Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 62–92

УДК 519.837
ББК 22.18

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СЕТИ С АСИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ

Пин Сунь
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
Елена М. Парилина*
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
Школа математики и статистики, Университет Циндао;
Институт прикладной математики провинции Шаньдун
266071, Циндао, Китай
e-mail: sunping920925@163.com, e.parilina@spbu.ru

В работе предлагается модель формирования сети, построенная с использованием теории стохастических игр со случайной продолжительностью. Изначально лидер предлагает игрокам совместный проект в виде сети. Впоследствии у игроков есть возможность формировать новые связи друг с другом, обновляя предложенную лидером сеть. Выигрыш игрока на каждом шаге зависит от сетевой структуры. Также предполагается, что формирование связи, предложенной игроками, случайно. Также случайной является продолжительность игры. В результате действий игроков и реализации случайных величин образуется сеть. В работе рассматривается кооперативный подход к формированию сети, а в качестве кооперативного

* Работа поддержана грантом провинции Шаньдун (Shandong Province) “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

решения используется CIS-значение. Получена рекуррентная формула для его вычисления в любой подыгре. В работе также исследуется динамическая устойчивость выбранного кооперативного решения. Теоретические результаты демонстрируются на численном примере.

Ключевые слова: формирование сети, стохастическая игра, динамическая устойчивость, CIS-значение.

Поступила в редакцию: 20.11.20 *После доработки*: 08.12.20 *Принята к публикации*: 10.12.20

1. Введение

Социальные сети присутствуют как в повседневной жизни, так и в экономическом сообществе и во многих других сферах деятельности человека. Таким образом, задачи идентификации структуры сети социальных коммуникаций и моделирования процесса формирования сети в динамике становятся актуальными. В последние годы модели динамического формирования сетей привлекают все больше внимание исследователей в теории игр. Существует множество подходов к моделированию процесса формирования сети. В статье [7] предложена игровая модель формирования сети, описывается процесс формирования с использованием теории кооперативных игр с коммуникативными структурами. В работе [10] определяется сеть, равновесная по Нэшу, а также процесс ее динамического формирования, доказывается, что сети Нэша имеют особые структуры, такие как звезда или колесо. В работе [17] предложена модель динамического формирования сети, в которой характеризуется множество стабильных сетей. В статье [30] моделируется процесс формирования сети с неоднородным множеством игроков и асимметричной информацией. В работе [5] рассматриваются многошаговые сетевые игры с полной информацией, в которых игроки могут изменять структуру сети на каждом этапе, и предлагается метод нахождения оптимального поведения игроков в играх этого типа. В статьях [6,13] игроки на первом шаге формируют сеть, а на втором — выбирают стратегии и получают выигрыши, которые зависят от сформированной ими сети. Хочется отметить также книгу [2], в которой описано множество моделей сетевых игр, в том числе, связанных с формированием сетей. При сформированной сетевой структуре актуальная задача разбиения сети на сообщества также может быть решена с использованием теории кооперативных игр [9]. Наличие сетевой структуры влияет на поведение игроков в равновесии, пример такой динамической игры на энергетическом рынке предложен в работе [16].

Также полезно учитывать случайные факторы, которые влияют на процесс формирования сети, особенно, если он изучается в динамике. Случайные факторы могут описывать неопределенность, связанную с продолжительностью игры (см. [15] для справки по кооперативным динамическим играм со случайной продолжительностью, а также [25]), с реализацией выбранных игроками стратегий, следует учитывать случайные ходы природы (или шоки) и т.п. (см. [19], где исследуются многокритериальные динамические игры со случайными ходами, а также [14], где находится решение повторяющейся сетевой игры при наличии случайных факторов). Л. Шепли в работе [29] ввел определение стохастической игры и доказал существование значения игры бесконечной продолжительности с нулевой суммой. В статье [27] авторы исследовали и синтезировали модели формирования сети на основе случайных графов и случайных процессов, уделяя особое внимание влиянию гомофильных связей на структуру сети. В работе [18] рассматривается динамический процесс формирования сети предполагая «слепую» корректировку формирования сети с учетом свойства близорукости и анализируется набор стохастически стабильных сетей.

Пользуясь методом построения кооперативной стохастической игры, изложенным в [21,22,24], мы определяем специальную стохастическую игру формирования сети со случайной продолжительностью. Хочется отметить, что случайность в формировании сети исходит от двух источников. С одной стороны, связи между игроками формируются с некоторой заданной вероятностью, когда игроки выбирают свои стратегии. С другой стороны, продолжительность игры случайна, но при этом конечна. Игра может закончиться на любом шаге в соответствии с заданным распределением вероятностей. Мы изучаем динамическую устойчивость решения кооперативной стохастической игры формирования сети и предлагаем пример решения игры четырех лиц, демонстрирующий теоретические результаты.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 описывается модель формирования сети. Стохастическая игра формирования сети представляется в виде игры на графе в разделе 3. Основные функциональные уравнения для вычисления ожидаемых выигрышей игроков приводятся в разделе 4. Кооперативный подход к формированию сети описан в разделе 5, где также получены формулы для вычисления CIS-значения, описаны условия его естественной динамической устойчивости и получены формулы для построения процедуры его распределения для удовлетворения свойства динамической устойчивости. Пример игры четырех лиц представлен в разделе 6.

2. Модель

В этом разделе мы сначала введем основные определения, которые необходимы для построения модели, а затем опишем стохастическую игру формирования сети.

2.1. Основные определения

Пусть задано множество игроков $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 3$. Предположим, что один из игроков является лидером, пусть это будет игрок 1. Множество N представляет объединение двух множеств или двух типов I_0 и I_1 игроков, где $I_0 \cup I_1 = N$, $I_0 \cap I_1 = \varnothing$. Коммуникационная структура, определенная на множестве N, задана сетью (N, g), где $g \subseteq G = \{ij \mid i, j \in N, i \neq j\}$ — множество неориентированных ребер. Для упрощения обозначений будем писать g, когда будем говорить о сети (N, g).

В сети g последовательность различных игроков $(i_1, \ldots, i_k)$, $k \geq 2$, называется путем от i_1 к i_k, если для всех $h = 1, \ldots, k-1$ имеет место включение: $i_h i_{h+1} \in g$. Длина пути — число ребер в этом пути. Пусть $d_{ij}(g)$ обозначает длину кратчайшего пути между i и j в сети g. Игроки i, j связаны в сети g, что будем обозначать как $i \overset{g}{\longleftrightarrow} j$, если существует путь между этими двумя игроками. Если игроки i и j не связаны в сети g, тогда $d_{ij}(g) := \infty$. В заданной сети g, множество $S \subseteq N$ связано, если для любых игроков $i, j \in S$, игроки i, j связаны. Обозначим через C^g множество коалиций, являющихся максимальными компонентами связности сети g. Пусть $C^g(i)$ — компонента, содержащая игрока i.

Каждый игрок $i \in N$ обладает некоторой информацией, которая оценивается как $v_i \in \mathbb{R}^+$, и это число известно всем игрокам.

Каждый игрок может иметь доступ не только к информации, принадлежащей его соседям, но и игрокам, с которыми он связан путем в сети. Выигрыш игрока $i \in N$ определяется функцией $f_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_i(v_j)$ — выигрыш игрока i от связи (не обязательно прямой) со своим соседом, игроком j. Для любого игрока $i \in N$ функция f_i положительная и неубывающая. Мы также предположим, что происходит потеря информации и выигрыша игрока i от игрока j, если путь содержит более одного ребра, т.е. выигрыш игрока $i \in N$ от игрока j с длиной пути между ними $d_{ij}(g)$ равен $\delta^{d_{ij}(g)-1} f_i(v_j)$, где $\delta \in (0,1)$ — коэффициент затухания. Естественно предположить, что поддержание связей в сети связано с расходами, которые зависят от типов связанных игроков. Как показано в таблице 1, $c_{kt} > 0$ — издержки игрока $i \in I_k$ для поддержания связи ij, $j \in I_t$, где $k, t = 0, 1$. Таким образом, игроки i и j могут иметь различные издержки для поддержания ребра ij.

Таблица 1. Издержки для поддержания связи

	I_0	I_1
I_0	c_{00}	c_{01}
I_1	c_{10}	c_{11}

Выигрыш игрока $i \in I_h$, $h = 0, 1$ в сети g определяется следующим образом:

$$U_i(g) = \sum_{i \overset{g}{\longleftrightarrow} j} \delta^{d_{ij}(g)-1} f_i(v_j) - \sum_{\substack{ij \in g, j \in I_t \\ t=0,1}} c_{ht}, \tag{2.1}$$

что является чистой прибылью, которую игрок i получает в сети g. Определим выигрыш каждого игрока в любой подыгре в следующем разделе.

