Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.1, с. 5–27

УДК 519.83
ББК 22.18

НЕАДДИТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Валерий А. Васильев*
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

В работе предлагаются три схемы неаддитивного интегрирования, основанные на различных продолжениях интегрируемых функций и неаддитивных функций множества на соответствующие симметрические степени исходных измеримых пространств. В рамках разработанных схем дается обзор интегральных представлений некоторых классических объектов теории кооперативных игр. Предлагается унифицированный подход к рассмотрению конечных и бесконечных игр. Особое внимание уделяется вектору Шепли, обобщенному расширению Оуэна и опорной функции ядра выпуклой игры.

Ключевые слова: неаддитивное интегрирование, полиномиальная кооперативная игра, функционал Шепли, обобщенное расширение Оуэна, опорная функция ядра.

Поступила в редакцию: 20.10.20 *После доработки*: 28.01.21 *Принята к публикации*: 09.03.21

---

* Работа поддержана программой фундаментальных научных исследований СО РАН No. I.5.1. (проект No. 0314-2019-0018) и грантом РФФИ No. 19-10-00910.

1. Введение

Пусть (Q, d) – произвольный непустой метрический компакт с метрикой d, а B – его борелевская σ-алгебра. Обозначим через $\mathcal{V}$ совокупность функций

$$v : B \to \mathbf{R},$$

подчиненных требованию $v(\emptyset) = 0$. Согласно теоретико-игровой терминологии [1,11] тройку

$$\Gamma = (Q, B, v)$$

будем называть кооперативной игрой, элементы множества Q – игроками, а подмножества $e \subseteq Q$, принадлежащие алгебре B – коалициями игроков. Напомним, что значение $v(e)$ интерпретируется как максимальный гарантированный доход коалиции e. В дальнейшем, как это принято, будем называть (кооперативными) играми и сами функции v.

Одной из главных задач теории кооперативных игр является изучение различных арбитражных схем, реализующих те или иные принципы справедливого распределения гарантированного дохода $v(Q)$ наибольшей коалиции Q между участниками игры Г. К последним относится и схема, отвечающая вектору Шепли $\Phi(v)$ [1,11]. Бесконечномерный аналог этого решения изучался Р. Ауманом, Л. Шепли и рядом других авторов преимущественно для специальных классов игр, порожденных суперпозициями вида

$$v = f \circ \mu,$$

где f – вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$, непрерывная в его концах и принимающая нулевое значение в точке 0, а μ – неатомическая вероятностная мера на борелевской σ-алгебре этого отрезка (см., например, [1]). Другое, не менее важное (особенно в экономических приложениях) решение – ядро $C(v)$ [2,11]. Оно реализует принцип коалиционно-эффективного распределения величины $v(Q)$: ни один дележ из $C(v)$ не может быть улучшен ни одной из коалиций $e \in B$. Начиная с основополагающей работы О.Н. Бондаревой [2] здесь накоплен значительный объем информации, касающейся, в основном, сравнительного анализа и условий непустоты ядра. Общим вопросам строения множества $C(v)$ уделялось меньше внимания. В то же время стоит отметить, что структура ядер некоторых классов бесконечных игр до сих пор является предметом активных исследований. Начиная с фундаментальной работы [1], большие усилия прилагаются к анализу неблокируемых дележей неатомических игр рынка, моделирующих условия совершенной конкуренции. Для таких игр, а также для некоторых классов бесконечных выпуклых игр изучаются, среди прочих, важные вопросы внешней устойчивости их ядер (см., например, [15] и имеющуюся там обширную библиографию).

В настоящей работе излагаются результаты, относящиеся к интегральному представлению вектора Шепли [17] и опорной функции ядра выпуклой кооперативной игры [6,8,19], полученные как для конечного, так и бесконечного числа игроков. Указывается взаимосвязь между векторами Шепли и полярными формами однородных полиномиальных игр, установленная в [17,18,21]. Кроме того, приводится бесконечномерный аналог известной интегральной формулы Оуэна [16], связывающей мультилинейное расширение кооперативной игры и ее вектор Шепли [21].

Следует подчеркнуть, что в отличие от традиционных предположений (см., например, [1], [15]), в работе не накладываются сколько-нибудь существенные ограничения ни на алгебру B, ни на способ порождения изучаемых игр v. Принципиальной особенностью предлагаемого подхода является также систематическое использование представления полиномиальных функций множества в виде мер на соответствующих симметрических степенях алгебры B [4].

2. Теоремы представления для конечных игр

Для облегчения сравнительного анализа излагаемых далее общих результатов и послуживших для них отправной точкой конечномерных аналогов, напомним представление вектора Шепли [5,17], мультилинейного расширения Оуэна [7,18] и опорной функции ядра выпуклой кооперативной игры [6,8,19] для случая конечного множества игроков.

Итак, пусть $Q = \{1, \ldots, q\}$, где q – какое-либо натуральное число, $B = 2^Q$ (как обычно, 2^Q обозначает совокупность всех подмножеств множества Q), метрика d на Q – произвольная. Все вышеуказанные классические объекты теории кооперативных игр могут быть описаны в терминах дивидендов Харшаньи[1] рассматриваемых игр из пространства

$$V(Q) := \{v : B \to \mathbf{R} \mid v(\emptyset) = 0\}.$$

Напомним соответствующее определение. *Дивиденды Харшаньи* v_e игры v определяются соотношениями

$$v_e := \sum_{e' \subseteq e} (-1)^{|e|-|e'|} v(e'), \quad e \in B \tag{2.1}$$

(как обычно, $|e|$ - число элементов множества e).

