Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 24–39

УДК 519.83
ББК 22.18

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ МНЕНИЙ И КОНСЕНСУС В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ*

Чен Ван
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
e-mail: wangchen241024@163.com

Владимир В. Мазалов
Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр Российской академии наук
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Хунвей Гао
Школа математики и статистики, Университет Циндао,
Институт прикладной математики провинции Шаньдун
266071, Циндао, Китай
e-mail: cmgta2007@163.com

Рассматривается теоретико-игровая модель влияния игроков на динамику мнений и достигаемый консенсус в социальной сети. Задача управления заключается в поддержании мнения всех участников в окрестности заранее определенного значения. Если игроков несколько, то эти целевые значения могут быть различны. Рассматриваемая динамическая игра принадлежит классу линейно-квадратических игр в дискретном

* Работа частично поддержана грантами провинции Шаньдун (Shandong Province) "Double-Hundred Talent Plan" (No. WST2017009) и National Natural Science Foundation of China (No. 71571108).

времени. Оптимальное управление и равновесие находятся с помощью уравнения Беллмана. Решение достигается в аналитическом виде. Показано, что в модели влияния с одним игроком достигается управляемый консенсус в социальной сети. В модели влияния с двумя игроками показано, что хотя консенсуса в социальной сети нет, однако равновесие полностью определяется средним значением мнения всех участников, которое сходится к определенному значению. Приведены результаты численного моделирования для социальной сети с одним и двумя игроками.

Ключевые слова: динамика мнений, социальная сеть, консенсус, линейно-квадратическая игра, равновесие, уравнение Беллмана.

Поступила в редакцию: 05.11.20 *После доработки*: 01.12.20 *Принята к публикации*: 05.12.20

1. Введение

Начиная с 1995 года, когда в Веб-пространстве появились первые социальные сети, общение людей все больше происходит виртуальным образом. Принятие решений часто происходит в результате консенсуса, достигнутого после переговоров или обсуждений, проведенных в сети после какого-то промежутка времени. Одновременно появились математические модели динамики мнений и достижения консенсуса.

Модель де Гроота [10] является пионерской работой в этой области и одной из простейших моделей, используемых при моделировании переговоров, инициированных для достижения консенсуса. В этой модели мнение участников меняется в ходе переговоров линейным образом в зависимости от степени доверия участников друг к другу. И консенсус достигается, если существует предельная матрица влияния.

Формирование общественного мнения под влиянием различных социальных факторов описывается в модели [8], которая является аналогом модели Де Гроота.

В динамике [11], участники обмениваются мнениями только с теми, кто имеет мнение, близкое к их собственному. Достижение консенсуса в группе с центрами влияния описано в работах [2–4].

Обзор работ по моделированию индивидуальных и коллективных взаимодействий, информационному управлению и противоборству в социальной сети, топологии социальных сетей можно найти в работе [5].

В работах [7,9] предлагается динамика мнений социальной сети, в которой участники сети формируют на каждом шаге свои наилучшие ответы, взвешивая свое мнение в начальный момент времени с мнениями своего окружения. Эту же схему использует [14], рассматривая уже динамическую игру, в которой участники становятся игроками, а их целевые функции состоят из разницы персональных мнений от мнений окружающих, а также в них входят и затраты на управление.

Эта же идея рассмотрения в качестве целевой функции игрока потери от отклонения мнений всех участников социальной сети от заданного значения игрока и используется в данной работе. Данная статья посвящена исследованию динамики мнений в социальной сети, а также оценке влияния управления на окончательно сформированные мнения. В отличие от рассмотренных выше работ игроки в данной работе являются внешними факторами, которые могут влиять на участников социальной сети (агентов). Близкими к данной работе являются работы [1,13,14,16], где управление носит внешний характер, т.е. участники социальной сети формируют динамику мнений в сети, на некоторых из них осуществляется влияние независимыми игроками, которые в свою очередь максимизируют свои полезности.

