u}_{k-m},\sigma;\vec{v}_{k-m},\sigma]$.

7. Выражение вида $y_j[\vec{v}_{k-m};\sigma]$ ликвидируется.

8. Ссылка на [17, лемма 4.1] заменяется ссылкой на лемму 4.1.

5. Достаточные условия тотального сохранения однозначной глобальной разрешимости

Помимо условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) из раздела 2, сделаем дополнительно следующее предположение.

$\mathbf{F}_3$) Существует функция $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_1(t,M):[0;T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$ такая, что для всех $w\in\mathcal{D}$, $\varphi\in E$, $\|\varphi\|_E\le M$, п.в. $t\in[0;T]$ имеем:

$$\big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_X\le\mathcal{N}_1(t,M)\,.$$

Замечание 5.1. Условие $\mathbf{F}_3$) можно заменить, например, следующим:

$\mathbf{F}'_3$) Существует функция $\mathcal{N}_2=\mathcal{N}_2(t):[0;T]\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0;T]$ и такая, что для всех $w\in\mathcal{D}$, п.в. $t\in[0;T]$ имеем:

$$\big\|f\big(t,0,w(t)\big)\big\|_X\le\mathcal{N}_2(t)\,.$$

Действительно, предположим, что выполнены условия $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3'$). Оценим:

$$\big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big)\big\|_X \le \big\|f\big(t,\varphi(t),w(t)\big) - f\big(t,0,w(t)\big)\big\|_X +$$
$$+\big\|f\big(t,0,w(t)\big)\big\|_X \le \mathcal{N}(t,M)\big\|\varphi(t)\big\|_X + \mathcal{N}_2(t) \le$$
$$\le \mathcal{N}(t,M)M + \mathcal{N}_2(t) \equiv \mathcal{N}_1(t,M).$$

Однако, как видно из формулировки следующей далее теоремы, для нас важно иметь в качестве функции $\mathcal{N}_1(t,M)$ не хотя бы какую-то оценку сверху, а оценку, как можно более точную.

Теорема 5.1. *Пусть элемент $a \in X$ произвольно фиксирован, а правая часть f удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$). Тогда справедливо следующее утверждение. Предположим, что задача Коши*

$$\frac{d}{dt}\,\beta(t) = \mathcal{N}_1\big(t, \|a\|_X + \beta(t)\big), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = 0, \tag{5.1}$$

имеет решение — неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $\beta(t)$, $t \in [0;T]$. Тогда для любого управления $w \in \mathcal{D}$ уравнение (2.2) имеет решение $\varphi \in \mathbb{AC}\big([0;T],X\big)$, удовлетворяющее оценке $\big\|\varphi(t)\big\|_X \le \|a\|_X + \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $w \in \mathcal{D}$ и покажем, что уравнение (2.2) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость следующего уравнения

$$y(t) = \int\limits_0^t f\big(s, a + y(s), w(s)\big)\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{5.2}$$

Действительно, если y — решение уравнения (5.2), то $\varphi = a + y$ — решение уравнения (2.2):

$$\varphi(t) = a + y(t) = a + \int\limits_0^t f\big(s, a+y(s), w(s)\big)\,ds = a + \int\limits_0^t f\big(s,\varphi(s),w(s)\big)\,ds,$$

$t \in [0;T]$. Обозначим для краткости $\alpha = \|a\|_X$. По условию, функция $\beta(t)$ непрерывна на $[0;T]$. Поэтому согласно теореме Вейерштрасса найдется константа $M > 0$ такая, что

$$0 \le \alpha + \beta(t) \le M \quad \forall t \in [0;T].$$

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега)

$$\int\limits_h \mathcal{N}(t, M)\, dt \le \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \le \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T, \quad |t_i - t_{i-1}| \le \delta, \quad i = \overline{1,k}.$$

Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (5.2):

$$y(t) = \int\limits_0^t f\big(s, a + y(s), w(s)\big)\, ds, \quad t \in [0; t_j]. \tag{5.4}$$

Разрешимость уравнений (5.4) будем доказывать индукцией по индексу $j = \overline{1,k}$ (при $j = 0$ решение очевидно: $y = y_0 = 0$).

