Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 40–61

УДК 517.977.8, 519.83
ББК 22.18

СУПЕРАДДИТИВНОЕ РАСШИРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КООПЕРАТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ*

Екатерина В. Громова
Екатерина В. Марова
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: e.v.gromova@spbu.ru, marovaek@gmail.com

В статье доказывается конструктивная теорема, позволяющая строить супераддитивную характеристическую функцию в дифференциальной игре на основе произвольной. В качестве примера рассмотрена дифференциальная игра, в которой δ– и η – характеристические функции не являются супераддитивными. Проведено дополнительное построение и показано, что полученные функции удовлетворяют свойству супераддитивности.

Ключевые слова: кооперативные игры, характеристическая функция, дифференциальные игры, супераддитивность.

Поступила в редакцию: 30.10.20 *После доработки*: 24.11.20 *Принята к публикации*: 05.12.20

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17–11–01079

1. Введение

Кооперативные игры в динамической постановке в настоящее время занимают важное место в современных научных исследованиях в области математического моделирования, оптимального управления, теории игр, экономического менеджмента и др. Построение характеристических функций (далее – х.ф.) является одной из основных задач теории кооперативных игр, поскольку большинство «справедливых принципов» распределения максимального суммарного выигрыша всех игроков основано на использовании значений характеристической функции [23].

Характеристическая функция $V(S)$ в некоторой степени отражает «силу» коалиции игроков S, и желательным свойством для такой функции является супераддитивность. В настоящее время в работах по кооперативной теории игр выполнение свойства супераддитивности характеристической функции $V(S)$ часто не требуется [10, 25, 27]. Тем не менее, использование супераддитивной функции при решении различных задач в области кооперативной теории игр как в статической, так и в динамической постановке, дает ряд преимуществ, а именно, супераддитивность 1) побуждает игроков создавать все большие коалиции и в итоге объединиться в гранд-коалицию N [23], 2) придает понятный смысл вектору Шепли (компонента дележа для каждого игрока равна его среднему вкладу в благосостояние гранд-коалиции при определенном механизме ее формирования) [10], [29], 3) необходима при построении сильно-динамически устойчивых принципов оптимальности [2].

Применение классического подхода, а именно, выбор в качестве характеристической функции нижнего значения игры [23] (в настоящее время — $\alpha-$ характеристической функции), обладающей свойством супераддитивности, приводит к ряду сложностей вычислительного характера, особенно для игр в динамической постановке. Систематизация существующих подходов по упрощению построения характеристической функции, их взаимосвязь и анализ выполнения свойства супераддитивности для $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$, $\delta-$ характеристических функций приведена в работах [27], [28] для однократных, а в работах [1], [18] — для класса дифференциальных игр.

Методы, основанные на дальнейших преобразованиях $\alpha-$, $\delta-$ характеристических функций с целью упрощения вычислений в динамических играх, были предложены в работах [9], [24], [26] и др. В работах [5], [16] были предложены новые способы построения х.ф., которые затем были названы, соответственно, ζ– и η– характеристическими функциями. Отметим, что сильной стороной ζ–х.ф. [1] является выполнение свойства супераддитивности в общем случае, в то время как η– х.ф.[18] является некоторым аналогом α–х.ф., вычисляется легче других перечисленных х.ф., но не является супераддитивной. Кроме того, и упомянутая δ– х.ф. является супераддитивной функцией для некоторого достаточно широкого класса однократных игр [27], однако для динамической постановки существует ряд контрпримеров (см. [15], а также раздел 3.3.2 данной статьи).

В данной работе в разделе 2 предлагается конструктивный способ построения супераддитивной характеристической функции на основе любой другой (несупераддитивной) характеристической функции.

В разделе 3 приводится пример нетривиальной дифференциальной игры управления объемами загрязняющих атмосферу производств, основанной на модели некооперативной дифференциальной игры [14]. В отличие от работы [14], мы полагаем абсорбцию равной нулю и решаем задачу в классе программных стратегий. Для кооперативного случая характеристическая функция строится двумя способами: δ– и η– х.ф. (см. [16], [25] в разделе 3.2. В разделе 3.3 доказывается, что обе эти функции не являются супераддитивными. При помощи алгоритма, сформулированного в теореме 2.1, производится расширение построенных х.ф. на класс супераддитивных функций. Проверяется выполнение свойства супераддитивности для модифицированных характеристических функций. Наиболее громоздкие вычисления вынесены в приложения 1, 2.

2. Характеристические функции в кооперативных дифференциальных играх

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с предписанной продолжительностью $(T-t_0)$ и начальным состоянием x_0 [6]. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x \in R^n, u_i \in U_i \subset \mathrm{comp}R^k, t \in [t_0, T],\\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решений для любого набора измеримых управлений $u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)$, а именно: 1) функция f непрерывна на множестве $R^n \times U_1 \times \ldots \times U_n$, 2) функция f удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной κ_1: $||f(x', u_1, \ldots, u_n) - f(x'', u_1, \ldots, u_n)|| \leq \kappa_1 ||x' - x''||$ для всех $x', x'' \in R^n$, 3) $||f(x, u_1, \ldots, u_n)|| \leq \kappa_2(1 + ||x||)$ для всех $(x, u_1, \ldots, u_n) \in (R^n \times U_1 \times \ldots \times U_n)$ [3].

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков. Выигрыш i-го игрока определяется следующим образом:

$$H_i(x_0, T - t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

где $h_i(x, u_1, \ldots, u_n)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(t)$ – решение задачи Коши для системы (2.1) при управлениях $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$. Будем решать задачу в классе программных стратегий [11].

Определение 2.1. *n– набор управлений $u^{NE} = \{u_1^{NE}, \ldots, u_n^{NE}\}$, такой что для любого $i \in N$ выполнено*

$$H_i(x_0, T - t_0, u^{NE}) \geq H_i(x_0, T - t_0, u_i, u_{-i}^{NE}) \quad \forall u_i \in U_i,$$

где $u_{-i}^{NE} = \{u_1^{NE}, \ldots, u_{i-1}^{NE}, u_{i+1}^{NE}, \ldots, u_n^{NE}\}$, будем называть равновесием по Нэшу.

