Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 7–23

УДК 517.97
ББК 22.18

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ С МЕДЛЕННЫМИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯМИ НА ГРАФЕ РЕБЕР СИМПЛЕКСА. I

Посвящается 80-летию Л.А. Петросяна

Абдулла А. Азамов*
Институт математики им. В.И. Романовского
100170, Узбекистан, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81
Толанбай Т. Ибайдуллаев
Андижанский государственный университет
им. З.М. Бабура
100170, Узбекистан, Андижан, ул. Университетская, 129
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, ibaydullayev73@mail.ru

Рассматривается дифференциальная игра с несколькими преследующими точками и одной убегающей точкой, движущихся по одномерному остову (т.е. по графу, составленному из ребер)произвольного симплекса трехмерного пространства и полного графа четвертого порядка со спрямляемыми ребрами при заданных максимальных скоростей точек. Приводится точная постановка задачи. Используя стратегию параллельного преследования для медленного преследователя и одну числовую характеристику симплекса, выражающую его близость

* Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект ОТ-Ф4-84)

к правильному тетраэдру, дается полное решение задачи качества для трехмерного симплекса. Следующая часть будет посвящена рассмотрению многомерных случаев.

Ключевые слова: дифференциальная игра, игра на графе, задача преследования, задача убегания, П-стратегия, коэффициент регулярности симплекса, полный граф.

Поступила в редакцию: 05.06.20 *После доработки*: 01.08.20 *Принята к публикации*: 05.12.20

1. Введение

Существуют несколько типов динамических игр на графах. Одним из первых рассмотренных и ныне наиболее изучаемым типом является класс игр на абстрактных графах, когда точки перемещаются из одной вершины на соседнюю прыжками [17-19,22,25,26]. Такие игры лучше называть многоходовыми. Несколько более узкий, но не менее интересный класс составляют игры, в которых точки перемещаются вдоль ребер графа со спрямляемыми ребрами, вложенного в евклидово пространство [3,4,9,13,15] (еще об одном типе игр, связанных с графами, см. [14, 23]). Оба типа игр имеют минимаксные формы, моделирующие задачу поиска движущегося объекта [2,8,16,20] (см. обзор в [2]).

В настоящей статье рассматривается дифференциальная игра второго типа, конкретно – игра преследования-убегания на графе Δ, состоящим из одномерного остова тетраэдра (произвольной треугольной пирамиды) и ее обобщение на случай полного графа 4-го порядка. Оказывается, в таких играх эффективна стратегия параллельного преследования (короче П-стратегия [10, 24]) и ее модификация для случая произвольного полного графа, когда максимальная скорость преследователя меньше чем максимальная скорость убегающего. Условие на отношение скоростей выражается через геометрическую характеристику тетраэдра (полного графа), выражающую ее близость к правильному тетраэдру.

Итак, рассмотрим игру, в которой точки P_1, P_2 (управляемые игроком-преследователем) и точка Q (управляемая игроком-убегающим) движутся по Δ со скоростями, не превосходящими ρ_1, ρ_2, σ соответственно ($\rho_1 \geq \rho_2 > 0$, $\sigma > 0$). Эти данные полностью определяют игру, и ее обозначим $(\Delta, \rho_1, \rho_2, \sigma)$. При этом, допуская некоторую вольность речи, будем свободно пользоваться словами «преследующая точка» и «убегающая точка».

Основная цель этой части статьи состоит в определении числа $\gamma,\ \gamma > 0$, такого, что в случае $\rho_1/\sigma \geq \gamma$ игра заканчивается в пользу преследователей, в противном случае – в пользу убегающего. В последующих частях будут рассмотрены многомерные случаи, когда задача становится содержательной и для большего числа преследователей.

2. Постановка задачи

Пусть Γ – *геометрический граф*, т.е. конечный простой граф со спрямляемыми ребрами, вложенный в конечномерное евклидово пространство $\mathbf{R}^d$. Условие спрямляемости позволяет рассматривать движение точек вдоль Γ. Мы будем иметь дело с так называемым простым движением точек, когда вектор скорости по модулю ограничен некоторым фиксированным числом, а направление определяется условием, чтобы точка двигалась по графу. (В настоящей работе «простое движение», означает безынерционность, когда уравнение движения задается простым уравнением вида $dx(t)/dt = u(t)$.)

В игре участвуют два игрока: *преследователь*, управляющий движением точек $x_1,\ x_2, \ldots, x_m,\ m \geq 2$ и *убегающий*, управляющий движением точки y. Для краткости набор из m векторов будем обозначать соответствующей прописной буквой, например, $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^{md}$.