Замечание 2.1. Как вытекает из формулы (2.1), дивиденды Харшаньи представляют собой полиномиальные разности (см. определяющую их формулу (3.1) в следующем, третьем разделе настоящей работы), задаваемые «минимальными разбиениями» вида $\eta_e = \{\{t_1\}, \ldots, \{t_m\}\}$. Именно, для каждого подмножества $e = \{t_1, \ldots, t_m\}$ множества Q справедлива формула $v_e = v(\eta_e)$, где все составляющие разбиения η_e множества e являются одноэлементными подмножествами e.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае ($|Q| = q$, $B = 2^Q$) *функционал Шепли* [17] записывается следующим образом

$$Sh(v, x) = \sum_{e \subseteq Q} v_e \frac{x(e)}{|e|}, \quad v \in V(Q),\ x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^Q. \tag{2.2}$$

Здесь, как обычно,

$$x(e) := \sum_{i \in e} x_i, \quad e \in B, \tag{2.3}$$

а выражение $|e|$, как и в формуле (2.1), обозначает число элементов множества e. Напомним [11], что компоненты вектора Шепли $\Phi(v)$ конечной игры $v \in V(Q)$, выраженные в ее дивидендах v_e, имеют вид

$$\Phi(v)_i = \sum_{e \in \sigma_i} \frac{v_e}{|e|}, \quad i \in Q, \tag{2.4}$$

[1] О других применениях дивидендов Харшаньи см., например, [5,19,20].

где семейства σ_i задаются формулой

$$\sigma_i = \{e \in B \mid i \in e\}, \quad i \in Q.$$

Поэтому, в силу (2.2) справедливы равенства

$$Sh(v, e^i) = \sum_{e \in \sigma_i} v_e \frac{1}{|e|} = \Phi(v)_i, \quad i \in Q, \tag{2.5}$$

где единичные орты $e^i \in \mathbf{R}^Q$ определяются условиями $e^i_i = 1$ и $e^i_j = 0$ при $j \neq i$. Таким образом, в силу соотношений (2.4) и (2.5) имеет место представление

$$\Phi(v)(e) = Sh(v, \chi_e), \quad e \in B, \tag{2.6}$$

где, как и в формуле (2.3), для вектора $\Phi(v)$ используется сокращение $\Phi(v)(e) := \sum\limits_{i \in e} \Phi(v)_i$, а через $\chi_e \in \mathbf{R}^Q$ обозначается индикаторная функция множества e : $(\chi_e)_i = 1$ при $i \in e$, и $(\chi_e)_i = 0$ при $i \in Q \setminus e$.

Обобщение представления (2.6) вектора Шепли на случай произвольного метрического компакта описывается в разделе 5.1.

Что касается интегрального представления Оуэна [16], на основании формулы (2.1), определяющей дивиденды Харшаньи, можно показать, что при $Q = \{1, \ldots, q\}$ для конечной игры $\Gamma = (Q, 2^Q, v)$ функционал

$$P_v(x) = \sum_{e \subseteq Q} v_e \prod_{i \in e} x_i, \quad (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^Q \tag{2.7}$$

на гиперкубе $[0, 1]^q$ совпадает с мультилинейным расширением Оуэна [16] игры Γ. Действительно, производя элементарные преобразования и используя формулу (2.1), получаем равенство

$$\sum_{e \subseteq Q} v_e \prod_{i \in e} x_i = \sum_{e \subseteq Q} v(e) \prod_{i \in e} x_i \prod_{j \in Q \setminus e} (1 - x_j), \quad x \in \mathbf{R}^Q,$$

которое и доказывает требуемое утверждение: формула (2.7) в случае конечного множества $Q = \{1, \ldots, q\}$ задает на гиперкубе $[0, 1]^q$ классическое мультилинейное расширение Оуэна игры $(Q, 2^Q, v)$.

Конструкция обобщенного расширения Оуэна для кооперативных игр на произвольном метрическом компакте Q, базирующаяся на формуле (2.7), приводится в разделе 5.2. Там же дается аналог интегральной формулы Аумана-Шепли [1], используемый для описания взаимосвязи между полярной формой бесконечной однородной полиномиальной игры и ее вектором Шепли.

Переходя к интегральному представлению опорной функции H_v ядра $C(v)$ конечной *выпуклой игры*[2] $v : 2^Q \to \mathbf{R}$, заданной на множестве $Q = \{1, \ldots, q\}$, напомним, что эта функция определяется соотношением

$$H_v(x) := \sup\{x \cdot c \mid c \in C(v)\}, \quad x \in \mathbf{R}^Q$$

(здесь, как и всюду далее, через $p \cdot r$ обозначается скалярное произведение векторов p и r).

Теорема 2.1. [6, 19] *Для любой выпуклой кооперативной игры $v \in V(Q)$ опорная функция H_v ее ядра $C(v)$ вычисляется по формуле*

$$H_v(x) = \sum_{e \subseteq Q} v_e \max\{x_i \mid i \in e\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^Q. \tag{2.8}$$

Подчеркнем, что в отличие от рассматриваемого далее, в разделе 5.3, общего случая (допускающего и бесконечное число игроков), в Теореме 2.1 фигурируют *произвольные* выпуклые игры. Дело в том, что все конечные кооперативные игры полиномиальны[3]. Что же касается обобщения Теоремы 2.1 для произвольного метрического компакта Q (Теорема 5.4 из раздела 5.3), то здесь от характеристической функции v требуется уже не только полиномиальность, но и регулярность (см. соответствующие определения в следующем разделе).

Замечание 2.2. Отметим сразу же, что условие выпуклости игры $v \in V(Q)$ является существенным для справедливости формулы (2.8). Сказанное подтверждает приводимый ниже простой пример невыпуклой игры $\bar{v}$ трех лиц , имеющей непустое ядро $C(\bar{v})$, для которого

---

[2]Напомним [11], что конечная игра $v \in V(Q)$ называется *выпуклой*, если выполняются неравенства: $v(e \cup e') + v(e \cap e') \geq v(e) + v(e')$ для всех $e, e' \subseteq Q$.