2.2. Стохастическая игра формирования сети

В этом разделе мы опишем стохастическую модель формирования сети, в рамках которой сеть может обновляться случайным образом по ходу игры. Сначала мы опишем динамический процесс формирования сети, а затем особое внимание уделим описанию двух случайных факторов, учитывающихся в динамике.

2.2.1 Процесс формирования сети

Стохастическая игра формирования сети разыгрывается следующим образом.

Шаг 0 Лидер (игрок 1) выбирает сеть g из множества U_0 (например, он может предложить сеть для выполнения некоторого проекта), где $U_0 = \{g_1, \ldots, g_m\}$, — конечное множество неориентированных сетей, заданных на множестве игроков N.

При выбранной лидером сети g на шаге 0, игрок $i \in I_h$, $h = 0, 1$, получает на этом шаге выигрыш $H_i^0(g)$, $H_i^0(g) : U_0 \to \mathbb{R}$, который равен

$$H_i^0(g) = U_i(g), \tag{2.2}$$

где $U_i(g)$ определяется по формуле (2.1), и является полезностью игрока i в сети g.

По окончании шага 0 сетевая структура в игре остается неизменной, — сеть g. Далее игровой процесс либо заканчивается, либо переходит на следующий шаг 1.

Шаг k $(1 \leq k \leq l)$ Пусть на предыдущем шаге $k-1$ сформирована сеть $g^{'}$ (для шага $k = 1$ таким шагом является 0, и сформированная сеть $g^{'} = g$ — сеть, которая предложена лидером). Каждый игрок имеет возможность предложить новые связи на шаге k.

Игрок $i \in N$ выбирает стратегию $a_i^k \in A_i^k$, где A_i^k — конечное множество стратегий игрока $i \in N$ на шаге k, где стратегия $a_i^k = (a_{i1}^k, \ldots, a_{ii-1}^k, a_{ii+1}^k, \ldots, a_{in}^k)$ удовлетворяет условию:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } i \text{ предлагает связь } j \in N \setminus \{i\}, ij \notin g^{'}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.3}$$

при ограничении

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}^k \leq r_i \leq n-1, \tag{2.4}$$

где утверждается, что игрок $i \in N$ может предложить не более, чем r_i связей на шаге k. Стоит отметить, что игрок не имеет возможности удалять связи. Если $ij \in g^{'}$, тогда обе компоненты a_{ij}^k и a_{ji}^k равны 0, и дуга ij в сети остается неизменной. Также если $ij \notin g^{'}$, то стратегия $a_{ij}^k = 1$ означает, что игрок i предлагает связь игроку j, в противном случае, игрок i не хочет формировать связь с игроком j.

Кроме того, мы предполагаем, что формирование связи является двусторонним, это означает, что неориентированная связь $ij = ji$ может быть сформирована на шаге k только, если $a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1$. Мы предполагаем, что связь ij может быть не сформирована даже, если $a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1$ с некоторой вероятностью. Пусть $G(g^{'}, a^k)$ — множество сетей, которые могут быть сформированы на шаге k, когда реализуется набор стратегий a^k и сеть $g^{'}$ была сформирована на шаге $k-1$. После того, как все игроки выбрали стратегии на шаге k, сеть $g^{'}$ будет изменяться с учетом стратегий игроков и реализацией случайных факторов. В следующем разделе будут подробно описаны случайные компоненты, учитывающиеся в модели.

Функция выигрыша игрока $i \in N$ на шаге k есть $H_i^k(a^k)$: $\prod\limits_{j \in N} A_j^k \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$H_i^k(a_1^k, \ldots, a_n^k) = \max_{\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)} U_i(\bar{g}), \tag{2.5}$$

и это максимальная полезность среди всех возможных сетей, которую игрок может получить на шаге k.

На шаге k формируется сеть $\tilde{g} \in G(g^{'}, a^k)$, и игровой процесс может либо закончиться, либо перейти на шаг $k+1$. Когда $k = l$, то игровой процесс останавливается с вероятностью 1, сформированная сеть $\tilde{g}$ является окончательной.

2.3. Случайные факторы в динамической игре

В этом разделе опишем случайные компоненты в динамике, а именно, продолжительность игры и вероятность успешного формирования связей.

Случайная продолжительность. Продолжительность игры является случайной величиной, которая принимает значения $1, \ldots, l+1$. Пусть заданы вероятности q_t того, что игра закончится на этапе t, $0 \leq q_t < 1$, $t = 0, \ldots, l-1$, $q_l = 1$, и $q_0 \neq 1$ — вероятность того, что игра завершится на шаге 0.

Вероятности $q_t, t = 0, \ldots, l$ — условные вероятности, с помощью которых можно определить дискретное распределение продолжительности игры. Вероятность того, что игра закончится на шаге t, обозначим через P_t, где $P_0 = q_0$, $P_k = (1-q_0) \cdot \ldots \cdot (1-q_{k-1}) \cdot q_k$, $k = 1, \ldots, l$.

Вероятность формирования связи. На шаге $k, 1 \leq k \leq l$, каждый игрок выбирает стратегию, заключающуюся в формировании новых связей, тем самым предлагая изменения в сформированную на предыдущем этапе сеть. Но связь ij такая, что $a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1$, может и не сформироваться, даже если на шаге k оба игрока i и j предлагают связь друг другу. Симметричная матрица P определяет вероятность успешного формирования связи для любого шага k:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

где $0 < p_{ij} = p_{ji} \leq 1$ — вероятность того, что связь $ij, i \neq j$ успешно сформируется.

Считаем заданной функцию вероятности перехода $p(\cdot|g^{'}, a^k) : A^k \to \triangle(G(g^{'}, a^k))$, $a^k \in A^k$, где $\triangle(G(g^{'}, a^k))$ — вероятностное распределение на множестве $G(g^{'}, a^k)$:

$$p(\bar{g}|g^{'}, a^k) \geq 0, \quad \sum_{\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)} p(\bar{g}|g^{'}, a^k) = 1,$$

для любого набора стратегий $a^k \in A^k$. Значение $p(\bar{g}|g^{'}, a^k)$ — вероятность формирования сети $\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)$ из сети $g^{'}$, если набор стратегий a^k реализуется игроками на шаге k.

Как легко заметить, $\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)$ тогда и только тогда, когда $\bar{g} \setminus g^{'} \subseteq \{ij \mid a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1\}$. Обозначим через $g^{'}(a^k)$ сеть, которая формируется из сети $g^{'}$, если все связи из множества $\{ij \mid a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1\}$ успешно реализовались, и $g^{'}(a^k) = g^{'} \cup \{ij | a_{ij}^k = a_{ji}^k = 1\}$. Для любой сети $\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)$, включение $\bar{g} \subseteq g^{'}(a^k) \in G(g^{'}, a^k)$ имеет место. Вероятность $p(\bar{g}|g^{'}, a^k)$ реализации сети $\bar{g} \in G(g^{'}, a^k)$ может быть вычислена по формуле

$$p(\bar{g}|g^{'}, a^k) = \prod_{ij \in \bar{g} \setminus g^{'}} p_{ij} \cdot \prod_{ht \in g^{'}(a^k) \setminus \bar{g}} (1 - p_{ht}). \tag{2.7}$$

Количество связей (дуг) в сети может увеличиваться или оставаться неизменным, поскольку не предполагается удаление дуг, а только их добавление.

Лемма 2.1. *Если неравенство* $\min\limits_{j\in N\setminus\{i\}} \big[(1-\delta)f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$ *справедливо для любого игрока* $i \in I_t$, $t = 0, 1$, *то выигрыш игрока* i *на шаге* k, $H_i^k(a^k)$ *равен*

$$H_i^k(a_1^k, \ldots, a_n^k) = U_i\big(g(a^k)\big), \tag{2.8}$$

где g *— сеть, сформированная на шаге* $k-1$.

Доказательство. Используем метод от противного. Пусть

$$H_i^k(a_1^k, \ldots, a_n^k) \neq U_i\big(g(a^k)\big), \tag{2.9}$$

хотя условие $\min\limits_{j\in N\setminus\{i\}} \big[(1-\delta)f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$ выполнено для любого игрока i.