Рассмотрим кооперативный вариант игры.

Определение 2.2. *n-набор управлений $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, который доставляет максимум суммарному выигрышу игроков*

$$u^* = \arg\max_u \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T - t_0, u), \tag{2.3}$$

будем называть оптимальными управлениями, а соответствующую им траекторию $x^*(t)$ — оптимальной траекторией.

Предполагаем, что максимум в (2.3) достигается. Кроме того, предполагается, что равновесие по Нэшу существует и единственно. В общем случае это не так, но выполняется для достаточно широкого класса дифференциальных игр [12].

Для нахождения кооперативных решений как способа «справедливого раздела» заработанной игроками величины $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i(x_0, T-t_0, u^*)$ необходимо вычислить значения характеристической функции $V(S, x_0, T-t_0)$ для всех допустимых коалиций $S \subseteq N$.

Определение 2.3. *Под характеристической функцией в игре* $\Gamma(x_0, T-t_0)$ *будем понимать отображение* $V : \mathbb{R} \times X \times 2^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *такое что:*

1. $V(\emptyset, x_0, T-t_0) = 0$;
2. $V(N, x_0, T-t_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(x_0, T-t_0, u^*)$.

Подчеркнем тот факт, что характеристическая функция зависит от начальных условий игры, и, следовательно, может быть расширена на подыгры. Однако для краткости далее будем часто опускать последние два аргумента и записывать характеристическую функцию как $V(S)$. Позже, при рассмотрении реального примера в разделе 3 исходные обозначения будут восстановлены.

В настоящее время выполнение свойства супераддитивности для х.ф. является желательным, но не является обязательным [10, 25, 27, 29]. Тем не менее, свойство супераддитивности

$$\begin{aligned} V(S_1 \cup S_2, x_0, T-t_0) \geq V(S_1, x_0, T-t_0) + V(S_2, x_0, T-t_0),\\ \forall S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset. \end{aligned} \tag{2.4}$$

являлось необходимым при первоначальном определении характеристической функции [6, 23].

Как было отмечено во введении, свойство супераддитивности придает характеристической функции ряд дополнительных преимуществ.

Подробный анализ методов построения характеристической функции, в которых предложены некоторые модификации классического метода Неймана– Моргенштерна [23] (см.[6] для класса дифференциальных игр), позволяющие упростить вычисления для класса дифференциальных игр, приведен в работе [18].

Приведем два из них, в которых сильной стороной является уменьшения числа оптимизационных задач по сравнению с [6], а слабой стороной — невыполнение свойства супераддитивности (2.4) в общем случае.

В работе [25] предложен следующий подход:

$$V^{\delta}(S,x_0,T-t_0)=\begin{cases}0, & S=\{\emptyset\},\\ \max\limits_{\substack{u_i,\ i\in S\\ u_j=u_j^{NE},\ j\in N\setminus S}}\sum\limits_{i\in S}H_i(x_0,T-t_0,u_S,u^{NE}_{N\setminus S}), & S\subset N,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}H_i(x_0,T-t_0,u^*), & S=N.\end{cases} \tag{2.5}$$

Пример дифференциальной игры, для которой δ– х.ф. не является супераддитивной приведен в работе [15].

В работе [16] был предложен новый подход, а именно η– характеристическая функция, значения которой вычисляются следующим образом:

$$V^{\eta}(S,x_0,T-t_0)=\begin{cases}0, & S=\{\emptyset\},\\ \sum\limits_{i\in S}H_i(x_0,T-t_0,u^*_S,u^{NE}_{N\setminus S}), & S\subseteq N,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}H_i(x_0,T-t_0,u^*), & S=N.\end{cases} \tag{2.6}$$

Данная функция (2.6) по ряду свойств [18] близка к первоначальной α– х.ф. Неймана –Моргенштерна, однако не удовлятворяет свойству (2.4) в общем случае.

2.2. Основная теорема о супераддитивном расширении

Предположим, что характеристическая функция $V(S,x_0,T-t_0)$ построена каким-либо образом и не удовлетворяет свойству супераддитивности (2.4). Зафиксируем коалицию игроков $S,\ S\subseteq N$. Разбиением множества S называется набор подмножеств $Q=\{Q_1,\dots,Q_l\}$ таких, что $Q_i\subseteq S$, $\bigcup_{i=1}^{l}Q_i=S$, $Q_i\bigcap Q_j=\varnothing$ для всех $1\leqslant i\neq j\leqslant l$. Обозначим через $\mathcal{Q}(S)$ совокупность всех разбиений множества S.

Теорема 2.1. *Для любой характеристической функции* $V(S, x_0, T - t_0)$ *можно построить ее супераддитивное расширение:*

$$\bar{V}(S, \cdot) = \max_{Q \in \mathcal{Q}(S)} \left\{ \sum_{k=1}^{l} V(Q_k, \cdot) \middle| Q_k \in Q,\, l = |Q| \right\}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Покажем, что новая функция $\bar{V}(S, x_0, T - t_0)$ (2.7) является супераддитивной, т.е. удовлетворяет свойству (2.4).

Возьмем произвольные непересекающиеся коалиции $S_1 \subseteq N$ и $S_2 \subseteq N$, далее рассмотрим совокупности их разбиений $\mathcal{Q}(S_1)$ и $\mathcal{Q}(S_2)$. Предположим, что максимумы достигаются на разбиениях $Q' \in \mathcal{Q}(S_1)$ и $Q'' \in \mathcal{Q}(S_2)$, причем $l' = |Q'|$, $l'' = |Q''|$. Если таких разбиений несколько, выберем любое из них. Соответствующие значения характеристических функций имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{V}(S_1) &= V(Q'_1) + \cdots + V(Q'_{l'}), \\ \bar{V}(S_2) &= V(Q''_1) + \cdots + V(Q''_{l''}). \end{aligned}$$