Целью данной работы является ответ на вопрос, существует ли консенсус в социальной сети при воздействии на нее внешних факторов. Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит общее описание модели управления динамикой мнений в социальной сети одним и несколькими игроками. В разделе 3 рассматривается модель с одним игроком и идентичными агентами в социальной сети, связи в которой заданы полным графом. Находится оптимальное управление и оптимальная динамика мнений. Доказано существование консенсуса в управляемой социальной сети. В разделе 4 для динамической игры в социальной сети с идентичными агентами, связи у которых заданы полным графом, находится равновесие по Нэшу в аналитическом виде. Показано, что хотя консенсуса в равновесии нет, однако среднее мнение агентов сходится к определенному значению. В разделе 5 моделируются сценарии управления динамикой мнений в социальной сети с одним и двумя игроками.

2. Модель влияния на мнение в социальной сети

Рассмотрим динамику мнений в социальной сети на бесконечном интервале времени. Социальная сеть представлена графом $\langle N, E\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество агентов и E множество связей, которые формируют ребра в данном графе. В этой социальной сети $\langle N, E\rangle$ агент i и агент j влияют друг на друга только если есть ребро между ними.

В этой социальной сети есть еще независимые участники, называемые игроками, которые влияют на мнение агентов и управляют ими для достижения своих персональных целей. Как пример, можно представить средства массовой информации, которые формируют мнение в обществе.

Мы предполагаем, что динамика мнений в социальной сети имеет вид

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum\limits_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right) + u_i(t),\ i \in N, \quad (2.1)$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – мнение агента i в момент t, $S_i = \{j : (i, j) \in E\}$ – множество соседей агентat i в графе g, $a_i \in \mathbb{R}_+$ – персонифицированный коэффициент агента i, управление $u_i \in U \subset [0, \infty)$ означает влияние игрока на агента i. Вообще говоря, игрок может влиять на подмножество агентов. Но здесь мы рассмотрим модель, в которой игрок влияет лишь на одного агента.

Целью игрока в данной модели является поддержание мнения в социальной сети на определенном уровне $\hat{x}$, и при этом минимизируя затраты на управление. Таким образом, целевая функция игрока имеет вид

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i(t) - \hat{x})^2 + \gamma u_i^2(t) \right],$$

где $\delta \in (0; 1)$ – фактор дисконтирования, $\gamma > 0$ – стоимость единицы управления. Для решения данной задачи оптимального управления используется метод динамического программирования [6].

3. Симметричная модель управления динамикой мнений

Рассмотрим симметричный случай социальной сети $N = \{1, 2, ..., n\}$, в которой все участники (агенты) одинаковы и связаны между собой полным графом. Предположим, что динамика мнений агентов $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ в сети имеет вид

$$x_i(t+1) = \bar{x}(t), \quad i = 1, ..., n.$$

где $\bar{x}(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j(t)$ – это средневзвешенное мнение всех агентов, начальное мнение агентов $x(0) = x_0$ задано.

Предположим, что на одного из агентов данной сети (для определенности на первого агента) оказывает влияние некоторый игрок. Тогда динамика мнений примет вид

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \bar{x}(t) + u(t), \\ x_i(t+1) &= \bar{x}(t), \quad i = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Заметим, что для сренего мнения агентов $\bar{x}(t)$ динамика имеет вид

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) + \frac{u(t)}{n}, \quad \bar{x}(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(0). \tag{3.2}$$

Предположим, что целью игрока явдяется минимизировать функционал

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x})^2 + \gamma u^2(t)], \tag{3.3}$$

где $\delta : 0 < \delta \leq 1$ – фактор дисконтирования, $\hat{x}$ – целевое значение для консенсуса и γ вес затрат на управление по сравнению с отклонением от консенсуса. В целевой функции первое слагаемое отражает потери игрока от отклонения мнения участников от выгодного для него значения, а второе слагаемое отражает затраты на управление.

Для решения задачи оптимального управления рассмотрим уравнение для функции Беллмана

$$V(t, x(t)) = \min_{u(t)} [\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x})^2 + \gamma u^2(t) + \delta V(t+1, x(t+1))], \tag{3.4}$$

где $x(t+1)$ удовлетворяет (3.1). Будем искать решение (3.4) в виде

$$V(t,x(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + A\bar{x}^2(t) + 2k\bar{x}(t) + k_0.$$

где A, k, k_0 некоторые константы. Тогда, из (3.1)-(3.2) следует

$$V(t+1,x(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t+1) + A\bar{x}^2(t+1) + 2k\bar{x}(t+1) + k_0 =$$

$$= (\bar{x}(t)+u(t))^2+(n-1)\bar{x}^2(t)+A\left(\bar{x}(t)+\frac{u(t)}{n}\right)^2+2k\left(\bar{x}(t)+\frac{u(t)}{n}\right)+k_0.$$