Так как для любой сети $\bar{g} \in G(g, a^k)$ справедливо $\bar{g} \subseteq g(a^k)$, то должна существовать другая сеть $g^{'} \subset g(a^k)$, $g^{'} \in G(g, a^k)$ такая, что

$$U_i(g^{'}) > U_i\big(g(a^k)\big). \tag{2.10}$$

Пусть $S_i = C^{g(a^k)}(i) \setminus C^{g^{'}}(i)$. Рассмотрим произвольного игрока $j \in C^{g^{'}}(i)$, причем $d_{ij}(g(a^k)) \leq d_{ij}(g^{'})$, так как нет путей меньшей длины между игроком i и j в сети $g(a^k)$, чем в сети $g^{'}$. Таким образом, получаем

$$\delta^{d_{ij}(g^{'})-1} f_i(v_j) \leq \delta^{d_{ij}(g(a^k))-1} f_i(v_j). \tag{2.11}$$

С другой стороны, так как существуют издержки по поддержанию связей в сети, то условие $\min\limits_{j\in N\setminus\{i\}} \big[(1-\delta)f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$ говорит о том, что прямая связь с другими игроками более выгодна игроку i, чем непрямая связь, так как $\{ij \mid ij \in g^{'}\} \subseteq \{ij \mid ij \in g(a^k)\}$, поскольку $g^{'} \subset g(a^k)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
U_i(g^{'}) = &\sum_{\substack{i \xleftrightarrow{g^{'}} j \\ ij \notin g^{'} \\ ij \notin g(a^k)}} \delta^{d_{ij}(g^{'})-1} f_i(v_j) + \sum_{\substack{ij \in g^{'} \\ j \in I_h \\ h=0,1}} (f_i(v_j) - c_{th}) + \sum_{\substack{i \xleftrightarrow{g^{'}} j \\ ij \notin g^{'} \\ ij \in g(a^k)}} \delta^{d_{ij}(g^{'})-1} f_i(v_j) \\
\leq &\sum_{\substack{i \xleftrightarrow{g^{'}} j \\ ij \notin g^{'} \\ ij \notin g(a^k)}} \delta^{d_{ij}(g(a^k))-1} f_i(v_j) + \sum_{\substack{ij \in g^{'} \\ j \in I_h \\ h=0,1}} (f_i(v_j) - c_{th}) + \sum_{\substack{i \xleftrightarrow{g^{'}} j \\ ij \notin g^{'} \\ ij \in g(a^k) \\ j \in I_h, h=0,1}} (f_i(v_j) - c_{th})
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{j \in S_i \\ ij \notin g(a^k)}} \delta^{d_{ij}(g(a^k))-1} f_i(v_j) + \sum_{\substack{ij \in g(a^k) \\ j \in S_i \cap I_h \\ h=0,1}} (f_i(v_j) - c_{th}) = U_i\big(g(a^k)\big),$$

что противоречит предположению. □

Лемма 2.1 утверждает, что когда затраты на поддержание связей достаточно малы, так что прямая прибыль от доступа к информации, которую содержит другой игрок, больше, чем любая непрямая связь, то выигрыш игрока на этом шаге — чистая прибыль, которую он получает в сети, которая формируется при успешной реализации всех предложенных связей (дуг). Это своего рода поощрение или награда игрокам за предложение связей в такой ситуации.

3. Стохастическая игра формирования сети в развернутой форме

Построенная выше стохастическая игра может быть описана как игра, разыгрываемая на конечном древовидном графе. Пусть $\Psi = (Z, L)$ — конечный древовидный граф, где Z — множество вершин дерева, и $L : Z \to Z$ — отображение, определенное на множестве Z, со значениями из множества подмножеств Z (дуги в графе). Обозначим окончательные вершины через $Z^T \subset Z$. Кроме того, $\hat{L}(z)$ — множество вершин поддерева с начальной вершиной z, а отображение L^{-1} определяется как $L^{-1}(y) = \{z | y \in L(z)\}$. Дерево с корнем z_0 обозначим через $\Psi(z_0)$, а $l \geq 2$ — длина наибольшего пути в дереве $\Psi(z_0)$.

Каждой вершине z, кроме начальной z_0, в дереве $\Psi(z_0)$ соответствует определенная сеть, обозначим ее через $g(z)$. С одной стороны, для некоторой вершины $z \in Z \setminus Z^T$, $g(y) \neq g(y^{'})$ для любых $y, y^{'} \in L(z)$. С другой стороны, для данной сети $g(z)$, $z \in Z \setminus Z^T \setminus \{z_0\}$, для любого $g^{'}$ такого, что $g(z) \subseteq g'$, и для любого игрока $i \in N$, $| \; \{ij \mid ij \in g^{'} \setminus g(z)\} \; | \leq r_i$, существует вершина $y \in L(z)$ такая, что $g(y) = g^{'}$.

В каждой вершине $z \in Z$, определена игра в нормальной форме. В начальной вершине z_0 игра в нормальной форме следующая: $\Gamma(z_0) = \langle N, A_1^{z_0}, \ldots, A_n^{z_0}, H_1^{z_0}, \ldots, H_n^{z_0} \rangle$, где $A_1^{z_0} = U_0$, $A_i^{z_0} = \varnothing$ для

$i \neq 1$. Таким образом, в начальной вершине только лидер выбирает стратегию $a_1^{z_0} \in A_1^{z_0}$, предлагая начальную сеть игрокам. Для любой сети $g \in A_1^{z_0}$, существует единственная вершина $y \in L(z_0)$ такая, что $g(y) = g$. Функция выигрыша игрока $i \in N$ в вершине z_0 есть $H_i^{z_0}(a^{z_0}) : A^{z_0} \to \mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$H_i^{z_0}(a^{z_0}) = U_i(a_1^{z_0}). \tag{3.1}$$

Пусть в вершине $z \in L^k(z_0)$, $k = 1, \ldots, l$, задана игра в нормальной форме n лиц, т.е. $\Gamma(z) = \langle N, A_1^z, \ldots, A_n^z, H_1^z, \ldots, H_n^z \rangle$, где A_i^z — конечное множество стратегий игрока $i \in N$ в вершине z, $H_i^z(a_1^z, \ldots, a_n^z) : \prod_{j \in N} A_j^z \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша игрока $i \in N$. При структуре $g(z)$ игрок $i \in N$ выбирает стратегию $a_i^z = (a_{i1}^z, \ldots, a_{ii-1}^z, a_{ii+1}^z, \ldots, a_{in}^z) \in A_i^z$, предлагая связи с другими игроками, где

$$a_{ij}^z = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } i \text{ предлагает связь } j \in N \setminus \{i\}, ij \notin g(z), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{3.2}$$

при условии, что

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}^z \leq r_i \leq n - 1. \tag{3.3}$$

Как упоминалось выше, связь может не сформироваться случайным образом, даже если оба игрока ее предложили. Обозначим через $G_z^{a^z}$ множество всех возможных сетей, которые могут быть сформированы набором стратегий a^z в вершине z. Пусть $g(z, a^z)$ — сеть, которая образуется, если каждая ссылка ij такая, что $a_{ij}^z = a_{ji}^z = 1$, успешно сформирована в вершине z и $g(z, a^z) = g(z) \cup \{ij | a_{ij}^z = a_{ji}^z = 1\}$. Функция выигрыша игрока $i \in N$ в игре $\Gamma(z), z \in Z \setminus \{z_0\}$, $H_i^z : \prod\limits_{j \in N} A_j^z \to \mathbb{R}$ есть

$$H_i^z(a_1^z, \ldots, a_n^z) = \max_{g \in G_z^{a^z}} U_i(g). \tag{3.4}$$

Определим функцию вероятностей перехода $p(\cdot | z, a^z)$: $A^z \to \triangle(L(z))$, $z \in Z \setminus Z^T, a^z \in A^z$, где $\triangle(L(z))$ — распределение вероятностей на множестве $L(z)$, следующим образом:

$$p(y | z, a^z) \geq 0, \quad \sum_{y \in L(z)} p(y | z, a^z) = 1,$$

для любого набора стратегий $a^z \in A^z$. Значение $p(y|z, a^z)$ — вероятность перехода в вершину $y \in L(z)$ дерева $\Psi(z_0)$, следующую за вершиной z, если набор стратегий a^z реализован в вершине z. Для вершины $z \in Z \setminus Z^T \setminus \{z_0\}$ это вероятность перехода в сеть $g(y)$ из сети $g(z)$ при наборе стратегий a^z, т. е. $p(y|z, a^z) = p(g(y)|g(z), a^z)$. Для начальной вершины z_0 положим $p(y|z_0, a_1^{z_0}) = 1$, если сеть $a_1^{z_0}$ предложена лидером в z_0, где $g(y) = a_1^{z_0}$.