Рассмотрим коалицию $S = S_1 \cup S_2$ и ее разбиение $\mathcal{Q}(S)$. Очевидно, что выполняется $\mathcal{Q}(S_1) \cup \mathcal{Q}(S_2) \subseteq \mathcal{Q}(S)$, соответственно выполняется

$$\begin{aligned} \bar{V}(S, \cdot) = \max_{Q \in \mathcal{Q}(S)} \left\{ \sum_{Q_k \in Q} V(Q_k, \cdot) \right\} \geq \\ \geq \max_{\substack{Q' \in \mathcal{Q}(S_1) \\ Q'' \in \mathcal{Q}(S_2)}} \left\{ \sum_{Q_i \in Q' \cup Q''} V(Q_k, \cdot) \right\} = \bar{V}(S_1, \cdot) + \bar{V}(S_2, \cdot). \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{V}(S_1 \cup S_2) \geqslant \bar{V}(S_1) + \bar{V}(S_2)$. $\square$

3. Пример дифференциальной игры

Рассмотрим дифференциальную игру управления объемами вредных выбросов, сформулированную [14], не останавливаясь подробно на экологическом контексте рассматриваемой задачи. Для упрощения вычислений в данной работе не будем принимать во внимание естественную абсорбцию загрязнений в окружающей среде [7, 13]. Тем не менее, данная характеристика оказывает значительное влияние на выигрыши и дележи игроков, что для случая линейных по состоянию затрат было подробно изучено в [22]. В данной работе затраты предполагаются квадратичной функцией состояния системы.

Итак, пусть $n = 3$ и динамика (2.1) игры трех лиц имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t), \quad x(t_0) = x_0 \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Под выигрышем (2.2) игрока i будем понимать следующий функционал:

$$H_i(x_0, T - t_0, u) = \int_{t_0}^{T} \left(\left(A - \frac{1}{2}u_i \right) u_i - \frac{kx^2}{2} \right) dt, \tag{3.2}$$

где константы A, $k > 0$. Кроме того, предполагается, что допустимые управления $u_i(t),\ i = 1, 2, 3$, находятся в компакте $[0, A]$. Задача решается в классе программных стратегий.

Нахождение профиля оптимальных стратегий и равновесия по Нэшу при помощи принципа максимума Понтрягина [11], а также исследование ограничений на параметры модели, при которых полученные управления не покидают компакт $[0, A]$, подробно изложено в приложениях 1, 2.

Управления, соответствующие равновесию по Нэшу, имеют вид:

$$u_i^{NE}(t) = C_1^{NE} e^{\sqrt{3k}t} + C_2^{NE} e^{-\sqrt{3k}t}, \tag{3.3}$$

где $C_1^{NE} = \frac{A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}T} + \sqrt{k}x_0 e^{\sqrt{3k}t_0}}{\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0})}$, $C_2^{NE} = \frac{A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}(T+2t_0)} - \sqrt{k}x_0 e^{\sqrt{3k}(2T+t_0)}}{\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0})}$.

Для случая полной кооперации игроков имеем:

$$u_i^*(t) = C_1 e^{3\sqrt{k}t} + C_2 e^{-3\sqrt{k}t}, \qquad x^*(t) = \frac{C_1}{\sqrt{k}} e^{3\sqrt{k}t} - \frac{C_2}{\sqrt{k}} e^{-3\sqrt{k}t}, \tag{3.4}$$

где $C_1 = \frac{Ae^{3\sqrt{k}T} + \sqrt{k}x_0 e^{3\sqrt{k}t_0}}{e^{6\sqrt{k}T} + e^{6\sqrt{k}t_0}}$, $C_2 = \frac{Ae^{3\sqrt{k}(T+2t_0)} - \sqrt{k}x_0 e^{3\sqrt{k}(2T+t_0)}}{e^{6\sqrt{k}T} + e^{6\sqrt{k}t_0}}$.

Максимальный суммарный выигрыш равен

$$V(N) = \frac{(A^2 - kx_0^2)(e^{6\sqrt{k}T} - e^{6\sqrt{k}t_0}) - 2A(e^{3\sqrt{k}T} - e^{3\sqrt{k}t_0})^2 \sqrt{k}x_0}{2\sqrt{k}(e^{6\sqrt{k}T} + e^{6\sqrt{k}t_0})}. \tag{3.5}$$

3.1. Построение $\delta-$ характеристической функции

Согласно (2.5) будем использовать стратегии из равновесия по Нэшу (3.3) для игроков, не входящих в коалицию S, а для игроков из коалиции S будем решать задачу максимизации суммарного выигрыша этой коалиции. Для одноэлементных коалиций $S=\{i\},\ i=1,2,3$ имеем

$$\max_{\substack{u_i,\\ u_j=u_j^{NE}, u_k=u_k^{NE}}} \int_{t_0}^{T} \Big(\Big(A-\frac{1}{2}u_i\Big)u_i - \frac{kx^2}{2}\Big)dt,$$

причем динамика определяется уравнением (3.1).

Как и в случае с нахождением оптимальных управлений (см. приложение 2) запишем Гамильтониан

$$H(x,u,\psi) = \left(\left(A-\frac{1}{2}u_i\right)u_i - \frac{kx^2}{2}\right) + \psi\Big(u_i + u_j^{NE} + u_k^{NE}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(x,u,\psi) = A - u_i + \psi.$$

Поскольку Гессиан отрицательно определенный, функция H является вогнутой по u_i:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2}(x,u,\psi) = -1 < 0.$$

Для сопряженных переменных согласно [11] имеем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A + \psi + 2(C_1^{NE}e^{\sqrt{3k}t} + C_2^{NE}e^{-\sqrt{3k}t}), \qquad x(t_0)=x_0, \\ \frac{d\psi}{dt} = kx, \qquad \psi(T)=0. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$u_i^S(t) = \Big(A(e^{2\sqrt{3k}t} + e^{2\sqrt{3k}t_0})e^{\sqrt{3k}T} -$$

$$-\frac{\sqrt{3k}x_0}{3}(e^{2\sqrt{3k}T} - e^{2\sqrt{3k}t})e^{\sqrt{3k}t_0}\Big)e^{-\sqrt{3k}t}/(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0}).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} V^\delta(\{i\}) =& 1/(9(p_1^2+p_2^2)^2)\Big(-6\Big(Ax_0 - (3A^2 - kx_0^2)(T-t_0)\Big)p_1^2p_2^2 + \\ &+ 6Ax_0\Big(\big(1-\sqrt{3k}(T-t_0)\big)p_1^2 + \big(1+\sqrt{3k}(T-t_0)\big)p_2^2\Big)p_1p_2 - \\ &- \sqrt{3}x_0\big(\sqrt{3}A + \sqrt{k}x_0\big)p_1^4 - \sqrt{3}x_0\big(\sqrt{3}A - \sqrt{k}x_0\big)p_2^4\Big) \end{aligned}$$

где $p_1 = e^{\sqrt{3k}T}$, $p_2 = e^{\sqrt{3k}t_0}$.

