Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 112–126

УДК 517.977
ББК 22.18

О ГАРАНТИРОВАННЫХ ОЦЕНКАХ ПЛОЩАДИ ВЫПУКЛЫХ ПОДМНОЖЕСТВ КОМПАКТОВ НА ПЛОСКОСТИ*

Владимир Н. Ушаков
Александр А. Ершов
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
e-mail: ushak@imm.uran.ru, ale10919@yandex.ru

В работе рассмотрена задача о выделении в невыпуклом компакте на плоскости выпуклого подмножества наибольшей площади, а также задача о выделении выпуклого подмножества, от которого хаусдорфово отклонение компакта минимально. Поскольку в общем случае точное решение этих задач невозможно, в качестве приемлемой замены точного решения предлагается геометрическая разность выпуклой оболочки компакта и круга определенного радиуса. Получены нижняя оценка площади этой геометрической разности и верхняя оценка хаусдорфова отклонения от нее заданного невыпуклого компакта. В качестве примеров рассмотрены задачи выделения выпуклых подмножеств из α-множества и множества с конечным коэффициентом вогнутости Морделла.

Ключевые слова: выпуклое подмножество, геометрическая разность, α-множество, коэффициент вогнутости Морделла, площадь фигуры,

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–01–00221 А.

хаусдорфово отклонение.

Поступила в редакцию: 06.11.20 *После доработки*: 08.12.20 *Принята к публикации*: 10.12.20

1. Введение

В работе рассмотрен произвольный невыпуклый компакт A на плоскости, у которого величина хаусдорфова отклонения $h(\partial A, \partial\,\mathrm{co}A)$ границы ∂A от $\partial\,\mathrm{co}A$ ограничена некоторым числом $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы выделить из A выпуклое подмножество либо наибольшей площади, либо наименее отклоняющееся в хаусдорфовой метрике от A. Данная задача является в некотором смысле двойственной по отношению к задаче нахождения наименьшего по вложению выпуклого множества, содержащего компакт A. Как известно, единственным решением последней задачи является выпуклая оболочка компакта A, для построения которой разработан ряд алгоритмов (см., напр., [8, гл. 3, §3.3]). Для нашей же задачи легко придумать пример невыпуклого компакта, для которого наибольшее по площади выпуклое подмножество неединственно.

Очевидно, что для значительного количества невыпуклых компактов на плоскости $\mathbb{R}^2$ невозможно найти точное решение сформулированных задач. В качестве приемлемой замены точного решения обеих задач в работе для общего случая предлагается геометрическая разность выпуклой оболочки исходного множества и круга радиуса ε. Для оценки качества этого решения получены оценки площади этой геометрической разности и хаусдорфова отклонения компакта A от нее, основу которых составила известная оценка Л.С. Понтрягина [7, формула (3)], полученная им при исследовании линейных дифференциальных игр.

Настоящая работа посвящена обобщению результатов работы [10].

2. Основной результат

Далее будем использовать следующие обозначения.

Символом $\langle x_*, x^*\rangle$ обозначим скалярное произведение x_* и x^* из $\mathbb{R}^n$, $||x_*|| = \langle x_*, x_*\rangle^{1/2}$ — норму в $\mathbb{R}^n$,
$\angle(x_*, x^*) = \ \arccos \dfrac{\langle x_*, x^*\rangle}{||x_*|| \cdot ||x^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами x_* и x^*,
$\mathrm{con}\, M = \{y = \lambda x : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на

множество M и с вершиной в нуле,
$d(M) = \sup\limits_{x,y \in M} ||x - y||$ — диаметр множества M,
$B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| \leqslant R\}$ — замкнутый шар с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и радиусом R,
$q(M) = \sup\{R \in (0, \infty) : B(a, R) \subset M, a \in \mathbb{R}^n\}$ — наибольший радиус шара, который можно вписать в M,
$\operatorname{co} M$ — выпуклую оболочку множества M,
$h(M_1, M_2) = \sup\limits_{x \in M_1} \inf\limits_{y \in M_2} ||x - y||$ — хаусдорфово отклонение множества M_1 от M_2.