Предположим, мы уже доказали существование функции $y = y_{i-1} \in \mathbb{AC}\big([0; t_{i-1}]; X\big)$, являющейся решением уравнения (5.4) при $j = i - 1$ и удовлетворяющей оценке $\big\|y_{i-1}(t)\big\|_X \le \beta(t)$ для всех $t \in [0; t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $y = y_i \in \mathbb{AC}\big([0; t_i]; X\big)$, являющейся решением уравнения (5.4) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке

$$\big\|y_i(t)\big\|_X \le \beta(t) \quad \forall t \in [0; t_i]. \tag{5.5}$$

Определим Y_i как множество всех $y \in \mathbb{C}\big([0; t_i]; X\big)$ таких, что

$$\big\|y(t)\big\|_X \le \beta(t) \quad \forall t \in [t_{i-1}; t_i]; \quad y\,\Big|_{t \in [0; t_{i-1}]} \equiv y_{i-1}.$$

Отметим, что множество Y_i не пусто, так как содержит функцию

$$y(t) = \begin{cases} y_{i-1}(t), & t \in [0; t_{i-1}]; \\ \gamma(t) y_{i-1}(t_{i-1}), & t \in (t_{i-1}; t_i], \end{cases}$$

где функция $\gamma(t)$ неотрицательна и непрерывна на $[t_{i-1}; t_i]$ и такова, что

$$\gamma(t_{i-1})\beta(t_{i-1}) = \beta(t_{i-1}), \quad \gamma(t)\beta(t_{i-1}) \le \beta(t) \quad \forall t \in (t_{i-1}; t_i].$$

В частности, если $\beta(t_{i-1}) = 0$, то ясно, что $y(t_{i-1}) \equiv 0$ и можно взять $\gamma \equiv 0$. Если же $\beta(t_{i-1}) > 0$, то можно взять $\gamma(t) = \dfrac{\beta(t)}{\beta(t_{i-1})}$, $t \in [t_{i-1}; t_i]$.

Определим оператор $F_i : Y_i \to \mathbb{C}\big([0; t_i]; X\big)$ с помощью формулы $F_i[y] = \eta$, где

$$\eta(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds, \quad t \in [0; t_i],$$

при $z(t) = f\big(t, a + y(t), w(t)\big)$. В силу условия $\mathbf{F}_3$), определения функции $\beta(t)$ как решения задачи (5.1) и свойств интеграла Бохнера получаем:

$$\big\|\eta(t)\big\|_X \le \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds \le \int\limits_0^t \mathcal{N}_1\big(s, \alpha + \beta(s)\big)\,ds = \beta(t), \quad t \in [0; t_i].$$

Заметим, что при $t \in [0; t_{i-1}]$ имеем: $z(t) = f\big(t, a + y_{i-1}(t), w(t)\big)$. По построению получаем, что

$$\eta(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds = \int\limits_0^t f\big(s, a + y_{i-1}(s), w(s)\big)\,ds = y_{i-1}(t),\ t \in [0; t_{i-1}].$$

Таким образом, $\eta \in Y_i$. Иными словами, $F_i : Y_i \to Y_i$.

Положим $E_i = \mathbb{C}\big([0; t_i]; X\big)$. Установим сжимаемость оператора F_i. Выберем произвольно $y, \widetilde{y} \in Y_i$. В соответствии с определением оператора F_i, условием $\mathbf{F}_2$), а также неравенством (5.3) получаем оценку:

$$\big\|F_i[\widetilde{y}] - F_i[y]\big\|_{E_i} \le \int\limits_0^{t_i} \big\|f(s, a + \widetilde{y}(s), w(s)) - f(s, a + y(s), w(s))\big\|_X\,ds =$$

$$= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \big\|f(s, a + \widetilde{y}(s), w(s)) - f(s, a + y(s), w(s))\big\|_X\,ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}\big(s, M\big)\,ds\,\big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_i} \le \frac{1}{2}\big\|\widetilde{y} - y\big\|_{E_i}.$$

По принципу сжимающих отображений (см. принцип неподвижной точки Каччопполи–Банаха из [6, глава XVI, § 1, п.1.1, с.609]) заключаем, что уравнение

$$y = F_i[y], \quad y \in Y_i,$$

имеет единственное решение на множестве Y_i. Это означает, что существует функция $y = y_i \in \mathbb{C}\big([0;t_i];X\big)$, являющаяся решением уравнения (5.4) при $j = i$ и удовлетворяющая оценке (5.5). Тем самым, $y_i \in \mathbb{AC}\big([0;t_i];X\big)$.