[3]Легко проверить, что полиномиальная разность (см. определяющую ее формулу (3.1) в следующем разделе), задаваемая разбиением, одним из элементов которого является пустое множество, равна нулю. Следовательно, у любой конечной игры $v \in V(Q)$, где $Q = \{1, \ldots, q\}$, все полиномиальные разности порядка $q + 1$ равны нулю и, значит, v является полиномиальной порядка q.

не выполняется равенство (2.8). Итак, пусть Q состоит из трех элементов: $Q = \{1, 2, 3\}$, а функция $\bar{v}$ определяется формулой

$$\bar{v}(e) = \begin{cases} 1.5, & e = Q, \\ 1, & |e| = 2, \\ 0, & |e| = 1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что эта игра невыпуклая (выполняется, например, неравенство

$$\bar{v}(\{1,2\}) + \bar{v}(\{2,3\}) = 2 > \bar{v}(\{2\}) + \bar{v}(\{1,2,3\}) = 1.5,$$

противоположное тому, что должно было бы иметь место при выпуклости $\bar{v}$). Нетрудно убедиться также, что ядро $C(\bar{v})$ этой игры непусто и состоит из единственного дележа $a = (0.5, 0.5, 0.5)$. Действительно, легко проверяется, что a принадлежит $C(\bar{v})$. Далее, допуская, что какой-нибудь вектор $\bar{x}$ содержится в ядре $C(\bar{v})$, из неравенств $\bar{x}_i + \bar{x}_j \geq v(\{i,j\}) = 1$, выполняющихся для всех двухэлементных подмножеств $\{i,j\} \subseteq Q$, с учетом равенства

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1.5 \tag{2.9}$$

и неотрицательности каждой компоненты вектора $\bar{x}$, имеем: $\bar{x}_i \leq 0.5$ для всех $i \in Q$. Отсюда, в силу (2.9) получаем требуемое: $\bar{x} = a$, и, следовательно, $C(\bar{v}) = \{a\}$. По формуле (2.1) вычисляем дивиденды Харшаньи $\bar{v}_e$ игры $\bar{v}$

$$\bar{v}_e = \begin{cases} -1.5, & e = Q, \\ 1, & |e| = 2, \\ 0, & |e| = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор $b = (1, 2, 3)$ и подсчитаем значения величин

$$H_v(b) = \sup\{b \cdot x \ \mid\ x \in C(\bar{v})\} = b \cdot a \quad \text{и} \quad A_{\bar{v}}(b) = \sum_{e \subseteq Q} \bar{v}_e \max\{b_i \mid i \in e\}.$$

Поскольку справедливы соотношения $b \cdot a = 3 \neq 3.5 = A_{\bar{v}}(b)$, получаем требуемое: для невыпуклой игры $\bar{v}$, имеющей непустое ядро $C(\bar{v})$, равенство (2.8) не выполняется.

3. Полиномиальные игры

В предыдущем разделе были указаны некоторые теоремы представления вектора Шепли, мультилинейного расширения Оуэна и опорной функции ядра для конечных кооперативных игр. Приводимые далее обобщения указанных представлений получены для так называемых полиномиальных игр, когда условие конечности числа участников может и не выполняться. Настоящий раздел посвящен описанию основных свойств таких игр и отвечающих им полуупорядоченных нормированных пространств.

Итак, пусть задан некоторый непустой метрический компакт (Q, d) с метрикой d. Как и ранее, обозначим через B его борелевскую σ - алгебру. Введем понятия, необходимые для описания рассматриваемых далее классов кооперативных игр. Пусть e – произвольный элемент алгебры B. Обозначим через $H(e)$ совокупность конечных B-измеримых разбиений множества e и положим $H = \cup_{e \in B} H(e)$. Напомним, что через $\mathcal{V}$ обозначается совокупность функций $v : B \to \mathbf{R}$, подчиненных требованию $v(\emptyset) = 0$. Для каждых $v \in \mathcal{V}$ и $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$ через $v(\eta) = v(\{e_i\}_1^m)$ будем обозначать *полиномиальную разность* [4] функции v, определяемую формулой

$$v(\eta) := \sum_{\omega \subseteq \Omega_\eta} (-1)^{m-|\omega|} v(\cup_{i \in \omega} e_i), \tag{3.1}$$

где $\Omega_\eta = \{1, \ldots, m\}$, а $|\omega|$ – число элементов конечного множества $\omega \subseteq \Omega_\eta$. Число элементов в разбиении η будем называть *порядком разности* $v(\eta)$.

Для каждого $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$ и $\omega \subseteq \Omega_\eta$ положим $\eta^\omega := \{e_i\}_{i \in \omega}$, и через $v(\eta^\omega)$ обозначим полиномиальную разность функции $v \in \mathcal{V}$, определяемую для разбиения η^ω множества $\cup_{i \in \omega} e_i$ согласно формуле (3.1): $v(\eta^\omega) = \sum\limits_{\omega' \subseteq \omega} (-1)^{|\omega| - |\omega'|} v(\cup_{i \in \omega'} e_i)$.

Определение 3.1. [4] *Величина*

$$\|v\|_0 := \sup \Big\{ \sum_{\omega \subseteq \Omega_\eta} |v(\eta^\omega)| \;\Big|\; \eta \in H(Q) \Big\},$$

называется полиномиальной вариацией функции v. Говорят, что $v \in \mathcal{V}$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $\|v\|_0 < \infty$.

Положим

$$V := \{v \in \mathcal{V} \mid \|v\|_0 < \infty\}$$

и опишем конус вполне положительных функций, наделяющий векторное пространство V с нормой $\|\cdot\|_0$ структурой KB-пространства [4].

Определение 3.2. [4] *Будем говорить, что функция $v \in \mathcal{V}$ вполне положительна, если все ее полиномиальные разности неотрицательны:*

$$v(\eta) \geq 0, \quad \eta \in H.$$

Выпуклый конус вполне положительных функций обозначим через V_+.