В конечном итоге движение точек порождает соответствующие *траектории* (абсолютно-непрерывные функции) $X(t) = (x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_m(t)),\ \ y(t),\ t \geq 0$. Разумеется, допустимы лишь те траектории, которые лежат в Γ. По условию игры должны иметь место условия

$$|dx_k(t)/dt| \leq \rho_k,\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad |dy(t)/dt| \leq \sigma \text{ п.в.}$$

Будем предполагать $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_m > 0, \quad \sigma > 0$.

Игра является дифференциальной (это понятие впервые введено в обиход в [11] на эвристическом уровне), т.е. игроки должны управлять своими точками, основываясь на текущей информации. В нашем случае такая информация для уклоняющегося состоит из информации о текущих величинах $X(t)$ и $y(t)$, а для преследователя – о $X(t)$, $y(t)$, $v(t) = dy(t)/dt$ и возможно других величинах в каждый текущий момент времени t. Практически во всех подходах, основанных на сведении дифференциальной игры к многошаговой, одному из игроков разрешается воспользоваться и информацией об управлениях противника. В нашем случае таким игроком будет преследователь. Неравноправие в *информированности* игроков объясняется тем, что условие завершения игры есть *точечная поимка*: $x_k(t) = y(t)$ для некоторых k и t, $k = 1, 2, \ldots, m$, $t \geq 0$.

Для точного ответа на вопрос «Что такое дифференциальная игра преследования-убегания?» следует выяснить, как порождаются траектории $X(t)$ и $y(t)$, или, равносильно, определить способы управления движением точек на основе текущей информации. Это осуществляется введением классов *стратегий* игроков, что приведет дифференциальную игру к *нормальной форме* Дж. фон Неймана [6]. В настоящее время известно много подходов к проблеме нормализации дифференциальной игры (см, например, [7,12,21,27]). Исходя из того, что настоящая статья посвящена рассмотрению довольно простой по постановке игры, а также имея в виду дальнейшее развитие теории игр преследования-убегания и задач поиска на графах, введем в рассмотрение классы стратегий, специально приспособленные к игре на графах. С этой целью будем предполагать, что все ребра графа суть ломаные линии и что сам граф расположен в пространстве $\mathbf{R}^3$, что не сужает общности.

Определение 2.1. *Отображение Q, ставящее каждому положению точек X и y в соответствие вектор v, $|v| \leq \sigma$, и положительное число δ, называется стратегией уклоняющегося.*

Если при этом $Q(X, y) = (v, \delta)$, то (v, δ) будем называть *предписанием стратегии V* (для точки y) в позиции (X, y).

Определение 2.2. *Отображение P, ставящее каждой паре точек X, y, вектору v, $|v| \leq \sigma$, и числу δ в соответствие набор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, где $|u_k| \leq \rho_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и положительное число ε, $\varepsilon \leq \delta$ называется стратегией преследователя.*

При этом если $P(X, y, v, \delta) = (U, \varepsilon)$, то (U, ε) будем называть *предписанием стратегии* U в позиции $(X,\ \ y, v)$ (для точек $x_k,\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$).

Стратегия P *называется допустимой*, если из $x_k \in \Gamma$ вытекает $x_k + tu_k \in \Gamma$ для $t \in [0, \varepsilon]$. Аналогично определяется допустимость стратегии Q. Допустимость обеспечивает включения $x_k\,(t)\,,\ \ y\,(t) \in \Gamma$ при всех $t,\ t \geq 0$ при условии $x_k\,(0)\,,\ y\,(0) \in \Gamma$. Отметим, что допустимость стратегии преследователя и стратегии убегающего является независимой. В дальнейшем под стратегией будет подразумеваться только допустимые.

Пара стратегий (P, Q) вместе с заданными начальными положениями $X_0 = (x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{m0})$, y_0 образуют *партию в игре.* В нашем случае это понятие равносильно паре траекторий $X\,(t) = X\,(t; X_0,\ y_0,\ P, Q)\,,\ \ \ y\,(t) = y(t; X_0,\ y_0,\ P, Q)$, которые порождаются описанным ниже образом.

Пусть $v_0 = V\,(X_0, y_0)\,,\ \ \delta_0 = \delta\,(X_0, y_0)\,,\ \ \ U_0 = U\,(X_0, y_0, v_0, \delta_0)\,,$ $\varepsilon_0 = \varepsilon\,(X_0, y_0, v_0,\ \delta_0)$. Положим $t_0 = 0,\ \ \ t_1 = t_0 + \varepsilon_0$ и для $t \in [t_0,\ t_1]$ примем

$$X\,(t) = X_0 + tU_0, \qquad y\,(t) = y_0 + tv_0.$$

Пусть $X_1 = X\,(t_1)\,,\ y_1 = y\,(t_1)\,.$ По этим данным рассматриваемые стратегии порождают значения $v_1 = V\,(X_1, y_1)\,,\ \delta_1 = \delta\,(X_1, y_1)\,,\ \ U_1 = U\,(X_1, y_1, v_1)\,,\ \varepsilon_1 = \varepsilon\,(X_1, y_1, v_1, \delta_1)$, а траектории продолжаются формулами $y\,(t) = y_1 + (t - t_1)v_1,\ X\,(t) = X_1 + (t{-}t_1)U_1$ для $t \in [t_0,\ t_2]$, где $t_2 = t_1 + \varepsilon_1$.