Подставив в (3.4), найдем минимум по $u(t)$ выражения в квадратных скобках

$$u(t) = -\delta\frac{\bar{x}(t)(1+\frac{A}{n})+\frac{k}{n}}{\gamma+\delta(1+\frac{A}{n^2})}. \tag{3.5}$$

Теперь из уравнения (3.4), получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов A и k.

$$A = \delta n(A+n)\frac{\gamma n+\delta(n-1)}{A\delta+(\gamma+\delta)n^2} \tag{3.6}$$

$$k = k\delta - k\delta^2\frac{A+n}{A\delta+(\gamma+\delta)n^2} - n\hat{x}. \tag{3.7}$$

Таким образом, мы нашли оптимальное управление в виде управления с обратной связью. Более того, оптимальное управление зависит лишь от среднего мнения всех участников $\bar{x}(t)$.

Оптимальная траектория для среднего мнения имеет вид

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) - \delta\frac{\bar{x}(t)(1+\frac{A}{n})+\frac{k}{n}}{n(\gamma+\delta(1+\frac{A}{n^2}))}.$$

или, с учетом (3.6)-(3.7)

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) - \frac{\delta(1+\frac{A}{n})}{n(\gamma+\delta(1+\frac{A}{n^2}))}(\bar{x}(t)-\hat{x}). \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что оптимальное управление асимптотически приводит к консенсусу, который совпадает с целевым значением $\hat{x}$.

4. Динамическая игра в симметричной социальной сети

Рассмотрим здесь ту же социальную сеть с идентичными агентами, связи с которыми формируют полный граф. Предположим, что есть два игрока, которые влияют на мнение агентов. При этом, первый игрок влияет на мнение первого агента, а второй игрок влияет на мнение второго агента. Тогда динамика мнений агентов в сети имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \bar{x}(t) + u^1(t), \\ x_2(t+1) &= \bar{x}(t) + u^2(t), \\ x_i(t+1) &= \bar{x}(t), \quad i = 3, ..., n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\bar{x}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(t)$ среднее мнение всех агентов, $u^1(t)$ управление первого игрока, $u^2(t)$ управление второго игрока. Заметим, что для $\bar{x}(t)$ динамика имеет вид

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) + \frac{u^1(t) + u^2(t)}{n}, \quad \bar{x}(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(0). \tag{4.2}$$

Целевые функции игроков имеют вид

$$J^1(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x}^1)^2 + \gamma_1 (u^1(t))^2],$$

$$J^2(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x}^2)^2 + \gamma_2 (u^2(t))^2].$$

Нашей задачей является найти равновесие по Нэшу (u^{1^*}, u^{2^*}) в данной динамической игре. Зафиксируем стратегию u^2 второго игрока и найдем наилучший ответ первого игрока. Уравнение Беллмана примет вид

$$V^1(t, x(t)) = \min_{u(t)} [\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x}^1)^2 + \gamma_1 (u^1(t))^2 + \delta V^1(t+1, x(t+1))], \tag{4.3}$$

где $x(t+1)$ удовлетворяет (4.1). Решение уравнения (4.3) будем искать в виде

$$V^1(t, x(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + A^1 \bar{x}^2(t) + 2k^1 \bar{x}(t) + k_0^1. \tag{4.4}$$

Из (4.3)-(4.4) находим

$$\begin{aligned}
& V^1(t+1, x(t+1)) = \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t+1) + A^1 \bar{x}^2(t+1) + 2k^1 \bar{x}(t+1) + k_0^1 \\
= \ & (\bar{x}(t) + u^1(t))^2 + (\bar{x}(t) + u^2(t))^2 + (n-2)\bar{x}^2(t) \\
+ \ & A^1 \left(\bar{x}(t) + \tfrac{u^1(t)+u^2(t)}{n}\right)^2 + 2k^1 \left(\bar{x}(t) + \tfrac{u^1(t)+u^2(t)}{n}\right) + k_0^1.
\end{aligned}$$