Определение 3.1. *Стохастическая игра $G(z_0)$ формирования сети, заданная на графе $\Psi(z_0)$, задается набором*

$$G(z_0) = \langle N, \Psi(z_0), \{\Gamma(z)\}_{z \in Z}, \{q_k\}_{k=0}^{l}, \{p(\cdot|z, a^z)\}_{z \in Z \setminus Z^T, a^z \in A^z} \rangle.$$

Стохастическая игра $G(z_0)$ происходит следующим образом:

1. В корневой вершине z_0 разыгрывается игра в нормальной форме $\Gamma(z_0)$. Предположим, выбран набор стратегий a^{z_0}. Каждый игрок $i \in N$ получает выигрыш $H_i^{z_0}(a^{z_0})$, который равен чистой прибыли, которую игрок i получает в сети $a_1^{z_0}$. Игра $\Gamma(z_0)$ завершается формированием сети $a_1^{z_0}$. Стохастическая игра $\Gamma(z_0)$ либо заканчивается с вероятностью q_0, либо продолжается с вероятностью $1-q_0$ и переходит в вершину $z_1 \in L(z_0)$, где $g(z_1) = a_1^{z_0}$.

2. На шаге k игровой процесс находится в вершине $z_k \in Z$ после того, как игра $\Gamma(z_{k-1})$ закончилась формированием сети $g(z_k) \in G_{z_{k-1}}^{a^{z_{k-1}}}$, а игра в нормальной форме $\Gamma(z_k)$ разыгрывается в z_k. Пусть в этой игре реализуется набор стратегий $a^{z_k} \in A^{z_k}$, и каждый игрок $i \in N$ получает выигрыш $H_i^{z_k}(a^{z_k})$, определяемый формулой (3.4). Игра $G(z_0)$ либо завершается с вероятностью q_k, либо продолжается с вероятностью $1 - q_k$ и переходит в вершину $z_{k+1} \in L(z_k)$ с вероятностью $p(z_{k+1}|z_k, a^{z_k})$.

   В случае, когда множество $L(z_k)$ пусто, игра заканчивается в вершине z_k с вероятностью 1 с формированием сети $\bar{g} \in G_{z_k}^{a^{z_k}}$.

3. Стохастический игровой процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута конечная вершина, либо он может закончиться с вероятностями $q_0, \ldots, q_l$ на соответствующем шаге.

Обозначим через $G(z_k)$ подыгру игры $G(z_0)$, начинающуюся в вершине $z_k \in Z$ дерева $\Psi(z_0)$ (начиная с игры $\Gamma(z_k)$), которая также является стохастической игрой со случайной продолжительностью. Подыгра $G(z_k)$ определена на поддереве $\Psi(z_k)$ с множеством вершин $\hat{L}(z_k) \subset Z$ и задается пятью элементами:

$$G(z_k) = \langle N, \Psi(z_k), \big\{\Gamma(z)\big\}_{z\in\hat{L}(z_k)}, \{q_s\}_{s=k}^{l}, \big\{p(\cdot|z,a^z)\big\}_{z\in\hat{L}(z_k)\setminus Z^T, a^z\in A^z}\rangle.$$

Определим класс стратегий в стохастической игре. Обозначим через $\varphi_i : Z \times \Theta \to \prod\limits_{z\in Z} \triangle(A_i^z)$ стратегию поведения игрока $i \in N$ в игре $G(z_0)$, где Θ — набор историй всех вершин. Под историей вершины z мы понимаем набор стратегий игроков, реализованных на пути из z_0 в z. Обозначим через $\triangle(A_i^z)$ множество смешанных стратегий игрока i в вершине $z \in Z$. Ситуация в стохастической игре $G(z_0)$ — набор стратегий игроков $\varphi = (\varphi_i : i \in N)$. Обозначим через $\sum_i$ множество стратегий поведения игрока i в игре $G(z_0)$. Очевидно, что сужение стратегии φ_i на поддерево $\Psi(z_k)$ является стратегией в подыгре $G(z_k)$. Обозначим сужение стратегии через $\varphi_i^{z_k}$.

4. Функциональные уравнения для ожидаемых выигрышей

Пусть игрок i, $i \in N$ реализует стратегию φ_i в игре $G(z_0)$. Определим выигрыш игрока i как математическое ожидание его выигрыша с учетом случайной продолжительности игры, и для реализованного пути z_0, $z_1 \in L(z_0)$, $z_2 \in L(z_1)$, …, $z_l \in L(z_{l-1})$, $L(z_l) = \varnothing$, этот выигрыш равен

$$E_i(z_0,\varphi) = \sum_{k=0}^{l} P_k \sum_{j=0}^{k} H_i^{z_j}(a^{z_j}) = \sum_{k=0}^{l} q_k \Big(\prod_{j=0}^{k-1}(1-q_j)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{k} H_i^{z_m}(a^{z_m})\Big), \tag{4.1}$$

где $a^{z_0} = a_1^{z_0} \in A^{z_0} = A_1^{z_0}$, $a^{z_1} \in A^{z_1}$, …, $a^{z_l} \in A^{z_l}$ — последовательность реализованных наборов стратегий, когда игроки разыгрывают стратегии $(\varphi_i, i \in N)$.

Поскольку переходы от вершин к следующим вершинам являются случайными, мы считаем математическое ожидание выигрыша игроков относительно этих случайных переходов как их выигрыши в стохастической игре. Рекуррентное уравнение для математического ожидания имеет вид:

$$E_i(z_0,\varphi) = q_0 H_i^{z_0}(a^{z_0}) + (1-q_0)\Big(H_i^{z_0}(a^{z_0}) + \sum_{y\in L(z_0)} p(y|z_0,a^{z_0})E_i(y,\varphi^y)\Big)$$
$$= U_i(a_1^{z_0}) + (1-q_0)E_i(y,\varphi^y), \tag{4.2}$$

где $E_i(y,\varphi^y)$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре $G(y)$, $y\in L(z_0)$, $g(y)=a_1^{z_0}$.

Предположим, что $z\in L^k(z_0)$, $k\geq 1$, т.е. игровой процесс находится в вершине z на шаге k, тогда математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре $G(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$E_i(z,\varphi^z) = q_k H_i^{z}(a^{z}) + (1-q_k)\Big(H_i^{z}(a^{z}) + \sum_{y\in L(z)} p(y|z,a^{z})E_i(y,\varphi^y)\Big)$$
$$= \max_{g\in G_z^{a^z}} U_i(g) + (1-q_k)\sum_{y\in L(z)} p(y|z,a^z)E_i(y,\varphi^y). \tag{4.3}$$

В следующем разделе перейдем к построению кооперативного варианта вышеописанной игры, а именно, будем рассматривать кооперативный подход к формированию сети.

5. Кооперативная стохастическая игра формирования сети

5.1. Определение характеристической функции

Для определения кооперативного варианта игры необходимо определить набор кооперативных стратегий, реализация которого определяет так называемый «кооперативный путь» (один из кооперативных путей, если их несколько), то есть путь который максимизирует общий выигрыш игроков. В случае стохастической игры это поддерево с заданными вероятностями перехода, на котором достигается максимум математического ожидания суммарного выигрыша игроков. Этот максимум достигается на множестве чистых стратегий, исходя из определения функций выигрышей игроков и того, что множество ситуаций в смешанных стратегиях — многогранник с вершинами, которые представляют ситуации в чистых стратегиях. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением класса чистых стратегий, чтобы найти набор кооперативных стратегий в стохастической игре.

Обозначим через $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ набор чистых стратегий в игре $G(z_0)$, который максимизирует суммарный ожидаемый выигрыш игроков:

$$V(N, z_0) = \max_{\varphi \in \sum} \Big[\sum_{i \in N} E_i(z_0, \varphi) \Big] = \sum_{i \in N} E_i(z_0, \bar{\varphi}).$$

Назовем такой набор стратегий кооперативным и обозначим через $\bar{\varphi}$, причем $\bar{\varphi}_i(z) = \bar{a}_i^z$, $i \in N$, $z \in Z$.

Для построения кооперативного варианта игры необходимо определить характеристическую функцию для любой подыгры $G(z), z \in Z$, которую обозначим через (S, z), $S \subset N$. Существует множество подходов к определению характеристических функций в динамических и стохастических играх [1,8,11,23,26,28]. Мы используем так называемый α-подход, согласно которому $v(S, z)$ есть *максиминное* значение игры с нулевой суммой между коалицией S и $N \setminus S$ [20].