Продолжив этот процесс, получим бесконечные последовательности $t_n, v_n, \delta_n, U_n, \varepsilon_n$, а траектории $y\,(t)$ и $X(t)$ определяются для $t \in [t_0,\ t_n],\ \ \ n = 1, 2, \ldots$. По построению, t_n строго монотонно возрастающая последовательность. Положим $t_\omega = \sup t_n.$ Возможны два случая.

1-ый случай: t_n не ограничена. Тогда построение траекторий $y\,(t)$ и $X\,(t)$ заканчивается.

2-ой случай: $t_\omega < +\infty$.

В этом случае, сходимость t_n влечет это же свойство для последовательностей $y(t_n)$ и $X(t_n)$ (надо применить критерий Коши). Пусть y_ω и X_ω – соответствующие пределы. Продолжим построение трансфинитной индукцией [26]. Пусть μ – произвольное порядковое число. Предположим, что уже построены числа t_λ и *траектории* $y(t)$ *и* $X(t)$

определены на отрезке $[0, t_\lambda]$ для каждого $\lambda < \mu$. Если μ – изолированное, т.е. $\mu = \nu + 1$ для некоторого порядкового числа ν, то

$$v_\nu = V\left(X_\nu, y_\nu\right),\ \delta_\nu = \delta\left(X_\nu, y_\nu\right),$$

$$U_\nu = U\left(X_\nu, y_\nu, v_\nu\right),\ \varepsilon_\nu = \varepsilon\left(X_\nu, y_\nu, v_\nu, \delta_\nu\right),$$

а траектории для $t \in [t_\nu,\ t_\mu]$ продолжаются формулами $y\left(t\right) = y_\nu + (t - t_\nu)v_\nu$, $X\left(t\right) = X_\nu + (t - t_\nu)U_\nu$, где $t_\mu = t_\nu + \varepsilon_\nu$.

Пусть теперь μ – предельное число, так что $t_\mu = \sup\{t_\nu | \nu < \mu\}$. В этом случае существуют пределы $\lim\limits_{\nu \to \mu} y(t_\nu)$, $\lim\limits_{\nu \to \mu} X(t_\nu)$ (уже не обычные, а в смысле направленностей [1]), которые принимаются в качестве $y(t_\mu)$ и $X\left(t_\nu\right)$ *соответственно.* Поскольку для каждого μ промежуток $[t_\mu,\ t_{\mu+1})$ содержит рациональную точку, к тому же такие точки разные для разных промежутков, то существует не более чем счетное порядковое число $\hat{\mu}$, такое, что $t_{\hat{\mu}} = +\infty$. Тем самым построение траекторий завершается. (Трансфинитная итерация при построении траекторий в дифференциальных впервые была применена в [7] (см. также [1]).

В дальнейшем точки t_μ будут называться *моментами выбора предписания*, а $[t_\mu,\ t_{\mu+1})$ – *промежутками (интервалами) действия предписания.*

Теперь положим

$$T_{X_0, y_0}\left(P, Q\right) = \inf\ \left\{t |\ \exists k\ : x_k\left(t; X_0, y_0, P, Q\right) = y\left(t; X_0, y_0, P, Q\right)\right\}.$$

(Если множество в фигурных скобках пусто, то, как это принято, $T_{X_0, y_0}\left(P, Q\right) = +\infty$.) Эта функция вместе с классами стратегий игроков для каждой пары начальных точек $X_0,\ y_0$ определяет нормальную форму игры по Дж. фон Нейману, что завершает формализацию игры. При решении конкретных игр более удобен подход теории оптимального управления, согласно которому задача нахождения точки равновесия заменяется двумя задачами.Эти задачи первоначально формулируются для фиксированной пары начальных положений X_0, y_0.

Задача преследования. *Построить стратегию преследователя $\hat{P}$, такую, что для любой стратегии убегающего Q окажется*

$$\exists k\ \exists t\ : x_k\left(t; X_0, y_0, \hat{P}, Q\right) = y\left(t; X_0, y_0, \hat{P}, Q\right)$$

.