Подставив в (4.3), находим минимум выражения в скобках по $u^1(t)$. Тогда

$$u^1(t) = -\delta \frac{\bar{x}(t)(1 + \frac{A^1}{n}) + \frac{k^1}{n} + \frac{A^1}{n^2} u^2(t)}{\gamma_1 + \delta(1 + \frac{A^1}{n^2})}. \tag{4.5}$$

Вместе с (4.4) получим уравнения для определения коэффициентов A^1 и k^1

$$A^1 = \delta n(A^1 + n) \frac{\gamma_1 n + \delta(n-1)}{A^1 \delta + (\gamma_1 + \delta) n^2} \tag{4.6}$$

$$k^1 = k^1 \delta - k^1 \delta^2 \frac{A^1 + n}{A^1 \delta + (\gamma_1 + \delta) n^2} + \delta \frac{n(n + A^1)(\gamma_1 + \delta)}{A^1 \delta + (\gamma_1 + \delta) n^2} u^2 - n\hat{x}^1.$$

Теперь решим задачу оптимального управления для второго игрока. Зафиксируем стратегию первого игрока u^1, и найдем наилучший ответ игрока 2. Также, как и в случае с первым игроком, оптимальное управление второго игрока имеет вид

$$u^2(t) = -\delta \frac{\bar{x}(t)(1 + \frac{A^2}{n}) + \frac{k^2}{n} + \frac{A^2}{n^2} u^1(t)}{\gamma_2 + \delta(1 + \frac{A^2}{n^2})}, \tag{4.7}$$

а неизвестные коэффициенты определяются уравнениями

$$A^2 = \delta n(A^2 + n) \frac{\gamma_2 n + \delta(n-1)}{A^2 \delta + (\gamma_2 + \delta) n^2}$$

$$k^2 = k^2 \delta - k^2 \delta^2 \frac{A^2 + n}{A^2 \delta + (\gamma_2 + \delta) n^2} + \delta \frac{n(n + A^2)(\gamma_2 + \delta)}{A^2 \delta + (\gamma_2 + \delta) n^2} u^1 - n\hat{x}^2.$$

Из (4.5) и (4.7) следует, что u^1 и u^2 можно представить в виде

$$\begin{aligned}
u^1(t) &= \alpha_1(\bar{x}(t) - \hat{x}^1) + \beta_1 u^2(t) \\
u^2(t) &= \alpha_2(\bar{x}(t) - \hat{x}^2) + \beta_2 u^1(t),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha_i = -\delta \frac{1+\frac{A_i}{n}}{\gamma_i+\delta(1+\frac{A_i}{n^2})}, \\ &\beta_i = -\frac{\delta}{\gamma_i+\delta(1+\frac{A_i}{n^2})} \cdot \left(\frac{A_i}{n^2} + \frac{\delta(\delta+\gamma_i)(A_i+n)^2}{n(A_i\delta+(\gamma_i+\delta)n^2)} \right), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Наконец из системы уравнений (4.8) находим

$$\begin{aligned} u^{1*}(t) &= \tfrac{1}{1-\beta_1\beta_2} \left((\alpha_1 + \alpha_2\beta_1)\bar{x}(t) - (\alpha_1\hat{x}^1 + \alpha_2\beta_1\hat{x}^2) \right), \\ u^{2*}(t) &= \tfrac{1}{1-\beta_1\beta_2} \left((\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)\bar{x}(t) - (\alpha_2\hat{x}^2 + \alpha_1\beta_2\hat{x}^1) \right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Таким образом, в динамической игре двух лиц и n агентов существует равновесие по Нэшу $\{u^{1*}, u^{2*}\}$, зависящее от среднего мнения агентов вида (4.10), где $\alpha_i, \beta_i, i = 1,2$ удовлетворяют (4.9).

Оптимальная траектория для среднего мнения игроков имеет вид

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) + \frac{u^{1*}(t) + u^{2*}(t)}{n}, \tag{4.11}$$

где u^{1*} и u^{2*} определяются уравнениями (4.10).