Определение 2.1. *Для множеств $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ их геометрической (альтернированной) разностью называется множество $M_1 \dot{-} M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x + M_2 \subset M_1\}$, где $x + M_2 = \{x + y : y \in M_2\}$.*

Определение 2.2. *Пусть M — односвязное множество в $\mathbb{R}^2$ с границей ∂M в виде простой замкнутой кусочно-гладкой кривой. Назовем лакуной участок γ границы ∂M с крайними точками P_1 и P_2 такой, что отрезок $P_1P_2 \subset \partial \operatorname{co} M$, $\gamma \cap P_1P_2 = \{P_1, P_2\}$ и при этом область Ω, ограниченная кривой γ и отрезком P_1P_2, не содержит в своей внутренности точек из M.*

Замечание 2.1. В монографии [8, §4.1.4] область Ω, ограниченная лакуной γ и *крышкой* P_1P_2, называется *карманом* множества M (рис. 1). Карман Ω будем считать замкнутым множеством, включающим в себя в том числе крышку P_1P_2 и лакуну γ.

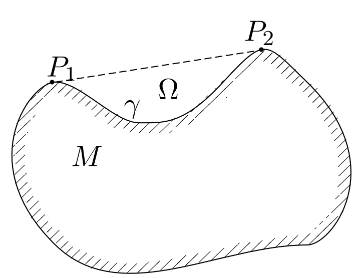

Рисунок 1. Множество M и его карман Ω

Вопрос об аппроксимации выпуклых множеств многогранниками в настоящее время хорошо изучен (см. обзор [1]). В том числе разработаны алгоритмы внутренней (алгоритм 1 из [4]) и внешней (алгоритм 2 из [4]) аппроксимации выпуклого множества в хаусдорфовой метрике. Перефразируя теорему 4 из [4] для пространства $\mathbb{R}^2$, получим следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$. Тогда существует такая последовательность выпуклых многоугольников $\{U_N\}_{N=1}^{\infty}$, что $V \subset U_N$ для любого номера N и $h(U_N, V) \to 0$ при $N \to \infty$.*

Также очевидно следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$, $\{U_N\}$ — последовательность таких выпуклых многоугольников, что $V \subset U_N$ для любого номера N и $h(U_N, V) \to 0$ при $N \to \infty$.*

Тогда $P_{U_N} \to P_V$ при $N \to \infty$, где P_V и P_{U_N} — периметры V и U_N, $N = 1, 2, ...$, соответственно.

Замечание 2.2. Граница ∂V является спрямляемой, так как ее можно параметризовать с помощью непрерывной опорной функции. Кроме того, из определения длины кривой как точной верхней грани длин ломанных, вписанных в эту кривую (см., напр., [6, гл. 1, §17.3]), непосредственно следует сходимость $P_{U_N} \to P_V$ при внутренней аппроксимации V многоугольниками U_N. Непрерывность зависимости P_{U_N} от малого изменения U_N в хаусдорфовой метрике следует из неравенства $P_{U_k} \leqslant P_{U_j}$ при $U_k \subset U_j$.

Лемма 2.1. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое множество, число $R \leqslant q(V)$. Тогда для площади геометрической разности $V^* = V \dot{-} B(0, R)$ имеет место оценка:*

$$S_{V^*} \geqslant S_V - R \cdot P_V + \pi R^2,$$

где S_V и S_{V^*} — площади множеств V и V^* соответственно, P_V — периметр множества V.

Доказательство. Пусть $\{U_N\}$ — последовательность таких многоугольников, что $V \subset U_N$ для любого N и $h(U_N, V) \to 0$ при $N \to \infty$. В силу предложения 2.1 такая последовательность существует.

Рассмотрим произвольный k-угольник U_k из последовательность $\{U_N\}$. Обозначим через $U_k^* = U_k \dot{-} B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x + B(0,R) \subset U_k\}$.