Задача уклонения от встречи (убегания). *Построить стратегию убегающего* $\hat{Q}$*, такую, что для любой стратегии преследователя* P *будет иметь место*

$$\forall k \ \forall t \ : x_k \left(t; X_0, y_0, P, \hat{Q}\right) \neq y \left(t; X_0, y_0, P, \hat{Q}\right).$$

При этом $\hat{P}$ (соответственно $\hat{Q}$) называется *стратегией, гарантирующей разрешимость задачи преследования (уклонения)* или, короче, *стратегией, гарантирующей преследование (уклонение).*

Очевидно, для каждой фиксированной пары начальных точек X_0, y_0 разрешима только одна из этих задач. Однако, из определений логически не вытекает, что всегда одна из них разрешима. В основе этого явления лежит то, что игра рассматривается на бесконечном интервале $[0, +\infty)$ [1]. Можно доказать, что рассматриваемые в этой статье игры преследования-убегания на графах можно привести к играм на фиксированном конечном отрезке времени, поэтому имеет место *альтернатива* [21], притом в усиленной форме (см. ниже теорему 2.2).

Пусть $\Phi = (XY, \ Z)$ – *флаг тетраэдра* Δ, т.е. ребро и примыкающая к нему грань. Основание биссектрисы угла $\angle XZY$ обозначим Z_0 и положим $\gamma_\Phi = \frac{XZ_0}{XZ} = \frac{YZ_0}{YZ} = \frac{XY}{XZ+YZ}$. Величину $\gamma_\Delta = \min\limits_{\Phi} \gamma_\Phi$ назовем *коэффициентом регулярности* (чем больше γ_Σ, тем Δ близко к правильному).

Основное свойство этой характеристики тетраэдров сформулируем в виде элементарной теоремы, которая легко доказывается

Теорема 2.1. $0 < \gamma_\Delta \leq \frac{1}{2}$; $\gamma_\Delta = 1/2$ *тогда и только тогда, когда тетраэдр* Δ *правильный.*

Следует также отметить, что γ_Δ выражает вытянутость тетраэдра и может принимать значения, сколь угодно близкие к 0.

Следующее утверждение представляет собой основной результат статьи.

Теорема 2.2. ***A.*** *Если* $\rho_1/\sigma \geq \gamma_\Delta$*, то в игре* $(\Delta, \ \rho_1, \rho_2, \ \sigma)$ *существует положительное число* T_**, что для каждого начального состояния* X_0, y_0 *преследователь имеет стратегию* $\hat{P}$*, обладающее свой-*

ством: для любой стратегии убегающего Q

$$T_{X_0,y_0}\left(\hat{P},Q\right)\leq T_*.$$

B. *Если $\rho_1/\sigma<\gamma_\Delta$, то в игре $(\Delta,\rho_1,\ \rho_2,\ \sigma)$ существуют начальное состояние X_0,y_0 и стратегия $\hat{Q}$, такие, что при любой стратегии P имеет место*

$$T_{X_0,y_0}\left(P,\hat{Q}\right)=+\infty.$$

Мы покажем, что на самом деле в игре $(\Delta,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \sigma)$ альтернатива имеет место в более сильной форме:

B′. *Пусть $\rho_1<\gamma_\Delta\sigma$, и y_0 совпадает с одной из вершин Δ, но $x_{k0}\neq y_0$, $k=1,2,\ldots,m$. Тогда существует стратегия $\hat{Q}$, такая, что при любой стратегии преследователя P имеет место*

$$x_k\left(t\right)\neq y\left(t\right)\ \text{для всех}\ k=1,2,\ldots,m\ \text{и}\ t,\ \ t\geq 0.$$

3. П-тактика для медленного преследователя

При решении задачи преследования мы будем пользоваться П-стратегией Л.А. Петросяна для точки x специфическим образом – только после достижения определенных положений, которые будут названы S-состояниями. Другими словами, предписание для точки x может вырабатываться в соответствии с П стратегией только для определенных положений X, y. В связи с этим, чтобы избежать смешения, здесь такое действие стратегии будем называть П-*тактикой.*

Пусть движение точек x,y определяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{x}=u,\ \ \dot{y}=v,\ \ |u|\leq\rho,\ \ |v|\leq\sigma,\ \ \rho>0,\sigma>0.$$

П-стратегия преследователя определяется двумя условиями:

1) вектор $y-x$ остается параллельным вектору $y(0)-x(0)$;

2) скорость преследующей точки должна быть максимальной по модулю и направляться в сторону убегающей точки.

Для этого при известном постоянном v вектор u следует выбрать так, чтобы точки x и y встретились в точке пересечения соответствующих лучей.