Предположим, что оптимальная траектория (4.11) имеет предельное значение x^* при $t \to \infty$. Тогда, из (4.10)-(4.11) находим

$$x^* = \frac{\alpha_1\hat{x}^1(1+\beta_2) + \alpha_2\hat{x}^2(1+\beta_1)}{\alpha_1(1+\beta_2) + \alpha_2(1+\beta_1)}. \tag{4.12}$$

Заметим, что если $\gamma_1 = \gamma_2$, то $A_1 = A_2$ и, следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_1 = \beta_2$. Это влечет

$$x^* = \frac{\hat{x}^1 + \hat{x}^2}{2}.$$

Таким образом, в этом случае предельное значение консенсуса совпадает с средним значением целевых значений игроков.

5. Численное моделирование

Для иллюстрации оптимального поведения рассмотрим социальную сеть из трех агентов и **одним** игроком, который оказывает влияние на первого игрока. Пусть параметры задачи имеют вид

$$\begin{aligned} &x(0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)' = (0.7, 0.4, 0.4)', \\ &\gamma = 0.01,\ \delta = 0.95,\ \hat{x} = 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Оптимальное управление игрока и оптимальные траектории находим из уравнений (3.5)-(3.7). Результаты вычислений оптимальных значений для 10 шагов представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Оптимальное управление и оптимальная траектория

t	$t=0$	t=1	t=2	t=3	t=5	t=7	t=9	t=10
$x_1(t)$	0.700	1.233	1.119	1.061	1.016	1.004	1.001	1.000
$x_2(t)$	0.400	0.500	0.744	0.869	0.966	0.991	0.998	0.999
$x_3(t)$	0.400	0.500	0.744	0.869	0.966	0.991	0.998	0.999
$\bar{x}(t)$	0.500	0.744	0.869	0.933	0.983	0.995	0.999	1.000
$u(t)$	0.733	0.375	0.192	0.098	0.026	0.007	0.002	0.001

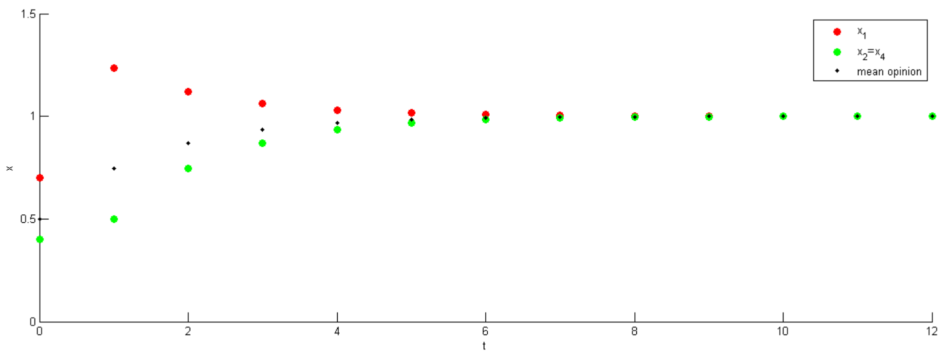

Рисунок 1. Динамика мнений трех агентов и среднего мнения агентов при оптимальном управлении

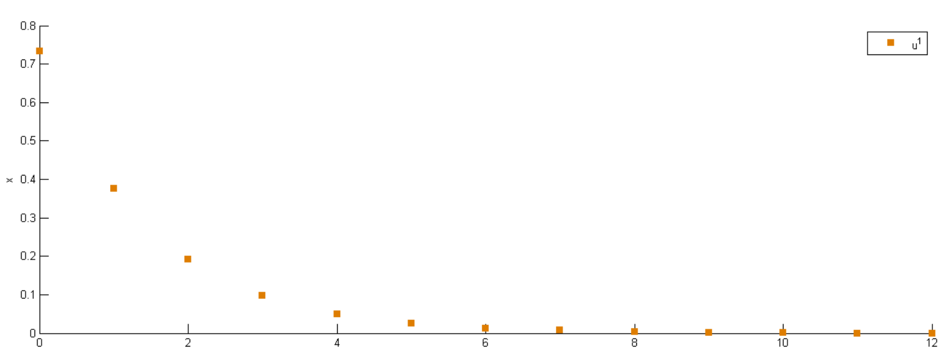

Рисунок 2. Оптимальное управление

Из Таблицы 1 следует, что в этом случае при $t \to \infty$ достигается консенсус между агентами и его значение совпадает с целевым значением игрока. Из Рис. 2 видно, что значение оптимального управления убывает с течением времени и стремится к нулю.