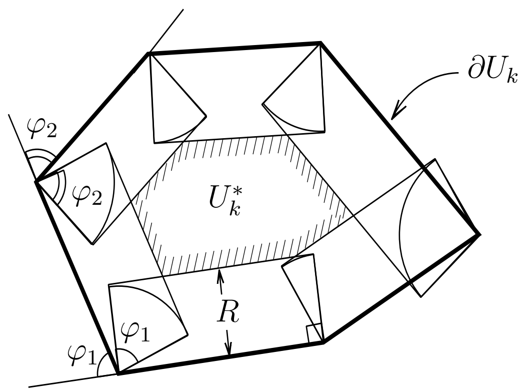

Рисунок 2. Многоугольник U_k и геометрическая разность $U_k^* = U_k \dot{-} B(0,R)$

Заметим (см. рис. 2), что $\varphi_1 + ...\varphi_k = 2\pi$. Используя формулу для площади сектора круга, получаем оценку

$$S_{U_k^*} \geqslant S_{U_k} - P_{U_k} \cdot R + \frac{R^2}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k) = S_{U_k} - P_{U_k} \cdot R + \pi R^2,$$

где P_{U_k} — периметр U_k, $S_{U_k^*}$ и S_{U_k} — площади U_k^* и U_k соответственно.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая предложение 2.2, получаем утверждение леммы. □

Замечание 2.3. Аналогичными рассуждениями несложно доказать, что для суммы Минковского выпуклого множества V и шара $B(0,R)$ имеет место следующая формула:

$$S_{V+B(0,R)} = S_V + R \cdot P_V + \pi R^2.$$

Теорема 2.1. *Пусть односвязный компакт $\Phi \subset \mathbb{R}^2$. И пусть для всех его карманов хаусдорфово отклонение соответствующей лакуны от крышки кармана не превосходит некоторого положительного числа $\varepsilon \leqslant q(\operatorname{co}\Phi)$.*

Тогда геометрическая разность $\Phi^* = \operatorname{co}\Phi \dot{-} B(0,\varepsilon)$ является выпуклым подмножеством множества Φ и удовлетворяет оценкам:

$$h(\Phi, \Phi^*) \leqslant \frac{d(\Phi)}{q(\operatorname{co}\Phi)} \cdot \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$S_{\Phi^*} \geqslant S_{\operatorname{co}\Phi} - \varepsilon \cdot P_{\operatorname{co}\Phi} + \pi\varepsilon^2, \tag{2.2}$$

где S_{Φ^*} *— площадь множества* Φ^**,* $S_{\operatorname{co}\Phi}$ *— площадь выпуклой оболочки множества* Φ*,* $P_{\operatorname{co}\Phi}$ *— периметр* $\operatorname{co}\Phi$*.*

Доказательство. Покажем выпуклость Φ^* по определению выпуклости. Пусть точки $x, z \in \Phi^*$, а точка y лежит на отрезке xz. Тогда по определению геометрической разности выпуклое множество $\operatorname{co}\Phi$ включает в себя, помимо других точек, два шара $B(x,\varepsilon)$ и $B(z,\varepsilon)$. В силу выпуклости множество $\operatorname{co}\Phi$ содержит также все точки выпуклой оболочки $\operatorname{co}\big(B(x,\varepsilon) \cup B(z,\varepsilon)\big)$, том числе и шар $B(y,\varepsilon)$. По определению Φ^* как геометрической разности отсюда следует, что $y \in \Phi^*$. Из произвольности выбора точек x, z из Φ^* и точки y на отрезке xz следует выпуклость Φ^*.

Из определения геометрической разности очевидно, что $\Phi^* \subset \operatorname{co}\Phi$. Докажем, что $\Phi^* \subset \Phi$.