Аналогично для двухэлементных коалиций $S = \{i, j\}$

$$u_{ij}^S(t) = \frac{1}{3(p_1^2+p_2^2)(p_3^4+p_4^4)e^{\sqrt{k}t(\sqrt{3}+2)}}\Bigg(3\Big(3Ap_3^2(p_4^4+e^{4\sqrt{k}t})- \\ -2\sqrt{k}p_4^2x_0(p_3^4-e^{4\sqrt{k}t})\Big)(p_1^2+p_2^2)e^{\sqrt{3k}t} - 2\Big(3Ap_1(p_2^2+e^{2\sqrt{3k}t})- \\ -\sqrt{3k}p_2x_0(p_1^2-e^{2\sqrt{3k}t})\Big)(p_3^4+p_4^4)e^{\sqrt{2k}t}\Bigg).$$

$$V^\delta(\{i,j\}) = \Bigg(4\Big(\big(18\sqrt{k}(-9A^2+4kx_0^2)(T-t_0)+297\sqrt{3}A^2- \\ -24A\sqrt{k}x_0 - 109\sqrt{3}kx_0^2\big)p_2^4 + \big(18\sqrt{k}(-9A^2+4kx_0^2)(T-t_0)- \\ -297\sqrt{3}A^2 - 24A\sqrt{k}x_0 + 109\sqrt{3}kx_0^2\big)p_1^4\Big)p_3^4p_4^4+ \\ +6\Big(\big(20\sqrt{k}(-3A^2+kx_0^2)(T-t_0)+351A^2-16A\sqrt{k}x_0-132kx_0^2\big)p_3^8+ \\ +\big(20\sqrt{k}(-3A^2+kx_0^2)(T-t_0)-351A^2-16A\sqrt{k}x_0+132kx_0^2\big)p_4^8\Big)p_1^2p_2^2 \\ +48\Big(\sqrt{k}(-42A^2+17kx_0^2)(T-t_0)-4A\sqrt{k}x_0\Big)p_1^2p_2^2p_3^4p_4^4+ \\ +432A\sqrt{k}x_0\Big((-\sqrt{k}(T-t_0)+6)p_4^4+(\sqrt{k}(T-t_0)+6)p_3^4\Big) \\ (p_1^2+p_2^2)^2p_3^2p_4^2 + 24A\sqrt{k}x_0\Big((-5\sqrt{3k}(T-t_0)-104)p_2^2+ \\ +(5\sqrt{3k}(T-t_0)-104)p_1^2\Big)(p_3^4+p_4^4)^2p_1p_2 \\ +\Big(27A^2(-39-22\sqrt{3})-48A\sqrt{k}x_0+2(109\sqrt{3}+198)kx_0^2\Big)p_1^4p_4^8+ \\ +\Big(27A^2(-39+22\sqrt{3})-48A\sqrt{k}x_0+2(-109\sqrt{3}+198)kx_0^2\Big)p_2^4p_4^8+ \\ +\Big(27A^2(39-22\sqrt{3})-48A\sqrt{k}x_0+2(109\sqrt{3}-198)kx_0^2\Big)p_1^4p_3^8+ \\ +\Big(27A^2(39+22\sqrt{3})-48A\sqrt{k}x_0+2(-109\sqrt{3}-198)kx_0^2\Big)p_2^4p_3^8\Bigg)\Bigg/ \\ 72\sqrt{k}\Bigg(p_1^4p_3^8+2p_1^4p_3^4p_4^4+p_1^4p_4^8+2p_1^2p_2^2p_3^8+4p_1^2p_2^2p_3^4p_4^4+ \\ +2p_1^2p_2^2p_4^8+p_2^4p_3^8+2p_2^4p_3^4p_4^4+p_2^4p_4^8\Bigg),$$

где $p_1 = e^{\sqrt{3k}T}$, $p_2 = e^{\sqrt{3k}t_0}$, $p_3 = e^{\sqrt{k}T}$, $p_4 = e^{\sqrt{k}t_0}$.

Выражение для $V^{\delta}(\{1,2,3\},\cdot) = V^{\delta}(N,\cdot) = V(N,\cdot)$ получено выше в (3.5).

3.2. Построение η – характеристической функции

Согласно (2.6) будем использовать стратегии из равновесия по Нэшу (3.3) для игроков, не входящих в коалицию S, а для игроков из коалиции S будем использовать управления из $n-$ набора оптимальных стратегий (3.4). Тогда

$$u_i^{\eta}(t) = u_i^{*}(t) = C_1 e^{3\sqrt{k}t} + C_2 e^{-3\sqrt{k}t}, \qquad i \in S;$$
$$u_j^{\eta}(t) = u_j^{NE}(t) = C_1^{NE} e^{\sqrt{3k}t} + C_2^{NE} e^{-\sqrt{3k}t}, \qquad j \in N \setminus S.$$