Геометрическая теория П-стратегии изложена в [24], аналитическая формула в общем случае имеет вид [10]

$$u_{\Pi} = v - w\left(\frac{y-x}{|y-x|},\ v\right), \tag{3.1}$$

где $w(\xi,\, v) = \left(\langle \xi,\ v\rangle + \sqrt{\langle \xi,\ v\rangle^2 + \rho^2 - |v|^2}\right)\xi.$

Формула (3.1) имеет смысл лишь при условии

$$\langle \xi, v\rangle^2 + \rho^2 - |v|^2 \geq 0, \qquad \text{где} \;\; \xi \; = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Это условие является геометрическим выражением того, что если игроки выберут постоянные векторы u и v ($|v| \leq \sigma$, $|u| = \rho$), то точки $x\,(t) = x + ut$ и $y\,(t) = y + vt$ должны встретиться. В случае $\rho > \sigma$ это условие выполняется для любых ξ и v (а точки встречи образуют круг, ограниченной *окружностью Аполлония*, содержащий точку y внутри [24]). В случае $\rho = \sigma$ эти лучи пересекаются только в случае $\langle \xi, v\rangle > 0$. В интересующемся нас случае $\rho < \sigma$ условие на угол между ξ и v еще жестче, а точки встречи снова образуют круг Аполлония, на этот раз окружающий точку x. В частности, в ситуации, изображенной на рис. 1, П-стратегия допустима тогда и только тогда, когда $|XZ| : |YZ| \leq \rho : \sigma$. При этом если убегающая точка движется из начального положения $y\,(0) = Y$, оставаясь на отрезке XZ, а преследующая точка, начинающая свое движение из положения $x(0) = X$, применит П-тактику, то отрезок с концами $x(t)$ и $y(t)$, будет оставаться параллельным XY.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\rho < \sigma$. Рассмотрим угол, образованный отрезками AS и AC (рис. 1.). Пусть $x(0) = S$, $y(0) = C$. Если $AS : \rho \leq AC : \sigma$, то как бы ни двигалась точка y по отрезку AC, точка x может применять П-тактику и сохранить параллельность отрезка XY к отрезку AC.

4. Доказательство Теоремы 2.2.

Без потери общности можно ограничиться теми стратегиями обоих игроков, что на каждом интервале предписания каждая из точек $x_k\,(t)\,,\; y\,(t)$ остается в пределах одного ребра (в следующем п. 5, где

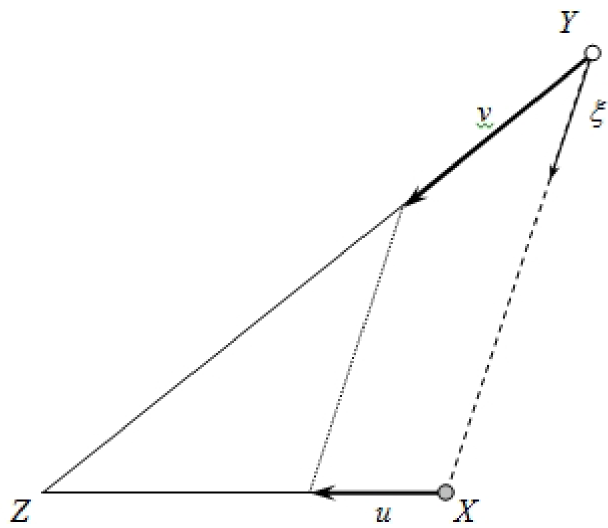

Рисунок 1. П-стратегия для медленного преследователя

ребра представляются ломаными – в пределах одного звена таких ломаных).

Пусть минимум в формуле (3.1) достигается на флаге $\Phi = (AB, C)$ и CS – биссектриса угла ACB. По условию теоремы

$$AS : \rho_1 \leq AC : \sigma, \quad BS : \rho_2 \leq BC : \sigma$$

Поэтому, согласно п. 3, если в некоторый момент времени преследующая точка со скоростью ρ_1 занимает положение S, а убегающая – вершину C, то преследователь может применять П-тактику, пока последняя находится в пределах ребер AB и AC. Такое расположение преследователя дальнейшем будем упоминать как S-состояние.

После этих подготовительных соображений, приступим к построению стратегии игрока-преследователя. Предпишем точкам x_1 и x_2, отправляясь из произвольных начальных положений, занимать позиции S и D соответственно (рис. 2). Пусть это реализуется в момент времени t_1, $t_1 \geq 0$. Все возможные положения y_1 точки y в этот момент времени разобьем на два случая.