Для этого вначале докажем равенство

$$\Phi^* = \{x \in \operatorname{co}\Phi : \rho(x, \partial \operatorname{co}\Phi) \geqslant \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

Действительно, из определения геометрической разности вытекает, что $B(x,\varepsilon) \subset \operatorname{co}\Phi$ для любой точки $x \in \Phi^*$. Следовательно, для любой точки $x \in \Phi^*$ расстояние $\rho(x, \partial \operatorname{co}\Phi) = \min\limits_{x \in \partial \operatorname{co}\Phi} ||x - y|| \geqslant \varepsilon$, или, иначе говоря, $\Phi^* \subset \{x \in \operatorname{co}\Phi : \rho(x, \partial \operatorname{co}\Phi) \geqslant \varepsilon\}$.

Покажем, что $\Phi^* \supset \{x \in \operatorname{co}\Phi : \rho(x, \partial \operatorname{co}\Phi) \geqslant \varepsilon\}$ от противного. Предположим, что существует такая точка $y \in \{x \in \operatorname{co}\Phi : \rho(x, \partial \operatorname{co}\Phi) \geqslant \varepsilon\}$, что $y \notin \Phi^*$. Тогда, так как $y \notin \Phi^*$, то $y + B(0,\varepsilon) \not\subset \operatorname{co}\Phi$, то есть найдется $z \in B(0,\varepsilon)$ такое, что $y + z \notin \operatorname{co}\Phi$. Таким образом, $y \in \operatorname{co}\Phi$, $y + z \notin \operatorname{co}\Phi$, где $||z|| \leqslant \varepsilon$. Отсюда вследствие **замкнутости** и **выпуклости** множества $\operatorname{co}\Phi$ получаем

$$\exists \hat{\alpha} \in [0,1) : \ (1-\hat{\alpha})y + \hat{\alpha}(y+z) \in \partial \operatorname{co}\Phi. \tag{2.4}$$

Действительно, задав $a_1 = y \in \operatorname{co}\Phi$, $b_1 = y + z \notin \operatorname{co}\Phi$, и считая, что определены $a_k \in \operatorname{co}\Phi$, $b_k \notin \operatorname{co}\Phi$, можем описать процедуру:

- если $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} \in \operatorname{co}\Phi$, то $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$,
- иначе $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$.

Эта процедура генерирует последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_k, b_k]$, длины которых стремятся к нулю. Так как $\mathrm{co}\,\Phi$ **выпукло**, для любого натурального k имеем $[a_1, a_k] \subset \mathrm{co}\,\Phi$, $[b_k, b_1] \not\subset \mathrm{co}\,\Phi$. По лемме о вложенных отрезках существует единственный предел $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \hat{c}$. Множество $\mathrm{co}\,\Phi$ **замкнуто**, $a_k \in \mathrm{co}\,\Phi$ при любом k, поэтому и $\hat{c} \in \mathrm{co}\,\Phi$. При этом $[a_1, c] \subset \mathrm{co}\,\Phi$, $[c, b_1] \not\subset \mathrm{co}\,\Phi$, что по определению означает $\hat{c} \in \partial\mathrm{co}\,\Phi$. Мы доказали, что на отрезке $[y, y+z]$ существует граничная точка множества $\mathrm{co}\,\Phi$, то есть убедились в справедливости (2.4).

Окончательно, с учетом (2.4) получаем

$$\rho(y, \partial\mathrm{co}\,\Phi) = \min_{x\in\partial\mathrm{co}\,\Phi} ||x - y|| \leqslant ||(1-\hat{\alpha})y + \hat{\alpha}(y+z) - y|| = \hat{\alpha}||z|| < \varepsilon,$$

что противоречит предположению.

Итак, мы доказали (2.3).