Тогда из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} x(t) =& x_0 + \Big(C_1(e^{3\sqrt{k}t} - e^{3\sqrt{k}t_0}) - C_2(e^{-3\sqrt{k}t} - e^{-3\sqrt{k}t_0}) + \\ &+ 2\sqrt{3}C_1^{NE}(e^{\sqrt{3k}t} - e^{\sqrt{3k}t_0}) - 2\sqrt{3}C_2^{NE}(e^{-\sqrt{3k}t} - e^{-\sqrt{3k}t_0})\Big)/3\sqrt{k} \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} V^{\eta}(\{i\}) = \Bigg(& 12Ax_0\bigg(\Big((5\sqrt{k} + 4k(T-t_0))p_3^6 + (5\sqrt{k} - 4k(T-t_0))p_4^6\Big)p_3^3p_4^3\cdot \\ &\cdot(p_1^2+p_2^2)^2 - 2\Big((\sqrt{k}+\sqrt{3}k(T-t_0))p_1^2 + (\sqrt{k}-\sqrt{3}k(T-t_0))p_2^2\Big)p_1p_2\cdot \\ &\cdot(p_3^6+p_4^6)^2\bigg) + 12\big(2\sqrt{3}A^2 - 3A\sqrt{k}x_0 - 4\sqrt{k}(A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_2^4p_3^6p_4^6 - \\ &-12\big(2\sqrt{3}A^2 + 3A\sqrt{k}x_0 + 4\sqrt{k}(A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^4p_3^6p_4^6 + \\ &+2\big(19A^2 - 18A\sqrt{k}x_0 - 11kx_0^2 + 12\sqrt{k}(3A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_3^{12} - \\ &-2\big(19A^2 + 18A\sqrt{k}x_0 - 11kx_0^2 - 12\sqrt{k}(3A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_4^{12} - \\ &-24\sqrt{k}\big(3Ax_0 - 2(A^2+kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_3^6p_4^6 + \\ &+\big((12\sqrt{3}-19)A^2 - 18A\sqrt{k}x_0 + 11kx_0^2\big)p_2^4p_4^{12} - \\ &-\big((12\sqrt{3}-19)A^2 + 18A\sqrt{k}x_0 + 11kx_0^2\big)p_1^4p_3^{12} - \\ &-\big((12\sqrt{3}+19)A^2 + 18A\sqrt{k}x_0 - 11kx_0^2\big)p_1^4p_4^{12} + \\ &+\big((12\sqrt{3}+19)A^2 - 18A\sqrt{k}x_0 - 11kx_0^2\big)p_2^4p_3^{12}\Bigg)\Big/ \\ 54\sqrt{k}\Big(& p_1^4p_3^{12} + 2p_1^4p_3^6p_4^6 + p_1^4p_4^{12} + 2p_1^2p_2^2p_3^{12} + 4p_1^2p_2^2p_3^6p_4^6 + 2p_1^2p_2^2p_4^{12} + \\ &+p_2^4p_3^{12} + 2p_2^4p_3^6p_4^6 + p_2^4p_4^{12}\Big), \end{aligned}$$

где $p_1 = e^{\sqrt{3k}T}$, $p_2 = e^{\sqrt{3k}t_0}$, $p_3 = e^{\sqrt{k}T}$, $p_4 = e^{\sqrt{k}t_0}$.

$$V^\eta(\{i,j\}) = \Bigg(12Ax_0\Bigg(2\cdot$$
$$\cdot\Big((8\sqrt{k}+7k(T-t_0))p_3^6+(8\sqrt{k}-7k(T-t_0))p_4^6\Big)(p_1^2+p_2^2)^2p_3^3p_4^3+$$
$$+\Big((-4\sqrt{k}+\sqrt{3}k(T-t_0))p_2^2-(4\sqrt{k}+\sqrt{3}k(T-t_0))p_1^2\Big)(p_3^6+p_4^6)^2p_1p_2\Bigg)+$$
$$+6\big(5\sqrt{3}A^2-24A\sqrt{k}x_0-\sqrt{3}kx_0^2-28\sqrt{k}(A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_2^4p_3^6p_4^6-$$
$$-6\big(5\sqrt{3}A^2+24A\sqrt{k}x_0-\sqrt{3}kx_0^2+28\sqrt{k}(A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^4p_3^6p_4^6+$$
$$+2\big(62A^2-72A\sqrt{k}x_0-34kx_0^2+6\sqrt{k}(3A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_3^{12}-$$
$$-2\big(62A^2+72A\sqrt{k}x_0-34kx_0^2-6\sqrt{k}(3A^2-kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_4^{12}-$$
$$-24\sqrt{k}\big(12Ax_0+(11A^2-13kx_0^2)(T-t_0)\big)p_1^2p_2^2p_3^6p_4^6+$$
$$+\big((15\sqrt{3}-62)A^2-72A\sqrt{k}x_0+(34-3\sqrt{3})kx_0^2\big)p_2^4p_4^{12}-$$
$$-\big((15\sqrt{3}-62)A^2+72A\sqrt{k}x_0+(34-3\sqrt{3})kx_0^2\big)p_1^4p_3^{12}-$$
$$-\big((15\sqrt{3}+62)A^2+72A\sqrt{k}x_0-(34+3\sqrt{3})kx_0^2\big)p_1^4p_4^{12}+$$
$$+\big((15\sqrt{3}+62)A^2-72A\sqrt{k}x_0-(34+3\sqrt{3})kx_0^2\big)p_2^4p_3^{12}\Bigg)\Big/$$
$$108\sqrt{k}\Bigg(p_1^4p_3^{12}+2p_1^4p_3^6p_4^6+p_1^4p_4^{12}+2p_1^2p_2^2p_3^{12}+4p_1^2p_2^2p_3^6p_4^6+$$
$$+2p_1^2p_2^2p_4^{12}+p_2^4p_3^{12}+2p_2^4p_3^6p_4^6+p_2^4p_4^{12}\Bigg),$$

где $p_1 = e^{\sqrt{3k}T}$, $p_2 = e^{\sqrt{3k}t_0}$, $p_3 = e^{\sqrt{k}T}$, $p_4 = e^{\sqrt{k}t_0}$.

3.3. Проверка супераддитивности характеристической функции

3.3.1 Проверка супераддитивности для η-характеристической функции

Проверим, выполняется ли для х.ф., построенной по методу (2.6), свойство (2.4).

Выберем значения параметров:

$$k = 1, A = 10, x_0 = 1, t_0 = 0, T = 0.4.$$

Тогда управления принимают вид:

$$u_i^*(t) = u_j^*(t) = u_k^*(t) = 2.84e^{3t} + 1.84e^{-3t};$$
$$u_i^{NE}(t) = u_j^{NE}(t) = u_k^{NE}(t) = 4.12e^{3t} + 3.54e^{-3t}.$$

Выполнение ограничений для $u_i^*(t)$:

$\frac{1}{3\sqrt{k}} ln(\frac{A}{\sqrt{k}x_0}) = 0.77, \quad T - t_0 = 0.4, \quad \frac{1}{3\sqrt{k}} ln(\frac{A}{\sqrt{k}x_0}) > T - t_0$, значит $u_i^*(t) \geqslant 0, \forall t \in [t_0, T]$.