Нетрудно убедиться, что определяемый введенным конусом $V_+ \subseteq \mathcal{V}$ частичный порядок

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow u - v \in V_+$$

вместе с нормой $\|\cdot\|_0$ и операциями поточечного сложения и умножения функций наделяет пространство V структурой нормированного полуупорядоченного кольца (в терминологии [9]). Более того, пространство V представляет собой KB-кольцо [4]. В частности, оно является пространством Канторовича (и, тем самым, порядково полным относительно полуупорядоченности $\geq_0$).

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток [9,10,13,14], для каждой функции $v \in V$ через v^+, v^- и $|v|$ будем обозначать положительную, отрицательную и полную вариацию v , соответственно:

$$v^+ := v \vee 0,\ v^- := (-v) \vee 0,\ |v| := (-v) \vee v,$$

где, как обычно, через $u \vee w$ $(u \wedge w)$ обозначается точная верхняя (нижняя) грань множества $\{u, w\}$ в полуупорядоченном пространстве $(V, \geq_0)$.

Обозначим через F семейство замкнутых подмножеств Q.

Определение 3.3. [4] *Функция $v \in V$ называется регулярной, если ее полная вариация $|v|$ удовлетворяет условию:*

$$|v|(\{e_i\}_1^m) = \sup \left\{ |v|(\{f_i\}_1^m) \;\middle|\; f_i \subseteq e_i, f_i \in F,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

для любого конечного разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$. Совокупность регулярных функций множества обозначим через $rV = rV(B)$.

В работе [4] установлено, что полуупорядоченное нормированное векторное кольцо $(rV,\ \geq_0,\ \|\cdot\|_0)$, будучи замкнутым идеалом в банаховой решетке $(V,\ \geq_0,\ \|\cdot\|_0)$, является KB-кольцом и, в частности, всякая фундаментальная последовательность в rV имеет предел, являющийся регулярной функцией, а всякое ограниченное сверху или снизу (в смысле упорядоченности) множество элементов из rV имеет соответствующую точную грань, принадлежащую rV. Важной особенностью порядково полной банаховой решетки rV является совместимость нормы $\|\cdot\|_0$ с порядком $\geq_0$ (монотонная (o)-сходимость влечет монотонную сходимость по норме полиномиальной вариации $\|\cdot\|_0$).

Основную роль в дальнейшем играют так называемые полиномиальные функции множества из rV, представляющие собой аналоги непрерывных полиномиальных функционалов в линейных нормированных пространствах (используемые в работе свойства таких функционалов указаны, например, в монографии [12]).

Определение 3.4. [3, 4] *Функцию $v \in rV$ будем называть полиномиальной порядка n, если ее полиномиальные разности порядка $n+1$ обращаются в нуль: для всех $\{e_i\}_1^{n+1} \in H$ выполняется равенство*

$$v(\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}) = 0. \tag{3.2}$$

Семейство всех функций из rV, удовлетворяющих (3.2)*, обозначим rV^n.*

Замечание 3.1. Отметим, что помимо стандартных примеров типа полиномов $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mu^k$, где μ - некоторая счетно-аддитивная мера на B, к элементам пространства rV^n относятся и функции вида

$$v_\psi(e) := \psi(e, \ldots, e), \quad e \in B,$$

полученные в результате диагонализации (то есть сужения на диагональ $D = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in B^n \mid e_1 = e_2 = \ldots = e_n\}$) счетно-аддитивных по каждому аргументу функций $\psi : B^n \to \mathbf{R}_+$ (детали см. в [3, 17, 18]).

Определение 3.5. [3, 4] *Положим $rpV = \cup_{n=1}^{\infty} rV^n$. Элементы семейства rpV будем называть (регулярными) полиномиальными функциями множества.*

Определение 3.6. [3, 4] *Будем говорить, что функция $v \in rV^n$ является однородной порядка n, если она дизъюнктна с пространством rV^{n-1} :*

$$|v| \wedge |u| = 0, \quad u \in rV^{n-1}.$$

Совокупность всех однородных порядка n регулярных полиномиальных функций множества будем обозначать через $rV^{(n)}$ (по определению $rV^{(1)} := rV^1$).

Отметим следующие важные свойства пространств rV^n, $rV^{(n)}$ и rpV.

Предложение 3.1. [3, 4] *Кольцо rpV является нормальным подпространством (идеалом) пространства rV (то есть $v \in rpV$ и $|v| \geq_0 |u|$ влечет $u \in rpV$).*

Предложение 3.2. [3, 4] *Для всех $n \geq 1$ пространства rV^n и $rV^{(n)}$ являются замкнутыми компонентами (полосами) rV (то есть идеалами, замкнутыми относительно (о)-сходимости).*

Из Предложения 3.2 следует, что для каждой функции $v \in rV$ и для всякого натурального $m \geq 1$ существует проекция $v_{(m)}$ этой функции на пространство $rV^{(m)}$:

$$v_{(m)} := \sup \{u \in rV_+^{(m)} \mid v^+ \geq_0 u\} - \sup\{w \in rV_+^{(m)} \mid v^- \geq_0 w\};$$

при этом (по определению) справедлива импликация

$$v \in rV_+ \Rightarrow v_{(m)} \in rV_+^{(m)},$$

где $rV_+^{(m)} := rV^{(m)} \cap rV_+$ – положительная часть множества $rV^{(m)}$. Таким образом, для каждой функции $v \in rV$ определены ее проекции

$v_{(m)}$, $m = 1, \ldots$, на соответствующие пространства регулярных однородных полиномиальных функций. Справедлива следующая теорема декомпозиции.

Теорема 3.1. [4] *Для каждой функции $v \in rV^n$ существует единственное представление*

$$v = v_1 + \ldots + v_n,$$

где $v_m \in rV^{(m)}$ для каждого $m = 1, \ldots, n$.