По индукции делаем вывод, что аналогичное утверждение справедливо и при $j = k$. А это, в свою очередь, означает, что уравнение (2.2) имеет решение $\varphi = a + y_k \in \mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$, удовлетворяющее оценке

$$\big\|\varphi(t)\big\|_X \le \alpha + \big\|y_k(t)\big\|_X \le \alpha + \beta(t), \quad t \in [0;T].$$

$\square$

Теорема 5.2. *Пусть элемент* $a \in X$ *произвольно фиксирован, а правая часть* f *удовлетворяет условиям* $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). *Тогда, каково бы ни было* $w \in \mathcal{D}$, *уравнение* (2.2) *не может иметь более одного решения в* E.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что существуют два решения $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Положим

$$M = \max\big\{\|\varphi_1\|_E, \|\varphi_2\|_E\big\}, \quad \eta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполнено неравенство (5.3). Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T, \quad |t_i - t_{i-1}| \le \delta, \quad i = \overline{1,k}.$$

Ясно, что $\eta(t_0) = \eta(0) = 0$. Предположим, мы уже доказали, что $\eta(t) \equiv 0$ при $t \in [0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем, что $\eta(t) \equiv 0$ при $t \in [0;t_i]$. Согласно условию $\mathbf{F}_2$), выбору разбиения и числа δ (то есть неравенству (5.3)) имеем

$$\big\|\eta(t)\big\|_X \le \int\limits_0^{t_i} \Big\|f\big(s,\varphi_2(s),w(s)\big) - f\big(s,\varphi_1(s),w(s)\big)\Big\|_X\, ds =$$

$$= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \Big\| f\big(s,\varphi_2,w\big) - f\big(s,\varphi_1,w\big) \Big\|_X ds \le \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(s,M) \left\|\eta(s)\right\|_X ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t,M)\, dt \left\|\eta\right\|_{\mathbb{C}\left([t_{i-1};t_i];X\right)} \le \frac{1}{2}\left\|\eta\right\|_{\mathbf{C}\left([t_{i-1};t_i];X\right)}, \quad t \in [t_{i-1};t_i].$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}\left\|\eta\right\|_{\mathbf{C}\left([t_{i-1};t_i];X\right)} \le 0$, откуда $\eta(t) \equiv 0$ при $t \in [t_{i-1};t_i]$. И согласно предположению индукции, $\eta(t) \equiv 0$ при $t \in [0;t_i]$. По индукции делаем вывод, что $\eta(t) \equiv 0$ при $t \in [0;t_k] = [0;T]$. □

6. Пример: сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа

К уравнению (2.2) могут быть сведены многие эволюционные системы, связанные с сильно нелинейными дифференциальными уравнениями псевдопараболического типа, см., например, [8,9].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Следуя [8], введем следующие обозначения.

$\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ — гильбертово пространство измеримых функций, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$, у которых при $m \in \mathbb{N}$ существуют обобщенные производные до порядка m включительно из пространства $L_2(\Omega)$, со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathbb{H}_0^m} = \sum_{|\mu|\le m} (\partial^\mu\varphi, \partial^\mu\psi)_2,$$

где $(.,.)_2$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$;

$\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$ — гильбертово пространство, сопряженное к $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$, каждый элемент которого можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{|\mu|\le m} \partial^\mu g_\mu, \quad g_\mu \in L_2(\Omega);$$

Замечание 6.1. Так написано в [8]. Здесь имеется в виду, что φ — линейный непрерывный функционал на $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$, действие которого на элемент $\psi \in \mathbb{H}_0^m(\Omega)$ обозначается как $\langle\varphi,\psi\rangle$, называется «скобкой двойственности» между пространствами $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-m}(\Omega)$, и вычисляется по формуле:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{|\mu|\leq m} (-1)^{|\mu|}(g_\mu, \partial^\mu \psi)_2 = \sum_{|\mu|\leq m} (-1)^{|\mu|} \int\limits_\Omega g_\mu\, \partial^\mu \psi\, dx.$$

Подробнее см., например, в [7, п.1.2.16].