$A^2 - 4C_1C_2 = 79.01 > 0$, значит $u_i^*(t) \leqslant A$, когда $-0.54 \leqslant t \leqslant 0.4$, т.е. $u_i^*(t) \leqslant A, \forall t \in [t_0, T]$.

Выполнение ограничений для $u_i^{NE}(t)$:

$\frac{1}{\sqrt{3k}} ln(\frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{k}x_0}) = 1.65, \quad T - t_0 = 0.4, \quad \frac{1}{\sqrt{3k}} ln(\frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{k}x_0}) > T - t_0$, значит $u_i^{NE}(t) \geqslant 0, \forall t \in [t_0, T]$.

$A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE} = 41.73 > 0$, значит $u_i^{NE}(t) \leqslant A$ когда $-0.49 \leqslant t \leqslant 0.4$, т.е. $u_i^{NE}(t) \leqslant A, \forall t \in [t_0, T]$.

Значения η-характеристической функции:

$$V^\eta(N) = 36.79,$$
$$V^\eta(\{i, j\}) = 28.34, \quad \forall i, j \in N, i \neq j,$$
$$V^\eta(\{i\}) = 9.94, \quad \forall i \in N.$$

Проверим супераддитивность:

$$V^\eta(N) - V^\eta(\{i, j\}) - V^\eta(\{k\}) = -1.49;$$
$$V^\eta(N) - V^\eta(\{i\}) - V^\eta(\{j\}) - V^\eta(\{k\}) = 6.98;$$
$$V^\eta(\{i, j\}) - V^\eta(\{i\}) - V^\eta(\{j\}) = 8.46.$$

Очевидно, что для данного набора параметров игры η–х.ф. не удовлетворяет неравенству (2.4), т.е. не является супераддитивной.

Построим новую функцию согласно теореме 2.1:

$$\begin{aligned} \bar{V}^\eta(N) &= V^\eta(\{i, j\}) + V^\eta(\{k\}) = 38.28; \\ \bar{V}^\eta(\{i, j\}) &= V^\eta(\{i, j\}) = 28.34, \quad \forall i, j \in N, i \neq j; \\ \bar{V}^\eta(\{i\}) &= V^\eta(\{i\}) = 9.94, \quad \forall i \in N. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Очевидно, что построенная х.ф. (3.6) является супераддитивной.

3.3.2 Проверка супераддитивности для δ-характеристической функции

Проверим, выполняется ли для х.ф., построенной по методу (2.5), свойство (2.4). Выберем те же значения параметров:

$$k = 1, A = 10, x_0 = 1, t_0 = 0, T = 0.4.$$

Проверка выполнения принадлежности управлений компакту $[0, A]$ для равновесия по Нэшу была проведена выше. Проверим выполнение этого требования для оптимальных управлений, решающих вспомогательные задачи максимизации при построении δ– х.ф. (2.5).

Управление для случая $S = \{i\}$:

$$u_i^\delta(t) = 4.12e^{\sqrt{3}t} + 3.54e^{-\sqrt{3}t} - 2.84 \cdot 10^{-15}.$$

Тогда

$$\frac{du_i^\delta}{dt} = 7.13e^{\sqrt{3}t} - 6.13e^{-\sqrt{3}t} > 0,$$

следовательно, $u_i^\delta(t)$ — возрастающая по t функция. Имеем:

$$u_i^\delta(t_0) < u_i^\delta(t) < u_i^\delta(T), \forall t \in [t_0, T],$$
$$u_i^\delta(t_0) = u_i^\delta(0) = 7.6,$$
$$u_i^\delta(T) = u_i^\delta(0.4) = 10.$$

Следовательно, $0 \leqslant u_i^\delta(t) \leqslant A, \forall t \in [t_0, T]$.

Аналогично получаем результат для двухэлементных коалиций $S = \{i, j\}$. При детальном разборе получаем, что

$$u_{ij}^\delta(t) = 11.55e^{2t} + 9.55e^{-2t} - 8.23e^{\sqrt{3}t} - 7.08e^{-\sqrt{3}t} - 2.84 \cdot 10^{-15}$$

является возрастающей функцией на $[t_0, T]$:

$$u_{ij}^\delta(t_0) < u_{ij}^\delta(t) < u_{ij}^\delta(T), \forall t \in [t_0, T].$$

Принимая во внимание, что

$$u_{ij}^\delta(t_0) = u_{ij}^\delta(0) = 5.79,$$
$$u_{ij}^\delta(T) = u_{ij}^\delta(0.4) = 10,$$

получаем, что $0 \leqslant u_{ij}^{\delta}(t) \leqslant A, \forall t \in [t_0, T]$.

Значения δ-характеристической функции:

$$V^{\delta}(N) = 36.79;$$
$$V^{\delta}(\{i,j\}) = 29.54, \quad \forall i,j \in N, i \neq j;$$
$$V^{\delta}(\{i\}) = 10.87, \quad \forall i \in N.$$

Проверим выполнение свойства супераддитивности:

$$V^{\delta}(N) - V^{\delta}(\{i,j\}) - V^{\delta}(\{k\}) = -3.62;$$
$$V^{\delta}(N) - V^{\delta}(\{i\}) - V^{\delta}(\{j\}) - V^{\eta}(\{k\}) = 4.17;$$
$$V^{\delta}(\{i,j\}) - V^{\delta}(\{i\}) - V^{\delta}(\{j\}) = 7.79.$$

Очевидно, что для данного набора параметров игры δ–х.ф. не удовлетворяет неравенству (2.4), т.е. не является супераддитивной.

Согласно теореме 2.1 построим новую функцию:

$$\begin{aligned} \bar{V}^{\delta}(N) &= V^{\delta}(\{i,j\}) + V^{\eta}(\{k\}) = 40.41; \\ \bar{V}^{\delta}(\{i,j\}) &= V^{\delta}(\{i,j\}) = 29.54, \quad \forall i,j \in N, i \neq j; \\ \bar{V}^{\delta}(\{i\}) &= V^{\delta}(\{i\}) = 10.87, \quad \forall i \in N. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Очевидно, что новая х.ф. (3.7) является супераддитивной.