Из (2.3) следует, что

$$\mathrm{co}\,\Phi \backslash \Phi^* = \{x \in \mathrm{co}\,\Phi : \rho(x, \partial\,\mathrm{co}\,\Phi) < \varepsilon\}. \tag{2.5}$$

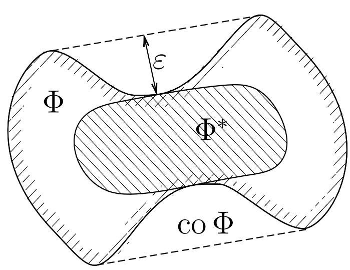

Рисунок 3. Множество Φ и его выпуклое подмножество Φ^*

Рассмотрим множество Φ (рис. 3). Из условия теоремы следует, что для каждого кармана Ω с крышкой Γ выполнено условие $h(\Omega, \Gamma) \leqslant \varepsilon$. Заметим, что для внутренности кармана $\mathrm{int}\,\Omega$ выполнено более строгое условие

$$h(\mathrm{int}\,\Omega, \Gamma) < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Действительно, предположим, что для некоторой точки $\omega \in \mathrm{int}\,\Omega$ расстояние $\rho(\omega, \Gamma) = \varepsilon$. Тогда, поскольку каждая внутренняя точка множества принадлежит ему вместе в некоторой своей окрестностью, а крышка Γ — это отрезок, то найдется точка из Ω, удаленная от Γ на расстояние большее, чем ε. Из полученного противоречия следует, что наше предположение неверно, а условие (2.6) выполняется.

Поскольку совокупность внутренностей всех карманов односвязного множества Φ представляет собой множество $(\mathrm{co}\,\Phi)\backslash(\Phi\cup\partial\mathrm{co}\,\Phi)$, то из (2.6) следует, что $h((\mathrm{co}\,\Phi)\backslash\Phi, \partial\mathrm{co}\,\Phi) < \varepsilon$. Отсюда и из (2.5) следует, что

$$(\mathrm{co}\,\Phi)\backslash\Phi \;\subset\; (\mathrm{co}\,\Phi)\backslash\Phi^*,$$

что, в свою очередь, влечет за собой включение $\Phi^* \subset \Phi$.

В работе Л.С. Понтрягина [7, §3, неравенство (1)] приведена следующая оценка для геометрической разности произвольного компактного выпуклого множества V и шара $B(0,R)$ при $R \leqslant q(V)$:

$$h(V, V \stackrel{*}{-} B(0,R)) \leqslant \frac{d(V)}{q(V)} \cdot R. \tag{2.7}$$

Применяя данную оценку к $\mathrm{co}\,\Phi$, получаем, что

$$h(\Phi,\Phi^*) \leqslant h(\mathrm{co}\,\Phi,\Phi^*) \leqslant \frac{d(\mathrm{co}\,\Phi)}{q(\mathrm{co}\,\Phi)} \cdot \varepsilon,$$

т.е. оценку (2.1) с учётом равенства $d(\mathrm{co}\,\Phi) = d(\Phi)$.

Применяя лемму 2.1 к множествам $\mathrm{co}\,\Phi$ и Φ^*, получаем оценку (2.2). □

Замечание 2.4. Отметим, что упоминание карманов и крышек в теореме 2.1 не излишне и простого условия $h(\partial\Phi, \partial\mathrm{co}\,\Phi) \leqslant \varepsilon$ недостаточно. В качестве контрпримера можно привести множество в виде подковы, изображенное на рис. 4.

Замечание 2.5. Заметим, что выделенное в теореме 2.1 выпуклое множество не является наибольшим по площади за исключением некоторых вырожденных случаев, однако оценки (2.1) и (2.2) почти достигаются на множестве, изображенном на рис. 5.

3. Примеры применения теоремы 2.1

3.1. Выделение выпуклого подмножества из α-множества

В качестве первого примера рассмотрим задачу выделения выпуклого подмножества из так называемых α-множеств [3,11,12].