Сначала рассмотрим коалицию $S = N$ и запишем уравнение Беллмана для $v(N, z_0)$:

$$\begin{aligned} v(N, z_0) &= \max_{a_1^{z_0} \in A_1^{z_0}} \Big[\sum_{i \in N} H_i^{z_0}(a^{z_0}) + (1 - q_0) \sum_{y \in L(z_0)} p(y \mid z_0, a^{z_0}) v(N, y) \Big] \\ &= \sum_{i \in N} U_i(\bar{a}_1^{z_0}) + (1 - q_0) v(N, y'), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $y' \in L(z_0)$, $g(y') = \bar{a}_1^{z_0}$ и граничное условие

$$v(N, z) = \max_{a_i^z \in A_i^z, i \in N} \sum_{i \in N} H_i^z(a^z) = \sum_{i \in N} \max_{\bar{g} \in G_z^{\bar{a}^z}} U_i(\bar{g}) \tag{5.2}$$

для всех $z \in Z^T$.

Теперь рассмотрим вершины $z \in L^k(z_0)$. Характеристическая функция для игры $G(z)$, $z \in Z$, удовлетворяет рекуррентному уравнению:

$$\begin{aligned} v(N, z) &= \max_{a_i^z \in A_i^z, i \in N} \Big[\sum_{i \in N} H_i^z(a^z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, a^z) v(N, y) \Big] \\ &= \sum_{i \in N} \max_{\bar{g} \in G_z^{\bar{a}^z}} U_i(\bar{g}) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z) v(N, y) \end{aligned} \tag{5.3}$$

с граничным условием (5.2) для $z' \in Z^T \cap \hat{L}(z)$.

Набор стратегий $(\bar{\varphi}_i : i \in N)$ в игре $G(z_0)$ генерирует вероятностное распределение на множестве Z вершин дерева $\Phi(z_0)$.

Определение 5.1. *Подграф графа $\Phi(z_0)$, который состоит из вершин $z \in Z$, имеющих положительную вероятность реализации при разыгрывании кооперативного набора стратегий $\bar{\varphi}$, будем называть кооперативным поддеревом и обозначать $\bar{\Phi}(z_0)$.*

Множество вершин в графе $\bar{\Phi}(z_0)$ обозначим через $CZ \subseteq Z$. Учитывая случайные факторы в игре, может реализоваться несколько сетей с положительными вероятностями при реализации набора кооперативных стратегий. Обозначим единственный путь от z_0 до $z \in CZ \cap Z^T$ через $P(z_0, z) = (z_0, z_1, \cdots, z_{l-1}, z)$, где $g(z_1) = \bar{a}_1^{z_0}$, $z_1 \in L(z_0)$. Среди всех путей $P(z_0, z)$, $z \in CZ \cap Z^T$, вероятность реализации этого пути $P(z_0, z)$ равна

$$p(z_0, z) = p(z \mid z_{l-1}, \bar{a}^{z_{l-1}}) \cdot \prod_{k=1}^{l-2} p(z_{k+1} \mid z_k, \bar{a}^{z_k}).$$

Следовательно, вероятность формирования сети g в игре $\bar{G}(z_0)$ при кооперативном подходе есть

$$p(g) = \sum_{z \in CZ \cap Z^T} p(z_0, z) \cdot p(g | g(z), \bar{a}^z).$$

Пусть $W(z_0) = \{g \in G \mid p(g) > 0\}$ — множество сетей, которые могут быть реализованы с положительными вероятностями при кооперации в игре $\bar{G}(z_0)$. Определим сеть, которая наиболее вероятно образуется при кооперации.

Определение 5.2. *Сеть $g^{'}$ называется выигрышной в кооперативной стохастической игре $\bar{G}(z_0)$ формирования сети, если $p(g^{'}) = \max\limits_{g \in W(z_0)} p(g)$.*

Выигрышная сеть всегда существует в игре $\bar{G}(z_0)$, но не всегда единственна. Обозначим множество выигрышных сетей в игре $\bar{G}(z_0)$ через $\bar{W}(z_0)$.

Для каждой вершины $z \in CZ$ определим характеристическую функцию $v(S, z)$, $S \subset N$, $S \neq N$. Так как в начальной вершине z_0 только лидер выбирает стратегию, то функция $v(S, z_0)$ удовлетворяет уравнению

$$v(S,z_0)=\begin{cases}\max\limits_{a_1^{z_0}\in A_1^{z_0}}\Big[\sum\limits_{i\in S}U_i(a_1^{z_0})+(1-q_0)v(S,y)\Big] & 1\in S,\\ \min\limits_{a_1^{z_0}\in A_1^{z_0}}\Big[\sum\limits_{i\in S}U_i(a_1^{z_0})+(1-q_0)v(S,y)\Big] & 1\notin S,\end{cases} \tag{5.4}$$

где $g(y)=a_1^{z_0}$. Для любой вершины $z\in CZ\setminus\{z_0\}$, $V(S,z)$ имеем

$$\begin{aligned} v(S,z)=\max_{a_S^z\in A_S^z}\min_{a_{N\setminus S}^z\in A_{N\setminus S}^z}\Big[\sum_{i\in S}\max_{\bar g\in G_z^{(a_S^z,a_{N\setminus S}^z)}}U_i(\bar g)\\ +(1-q_k)\sum_{y\in L(z)}p\Big(y\mid z,(a_S^z,a_{N\setminus S}^z)\Big)v(S,y)\Big]\end{aligned} \tag{5.5}$$

с граничным условием

$$v(S,z)=\max_{a_S^z\in A_S^z}\min_{a_{N\setminus S}^z\in A_{N\setminus S}^z}\sum_{i\in S}\max_{\bar g\in G_z^{(a_S^z,a_{N\setminus S}^z)}}U_i(\bar g) \tag{5.6}$$

для $z\in Z^T$, где $A_S^z=\prod\limits_{i\in S}A_i^z$, $A_{N\setminus S}^z=\prod\limits_{j\in N\setminus S}A_j^z$.

Для всех $z\in CZ$ естественно предположить, что $v(\varnothing,z)=0$. При выполнении определенных условий на издержки $c_{th},t,h=0,1$, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *Если для любого игрока $i\in I_t$, $t=0,1$, выполнено неравенство $\min\limits_{j\in N\setminus\{i\}}\big[(1-\delta)f_i(v_j)\big]\geq\max\{c_{t0},c_{t1}\}$, тогда для любой коалиции $S\subset N$ и вершины $z\in CZ\setminus\{z_0\}$, уравнение для характеристической функции $v(S,z)$ примет вид:*

$$\begin{aligned} v(S,z)=\sum_{i\in S}U_i\Big(g\big(z,(\tilde a_S^z,\tilde a_{N\setminus S}^z)\big)\Big)\\ +(1-q_k)\sum_{y\in L(z)}p\Big(y\mid z,(\tilde a_S^z,\tilde a_{N\setminus S}^z)\Big)v(S,y)\end{aligned} \tag{5.7}$$

с граничным условием

$$v(S,z)=\sum_{i\in S}U_i\Big(g\big(z,(\tilde a_S^z,\tilde a_{N\setminus S}^z)\big)\Big) \tag{5.8}$$

для $z\in Z^T$, где $\tilde a_i^z=(0,\ldots,0)$, для $i\in N\setminus S$; $\tilde a_{jk}^z=0$, для $j\in S$, $k\in N\setminus S$; $\sum\limits_{k\in S}\tilde a_{jk}^z=\min\{r_j,|\,\{i\in S\mid ji\notin g(z)\}\,|\}$ для $j\in S$.

Доказательство. Основная идея этого утверждения заключается в том, что при определенных условиях на затраты, игроки из коалиции $N \setminus S$ не образуют связи ни с одним игроком, чтобы минимизировать общий выигрыш коалиции S, в то же время игроки из коалиции S образуют как можно больше связей друг с другом при существующих ограничениях, чтобы максимизировать свои выигрыши.

Действительно, при выполнении условия утверждения, каждая связь в сети, прямая или косвенная, выгодна игроку $i \in I_t$, пока выполняется условие $\min\limits_{j \in N \setminus \{i\}} \big[(1-\delta) f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$. Таким образом, с одной стороны, чтобы минимизировать выигрыш коалиции S, выбирается стратегия $\tilde{a}_i^z = (0, \dots, 0)$ любым игроком $i \in N \setminus S$, и $\tilde{a}_{jk}^z = 0$ любым игроком $j \in S$, $k \in N \setminus S$ из-за двустороннего формирования связей. С другой стороны, чтобы максимизировать общий выигрыш, игроки из коалиции S образуют как можно больше связей друг с другом при существующих ограничениях, тогда для каждого игрока $j \in S$, $\sum\limits_{k \in S} \tilde{a}_{jk}^z = \min\{r_j, |\ \{i \in S \mid ji \notin g(z)\}\ |\}$. $\square$

Отметим, что функция $v(S, z)$, определенная формулами (5.7) и (5.8), является супераддитивной по S, т.е. для любой вершины $z \in CZ$ и любых двух коалиций $S, P \subset N$, $S \cap P = \varnothing$, имеет место неравенство
$$v(S \cup P, z) \geq v(S, z) + v(P, z). \tag{5.9}$$

5.2. CIS-значение кооперативной стохастической игры

Определим дележ в кооперативной стохастической игре формирования сети, используя построенную выше характеристическую функцию.