$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство измеримых функций, у которых существуют обобщенные производные до порядка k включительно из пространства $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|\varphi\|_{k,p} = \sum_{|\mu|\leq k} \|\partial^\mu \varphi\|_p,$$

где $\|.\|_p$ — норма в $L_p(\Omega)$;

$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ — банахово пространство элементов из $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$;

$\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ — банахово пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, элементы которого можно представить в виде:

$$\varphi = \sum_{|\mu|\leq k} \partial^\mu g_\mu, \quad g_\mu \in L_{p'}(\Omega);$$

$\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(m,\delta)}$ — граница области Ω может быть в окрестности каждой точки $x \in \partial\Omega$ представлена локальными координатами:

$$\xi_i = \Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{\ell-1}, \eta), \quad i = \overline{1, \ell-1},$$

причем функции Φ_i являются m раз непрерывно дифференцируемыми по всем переменным, и $\Phi_i^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+^\ell$, являются гельдеровыми с показателем $\delta \in (0;1]$.

Следуя [9], рассмотрим, в частности, начально-краевую задачу, связанную с (для начала неуправляемым) уравнением вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6.1}$$

описывающим эволюцию электрического поля в полупроводнике в квазистационарном приближении. Здесь $q_i > 0$, $i = 1,2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ —

ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0;1]$, $n \geq 1$.

Для дальнейшего важно понимать, что уравнение (6.1) — это частный случай уравнения более общего вида, см. [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi\big) + \Delta\varphi + g(t,\varphi) = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь φ — это потенциал электрического поля, а $g(t,\varphi)$ характеризует источники или стоки тока свободных электронов из примесных центров или в примесные центры кристаллической решетки полупроводников, в зависимости от того, являются ли данные примесные центры донорами или акцепторами. Как указано в [10], конкретный вид функции $g(t,\varphi)$ зависит от плотности источников или стоков свободных электронов доноров или акцепторов и согласуется с видами распределений свободных и связанных электронов основных центров кристаллической решетки полупроводника. Конкретизация (6.1) базируется на использовании простого модельного распределения вида

$$g(t,\varphi) = \lambda|\varphi|^q\varphi, \quad q \geq 0,$$

где $\lambda < 0$ для донорных и $\lambda > 0$ для акцепторных примесных центров соответственно; $\lambda = 0$ в случае отсутствия примесных центров. О физической стороне дела см. также [1,16].

Для получения необходимых оценок в [9] предполагается дополнительно, что $q_i \leq \dfrac{4}{n-2}$ при $n \geq 3$, $q_1 \geq 1$. Как показано в [9], задача (6.1) возникает при исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии (в частности, в полупроводниках). Обозначим $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $X^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ — сопряженное пространство, $\langle .,. \rangle$ — скобка двойственности между пространствами X и X^*, $E = \mathbb{C}\big([0;T];X\big)$, $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0;T]$, $E^* = \mathbb{C}\big([0;T];X^*\big)$. Для $\varphi_0 \in X$ решение задачи (6.1) понимается в сильном обобщенном смысле и ищется в пространстве $\mathbb{C}^1\big([0;T];X\big)$. Следуя [9], положим

$$\Psi(\varphi) = Q + (q_1+1)|\varphi|^{q_1}I : X \to X^*, \quad F\varphi = |\varphi|^{q_2}\varphi, \quad F : X \to X^*,$$

$$G\varphi = \big[\Psi(\varphi)\big]^{-1}\big[-Q\varphi + F\varphi\big], \quad Q\varphi = -\Delta\varphi,$$

где $Q : X \to X^*$ — оператор Лапласа (с точностью до знака), понимаемый в сильном обобщенном смысле:

$$\langle Q\varphi, \psi\rangle = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L_2} = \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx, \quad \varphi, \psi \in X.$$

Пользуясь неравенством Гельдера, отсюда легко получаем оценку: $\|Q\varphi_1 - Q\varphi_2\|_{X^*} \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для всех $\forall\, \varphi_i \in X$, $i = 1, 2$. Как показано в [9], справедливы следующие факты:

1) $G : X \to X$, $G : E \to E$;