Выделим более широкий класс функций, которые полностью определяются своими проекциями $v_{(m)}$, $m = 1, \ldots$.

Определение 3.7. [4] *Функцию $v \in rV$ будем называть (регулярной) аналитической, если справедливо представление*

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} v_{(m)},$$

где сходимость ряда понимается в смысле сходимости соответствующих частных сумм по норме $\|\cdot\|_0$. Совокупность всех аналитических функций из rV будем обозначать через raV.

Большой интерес представляет обобщение на случай аналитических функций множества приводимых в следующем разделе результатов, касающихся характеризации вектора Шепли, ядра и обобщенных расширений Оуэна для полиномиальных кооперативных игр.

4. Элементы неаддитивного интегрирования

Пусть n - произвольное натуральное число. Зафиксируем $v \in rV^n$ и построим продолжение v на симметрическую степень $B^{[n]}$ алгебры B, определяемую следующим образом. Для каждого $e \in B$ положим

$$e^{[n]} := \{e' \subseteq e \;\big|\; e' \neq \emptyset,\ |e'| \leq n\},$$

где, как и ранее, через $|e'|$ обозначается мощность множества e'.

Определение 4.1. [4] *Наименьшую алгебру подмножеств множества $Q^{[n]}$, содержащую семейство $\{e^{[n]} \mid e \in B\}$, будем обозначать через $B^{[n]}$ и называть симметрической степенью (порядка n) алгебры B.*

Распространим обозначения типа $e^{[n]}$ на элементы множества H: для каждого измеримого разбиения $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in H$ положим

$$\eta^{[n]} := \{e \in Q^{[n]} \;\Big|\; e \subseteq \cup_{i=1}^{m} e_i,\, e \cap e_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

В этих обозначениях строение алгебры $B^{[n]}$ имеет следующее описание.

Предложение 4.1. [4] *Алгебра $B^{[n]}$ состоит из всевозможных конечных объединений множеств вида $\eta^{[n]}$, $\eta \in H$. При этом для каждого E из $B^{[n]}$ существует разбиение $\eta \in H(Q)$ и семейство $\sigma(E, \eta)$ подмножеств множества Ω_η такое, что $|\omega| \leq n$ для всех $\omega \in \sigma(E, \eta)$ и имеет место представление (называемое в дальнейшем каноническим)*

$$E = \bigcup_{\omega \in \sigma(E,\eta)} (\eta^\omega)^{[n]}. \tag{4.1}$$

Сопоставим функции v конечно-аддитивную меру λ_v на $B^{[n]}$, определяемую формулой

$$\lambda_v(E) := \sum_{\omega \in \sigma(E,\eta)} v(\eta^\omega), \tag{4.2}$$

где η и $\sigma(E, \eta)$ участвуют в каком-либо каноническом представлении E (корректность определения λ_v, задаваемой формулой (4.2), и ее аддитивность вытекают из Предложения 4.1).

Замечание 4.1. Отметим, что для конечного множества Q при $B = 2^Q$ все одноэлементные множества $\{e\} \subseteq Q^{[n]}$, $e \in Q^{[n]}$, содержатся в алгебре $B^{[n]}$. Действительно, множества $\{i\}$, $i \in Q$, принадлежат $B^{[n]}$ по определению. Для осуществления индукционного перехода допустим, что для $k < n$ все одноэлементные множества вида $\{e\}$, $e \in Q^{[n]}$, такие, что $|e| \leq k$, принадлежат $B^{[n]}$. Рассмотрим произвольный элемент $e' \in Q^{[n]}$ такой, что $|e'| = k + 1$ и покажем, что одноэлементное множество $\{e'\}$ содержится в алгебре $B^{[n]}$. В самом деле, по определению множества $[e']^{[n]}$ имеем: $\{e'\} = [e']^{[n]} \setminus K$, где $K := \{e \in [e']^{[n]} \mid |e| \leq k\}$. Отсюда, в силу того, что множества $[e']^{[n]}$ и K принадлежат алгебре $[B]^{[n]}$, получаем искомое включение

$\{e'\} \in B^{[n]}$, что и завершает доказательство соотношений

$$\{e\} \in B^{[n]}, \quad e \in Q^{[n]}.$$

Из вышесказанного вытекает, что в рассматриваемом случае конечного множества Q элементами алгебры $B^{[n]}$ являются все подмножества $Q^{[n]}$ (в силу того, что каждое такое подмножество является конечным объединением соответствующих одноэлементных подмножеств $Q^{[n]}$). Если же Q бесконечное, то непосредственно из Предложения 4.1 вытекает, что, например, множества

$$Q^{(n)} := \{e \in Q^{[n]} \;\Big|\; |e| = n\}, \quad n \geq 2,$$

не принадлежат соответствующим алгебрам $B^{[n]}$, поскольку они не допускают представления в канонической форме (4.1).

Что касается меры λ_v для случая конечного Q и $B = 2^Q$, то ввиду аддитивности она полностью определяется своими значениями на одноэлементных подмножествах множества $Q^{[n]}$:

$$\lambda_v(\{e\}) = v_e, \quad e \in Q^{[n]}.$$

Отсюда в силу равенств (вытекающих из формулы (2.1), определяющей дивиденды Харшаньи):

$$v(e) = \sum_{e' \subseteq e} v_{e'}, \quad e \subseteq Q,$$

получаем, например, соотношения $\lambda_v(e^{[n]}) = v(e)$, $e \in Q^{[n]}$, являющиеся конкретизацией формулы (4.2) при $\eta = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = e$, $e_2 = Q \setminus e$ и $\sigma(E, \eta) = \{\{1\}\}$.