1-случай: y_1 лежит на основании ABC. Пусть y_1 принадлежит ло-

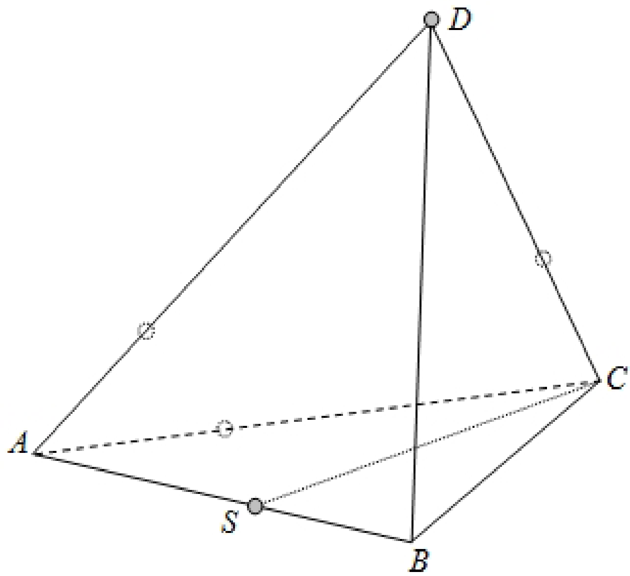

Рисунок 2. Расположение преследователей в момент времени t_1

маной SAC (случай, когда y_1 принадлежит ломаной SBC, разбирается аналогично). Предпишем точке x_1 двигаться в сторону вершины A. (Здесь мы выступаем как игрок-преследователь, строящий свою стратегию.) На каких-то интервалах времени точка y может проникать на ребро AD. Поэтому либо в момент времени $t_2 = AS/\rho$ имеет место $x_1(t_2) = A$ и $y(t_2) \in AD$ и точка y окажется между двумя преследователями на этом ребре, либо наступит момент времени t'_2 (меньше чем t_2), такой, что отрезок с концами $x_1(t'_2)$, $y(t'_2)$ станет параллельным биссектрисе AS. Во втором случае начиная с момента времени t'_2 точке x_1 предпишем придерживаться П-тактики, а точке x_2 двигаться в направлении к вершине C.

2-случай: y_1 лежит на одном из боковых ребер AD, BD, CD. Если $y_1 \in AD$, то ситуация в общем повторяет предыдущий случай – точке x_1 предпишем двигаться в сторону вершины A и точка y будет вынуждена перейти к ребру AC и затем наступит S-ситуация. Если $y_1 \in BD$, то рассуждения симметричны.

Пусть $y_1 \in CD$. Тогда предпишем точке x_1 придерживаться П-тактики, в частности при $y \in CD$ оставаться на месте, а точке x_2

направляться к вершине C. (П-тактика не позволит точке y покинуть звезды вершины C.)

Тогда наступит момент времени t_3, такой, что при $t \geq t_3$ точка y будет вынуждена покинут ребро CD, если до этого она не будет поймана, $t_3 \leq \frac{DC}{\rho} = t'_3$. В момент t'_3 времени точка x_2 достигнет вершины C, поэтому $y(t'_3) \in AC$ или $y\,(t'_3) \in BC$. Предпишем x_2 продолжать преследовать y, двигаясь в сторону вершины A или B соответственно. Очевидно, наступит снова S-ситуация. С этого момента времени П-тактика x_1 обеспечит завершение преследования. Тем самым часть А теоремы 2.2 доказана.

Приступим к доказательству части Б. Пусть $\rho/\sigma < \gamma_\Delta$. Следовательно, для любого флага $\Phi = (XY,\ Z)$ имеет место соотношения

$$\frac{XZ_0}{\rho} > \frac{XZ}{\sigma}, \quad \frac{XY}{\rho} > \frac{YZ}{\sigma}$$

Таким образом, если преследующая точка занимает положение Z_0 а убегающая точка – положение Y и они оба одновременно направляются к вершине X или Y, то эту вершину убегающая точка достигнет раньше преследующей. Из любых других положений каждая из преследующих точек может добраться раньше убегающей точки лишь к одной (ближайшей) вершине. Следовательно, если в начальный момент времени точка y находилась какой-то вершине, а преследующие точки – где угодно, за исключением этой вершины, убегающая точка всегда имеет возможность безопасно перейти к одной из трех соседних вершин. Это завершает доказательство теоремы 2.2.

5. Обобщение на произвольный полный граф с четырьмя вершинами

Пусть Σ – произвольный полный граф с четырьмя вершинами. Как было отмечено выше, $\Sigma \subset \mathbf{R^3}$ и все ребра суть ломаные линии (рис. 3). Любые три вершины Σ образуют его «грань». Любой тетраэдр есть частный случай такого графа, однако в отличии от тетраэдров, длины ребер Σ могут быть произвольными. В частности, если два противоположных ребра очень длинные по сравнению с остальными, то ни для одной «грани» не выполняется ни одно из трех неравенств треугольника.