2) задача (6.1) сводится к интегральному уравнению:

$$\varphi = \widetilde{B}\varphi,\ \varphi \in E;\ (\widetilde{B}\varphi)(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t (G\varphi)(s)\, ds,\ t \in [0; T]; \quad (6.2)$$

3) $\big\|\Psi(\varphi)^{-1}z_1 - \Psi(\varphi)^{-1}z_2\big\|_X \le \|z_1 - z_2\|_{X^*}$ $\forall\, \varphi \in X$, $z_1, z_2 \in X^*$;

4) $\big\|\Psi(\varphi_1)^{-1} - \Psi(\varphi_2)^{-1}\big\| \le \mu_1(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для всех $\varphi_i \in X$, $\|\varphi_i\|_X \le M$, $i = 1, 2$;

5) $\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_{X^*} \le \mu_2(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для всех $\varphi_i \in X$, $\|\varphi_i\|_X \le M$, $i = 1, 2$.

Стало быть, для $\widetilde{\mathcal{N}}(M) = \mu_1(M)M\big[1 + \mu_2(M)\big] + 1 + \mu_2(M)$ имеем:

$$\big\|(G\varphi_1)(t) - (G\varphi_2)(t)\big\|_X \le \widetilde{\mathcal{N}}(M)\,\big\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big\|_X$$

для всех $\varphi_i \in E$, $\|\varphi_i\|_E \le M$, $i = 1, 2$.

В [9] для задачи (6.1) доказаны: единственность решения и локальная разрешимость; при условии $q_1 \ge q_2$ — глобальная разрешимость; при условии $q_1 < q_2$ установлено существование максимального по времени решения и получена оценка сверху для времени разрушения решения. Глобальная разрешимость доказана также при условии достаточной малости нормы $\|\varphi_0\|_X$.

Пусть теперь для каждого управления $w \in \mathcal{D}$ с помощью формулы $g[w](t,x) = g\big(t, x, w(t)\big)$ определен оператор

$$g[w](t,x) : [0;T] \times X \to X^*, \quad g\big(., \varphi(.), w(.)\big) \in L_1\big([0;T]; X^*\big) \quad \forall\, \varphi \in E,$$

удовлетворяющий оценке:

$$\left\|g[w](t,\varphi_1)-g[w](t,\varphi_2)\right\|_{X^*}\le\widehat{\mathcal{N}}(M)\,\|\varphi-\psi\|_X$$

для всех $\varphi_i\in X$, $\|\varphi_i\|_X\le M$, $i=1,2$, п.в. $t\in[0;T]$, при некоторой неубывающей функции $\widehat{\mathcal{N}}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим управляемый аналог задачи (6.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta\varphi-|\varphi|^{q_1}\varphi\big)+\Delta\varphi+|\varphi|^{q_2}\varphi=g[w](t,\varphi),\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi\,\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.3}$$

в физическом смысле подразумевающий наличие дополнительных управляемых источников тока свободных электронов. Аналогично (6.1), задача (6.3) может быть переписана в виде уравнения:

$$\varphi=B(w)[\varphi],\quad \varphi\in E, \tag{6.4}$$

где

$$\big(B(w)\varphi\big)(t)=\varphi_0+\int\limits_0^t f\big(s,\varphi(s),w(s)\big)\,ds,\quad t\in[0;T],$$

$$f\big(s,\varphi(s),w(s)\big)=\Psi\big(\varphi(s)\big)^{-1}\big[-Q\varphi(s)+F[\varphi(s)]-g(s,\varphi(s),w(s))\big].$$

Лемма 6.1. *Пусть* $z\in L_1\big([0;T];X^*\big)$, $\varphi\in E$, $\psi(t)=\Psi\big(\varphi(t)\big)^{-1}\big[z(t)\big]$, $t\in[0;T]$. *Тогда* $\psi\in L_1\big([0;T];X\big)$.