Учитывая регулярность v и компактность Q, можно убедиться [4], что λ_v единственным образом продолжается до счетно-аддитивной меры μ_v, определенной на наименьшей σ-алгебре $\sigma B^{[n]}$, порождаемой алгеброй $B^{[n]}$. При этом оказывается [4], что $\sigma B^{[n]}$ допускает достаточно простое описание. Именно, полагая

$$d^{[n]}(e, e') := \min \{\epsilon \;\Big|\; e \subseteq e'_\epsilon,\, e' \subseteq e_\epsilon\},$$

где e_ϵ, e'_ϵ – ϵ-окрестности множеств $e, e' \in Q^{[n]}$ в метрике d, видим, что функция $d^{[n]}$ является продолжением d на $Q^{[n]}$, совпадающим на $Q^{[n]}$

с известной метрикой Хаусдорфа, откуда вытекает, что пространство $(Q^{[n]}, d^{[n]})$ является метрическим компактом. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.2. [4] *Алгебра $\sigma B^{[n]}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй метрического компакта* $(Q^{[n]}, d^{[n]})$.

Пусть теперь n – некоторое натуральное число, $I(Q, B)$ - пространство всех ограниченных B-измеримых функций на Q, а c – вещественная функция, заданная на декартовом произведении множеств $I(Q, B)$ и $Q^{[n]}$ такая, что

$$c(f, \{t\}) = f(t)$$

для всех $f \in I(Q, B)$ и $t \in Q$. Определим отображение $f_c^n : Q^{[n]} \to \mathbf{R}$ формулой

$$f_c^n(e) := c(f, e), \quad e \in Q^{[n]}.$$

Функцию c назовем *схемой продолжения (порядка n)*, а f_c^n – *c-продолжением функции f*.

Введем, наконец, центральное понятие настоящей работы (ниже, как и ранее, через μ_v обозначается счетно-аддитивное продолжение на $\sigma B^{[n]}$ конечно-аддитивной меры λ_v, определяемой формулой (4.2)).

Определение 4.2. *Пусть функция множества v принадлежит $rV^n(B)$, а функция*

$$c : I(Q, B) \times Q^{[n]} \to \mathbf{R}$$

является схемой продолжения порядка n. Будем говорить, что функция $f \in I(Q, B)$ является (v, c)-суммируемой, если интеграл

$$\int f_c dv := \int_{Q^{[n]}} f_c^n d\mu_v \tag{4.3}$$

существует и конечен; величину $\int f_c dv$, определяемую формулой (4.3), *будем называть (v, c)-интегралом функции f.*

Далее рассматриваются три варианта интегрирования по регулярным полиномиальным функциям множества, порождаемые следующими схемами продолжения:

$$1)\ \sigma(f,e) := \frac{\sum\limits_{t\in e} f(t)}{|e|}, \quad f \in I(Q,B),\ e \in Q^{[n]};$$

$$2)\ \rho(f,e) := \prod_{t\in e} f(t), \quad f \in I(Q,B),\ e \in Q^{[n]};$$

$$3)\ s(f,e) := \max\{f(t) \mid t \in e\}, \quad f \in I(Q,B),\ e \in Q^{[n]}.$$

Всюду ниже, когда порядок схемы продолжения ясен из контекста, его обозначение в продолжениях функций $f \in I(Q,B)$ будем опускать: вместо обозначений f^n_σ, f^n_ρ и f^n_s используются их сокращения f_σ, f_ρ и f_s, соответственно.

5. Неаддитивное интегрирование и кооперативные игры

Перейдем к основным результатам работы, относящимся к интегральному представлению вектора Шепли, обобщенного расширения Оуэна и опорной функции H_v ядра выпуклой кооперативной игры $v \in rpV$.

5.1. Интегральное представление вектора Шепли

Приведем определение одного из бесконечномерных аналогов вектора Шепли [5,17] (аксиоматизацию этого классического решения теории кооперативных игр для конечного числа игроков, предложенную Л. Шепли в 1953г., можно найти, например, в [11]). Напомним [1], что подпространство $W \subseteq rV$ называется симметричным, если $\theta \circ v \in W$ для всех $\theta \in \mathcal{T}$ и $v \in W$, где $\mathcal{T}$ – группа автоморфизмов измеримого пространства (Q,B), а функции $\theta \circ v$ определяются по формуле

$$\theta \circ v(e) := v(\theta(e)), \quad \theta \in \mathcal{T},\ e \in B.$$

Наконец, через $\operatorname{Supp} v$ обозначим совокупность носителей игры v

$$\operatorname{Supp} v := \{R \in B \mid v(e \cap R) = v(e),\ e \in B\}.$$

Определение 5.1. [5, 17] *Вектором Шепли на симметричном подпространстве $W \subseteq rV$ будем называть линейный оператор $\Phi : W \to rV^1$, удовлетворяющий условиям:*

$A1.\Phi(v) \geq_0 0, \quad v \in W \cap rV_+;$

$A2.\Phi(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi(v), \quad \theta \in \mathcal{T},\, v \in W;$

$A3.\Phi(v)(R) = v(Q), \quad R \in Supp\ v,\, v \in W.$

Предлагаемое далее интегральное представление вектора Шепли осуществляется с помощью так называемого функционала Шепли, введенного в работе [17].

Определение 5.2. [17] *Функционалом Шепли на произведении пространств rpV и $I(Q,B)$ называется отображение $Sh : rpV \times I(Q,B) \to$ $\mathbf{R}$, определяемое формулой*

$$Sh(v,f) := \int f_\sigma dv, \quad v \in rpV,\ f \in I(Q,B). \tag{5.1}$$

Напомним [21], что при $Q = [0,1]$ через fV обозначается совокупность всех игр с конечным носителем

$$fV = \{v \in V \mid \exists R \in \mathrm{Supp}\ v :\ (|R| < \infty)\},$$

а через $rpNA$ – линейное подпространство $rpV \cap pvNA$, где $pvNA$ представляет собой замыкание по норме полиномиальной вариации $\|\cdot\|_0$ линейной оболочки степеней μ^k, $k \geq 1$, неатомических вероятностных мер μ, заданных на борелевской σ-алгебре единичного отрезка $[0,1]$. Используя функционал Шепли, определенный формулой (5.1), построим линейный оператор Φ_*, удовлетворяющий условиям A1 - A3, и совпадающий при $Q = [0,1]$ с классическим вектором Шепли на подпространствах fV и $rpNA$ (ниже, как обычно, через χ_e обозначается индикаторная функция множества $e \in B$).