Определение 5.3. *Дележом в кооперативной стохастической подыгре формирования сети $\bar{G}(z)$, $z \in CZ$, называется вектор $\xi(z) = (\xi_1(z), \dots, \xi_n(z))$, удовлетворяющий свойствам:*

1. *Эффективность:* $\sum\limits_{i \in N} \xi_i(z) = v(N, z)$.

2. *Индивидуальная рациональность:* $\xi_i(z) \geq v(\{i\}, z)$ *для всех* $i \in N$.

Множество дележей в стохастической подыгре $\bar{G}(z)$, $z \in CZ$, есть $I(z)$. В качестве решения кооперативной стохастической игры будем рассматривать CIS-значение [12], являющееся дележом. В кооперативной подыгре $\bar{G}(z), z \in CZ$, его компонента для игрока $i \in N$ вычисляется по формуле

$$CIS_i(z) = v(\{i\}, z) + \frac{v(N,z) - \sum\limits_{j \in N} v(\{j\}, z)}{n}. \qquad (5.10)$$

Следующие два утверждения дают выражения для вычисления CIS-значения в игре (любой подыгре) $\bar{G}(z), z \in CZ$, когда затраты на поддержание связей удовлетворяют определенным условиям.

Утверждение 5.2. *Для любой вершины $z \in CZ \cap Z^T$, если условие $\min\limits_{j \in N \setminus \{i\}} \big[(1-\delta) f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$ выполнено для любого игрока $i \in I_t$, $t = 0, 1$, тогда компонента игрока $i \in N$ CIS-значения в кооперативной подыгре $\bar{G}(z)$ вычисляется по формуле*

$$CIS_i(z) = U_i(g(z)) + \frac{1}{n} \sum_{j \in N} D_j(z), \qquad (5.11)$$

где $D_j(z) = U_j\big(g(z, \bar{a}^z)\big) - U_j(g(z))$ — разность полезностей игрока $j \in N$ в сетях $g(z, \bar{a}^z)$ и $g(z)$.

Доказательство. Из условия (5.8) следует, что

$$v(\{i\}, z) = U_i(g(z)), \qquad (5.12)$$

для любого игрока $i \in N$. Из Леммы 2.1 следует, что $K_i^z(\bar{a}^z) = U_i(g(z, \bar{a}^z))$ для любого игрока $i \in N$. Таким образом,

$$v(N, z) = \sum_{i \in N} U_i(g(z, \bar{a}^z)), \qquad (5.13)$$

Из (5.10), (5.12) и (5.13) следует формула (5.11). □

Утверждение 5.3. *Для любой вершины $z \in CZ \cap L^k(z_0)$, где $k = 0, 1, \ldots, l-1$, если условие $\min\limits_{j \in N \setminus \{i\}} \big[(1-\delta) f_i(v_j)\big] \geq \max\{c_{t0}, c_{t1}\}$ выполнено для любого игрока $i \in I_t$, $t = 0, 1$, тогда компонента игрока*

$i \in N$ CIS-значения в кооперативной подыгре $\bar{G}(z)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} CIS_i(z) = &\Big[1 + \sum_{r=k}^{l-1} \prod_{c=k}^{r} (1 - q_c)\Big] U_i(g(z)) \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \Big[D_i(z) - \sum_{r=k}^{l-1} \prod_{c=k}^{r} (1 - q_c) U_i(g(z)) \\ &+ \sum_{t=1}^{l-k} \sum_{z' \in CZ \cap L^t(z)} \prod_{c=k}^{k+t-1} (1 - q_c) p(z, z') U_i\big(g(z', \bar{a}^{z'})\big)\Big]. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Доказательство. Из условий (5.7) и (5.8) следует, что для любой вершины $z \in L^k(z_0)$ справедливо:

$$v(\{i\}, z) = U_i(g(z)) + (1 - q_k) v\big(\{i\}, y\big)$$

где $y \in L(z)$ и $g(y) = g(z)$, и граничное условие примет вид:

$$v(\{i\}, y) = U_i(g(y))$$

для $y \in Z^T$. Объединяя два условия, получаем

$$v(\{i\}, z) = \Big[1 + \sum_{r=k}^{l-1} \prod_{c=k}^{r} (1 - q_c)\Big] U_i(g(z)) \tag{5.15}$$

для любой вершины $z \in CZ \cap L^k(z_0)$.

Также из формул (5.15) и (5.3) следует

$$\begin{aligned} v(N, z) = \sum_{i \in N} &\Big[U_i(g(z, \bar{a}^z)) \\ &+ \sum_{t=1}^{l-k} \sum_{z' \in CZ \cap L^t(z)} \prod_{c=k}^{k+t-1} (1 - q_c) p(z, z') U_i(g(z', \bar{a}^{z'}))\Big]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

для всех $z \in CZ \cap L^k(z_0)$. После подстановки выражений (5.15) и (5.16) в формулу (5.10) нетрудно получить выражение (5.14). □

5.3. Динамическая устойчивость CIS-значения

Если игроки договариваются о сотрудничестве, то они рассчитывают получить дележ $\xi(z_0) \in C(z_0)$. Игровой процесс развивается вдоль вершин кооперативного поддерева $\bar{\Phi}(z_0)$. Игроки попадают в текущие подыгры с текущими начальными состояниями. Сила игроков также меняется в динамике. Было бы разумным потребовать выполнения устойчивости метода распределения выигрышей в каждой подыгре. Т.е. если в начале игры было выбрано CIS-значение в качестве решения кооперативной игры, то и в любой промежуточной вершине игроки будут ожидать получение компонент CIS-значения, рассчитанного для текущей подыгры. В противном случае, нарушается динамическая устойчивость или состоятельность кооперативного решения [3]. Определим условие естественной динамической устойчивости дележа.

Определение 5.4. *Дележ $\xi(z_0) \in C(z_0)$ называется естественно динамически устойчивым в кооперативной стохастической игре $\bar{G}(z_0)$ формирования сети, если в любой вершине $z \in CZ \cap L^k(z_0)$ выполняется условие*

$$\xi_i(z) = H_i^z(\bar{a}^z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z) \xi_i(y), \tag{5.17}$$

где $\xi_i(z)$ — дележ, вычисленный в подыгре, начинающейся из вершины z, а также

$$\xi_i(z) = H_i^z(\bar{a}^z) \tag{5.18}$$

в любой терминальной вершине $z \in Z^T$.

В определении 5.4 условие (5.17) означает, что если игрок суммирует свой текущий выигрыш в игре с ожидаемой компонентой дележа, то в сумме он в точности получит компоненту дележа в текущей подыгре. Все дележи являются одними и теми же решениями, рассчитанными для разных подыгр. В нашем случае, это будет CIS-значение, вычисленное для всех вершин кооперативного поддерева.

Очевидно, что условие (5.17) выполняется крайне редко в стохастических играх. Идея перераспределения выплат игрокам в каждой реализовавшейся вершине поможет решить проблему естественно динамически неустойчивых решений. Таким образом, мы приходим к необходимости переопределения выплат игрокам, а именно к определению так называемой процедуры распределения дележа или в нашем случае, CIS-значения.

5.4. Процедура распределения CIS-значения

В этом разделе определим процедуру распределения [4] CIS-значения, согласно которой будут производиться выплаты игрокам в каждой вершине кооперативного поддерева $\bar{\Phi}(z_0)$, чтобы удовлетворить условие динамической устойчивости CIS-значения.

Реализуя набор кооперативных стратегий, игроки получают выплаты в каждой появившейся вершине $z \in CZ \cap L^k(z_0)$, пусть выплата игроку $i \in N$ в этой вершине будет равна $\beta_i(z)$. Обозначим через $B_i(z)$ математическое ожидание этих выплат, оно удовлетворяет рекуррентному уравнению:

$$B_i(z) = \beta_i(z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z) B_i(y) \tag{5.19}$$

с граничным условием

$$B_i(z) = \beta_i(z) \tag{5.20}$$

для $z \in Z^T$.