Доказательство. 1. Докажем, что функция $\psi(t)$ измерима по Бохнеру на $[0;T]$. Напомним [5, глава IV, определение 1.5, с.152], что измеримость функции $\psi(t)$ означает существование последовательности $\psi_n(t)$ простых функций такой, что $\psi_n(t)\to\psi(t)$ для п.в. $t\in[0;T]$. Выберем произвольно числовую последовательность $\sigma_n\searrow 0$ при $n\to\infty$. По условию, функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[0;T]$. Очевидно, что классическая теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, непосредственно обобщается на непрерывные функции со значениями в банаховом пространстве X (в доказательстве просто модуль $|.|$ заменяется на норму $\|.\|_X$, см., например, [11, глава VIII, § 1, лемма 1, с.407]). Поэтому существует разбиение

$$0=\tau_0^n<\tau_1^n<\ldots<\tau_k^n=T,\quad k=k(n)$$

такое, что для каждого $j \in \overline{1,k}$ имеем:

$$\mu_1(M)\big\|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\big\|_X < \sigma_n \quad \forall\, t_1,t_2 \in [\tau^n_{j-1};\tau^n_j], \quad M=\|\varphi\|_E.$$

Так как функция $z(t)$ измерима по Бохнеру, то существует последовательность $z_n(t)$ простых функций такая, что $z_n(t)\to z(t)$ для п.в. $t\in[0;T]$. Определим функции

$$\psi_n(t)=\Big\{\Psi\big(\varphi(\tau^n_j)\big)^{-1}\big[z_n(t)\big],\ t\in[\tau^n_{j-1};\tau^n_j],\ j=\overline{1,k(n)}.$$

Очевидно, что $\psi_n(t)$ — простые функции. Обозначим

$$I_z=\big\{t\in[0;T]:\ \big\|z(t)\big\|_{X^*}<\infty\big\}.$$

Ясно, что множество I_z имеет полную меру в отрезке $[0;T]$.

Зафиксируем произвольно $t\in I_z$. Используя оценки 3), 4) получаем:

$$\big\|\psi_n(t)-\psi(t)\big\|_X=\Big\|\Psi\big(\varphi(\tau^n_j)\big)^{-1}\big[z_n(t)\big]-\Psi\big(\varphi(t)\big)^{-1}\big[z(t)\big]\Big\|_X \le$$
$$\le\Big\|\Psi\big(\varphi(\tau^n_j)\big)^{-1}\big[z_n(t)\big]-\Psi\big(\varphi(\tau^n_j)\big)^{-1}\big[z(t)\big]\Big\|_X+$$
$$+\Big\|\Psi\big(\varphi(\tau^n_j)\big)^{-1}\big[z(t)\big]-\Psi\big(\varphi(t)\big)^{-1}\big[z(t)\big]\Big\|_X\le$$
$$\le\big\|z_n(t)-z(t)\big\|_{X^*}+\mu_1(M)\big\|\varphi(\tau^n_j)-\varphi(t)\big\|_X\,\big\|z(t)\big\|_{X^*}\le$$
$$\le\big\|z_n(t)-z(t)\big\|_{X^*}+\sigma_n\,\big\|z(t)\big\|_{X^*}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Это означает, что функция $\psi(t)$ измерима по Бохнеру на $[0;T]$.

2. Докажем, что $\big\|\psi(t)\big\|_X\in L_1[0;T]$. Оценим

$$\big\|\psi(t)\big\|_X=\Big\|\Psi\big(\varphi(t)\big)^{-1}\big[z(t)\big]\Big\|_X\le\big\|z(t)\big\|_{X^*}<\infty.$$

Таким образом, $\psi\in L_1\big([0;T];X\big)$. □

Исходя из наших построений и леммы 6.1, очевидно, что условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) раздела 2 выполнены. В силу замечания 5.1, условие $\mathbf{F}_3$) тоже можно считать выполненным. Таким образом, при достаточно малом $T>0$, в соответствии с теоремами 5.1, 5.2, условия $\mathbf{H}_1$), $\mathbf{H}_2$) тоже можно считать выполненными.