«Грань» XYZ с выделенным ребром $[XY]$ назовем *флагом* графа Σ и обозначим $\Phi = (XY, Z)$. Зафиксировав такой флаг, возьмем точку $W \in [XY]$ и рассмотрим функцию

$$\varphi\,(W) = \frac{XW}{XZ} - \frac{YW}{YZ} \tag{5.1}$$

– разность отношений длин соответствующих дуг. Очевидно, если точка W пробегает ребро $[XY]$ от точки X до Y, то $\varphi\,(W)$ монотонно возрастает от значения $\varphi\,(X) = -\frac{YW}{YZ} < 0$ до значения $\varphi\,(Y) = \frac{XW}{XZ} > 0$. Поэтому существует единственная точка $S \in [XY]$, такая, что

$$\frac{XS}{XZ} = \frac{YS}{YZ}.$$

Если XYZ – евклидов треугольник, то S совпадает с основанием биссектрисы угла Z. Величину (5.1) обозначим γ_Φ и, так же как в п.2, положим $\gamma_\Sigma = \min\limits_\Phi \gamma_\Phi$, где минимум берется по всем флагам графа Σ.

Теперь рассмотрим игру, взяв вместо тетраэдра граф Σ. Тогда, очевидно, теоремы 2.1 и 2.2 можно обобщить следующим образом:

1. $0 < \gamma_\Sigma \leq \frac{1}{2}$; при этом $\gamma_\Sigma = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда все ребра графа Σ имеют одинаковую длину.

2. Если $\frac{\rho}{\sigma} \geq \gamma_\Delta$, то в игра на графе Σ завершается в пользу преследующих точек.

3. Если $\frac{\rho}{\sigma} < \gamma_\Delta$, то в игра на графе Σ завершается в пользу убегающей точки.

Единственное место в доказательстве, требующее изменения – это определение П-тактики. Здесь, очевидно, отрезок с концами $x\,(t)$, $y(t)$ необязательно останется параллельным отрезку с концами $x\,(0)$, $y(0)$, но при условии $\frac{\rho}{\sigma} \geq \gamma_\Delta$ преследующая точка может пройти расстояние по ребру AB, пропорциональное длине пути, пройденного убегающим и таким образом, если убегающая точка достигнет одну из вершин A, B, то преследующая точка придет в ту же вершину одновременно с ним.

6. Заключение

Задачу преследования на полном графе с четырьмя вершинами в постановке, рассмотренной в этой статье, можно считать завершен-

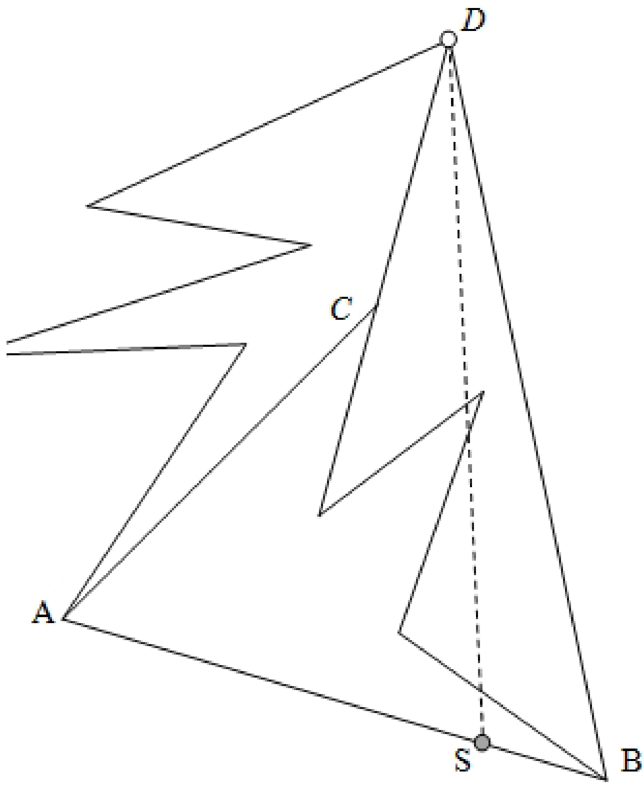

Рисунок 3. Полный граф, не сводящийся к симплексу

ной. Например, если имеется три преследователя, то игра завершается в их пользу, какими малыми ни были их максимальные скорости. Если размерность симплекса (соответственно, порядок полного графа) больше 3, мы будем иметь несколько содержательных задач в зависимости от числа преследователей и соответственно требуется поиск стольких же геометрических характеристик симплекса. Некоторые из этих задач будут рассмотрены во второй части статьи.

Статья посвящена юбилейной дате проф. Л.А. Петросяна, внесшего большой вклад в развитие Ташкентской школы теории дифференциальных игр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А.А. *Об альтернативе для дифференциальных игр преследования-убегания на бесконечном интервале времени* // Прикл. мат. и мех. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 561–566.