4. Заключение

В работе был предложен подход, позволяющий получать супераддитивное расширение для класса произвольных характеристических функций. Данный подход был реализован для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью и продемонстрирован на игре трех лиц, в которой при указанных значениях параметров построенные δ– и η– характеристические функции не являются супераддитивными функциями. Показано, что применение предложенного подхода позволяет получить супераддитивную функцию на основе несупераддитивной.

5. Приложение 1. Вычисление равновесия по Нэшу

Напомним, что интегральный выигрыш i-го игрока в примере имеет вид (3.2), в то время как динамика системы описывается дифференциальным уравнением (3.1). :

$$K_i(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{T} \left(\left(A - \frac{1}{2} u_i \right) u_i - \frac{kx^2}{2} \right) dt.$$

Управления u_i^{NE}, соответствующие равновесию по Нэшу, находятся как решение 3 связанных оптимизационных задач $\max\limits_{u_i} H_i(x_0, T-t_0, u_i, u_{-i}^{NE})$. Для i-го игрока Гамильтониан имеет вид:

$$H_i(x,u,\psi_i) = \left(A - \frac{1}{2}u_i\right)u_i - \frac{kx^2}{2} + \psi_i(u_1+u_2+u_3).$$

Частная производная Гамильтониана по u_i: $\frac{\partial H_i}{\partial u_i}(x,u,\psi_i) = A - u_i + \psi_i$.

Вторая производная отрицательная, откуда можно сделать вывод, что Гамильтониан H_i вогнут по u_i: $\frac{\partial^2 H_i}{\partial u_i^2}(x,u,\psi_i) = -1 < 0$.

Сопряженные уравнения и условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3(A+\psi), \qquad x(t_0) = x_0, \\ \frac{d\psi}{dt} = kx, \qquad \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\psi(t) = -A + C_1^{NE}e^{\sqrt{3k}t} + C_2^{NE}e^{-\sqrt{3k}t}$, где $C_1^{NE} = \frac{A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}T} + \sqrt{k}x_0e^{\sqrt{3k}t_0}}{\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0})}$, $C_2^{NE} = \frac{A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}(T+2t_0)} - \sqrt{k}x_0e^{\sqrt{3k}(2T+t_0)}}{\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0})}$.

Получим управления, соответствующие равновесию по Нэшу (3.3):

$$u_i^{NE}(t) = C_1^{NE}e^{\sqrt{3k}t} + C_2^{NE}e^{-\sqrt{3k}t}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Сформулируем ограничения, при которых выполняются ограничения на управление $0 \leqslant u_i^{NE}(t) \leqslant A$. Для нижней границы ($u_i^{NE}(t) \geqslant 0$) имеем следующие условия:

- при $\frac{1}{\sqrt{3k}}ln\left(\frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{k}x_0}\right) \geqslant T - t_0$, $u_i^{NE}(t) \geqslant 0$ выполняется $\forall\ t \in [t_0, T]$;
- при $\frac{1}{\sqrt{3k}}ln\left(\frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{k}x_0}\right) < T - t_0$, $u_i^{NE}(t) \geqslant 0$ если

$$t \geqslant \frac{1}{\sqrt{3k}}ln\left(\sqrt{\frac{-A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}(T+2t_0)} + \sqrt{k}x_0e^{\sqrt{3k}(2T+t_0)}}{A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}T} + \sqrt{k}x_0e^{\sqrt{3k}t_0}}}\right).$$

Условия для верхней границы ($u_i^{NE}(t) \leqslant A$) выполняются в зависимости от значения A:

- при $A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE} > 0$, $u_i^{NE}(t) \leqslant A$ если

$$\frac{A - \sqrt{A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}} \leqslant e^{\sqrt{3k}t} \leqslant \frac{A + \sqrt{A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}};$$

- при $\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}} \leqslant 0$, $u_i^{NE}(t) \leqslant A$ если

$$t \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k}} ln\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}}\right);$$

- при $\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}} > 0$, $u_i^{NE}(t) \leqslant A$ если

$$\frac{1}{\sqrt{3k}} ln\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}}\right) \leqslant t \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{3k}} ln\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4C_1^{NE}C_2^{NE}}}{2C_1^{NE}}\right);$$

- при $A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE} = 0$, $u_i^{NE}(t) = A$ если

$$t = \frac{1}{\sqrt{3k}} ln\left(\frac{A\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3k}T} + e^{2\sqrt{3k}t_0})}{2(A\sqrt{3}e^{\sqrt{3k}T} + \sqrt{k}x_0 e^{\sqrt{3k}t_0})}\right);$$

- при $A^2 - 4C_1^{NE}C_2^{NE} < 0$, $u_i^{NE}(t) > A, \forall t$.

Приведенные неравенства получены путем алгебраических преобразований (3.3).

6. Приложение 2. Нахождение оптимальных управлений для кооперативной формы игры

Оптимальные управления могут быть найдены при помощи принципа максимума Понтрягина. Необходимо максимизировать суммарный выигрыш игроков $\max\limits_{u_1,u_2,u_3} \sum\limits_{i=1}^{3} H_i(x_0, T-t_0, u)$.

Гамильтониан имеет вид:

$$H(x,u,\psi) = \sum_{i=1}^{3}\left(\left(A - \frac{1}{2}u_i\right)u_i - \frac{kx^2}{2}\right) + \psi\left(u_1+u_2+u_3\right).$$

Далее аналогично вычислениям приложения 1 получаем оптимальные управления в виде (3.4):

$$u_i^*(t) = C_1 e^{3\sqrt{k}t} + C_2 e^{-3\sqrt{k}t}, \quad i = \overline{1,3}.$$

где $C_1 = \frac{Ae^{3\sqrt{k}T}+\sqrt{k}x_0e^{3\sqrt{k}t_0}}{e^{6\sqrt{k}T}+e^{6\sqrt{k}t_0}}$, $C_2 = \frac{Ae^{3\sqrt{k}(T+2t_0)}-\sqrt{k}x_0e^{3\sqrt{k}(2T+t_0)}}{e^{6\sqrt{k}T}+e^{6\sqrt{k}t_0}}$.