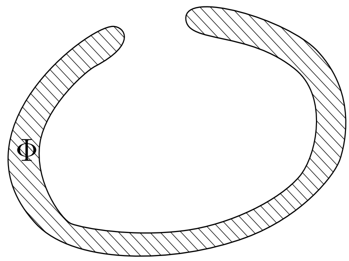

Рисунок 4. Пример, показывающий, что малая удаленность $\partial\Phi$ от $\partial \operatorname{co}\Phi$ не гарантирует наличия большого по площади выпуклого подмножества

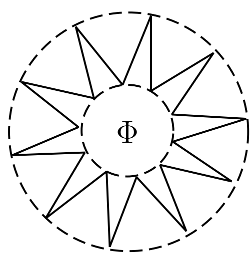

Рисунок 5. Вид множества, для которого оценки (2.1) и (2.2) имеют малую погрешность

Определение 3.1. *Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$.*

Через $\Omega_A(z^*)$ обозначим множество метрических проекций точки z^* на A (т.е. множество точек из A, ближайших к z^*), через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$.

Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Множество A назовем α-множеством с числом $\alpha = \alpha_A$.

Итак, пусть A — ограниченное α-множество. В силу [11, лемма 3] для любой лакуны γ границы множества A и соответствующей крышки Γ хаусдорфово отклонение

$$h(\gamma, \Gamma) \leqslant |\Gamma| \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant d(A) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$|\Gamma|$ — длина отрезка Γ.

Кроме того, заметим, что, в силу утверждения из [12, §2], плоское α-множество с $\alpha < \pi$— это односвязное замкнутое множество. Следовательно, из теоремы 2.1 при $\varepsilon = d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченное α-множество, величина $q(A) \geqslant d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.*

Тогда геометрическая разность $A^* = \operatorname{co} A \dot{-} B\Big(0, d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\Big)$ является его выпуклым подмножеством и удовлетворяет оценкам:

1) $h(A, A^*) \leqslant \dfrac{d(A)}{q(\operatorname{co} A)} \cdot d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$,

2) $S_{A^*} \geqslant S_{\operatorname{co} A} - d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot P_{\operatorname{co} A} + \pi \cdot \Big(d(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\Big)^2$,
где S_{A^*} — площадь A^*, $S_{\operatorname{co} A}$ — площадь $\operatorname{co} A$, $P_{\operatorname{co} A}$ — периметр $\operatorname{co} A$.

Заметим, что данное следствие, дополняющее утверждение из [10, теорема 1], здесь непосредственно вытекает из сформулированного нами более общего утверждения.

Замечание 3.1. Заметим, что формулировку следствия 3.1 можно еще усилить, если, как и в работе [10], вместо оценки $|\Gamma| \leqslant d(A)$ использовать более точную оценку $|\Gamma| \leqslant 2r(A)$, где $r(A)$ — внутренний радиус множества A (см., напр., [5]).

3.2. Выделение выпуклого подмножества из множества с конечным коэффииентом вогнутости Морделла

В качестве второго примера рассмотрим задачу выделения выпуклого подмножества из множества, имеющего конечный коэффициент вогнутости Морделла [2, гл. 1, §2].

Определение 3.2. *Пусть F — звездный относительно начала координат компакт на плоскости. Тогда коэффициентом вогнутости Морделла называется величина*

$$\omega_F = \inf\Big\{\omega : \frac{x+y}{2} \in \omega \cdot F \ \textit{для любых}\ x, y \in F\Big\}.$$

Наряду с коэффициентом вогнутости Морделла рассмотрим вспомогательный коэффициент

$$k_F = \inf\{k : \mathrm{co}\, F \subset F\}.$$

В [3, лемма 1] доказано (с заменой компакта на осесимметричную фигуру, но это не меняет доказательства) соотношение

$$\frac{1}{2} k_F \leqslant \omega_F \leqslant k_F. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть F — звездный относительно начала координат компакт в $\mathbb{R}^2$. Тогда для любого его кармана Ω с крышкой Γ и лакуной γ выполнена оценка*

$$h(\gamma, \Gamma) \leqslant d(F) \cdot \frac{k_F - 1}{2k_F}.$$

Доказательство. Обозначим начало координат точкой O и рассмотрим произвольный карман Ω с лакуной γ и крышкой Γ (рис. 6).