2. Азамов А. *Нижняя оценка коэффициента преимущества в задаче поиска на графах* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, вып. 12. С. 1764–1767.

3. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. *Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников* // МТИиП Часть I: 2015. Т. 7, вып. 3. С. 3–15. Часть II: 2016. Т. 8, вып. 4. С. 3–13. Часть III: 2019. Т. 11, вып. 4. С. 5–23.

4. Булгакова М.А., Петросян Л.А. *Многошаговые игры с попарным взаимодействием на полном графе* // МТИиП. 2019. Т. 11, вып. 1. С. 3–20.

5. Келли Дж. *Общая топология.* М.: Физматгиз, 1968.

6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: «Наука», 1976.

7. Петров Н.Н. *Теория игр.* Ижевск: изд-во УдмГУ, 1997.

8. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: изд-во ЛГУ, 1977.

9. Петросян Л.А., Седаков А.А. *Многошаговые сетевые игры с полной информацией* // МТИиП. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 66–81.

10. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.

11. Понтрягин Л.С. *К теории дифференциальных игр.* Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, вып. 4. С. 219–272.

12. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. *Дифференциальные игры.* Киев: «Наукова думка», 1992.

13. Andreae T. *Note on a pursuit game played on graphs* // Discrete Appl. Math. 1984. Vol. 9 , no. 2. P. 111–115.

14. Andreae T. *A search problem on graphs which generalizes some group testing problems with two defectives* // Combinatorics of ordered sets (Oberwolfach, 1988). Discrete Math. 1991. Vol. 88 , no. 2-3. P. 121–127.

15. Andreae T. *A two-person game on graphs where each player tries to encircle his opponent's men* // Theoret. Comput. Sci. 1999. Vol. 215 , no. 1-2. P. 305-323.

16. Azamov A. A., Samatov B. T. Π-*strategy. An elementary introduction to the theory of differential games.* National Univ. of Uzbekistan, 2000.

17. Berge C. *Colloque sur la Theorie des Jeux.* (French) // Tenu a Bruxelles le 29 et le 30 mai 1975. Cahiers Centre Etudes Recherche Oper. 1976. Vol. 18, no. 1-2. P. 1–253. Institut de Statistique, Universite Libre de Bruxelles, Brussels. 1976. P. 1–267.

18. Bonato A., Golovach P., Hahn G., Kratochvl J. *The capture time of a graph* // Discrete Mathematics. 2009. Vol. 309 (18). P. 5588–5595.

19. Bonato A., Nowakowski R. J. *The game of cops and robbers on graphs* // Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

20. Fomin F. V., Thilikos D. M. *An annotated bibliography on guaranteed graph searching* // Theoret. Comput. Sci. 2008. Vol. 399. P. 236–245.

21. Friedman A. *Differential games.* NY: Wiley, 1971.

22. Gavenčiak T. *Cop-win graphs with maximum capture-time* // Discrete Mathematics. 2010. Vol. 310 (10-11). P. 1557–1563.

23. Golovach P. A., Petrov N. N., Fomin F. V. *Search in graphs* // Proc. Steklov Inst. Math. Control in Dynamic Systems. 2000. Vol. 1. P. 90–103.

24. Isaacs R. *Differential games.* Dover Publications, 1999.

25. Kummer B. *Spiele auf Graphen* // (German). International Series of Numerical Mathematics, 44, Birkhauser Verlag, Basel-Boston, Mass., 1980.

26. Nowakowski R. J. *Unsolved problems in combinatorial games* // Games of no chance, 5, P. 125–168, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 70, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.

27. Sierpinski W. *Cardinal and Ordinal Numbers.* Warsaw Polish scientific publishers, 1965.

A PURSUIT-EVASION DIFFERENTIAL GAME WITH SLOW PURSUERS ON THE EDGE GRAPH OF SIMPLEXES. I

Abdulla A. Azamov, Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskii Dr.Sc., Prof., UzAS Fellow (abdulla.azamov@gmail.com).
Tolanbay T. Ibaydullayev, Andijan State University, PhD, Associated Prof. (Ibaydullayev73@mail.ru).

Abstract: We consider the differential game between several pursuing points and one evading point moving along the graph of edges of a simplex when maximal quantities of velocities are given. The normalization of the game in the sense of J. von Neumann including the description of classes of admissible strategies is exposed. In the present part of the paper the qualitative problem for the full graph of three dimensional simplex is solved using the strategy of parallel pursuit for a slower pursuer and some numerical coefficient of a simplex characterizing its proximity to the regular one. Next part will be devoted to higher dimensional cases.

Keywords: differential game, game on a graph, pursuit problem, evasion problem, Π-strategy, coefficient of regularity of a simplex, full graph.