Теорема 5.1. [17] *Линейный оператор $\Phi_* : rpV \to rV^1$, определенный формулой*

$$\Phi_*(v)(e) := Sh(v, \chi_e), \quad v \in rpV,\ e \in B, \tag{5.2}$$

удовлетворяет условиям A1 - A3. Более того, при $Q = [0,1]$ оператор, заданный формулой (5.2) совпадает с классическим вектором Шепли на подпространствах fV и $rpNA$.

5.2. Вектор Шепли и полярные формы кооперативных игр

Важную роль как в теоретических, так и в прикладных вопросах, связанных с исследованием вектора Шепли, играют так называемые полярные формы однородных полиномиальных игр, порождаемые ассоциированными с этими играми обобщенными расширениями Оуэна.

Определение 5.3. [17, 18] *Обобщенным расширением Оуэна игры v из $rV^{[n]}$ будем называть отображение $P_v : I(Q, B) \to \mathbf{R}$, определяемое формулой*

$$P_v(f) := \int f_\rho dv, \quad f \in I(Q, B). \tag{5.3}$$

Переходя от традиционных вопросов построения вектора Шепли к более тонкому анализу его структурных свойств отметим, что вышеприведенная Теорема 5.1 дает его интегральное представление, которое справедливо *для всех* регулярных полиномиальных игр. Если же ограничиться только *однородными* играми из rpV, удается получить важную дополнительную информацию, указывающую на тесную взаимосвязь между векторами Шепли и так называемыми полярными формами таких игр. Напомним [17,18], что полярной формой игры $v \in V^{(n)}$ называется симметричная полиаддитивная функция $\psi_v : B^n \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условию

$$v(e) = \psi_v(e, \ldots, e), \quad e \in B.$$

Здесь $V^{(n)} := \{v \in V^n \big| \; |v| \wedge |u| = 0, \, u \in V^{n-1}\}$, а V^n – подпространство V, состоящее из функций, у которых все полиномиальные разности порядка $n + 1$ равны нулю [3,17,18]. Таким образом, основное свойство полярной формы ψ_v однородной игры $v \in V^{(n)}$ состоит в том, что ее диагональное сужение совпадает с v. Отметим также, что полярная форма *регулярной* однородной игры удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям регулярности (подробности см. в [17,18]).

Всюду далее для $v \in rV^{(n)}$ через P_v^* будем обозначать полярную форму однородного полиномиального функционала[4] P_v, заданного

[4]Полярной формой однородного порядка n полиномиального функционала L

формулой (5.3)[5]. Напомним [17], что P_v^* является непрерывным полилинейным симметричным функционалом на пространстве $I(Q,B)^n$, удовлетворяющим условию

$$P_v^*(f,\dots,f)=P_v(f),\quad f\in I(Q,B).$$

Теорема 5.2. [17, 21] *Пусть v принадлежит $rV^{(n)}$. Тогда для каждой коалиции $e\in B$ справедливо равенство*

$$\Phi_*(v)(e)=P_v^*(\chi_e,\chi_Q,\dots,\chi_Q).$$

Для полноты изложения сформулируем также аналог известных интегральных формул Оуэна [16] и Аумана-Шепли [1], лежащий в основе доказательства Теоремы 5.2.

Теорема 5.3. [21] *Для любой игры $v\in rpNA$ и для всякой коалиции $e\in B$ производная*

$$P_v'(t\chi_Q,\chi_e):=\lim_{\tau\to 0}\frac{P_v(t\chi_Q+\tau\chi_e)-P_v(t\chi_Q)}{\tau}$$

функционала P_v в точке $t\chi_Q$ по направлению χ_e существует при каждом $t\in[0,1]$. Эта производная является интегрируемой функцией на интервале $[0,1]$; при этом для любого натурального числа $n\geq 1$ и для каждой игры $v\in rV^{(n)}\cap rpNA$ справедлива формула

$$\Phi_*(v)(e)=\int_0^1 P_v'(t\chi_Q,\chi_e)dt,\quad e\in B. \tag{5.4}$$

Замечание 5.1. Отметим, что формула (5.4), являющаяся прямым бесконечномерным аналогом классического интегрального представления Оуэна [16], справедлива и в общем случае $v\in rpNA$, что вытекает из Теоремы 3.1 и аддитивности функционала

$$P(v,f)=\int f_\rho dv,\quad v\in rpV,\ f\in I(Q,B),$$

по первой переменной.

на векторном пространстве X называется функция $L^*:X^n\to\mathbf{R}$, определяемая формулой $L^*(x_1,\dots,x_n):=\frac{1}{n!}\sum_{\omega\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{n-|\omega|}L(\sum_{i\in\omega}x_i)$ (см., например, [12,18]).

[5] Однородность, полиномиальность и непрерывность функционала P_v для однородной игры v установлена в [17] (см. также [3]).