Определение 5.5. *Пусть $\xi(z_0) = (\xi_1(z_0), \ldots, \xi_n(z_0))$ — дележ в кооперативной стохастической игре. Множество векторов $\{\beta(z) = (\beta_1(z), \ldots, \beta_n(z)) : z \in CZ\}$ называется процедурой распределения дележа $\xi(z_0)$, если выполнены условия:*

1. *В любой вершине $z \in CZ$:*

$$\sum_{i \in N} \beta_i(z) = \sum_{i \in N} H_i^z(\bar{a}^z). \tag{5.21}$$

2. *Для любого i компонента $\xi_i(z_0)$ совпадает с математическим ожиданием выплат игроку i в кооперативной стохастической игре с учетом вероятностей перехода и случайного окончания игры, т. е. $\xi_i(z_0) = B_i(z_0)$, где $B_i(z_0)$ удовлетворяет функциональному уравнению (5.19) с граничным условием (5.20).*

Определение 5.6. *Будем называть дележ $\xi(z_0)$ динамически устойчивым в кооперативной стохастической игре формирования сети $\bar{G}(z_0)$, если существует процедура распределения $\beta(z) = (\beta_i(z) : i \in N)$ такая, что для любой вершины $z \in CZ \cap L^k(z_0)$ выполняется*

$$\xi_i(z) = \beta_i(z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z)\xi_i(y), \tag{5.22}$$

и для всех $z \in Z^T$ имеет место равенство:

$$\xi_i(z) = \beta_i(z). \tag{5.23}$$

Следующая теорема дает метод построения процедуры распределения дележа $\xi(z_0)$, которая гарантирует его динамическую устойчивость.

Теорема 5.1. *Пусть $\xi(z_0)$ — решение кооперативной стохастической игры $\bar{G}(z_0)$, и $\xi(z)$, $z \in CZ \cap L^k(z_0)$, — то же решение, рассчитанное для кооперативной стохастической подыгры. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Набор векторов, рассчитанный по формуле*

$$\beta_i(z) = \xi_i(z) - (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z)\xi_i(y) \tag{5.24}$$

   для всех $z \in CZ \setminus Z^T$, и $\beta_i(z) = \xi_i(z)$ для $z \in CZ \cap Z^T$ является процедурой распределения решения $\xi(z_0)$.
2. *Если выплаты игрокам в игре $\bar{G}(z_0)$ производятся в соответствии с функцией $\beta_i(z)$, определенной в предыдущем пункте, то $\xi(z_0)$ является динамически устойчивым решением в стохастической игре $\bar{G}(z_0)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что определенный таким образом набор векторов $(\beta_i(z) : i \in N, z \in CZ)$ является процедурой распределения решения $\xi(z_0)$. Покажем выполнение условия (5.21) из определения 5.5 для всех $z \in CZ \setminus Z^T$,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} \beta_i(z) =& \sum_{i \in N} \xi_i(z) - (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z)\big[\sum_{i \in N} \xi_i(y)\big] \\ =& v(N, z) - (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y \mid z, \bar{a}^z) v(N, y) = \sum_{i \in N} H_i^z(\bar{a}^z).\end{aligned}$$

Для всех $z \in Z^T$ это условие очевидным образом выполняется:

$$\sum_{i\in N}\beta_i(z)=\sum_{i\in N}\xi_i(z)=v(N,z)=\sum_{i\in N}H_i^z(\bar a^z).$$

Проверим второе условие определения 5.5. Вычислим $B_i(z)$ по формуле (5.19) и получим для каждого игрока $i \in N$ и любой вершины $z \in CZ \cap L^{l-1}(z_0)$:

$$\begin{aligned}B_i(z)=\xi_i(z)-(1-q_{l-1})&\sum_{y\in L(z)}p(y\mid z,\bar a^z)\xi_i(y)\\+(1-q_{l-1})\sum_{y\in L(z)}&p(y\mid z,\bar a^z)B_i(y)=\xi_i(z),\end{aligned}$$

так как $y \in Z^T$, мы получаем, что $B_i(z)=\xi_i(z)$ для всех $z \in CZ \cap L^{l-1}(z_0)$. Двигаясь от терминальных вершин к начальной, мы доказали выполнение условия 2 определения 5.5.

Второй пункт теоремы выполнен по построению $\beta(z)$. □

6. Пример

Рассмотрим игру четырех лиц. Пусть имеется разбиение игроков на типы: $I_0=\{1,2\}$, $I_1=\{3,4\}$ Максимальная продолжительность игры равна трем, при этом $q_0=\frac{1}{4}$, $q_1=\frac{1}{2}$. Вероятности успешного формирования связей заданы матрицей P:

$$P=\begin{bmatrix}0&\frac12&\frac13&\frac14\\ \frac12&0&\frac13&\frac12\\ \frac13&\frac13&0&\frac34\\ \frac14&\frac12&\frac34&0\end{bmatrix}.$$

Пусть издержки на поддержание связи между игроками из множеств I_0, I_1 равны $c_{00}=1$, $c_{01}=\frac{3}{2}$, $c_{10}=2$, $c_{11}=1$. Также заданы ограничения на количество предлагаемых связей на каждом шаге: $r_1=0, r_i=1$ для всех $i\neq 1$. Информационные индексы игроков равны $v_1=2$, $v_i=1$ для всех $i\neq 1$, и $f_1(x)=x+1$, $f_i(x)=x^2$ для $i=2,3,4$. Пусть имеется две возможные сети, которые может предложить лидер (игрок 1) на нулевом шаге $g_1=\{12,34\}$ и $g_2=\{13,24\}$, которые изображены на рис. 1.

Рисунок 1. Множество сетей, которые может выбрать лидер, g_1 и g_2 соответственно

Конечный древовидный граф $\Phi(z_0)$, который описывает игру, изображен на рис. 2. Сети, которые соответствуют вершинам: $g_1 = g(z_1) = g(z_3)$, $g_2 = g(z_2) = g(z_6)$, $g(z_4) = \{12, 24, 34\}$, $g(z_5) = \{12, 23, 34\}$, $g(z_7) = \{13, 23, 24\}$ и $g(z_8) = \{13, 24, 34\}$.

Рассмотрим кооперативную версию игры. Находим набор кооперативных стратегий $\bar{\varphi}$, при котором множество CZ состоит из вершин z_0, z_1, z_3 и z_4. Рассмотрим CIS-значение в качестве решения кооперативной игры. Значения характеристических функций, а также CIS-значения для каждой подыгры приведены в Таблицах 2 и 3 соответственно.

Таблица 2. Характеристические функции в подыграх, $\bar{G}(z)$, $z \in \{z_0, z_1, z_3, z_4\}$.

z	$v(\{1\}, z)$	$v(\{2\}, z)$	$v(\{3\}, z)$	$v(\{4\}, z)$	$v(N, z)$
z_0	$\frac{17}{8}$	$-\frac{17}{16}$	0	$-\frac{17}{8}$	$\frac{1253}{128}$
z_1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{247}{32}$
z_3	1	3	0	0	$\frac{41}{8}$
z_4	$\frac{13}{8}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{21}{4}$

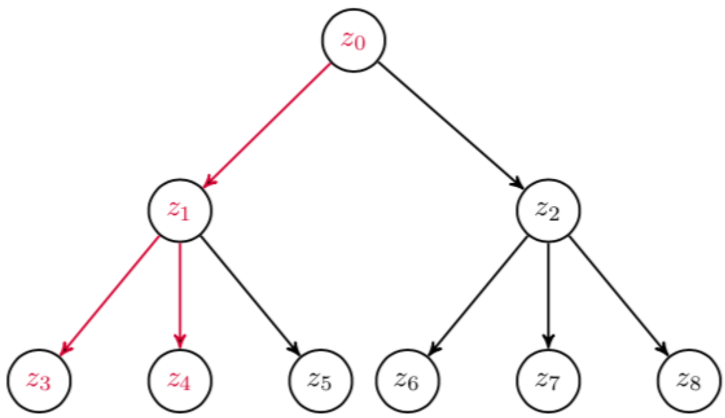

Рисунок 2. Граф игры $\Phi(z_0)$

Таблица 3. CIS-значения для подыгр $\bar{G}(z)$, $z \in \{z_0, z_1, z_3, z_4\}$.