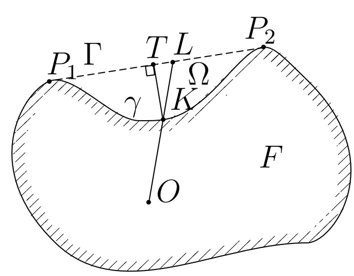

Рисунок 6. Множество F и его карман Ω

Концы крышки Γ обозначим точками P_1 и P_2. Пусть точка K — наиболее удаленная точка γ от Γ. Обозначим черех T проекцию точки K на Γ. Тогда

$$h(\gamma, \Gamma) = h(K, \Gamma) = |TK|.$$

Обозначим через L точку пересечения луча OK и крышки Γ. Заметим, что

$$h(\gamma, \Gamma) = |TK| \leqslant |LK|. \tag{3.2}$$

По определению коэффициента k_F точка $L \in k_F \cdot F$, поскольку $L \in P_1P_2 \subset \mathrm{co}\, F$. Но тогда

$$|OL| \leqslant k_F \cdot |OK|.$$

Отсюда,

$$|LK| = |OL| - |OK| \leqslant (k_F - 1)|OK|. \tag{3.3}$$

С другой стороны,

$$|LK| + |OK| \leqslant \frac{d(F)}{2},$$

откуда

$$|OK| \leqslant \frac{d(F)}{2} - |LK|. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем, что

$$|LK| \leqslant (k_F - 1)\Big(\frac{d(F)}{2} - |LK|\Big),$$

$$|LK|k_F \leqslant (k_F - 1)\frac{d(F)}{2},$$

$$|LK| \leqslant d(F)\frac{(k_F - 1)}{2k_F}. \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.2) и (3.5) вытекает соотношение

$$h(\gamma, \Gamma) \leqslant d(F)\frac{(k_F - 1)}{2k_F}.$$

Из него, в силу произвольности выбора кармана Ω, мы получаем утверждение леммы. □

В силу монотонного возрастания функции $\dfrac{(k_F - 1)}{2k_F}$ при $k_F > 0$ и неравенства $k_F \leqslant 2\omega_F$ (непосредственно вытекающего из (3.1)) мы также получаем следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть F — звездный относительно начала координат компакт в $\mathbb{R}^2$.*

Тогда для любого его кармана Ω с крышкой Γ и лакуной γ выполнена оценка

$$h(\gamma, \Gamma) \leqslant d(F) \cdot \frac{k_F - 1}{2k_F} \leqslant d(F) \cdot \frac{2\omega_F - 1}{4\omega_F}.$$

Таким образом, с помощью леммы 3.2 мы получаем еще одно следствие из теоремы 2.1.

Следствие 3.2. *Пусть F — звездный относительно начала координат компакт в $\mathbb{R}^2$.*

Тогда геометрическая разность

$$F^* = \operatorname{co} F \dot{-} B\Big(0, d(F) \cdot \frac{2\omega_F - 1}{4\omega_F}\Big),$$

если она не пуста, является его выпуклым подмножеством и удовлетворяет оценкам:

1) $h(F, F^*) \leqslant \dfrac{d(F)}{q(\operatorname{co} F)} \cdot d(F) \cdot \dfrac{2\omega_F - 1}{4\omega_F}$,

2) $S_{F^*} \geqslant S_{\operatorname{co} F} - d(F) \cdot \dfrac{2\omega_F - 1}{4\omega_F} \cdot P_{\operatorname{co} F} + \pi\Big(d(F) \cdot \dfrac{2\omega_F - 1}{4\omega_F}\Big)^2$,

где S_{F^*} — площадь F^*, $S_{\operatorname{co} F}$ — площадь $\operatorname{co} F$, $P_{\operatorname{co} F}$ — периметр $\operatorname{co} F$.