Теперь рассмотрим модель с **двумя** игроками. Предположим, что первый игрок влияет на первого агента, а второй игрок влияет на второго агента. Предположим вначале, что удельные затраты на управление у них одинаковы. Пусть параметры задачи такие:

$$\begin{aligned} &x(0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)' = (0.7, 0.4, 0.4)', \\ &\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01,\ \delta = 0.95,\ \hat{x^1} = 1,\ \hat{x^2} = 0.6. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Результаты численных расчетов первых 10 шагов представлены в Таблице 2.

Таблица 2. Оптимальное управление и оптимальная траектория

t	$t=0$	t=1	t=2	t=4	t=6	t=8	t=10
$x_1(t)$	0.700	4.687	4.723	4.750	4.756	4.758	4.759
$x_2(t)$	0.400	-3.230	-3.294	-3.167	-3.161	-3.159	-3.158
$x_3(t)$	0.400	0.500	0.652	0.764	0.791	0.798	0.800
$\bar{x}(t)$	0.500	0.652	0.727	0.782	0.796	0.799	0.800
$u^1(t)$	4.187	4.071	4.014	3.972	3.962	3.959	3.959
$u^2(t)$	-3.730	-3.846	-3.903	-3.945	-3.955	-3.958	-3.958

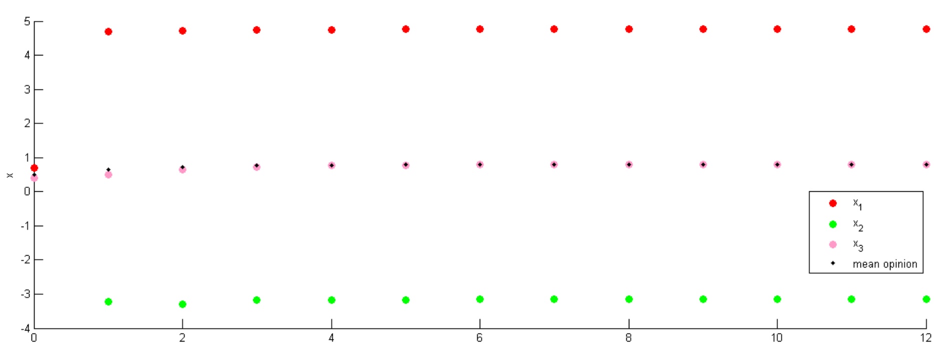

Рисунок 3. Динамика мнений трех агентов и среднего мнения в равновесии

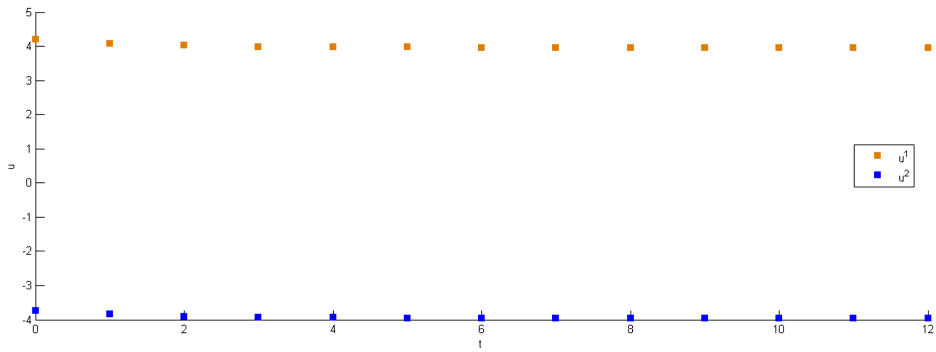

Рисунок 4. Оптимальные стратегии игроков

В заключение рассмотрим игру с двумя игроками, с разными удельными затратами на управление. Пусть параметры модели имеют вид

$$\begin{aligned} &x(0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)' = (0.7, 0.4, 0.4)', \\ &\gamma_1 = 0.01, \gamma_2 = 0.03, \ \delta = 0.95, \ \hat{x^1} = 1, \ \hat{x^2} = 0.6. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Результаты численных расчетов представлены в Таблице 3.