Vertex z	$CIS_1(z)$	$CIS_2(z)$	$CIS_3(z)$	$CIS_4(z)$
z_0	$\frac{2477}{512}$	$\frac{845}{512}$	$\frac{1389}{512}$	$\frac{301}{512}$
z_1	$\frac{247}{128}$	$\frac{631}{128}$	$\frac{55}{128}$	$\frac{55}{128}$
z_3	$\frac{41}{32}$	$\frac{105}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$
z_4	$\frac{55}{32}$	$\frac{91}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{3}{32}$

Проверим, является ли $CIS(z_0)$ естественно динамически устойчивым решением (без введения процедуры распределения). Так как

$$CIS_1(z_0) = \frac{2477}{512} \neq 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{247}{128} = H_1^{z_0}(\bar{a}^{z_0}) + (1 - q_0) \cdot CIS_1(z_1),$$

то из условия (5.4), мы заключаем, что $CIS(z_0)$ не является естественно динамически устойчивым решением кооперативной игры $\bar{G}(z_0)$. Определим процедуру распределения дележа $CIS(z_0)$ по формуле (5.24):

$$
\begin{aligned}
\beta(z_4) &= CIS(z_4) = \left(\frac{55}{32}, \frac{91}{32}, \frac{19}{32}, \frac{3}{32}\right),\\
\beta(z_3) &= CIS(z_3) = \left(\frac{41}{32}, \frac{105}{32}, \frac{9}{32}, \frac{9}{32}\right),\\
\beta(z_1) &= CIS(z_1) - (1-q_1)\cdot\big[p(z_3|z_1)CIS(z_3) + p(z_4|z_1)CIS(z_4)\big]\\
&= \left(\frac{151}{128}, \frac{435}{128}, \frac{27}{128}, \frac{43}{128}\right),\\
\beta(z_0) &= CIS(z_0) - (1-q_0)\cdot CIS(z_1)\\
&= \left(\frac{217}{64}, \frac{-131}{64}, \frac{153}{64}, \frac{17}{64}\right).
\end{aligned}
$$

Множество сетей, которые могут быть сформированы с положительными вероятностями при реализации набора кооперативных стратегий $\bar{\varphi}$, это $\{12, 34\}$, $\{12, 24, 34\}$ и $\{12, 23, 24, 34\}$, которые изображена на рис. 3. Распределения вероятностей на множестве этих сетей составляет $(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6})$. Таким образом, в игре $\bar{G}(z_0)$ с наибольшей вероятностью сформируется сеть $\{12, 24, 34\}$.

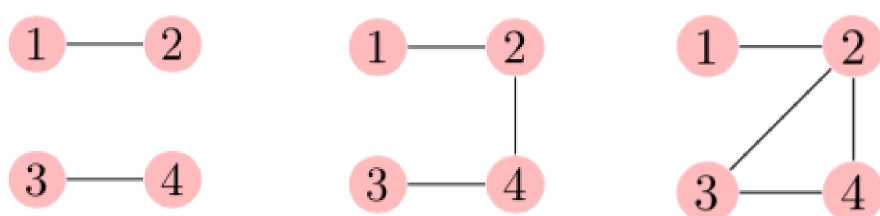

Рисунок 3. Сети, которые могут сформироваться с положительной вероятностью в игре $\bar{G}(z_0)$

7. Заключение

В статье предложена модель динамического формирования сети асимметричными игроками с учетом случайных факторов, продолжительности игры и реализации связей между игроками. Предлагается кооперативный подход к формированию сети, когда, например, игроки работают над совместным проектом. В качестве дележа совместного выигрыша, получаемого игроками, формирующими сеть, используется CIS-значение. Проверяется динамическая устойчивость этого решения, а также предлагается процедура распределения CIS-значения в случае его динамической неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх* // МТИиП. 2015. Т. 7, №4. С. 19–39; Gromova E. V., Petrosyan L. A. *On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games* // Automation and Remote Control. 2017. 78 (9). P. 1680–1692.

2. Мазалов В.В., Чиркова Ю.В. *Сетевые игры.* Лань, 2018.

3. Петросян Л. А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1977. Вып. 19. С. 46–52.

4. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 52–59.

5. Петросян Л.А., Седаков А.А. *Многошаговые сетевые игры с полной информацией* // МТИиП. 2009. Т. 1, № 2. С. 66–81; Petrosyan L. A., Sedakov A A. *Multistage network games with perfect information* // Automation and Remote Control. 2014. 75(8). P. 1532–1540.

6. Петросян Л.А., Седаков А.А., Бочкарев А.О. *Двухступенчатые сетевые игры* // МТИиП. 2013. Т. 5б № 4. С. 84–104; Petrosyan L. A., Sedakov A. A., Bochkarev A. O. *Two-stage network games* // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 10. P. 1855–1866.

7. Aumann R.J., Myerson R.B. *Endogenous formation of links between players and of coalitions: an application of the Shapley value* // The Shapley value. 1988. P. 175–191.

8. Aumann R.J., Peleg B. *Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments* // Bulletin of the American Mathematical Society. 1960. 66(3). P. 173–179.

9. Avrachenkov K.E., Kondratev A.Y., Mazalov V.V., Rubanov D.G. *Network partitioning algorithms as cooperative games* // Computational Social Networks. 2018. 5 (1). Art. no. 11.

10. Bala V., Goyal S. *A noncooperative model of network formation.* Econometrica. 2000. 68(5). P. 1181–1229.

11. Chander P., Tulkens H. *The core of an economy with multilateral environmental externalities* // Public goods, environmental externalities and fiscal competition. Springer, Boston, MA, 2006. P. 153–175.

12. Driessen T.S.H., Funaki Y. *Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions* // OR Spektrum 1991. V. 13. P. 15–30.

13. Gao H., Petrosyan L., Qiao H., Sedakov A. *Cooperation in two-stage games on undirected networks* // Journal of Systems Science and Complexity. 2017. Vol. 30(3). P. 680–693.

14. Gao H., Petrosyan L., Sedakov A. *Dynamic Shapley value for repeated network games with shock* // The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC). 2015. P. 6449–6455.

15. Gromova E.V., Plekhanova T.M. *On the regularization of a cooperative solution in a multistage game with random time horizon* // Discrete Applied Mathematics. 2019. V. 255. P. 40–55.

16. Haurie A., Zaccour G. *Differential game model of power exchange between interconnected utilities* // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1986. P. 262–266.

17. Jackson M.O., Watts A. *On the formation of interaction networks in social coordination games* // Games and Economic Behavior. 2002. V. 41. No. 2. P. 265–291.

18. König M.D., Tessone C.J., Zenou Y. *Nestedness in networks: A theoretical model and some applications* // Theoretical Economics. 2014. 9(3). P. 695–752.

19. Kuzyutin D., Gromova E., Smirnova N. *On the Cooperative Behavior in Multistage Multicriteria Game with Chance Moves* // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 12095 LNCS, 2020. P. 184–199.

20. Von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior* // Princeton University Press Princeton N J, 1947.

21. Parilina E. *Solutions of cooperative stochastic games with transferable payoffs.* Doctor Thesis. 2018.

22. Parilina E.M. *A survey on cooperative stochastic games with finite and infinite duration* // Contributions to Game Theory and Management, 2018. 11(0). P. 129–195.

23. Parilina E., Petrosyan L. *On a Simplified Method of Defining Characteristic Function in Stochastic Games* // Mathematics. 2020. V. 8. no. 7. art. no. 1135.

24. Parilina E.M., Tampieri A. *Stability and cooperative solution in stochastic games.* Theory and Decision. 2018. 84(4). P. 601–625.

25. Parilina E.M., Zaccour G. *Node-Consistent Shapley Value for Games Played over Event Trees with Random Terminal Time* // J Optim Theory Appl. 2017. V. 175. P. 236–254.

26. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. 27(3). P. 381–398.

27. Pin P., Rogers B. *Stochastic network formation and homophily* // Forthcoming in Oxford Handbook on the Economics of Networks, 2015.

28. Reddy P.V., Zaccour G. *A friendly computable characteristic function* // Mathematical Social Sciences. 2016. V. 82. P. 18–25.

29. Shapley L.S. *Stochastic games* // Proceedings of the national academy of sciences. 1953. 39(10). P. 1095–1100.

30. Sun P., Parilina E. *Two-stage network formation game with heterogeneous players and private information* // Contributions to Game Theory and Management. 2019. Vol. XII. P. 316–324.

STOCHASTIC MODEL OF NETWORK FORMATION WITH ASYMMETRIC PLAYERS

Ping Sun, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, PhD student (sunping920925@163.com).
Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong, D.Sc., professor, (e.parilina@spbu.ru).

Abstract: We propose a model of a network formation using the theory of stochastic games with random terminal time. Initially, the leader proposes a joint project in the form of a network to the players. Then, the players have the opportunities to form new links with each other to update the network proposed by the leader. Any player's payoff at any stage is determined by the network structure. It is also assumed that the formation of links proposed by the players is random. The duration of the game is also random. As a result of the players' actions and the implementation of the random steps of the Nature, a network is formed. We consider a cooperative approach to network formation, and we use the CIS-value as a cooperative solution. In this paper, a recurrent formula for its derivation in any cooperative subgame is obtained. The paper also investigates the dynamic consistency of CIS-value. The theoretical results are demonstrated by a numerical example.

Keywords: network formation, stochastic game, subgame consistency, CIS-value.