Далее получим оптимальную траекторию (3.4) $x^*(t)$ и выражение для суммарного выигрыша игроков при использовании оптимальных управлений $V(N, x_0, T-t_0)$ (3.5).

Сформулируем ограничения, при которых выполняются ограничения на управление $0 \leqslant u_i^{NE}(t) \leqslant A$. Для нижней границы ($u_i^{NE}(t) \geqslant 0$) имеем следующие условия:

- при $\frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A}{\sqrt{k}x_0}\right) \geqslant T-t_0$, $u_i^{NE}(t) \geqslant 0$ выполняется $\forall t \in [t_0, T]$;
- при $\frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A}{\sqrt{k}x_0}\right) < T-t_0$, $u_i^{NE}(t) \geqslant 0$ если

$$t \geqslant \frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\sqrt{\frac{-Ae^{3\sqrt{k}(T+2t_0)}+\sqrt{k}x_0e^{3\sqrt{k}(2T+t_0)}}{Ae^{3\sqrt{k}T}+\sqrt{k}x_0e^{3\sqrt{k}t_0}}}\right).$$

Условия для верхней границы ($u_i^*(t) \leqslant A$) выполняются в зависимости от значение A:

- при $A^2-4C_1C_2 > 0$, $u_i^*(t) \leqslant A$ если

$$\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1} \leqslant e^{3\sqrt{k}t} \leqslant \frac{A+\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1};$$

- при $\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1} \leqslant 0$, $u_i^*(t) \leqslant A$ если

$$t \leqslant \frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1}\right);$$

- при $\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1} > 0$, $u_i^*(t) \leqslant A$ если

$$\frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1}\right) \leqslant t \leqslant \frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4C_1C_2}}{2C_1}\right);$$

- при $A^2-4C_1C_2 = 0$, $u_i^*(t) = A$ если

$$t = \frac{1}{3\sqrt{k}}ln\left(\frac{A(e^{6\sqrt{k}T}+e^{6\sqrt{k}t_0})}{2(Ae^{3\sqrt{k}T}+\sqrt{k}x_0e^{3\sqrt{k}t_0})}\right);$$

- при $A^2 - 4C_1C_2 < 0$, $u_i^*(t) > A, \forall t$.

Приведенные неравенства получены путем алгебраических преобразований (3.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громова Е.В., Петросян Л.А., *Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 19–39.

2. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами* // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 140–159.

3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: «Наука», 1974.

4. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и ее приложения.* СПб.: «Лань», 2010.

5. Петросян Л.А., Громова Е.В. *Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх* // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, вып. 3. С. 193–203.

6. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения.* Томск: Изд-во Томского унив., 1982.

7. Петросян Л.А., Захаров В.В. *Математические модели в экологии.* СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского унив., 1997.

8. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.

9. Петросян Л.А., Панкратова Я.Б. *Построение сильно-динамически устойчивых подъядер в дифференциальных играх с предписанной продолжительностью* // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, вып. 1. С. 219–227.

10. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европ. универс., 2004.

11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

12. Basar T. *On the uniqueness of the Nash solution in linear-quadratic differential games* // International Journal of Game Theory. 1976. V. 5, no. 2–3, P. 65–90.

13. Dockner E.J., Jorgensen S., van Long N. and Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science.* Cambridge University Press, 2000.

14. de Frutos J., Martin-Herran G. *Selection of a Markov Perfect Nash Equilibrium in a Class of Differential Games* // Dynamic Games and Applications. 2018. V. 8. P. 620–636.

15. Gromova E., Malahova A., Marova E. *On the superadditivity of a characteristic function in cooperative differential games with negative externalities* // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. 2017. P. 1–4.

16. Gromova E., Marova E. *Coalition and anti-coalition interaction in cooperative differential games* // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51, no. 32. P. 479–483.

17. Gromova E., Marova E. *On the characteristic function construction technique in differential games with prescribed and random duration* // Contributions to Game Theory and Management. 2018. V. 11. P. 53–65.

18. Gromova E., Marova E., Gromov D. *A substitute for the classical Neumann-Morgenstern characteristic function in cooperative differential games* // Journal of Dynamics and Games. 2020. V. 7, no. 2. P. 105–122.

19. Haurie A. et al. *Games and dynamic games.* World Scientific Books, 2012.

20. Hull D. *Optimal Control Theory for Applications.* Springer-Verlag New York, 2003.

21. Mazalov V. *Mathematical game theory and applications.* John Wiley & Sons, 2014.

22. Marova E., Gromova E., Barsuk P., Shagushina A. *On the Effect of the Absorption Coefficient in a Differential Game of Pollution Control* // Mathematics. 2020. V. 8, no 6. art. no. 961.

23. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1953.

24. Petrosyan L., Gromova E. *S-strongly time-consistency in differential games.* In: Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. (eds) Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhäuser, Cham. 2018. P. 203–217.

25. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // J. of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27, no. 3. P. 381–398.

26. Parilina E., Petrosyan L. *On a Simplified Method of Defining Characteristic Function in Stochastic Games* // Mathematics. 2020. V. 8, no. 7. art. no. 1135.

27. Reddy P.V., Zaccour G. *A friendly computable characteristic function*// Mathematical Social Sciences. 2016. V. 82. P. 18–25.

28. Sedakov A. *Characteristic Functions in a Linear Oligopoly TU Game.* In: Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. (eds) Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhauser, Cham. 2018. P. 219–235.

29. Winter E., Aumann R. *The Shapley value* // Handbook of Game Theory with Economic Applications. 2002. V. 3. P. 1521–2351.

SUPERADDITIVE EXTENSION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS FOR COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAMES

Ekaterina V. Gromova, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (e.v.gromova@spbu.ru).
Ekaterina V. Marova, Saint Petersburg State University, PhD student (marovaek@gmail.com).

Abstract: The paper provides a constructive theorem that allows one to construct a superadditive characteristic function in a differential game based on a non-superadditive one. As an example, a differential game is considered in which the δ – and η – characteristic functions are not superadditive. An additional construction is carried out and it is shown that the obtained functions satisfy superadditivity

Keywords: cooperative games, characteristic function, differential games, superadditivity.