Таблица 3. Оптимальное управление и оптимальная траектория

t	$t=0$	t=1	t=2	t=4	t=6	t=8	t=10
$x_1(t)$	0.700	5.126	5.144	5.162	5.159	5.160	5.160
$x_2(t)$	0.400	-3.704	-3.653	-3.615	-3.607	-3.605	-3.604
$x_3(t)$	0.400	0.500	0.641	0.745	0.770	0.776	0.778
$\bar{x}(t)$	0.500	0.641	0.710	0.762	0.774	0.777	0.778
$u^1(t)$	4.626	4.503	4.442	4.400	4.386	4.383	4.382
$u^2(t)$	-4.204	-4.294	-4.338	-4.371	-4.379	-4.381	-4.382

Из последних двух примеров можно сделать следующий вывод. В случае, когда удельные затраты на управление у игроков одинаковы, то динамика мнений у агентов в равновесии различна, т.е. консенсуса в социальной сети нет, однако динамика среднего мнения такова, что через достаточно длительное время оно сходится к среднему значению целевых значений игроков. В примере $\gamma_1 = \gamma_2$, т.е. $x^* = (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)/2 = (1 + 0.6)/2 = 0.8$. Кроме того, оптимальные

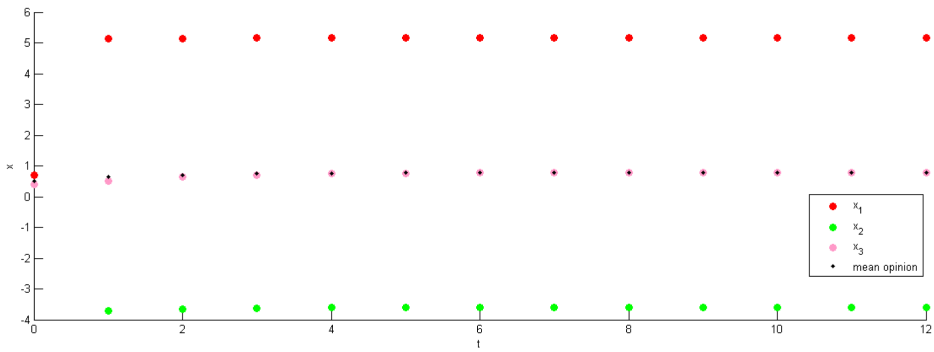

Рисунок 5. Динамика мнений трех агентов и среднего мнения в равновесии

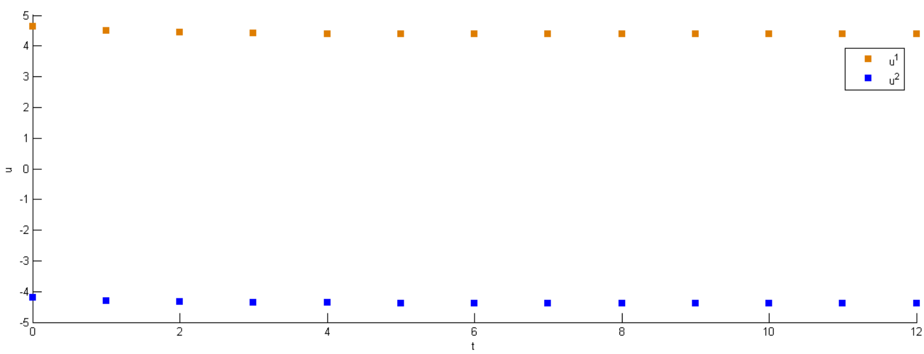

Рисунок 6. Оптимальные стратегии игроков

управления игроков при $t \to \infty$ сходятся к некоторому ненулевому значению, при этом они имеют разные знаки. Это связано с тем, что в конкурентной ситуации игрок старается сбалансировать влияние оппонента.

В несимметричном случае $\gamma_1 < \gamma_2$, мы видим, что уровень влияния игрока 1 выше, чем у игрока 2, т.е. $|u_1(t)| \geq |u_2(t)|\ \forall t$, это связано с тем, что игроку 2 надо тратить больше за единицу влияния.