Пусть теперь в полупроводнике имеются управляемые игроками 1 и 2 примесные центры. Можно считать, что игрок 1 — это разработчик устройства, игрок 2 — природа (различные нежелательные примеси, вносящие помехи в работу устройства). Тогда $w = (u, v)$, где u — управление игрока 1, v — управление игрока 2. Разработчику требуется так организовать управление электрическим полем в полупроводнике, чтобы эволюция электрического потенциала $\varphi(t) = \varphi(t, .)$ как можно меньше отличалась от заданной программы $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(t, .)$. Тогда в качестве выигрыша игрока 1 можно принять, например, функционал вида:

$$J[u,v] = -\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_0^T \left|\varphi[u,v](t,x) - \overline{\varphi}(t,x)\right| dt = \mathcal{F}\left[\int\limits_0^T F(t, \varphi[u,v])\, dt\right],$$

где

$$F(t,\varphi)(.) = \left|\varphi(.) - \overline{\varphi}(t,.)\right| : [0;T] \times X \to Z \equiv L_1(\Omega),$$

$\mathcal{F} \in Z^*$ — функционал, определяемый формулой:

$$\mathcal{F}[z] = -\int\limits_{\Omega} z(x)\, dx, \quad z \in Z.$$

7. Дополнение

Необходимость этого раздела связана с тем, что автору в известной ему литературе не удалось найти какой-либо информации о пространстве $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ несмотря на то, что само понятие абсолютно непрерывной функции со значениями в банаховом пространстве некоторыми авторами используется, но без точного определения и каких-либо ссылок.

Приведем строгое доказательство леммы 2.1.

Лемма 7.1. $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big) \subset \mathbb{C}\big([0;T];X\big)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$. Тогда найдутся $b \in X$ и $z \in L_1\big([0;T];X\big)$, при которых выполнено (2.3). Требуется доказать, что $\big\|\varphi(t) - \varphi(\tau)\big\|_X \to 0$ при $\tau \to t$, $\forall\, t, \tau \in [0;T]$. В соответствии с [5, глава IV, § 1, теорема 1.6] имеем:

$$\big\|\varphi(t)-\varphi(\tau)\big\|_X = \left\|\int\limits_\tau^t z(s)\,ds\right\|_X \le \int\limits_{[\tau;t]} \big\|z(s)\big\|_X\,ds,$$

где функция $\upsilon(s)=\big\|z(s)\big\|_X$ интегрируема по Лебегу на $[0;T]$. Тогда по абсолютной непрерывности интеграла Лебега, $\big\|\varphi(t)-\varphi(\tau)\big\|_X \to 0$ при $\tau\to t$. $\square$

Непосредственно из [5, глава IV, § 1, теорема 1.7] вытекает

Лемма 7.2. *Если* $\varphi\in\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ *и выполнено* (2.3), *то для п.в.* $t\in[0;T]$ *существует производная* $\varphi'(t)=z(t)$.

Таким образом, на пространстве $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ можно определить норму

$$\|\varphi\|_{\mathbb{AC}\left([0;T];X\right)} = \|\varphi\|_{\mathbb{C}\left([0;T];X\right)} + \|\varphi'\|_{L_1\left([0;T];X\right)}.$$

Лемма 7.3. *Пространство* $\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ *является банаховым.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\varphi_k\}\subset\mathbb{AC}\big([0;T];X\big)$ фундаментальна, то есть $\|\varphi_k-\varphi_m\|_{\mathbb{AC}\left([0;T];X\right)}\to 0$ при $k,m\to\infty$. По определению, существуют $\{b_k\}\subset X$, $\{z_k\}\subset L_1\big([0;T];X\big)$ такие, что

$$\varphi_k(t) = b_k + \int\limits_0^t z_k(s)\,ds, \quad \forall\, t\in[0;T].$$

Отсюда очевидным образом получаем:

$$\|z_k - z_m\|_{L_1\left([0;T];X\right)}\to 0, \quad \|b_k-b_m\|_X\to 0$$

при $k,m\to\infty$. Так как пространства X и $L_1\big([0;T];X\big)$ банаховы, то найдутся $\overline{b}\in X$, $\overline{z}\in L_1\big([0;T];X\big)$ такие, что

$$\|b_k-\overline{b}\|_X\to 0, \quad \|z_k-\overline{z}\|_{L_1\left([0;T];X\right)}\to 0$$

при $k\to\infty$. Положим

$$\overline{\varphi}(t) = \overline{b} + \int\limits_0^t \overline{z}(s)\,ds, \quad t\in[0;T].$$