5.3. Интегральное представление опорной функции ядра $C(v)$

Если вектор Шепли формализует представление о справедливом распределении величины $v(Q)$ (см., например, [1,11]), то другой принцип оптимальности - ядро - описывает такие распределения $v(Q)$, которые не в состоянии улучшить своими силами ни одна из коалиций $e \in B$. Формальное описание ядра $C(v)$ игры v имеет следующий вид

$$C(v) := \{\nu \in rV^1 \;\Big|\; \nu(Q) = v(Q),\ \nu(e) \geq v(e), \quad e \in B\}.$$

Первый критерий непустоты ядра $C(v)$ для конечных игр был предложен в 1962 г. О.Н. Бондаревой [2]. Среди бесконечных игр, имеющих непустое ядро, следует отметить прежде всего так называемые выпуклые игры: игра $v \in \mathcal{V}$ называется *выпуклой*, если выполняются неравенства

$$v(e \cup e') + v(e \cap e') \geq v(e) + v(e'), \quad e, e' \in B.$$

Завершая работу, приведем формулу, дающую интегральное представление опорной функции H_v ядра $C(v)$, определяемой соотношением

$$H_v(f) := \sup \{\int f d\nu \;\Big|\; \nu \in C(v)\}, \quad f \in I(Q, B). \tag{5.5}$$

Именно, в рамках третьей схемы неаддитивного интегрирования вид опорной функции H_v, определяемой соотношением (5.5), для выпуклой игры $v \in rpV$ получает следующее описание.

Теорема 5.4. [8] *Для любой выпуклой игры $v \in rpV$ справедлива формула*

$$H_v(f) = \int f_s dv, \quad f \in I(Q, B). \tag{5.6}$$

В завершение этого раздела отметим еще, что вышеприведенные результаты можно использовать при вычислении компонент вектора Шепли для некоторых классов игр с бесконечным числом участников (см., например, [17]), а также при анализе других решений теории кооперативных игр (в том числе, применение формулы (5.6) для изучения строения множеств Харшаньи, Вебера и Шепли [18–20]).

6. Заключение

В работе предлагаются три схемы интегрирования по неаддитивным функциям множества, отвечающие следующим вариантам продолжения интегрируемых функций на рассматриваемую степень измеримого пространства: 1) среднее значение, 2) произведение и 3) взятие максимума на соответствующем подмножестве. В конечномерном случае указанные схемы применимы к любой неаддитивной функции. Что же касается бесконечных измеримых пространств, то здесь удается обосновать реализуемость введенных схем для достаточно обширного класса регулярных полиномиальных функций множества. Полученные результаты используются для интегрального представления вектора Шепли, мультилинейного расширения Оуэна и опорной функции ядра выпуклой игры, а также для обобщения известной интегральной формулы Оуэна на случай произвольного метрического компакта. Кроме того, указывается взаимосвязь между векторами Шепли и полярными формами однородных полиномиальных игр, установленная в [17,21].

Большой интерес представляет получение аналогов найденных интегральных представлений для аналитических функций множества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ауман Р., Шепли Л. *Значения для неатомических игр*, М.: Мир, 1977.

2. Бондарева О.Н. *Теория ядра для игры n лиц* // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон. 1962. Вып. 13(3). С. 141–142.

3. Васильев В.А. *Общая характеристика полиномиальных функций множества* // Оптимизация. 1974. Вып. 14(31). С. 101–123.

4. Васильев В.А. *Об одном пространстве неаддитивных функций множества* // Оптимизация. 1975. Вып. 16(33). С. 99–120.

5. Васильев В.А. *Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации* // Оптимизация. 1975. Вып. 17(34). С. 5–26.

6. Васильев В.А. *Опорная функция ядра выпуклой кооперативной игры* // Оптимизация. 1978. Вып. 21(38). С. 30–35.

7. Васильев В.А. *Об одной аксиоматизации обобщенного расширения Оуэна* // Математические теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 3–13.

8. Васильев В.А., Зуев М.Г. *Опорная функция ядра выпуклой игры* // Оптимизация. 1988. Вып. 44(61). С. 155–160.

9. Вулих Б.З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* М.: Физматгиз, 1961.

10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

11. Розенмюллер И. *Кооперативные игры и рынки.* М.: Мир, 1974.

12. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИЛ,1962.

13. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1971.

14. Aliprantis C.D., Border K.C. Infinite Dimensional Analysis. Berlin: Springer-Ferlag, 1994.

15. Marinacci M., Montrucchio L. *Stable cores of large games* // International Journal of Game Theory. 2005. V. 33(2). P. 189–213.

16. Owen G. *Multilinear extensions of games* // Journal of Management Sciences. 1972. V. 18(5). P. 64–79.

17. Vasil'ev V.A. *The Shapley functional and the polar form of homogeneous polynomial games* // Siberian Advances in Mathematics. 1998. V. 8(4). P. 109–150.

18. Vasil'ev V.A. *Polar forms, p-values, and the core*// In: Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Lassonde M., ed.). 2001. Physica-Verlag: Heidelberg-New York. P. 357–368.

19. Vasil'ev V.A. *Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games*// In: Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory (Driessen, T.G., G. van der Laan, V.Vasil'ev, and E. Yanovskaya, eds.). 2006. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York. P. 91– 149.

20. Vasil'ev V.A. *Weber polyhedron and weighted Shapley values*// International Game Theory Review. 2007. V. 9(1). P. 139–150.

21. Vasil'ev V.A. *Polar representation of Shapley value: nonatomic polynomial games* // Contributions to game theory and management. 2013. Vol. VI. P. 434–446.

NONADDITIVE INTEGRATION AND SOME SOLUTIONS OF COOPERATIVE GAMES

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Dr.Sc., professor (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: In the paper, we propose three schemes of nonadditive integration based on several extensions of nonadditive set function and integrand to the appropriate symmetric power of the original measurable space. A survey on the integral representation of some classic objects of the cooperative game theory, derived by nonadditive integration, is given. A universal approach for investigation of both finite and infinite games is developed. We pay a particular attention to the Shapley value, Owen multilinear extension, and support function of the core of a convex cooperative game.

Keywords: nonadditive integration, polynomial cooperative game, Shapley functional, generalized Owen extension, support function of the core.