6. Заключение

В данной работе исследована модель оптимального управления динамикой мнений в социальной сети, состоящей из n агентов. Предполагается, что на мнение агентов влияет один или два игрока. В первом случае это задача оптимального управления, а во втором - динамическая игра. Для решения использовался метод динамического программирования. В модели с одним игроком и идентичными агентами в социальной сети, где связи заданы полным графом, найдено оптимальное управление. Показано, что оптимальное управление зависит лишь от текущего среднего мнения всех агентов в сети. Для динамической игры в социальной сети с идентичными агентами, связи у которых заданы полным графом, найдено равновесие по Нэшу в аналитическом виде. При этом, оно также зависит только от текущего среднего значения мнений агентов. Проведено компьютерное моделирование для социальной сети из трех агентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогов М.А., Седаков А.А. *Согласованное влияние на мнения участников социальной сети* // МТИиП. 2018. Т. 10, вып. 4. С. 30–58; Rogov M.A., Sedakov A.A. *Coordinated Influence on the Opinions of Social Network Members* // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81(3). P. 528–547.

2. Barabanov I.N., Korgin N.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. *Dynamics models of informational control in social networks* // Autom. Remote Control. 2010. Vol. 71. P. 2417–2426.

3. Bauso D., Tembine H., Basar T. *Opinion dynamics in social networks through mean field games* // Control opinion. 2016. Vol. 54. P. 3225–3257.

4. Bure V.M., Parilina E.M., Sedakov A.A. *Consensus in a social network with two principals* // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1489–1499.

5. Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A. *Social network: Models of information influence. Control and Confrontation.* Springer, 2019.

6. Dockner E.J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science.* Cambridge University Press, 2000.

7. Etesami S.R., Bolouki S., Basar T., Nedic S. *Evolution of Public Opinion under Conformist and Manipulative Behaviors* // IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50-1. P. 14344–14349.

8. Friedkin N.E., Johnsen E.C. *Social influence and opinions* J. of Math. Soc. 1990. Vol. 15. P. 193–206, 1990.

9. Ghaderi J., Srikant R. *Opinion dynamics in social networks: A local interaction game with stubborn agents* // Am. Control Conf. (ACC). 2013. Vol. 50, no. 12. P. 1982–1987.

10. De Groot M. *Reaching a consensus* // Am. Stat. Assoc. 1974. Vol. 69. P. 119–121.

11. Hegselmann R., Krause U. *Opinion dynamics driven by various ways of averaging* // Comp. econ. 2005. Vol. 25. P. 381–405.

12. Mazalov V., Parilina E. *Game of competition for opinion with two centers of influence* // Lecture Notes in Computer Science. 2019. Vol. 11548. P. 673–684.

13. Mazalov V.V., Parilina E.M. *The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics* // Mathematics. 2020. Vol. 8(3). P. 1–16.

14. Mazalov V.V., Dorofeeva Yu.A., Parilina E.M. *Opinion control in a team with complete and incomplete information* // Contributions to Game Theory and Management. 2020. Vol. XIII. P. 324–334.

15. Niazi M.U.B., Ozguller A.B., Yildiz A. *Consensus as a Nash Equilibrium of a Dynamic Game.* arXiv:1701.01223v1 [cs.SY] , 2017.

16. Sedakov A.A., Zhen M. *Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes* // Vestn. St. Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. 2019. Vol. 15. P. 118–125.

17. Stiff J.B., Mongeau P.A. *Persuasive Communication.* Guilford Press, 2003.

CONTROLLING OPINION DYNAMICS AND CONSENSUS AND IN A SOCIAL NETWORK

Chen Wang, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University (wangchen241024@163.com)
Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of RAS, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong (vmazalov@krc.karelia.ru)
Hongwei Gao, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong (gaohongwei@qdu.edu.cn).

Abstract: A game-theoretic model of the influence of players on the dynamics of opinions and the achieved consensus in the social network is considered. The goal of a player is to maintain the opinion of all participants in the vicinity of a predetermined value. If there are several players, then these target values are they can be different. The dynamic game belongs to the class of linear-quadratic games in discrete time. Optimal control and equilibrium are found using the Bellman equation. The solution is achieved in an analytical form. It is shown that in the model with one player, a controlled consensus is achieved in the social network. The two-player model shows that although there is no consensus in the social network, the equilibrium is completely determined by the mean value of the opinion of all participants, which converges to a certain value. The results of numerical modeling for a social network with one and two players are presented.

Keywords: opinion dynamic, social structure, consensus, linear-quadratic game, feedback Nash equilibrium, Bellman equation.