Тогда

$$\|\varphi_k - \overline{\varphi}\|_{\mathbb{AC}\left([0;T];X\right)} = \sup_{t\in[0;T]} \left\| b_k - \overline{b} + \int\limits_0^t \left\{ z_k(s) - \overline{z}(s) \right\} ds \right\|_X +$$

$$+\|z_k - \overline{z}\|_{L_1\left([0;T];X\right)} \le \|b_k - \overline{b}\|_X + 2\|z_k - \overline{z}\|_{L_1\left([0;T];X\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, существует

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \overline{\varphi} \in \mathbb{AC}\big([0;T];X\big).$$

□

Непосредственно из лемм 7.1–7.3 вытекает лемма 2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. *Физика полупроводников.* М.: Наука, 1990.

2. Васильев Ф.П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893–1900.

3. Власенко А.А., Чикрий А.А. *Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами* // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 71–80.

4. Власенко А.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А. *О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе* // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 26–40.

5. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.

7. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. *Уравнения математической физики. Дополнительные главы.* Казань: КГУ, 2012.

8. Корпусов М.О., Свешников А.Г. *Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа* // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 40. Р. 3–138.

9. Корпусов М.О. *Условия глобальной разрешимости начально--краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 678–685.

10. Корпусов М.О., Свешников А.Г. *Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.

11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1965.

12. Осипов Ю.С. *К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами* // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.

13. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа, 1998.

14. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем // Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 749–760.

15. Соколов С.В. *О решении задачи дифференциальной игры для распределенных динамических систем* // Проблемы управления и информатики. 2004. Т. 157, № 1. С. 71–77.

16. Фурман А.С. *О стратификации объемного заряда при переходных процессах в полупроводниках* // Физика твердого тела. 1986. Т. 28, № 7. С. 2083–2090.

17. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // МТИиП. 2011. Т. 3, вып.1. С. 91–117.

18. Чернов А.В. *О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации*//МТИиП. 2012. Т. 4, вып.1. С. 74–92.

19. Чернов А.В. *Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т.19, № 1. С. 316–328.

20. Чернов А.В. *О существовании ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями, управляемыми многими игроками* // МТИиП. 2014. Т. 6, вып.1. С. 91–115.

21. Чернов А.В. *О существовании равновесия по Нэшу в дифференциальной игре, связанной с эллиптическими уравнениями: монотонный случай* // МТИиП. 2015. Т. 7, вып.3. С. 48–78.

22. Черноусько Ф.Л. *Граничные управления в системах с распределенными параметрами* // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 5. С. 810–826.

23. Berkovitz L.D. *The existence of value and saddle point in games of fixed duration* // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. P. 172–196.

24. Ibragimov G., Alias I.A., Waziri U., Ja'afaru A.B. *Differential game of optimal pursuit for an infinite system of differential equations* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. V. 2(42), №. 1. P. 391–403.

25. Il'in V.A., Tikhomirov V.V. *The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem* // Differ. Equations. 1999. V. 35, № 5. P. 697–708.

26. Lions J.-L. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems* // SIAM Rev. 1988. V. 30, no. 1. P. 1–68.

27. Ramaswamy M., Shaiju A.J.. *Construction of approximate saddle-point strategies for differential games in a Hilbert space* // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 141. P. 349–370.

28. Roxin E.O. *Differential games with partial differential equations* // Differential Games Appl. Enschede: Proc. Workshop, 1977. Lect. Notes Control Inf. Sci. V. 3. P. 186–204.

29. Troeva M. *Existence of equilibrium point for noncooperative differential game in Banach space* // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1479. P. 1234–1237.

DIFFERENTIAL GAMES IN A BANACH SPACE ON A FIXED CHAIN

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to obtaining the sufficient conditions for existence of ε-equilibrium in the sense of piecewise program strategies in antagonistic games associated with nonlinear non-autonomous controlled differential equation in a Banach space and cost functional of a general enough form. The concept of piecewise program strategies in such a game is defined on the base of a concept of Volterra set chain for a right-hand operator of the corresponding integral equation controlled by the opponent players and according to a given partition of the time segment. As example we consider the game associated with a nonlinear pseudoparabolic partial differential equation governing the evolution of electric field in a semiconductor.

Keywords: differential game, nonlinear differential equation in a Banach space, Volterra set chain, piecewise program strategies, ε-equilibrium.