4. Заключение

Теорему 2.1 можно применять и для других классов так называемых обобщенно выпуклых множеств (см., напр., [5, 9,13-15]). Заметим, что теорему 2.1 можно обобщить на случай трехмерного пространства, если подходящим образом определить трехмерный аналог крышки кармана. Случай произвольного n-мерного евклидового пространства требует еще более аккуратного подхода (в силу замечания 2.4), но вполне естественно предполагать, что и в нем можно построить некоторый аналог теоремы 2.1.

5. Благодарности

Авторы статьи знают Леона Аганесовича Петросяна, как одного из авторитетнейших специалистов в теории дифференциальных игр, стоявшего у истоков этой теории в нашей стране, создателя и руководителя крупной научной школы. Мы относимся с глубоким уважением к его научным достижением и той энергии, которую он вкладывает в научные исследования. Желаем ему крепкого здоровья и успехов в науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн Е.М. *Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.

2. Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. *Геометрия чисел.* М.: Наука, 2008.

3. Ершов А.А., Першаков М.В. *О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств* // VI Информ. школа молодого ученого: сб. науч. тр. / ред. П.П. Трескова. Екатеринбург: Центральная научная библиотека УрО РАН, 2018. С. 143–150.

4. Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю. *Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для лискретной системы с ограниченным управлением* // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 83–98.

5. Иванов Г.Е. *Слабо выпуклые множества и их свойства* // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 60–86.

6. Кудрявцев Л.Д. *Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды.* М.: Физматлит, 2015.

7. Понтрягин Л.С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Матем. сб. 1980. Т. 112 (152), № 3 (7). С 307–330

8. Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: Введение.* М.: Мир, 1989.

9. Семенов П.В. *Функционально паравыпуклые множества* // Матем. заметки. 1993. Т. 54, № 6. С. 74–81.

10. Ушаков В.В., Ершов А.А., Першаков М.В. *Об одном дополнении к оценке Л.С. Понтрягина геометрической разности множеств на плоскости* // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 54. С. 63–73.

11. Ушаков В.Н., Ершов А.А. *Об оценке хаусдорфова расстояния между множеством и его выпуклой оболочкой в евклидовых пространствах малой размерности* // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Том. 24, № 1. С. 223–235.

12. Ушаков В.Н., Успенский А.А. *Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве* // Тр. ИММ УрО РАН РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 277–291.

13. Ivanov G.E., Golubev M.O. *Strong and weak convexity in nonlinear differential games* // IFAC PapersOnline. 2018. V. 51, iss. 32. P. 13–18.

14. Michael E. *Paraconvex sets* // Math. Scand. 1959. V. 7, N 2. P. 312–315.

15. Ngai H.V., Penot J.-P. *Paraconvex functions and paraconvex sets* // Studia Mathematica. 2008. V. 184, N 1. P. 1–29.

16. Starr R.M. *Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences* // Econometrica. 1969. V. 37, iss. 1. P. 25–38.

ON THE GUARANTEED ESTIMATES OF THE AREA OF CONVEX SUBSETS OF COMPACTS ON A PLANE

Vladimir N. Ushakov, IMM UB RAS, Dr.Sc., professor, academician of RAS (ushak@imm.uran.ru),
Alexandr A. Ershov, IMM UB RAS, Cand.Sc. (ale10919@yandex.ru).

Abstract: The paper considers the problem of constructing a convex subset of the largest area in a nonconvex compact on the plane, as well as the problem of constructing a convex subset from which the Hausdorff deviation of the compact is minimal. Since, in the general case, the exact solution of these problems is impossible, the geometric difference between the convex hull of a compact and a circle of a certain radius is proposed as an acceptable replacement for the exact solution. A lower bound for the area of this geometric difference and an upper bound for the Hausdorff deviation from it of a given nonconvex compact set are obtained. As examples, we considered the problem of constructing convex subsets from an α-set and a set with a finite Mordell concavity coefficient.

Keywords: convex set, geometric difference, α-set, Mordell concavity ratio, figure area, Hausdorff deviation.