

УДК 519.834

ББК 22.18

**К ИНДИВИДУАЛЬНОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ ПАРЕТОВСКОГО
РАВНОВЕСИЯ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ
В ОДНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С
НЕТРАНСФЕРАБЕЛЬНЫМИ
ВЫИГРЫШАМИ**

Владислав И. Жуковский

МГУ им. М.В. Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК

e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Константин Н. Кудрявцев

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

454080, Челябинск, пр. Ленина, 76

e-mail: kudrkn@gmail.com

Лидия В. Жуковская

Центральный экономико-математический институт РАН

(ЦЭМИ РАН)

117418, Москва, Нахимовский пр., 47

e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

Ирина С. Стабулит

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

454080, Челябинск, пр. Ленина, 76

e-mail: stabulitis@susu.ru

Используется понятие индивидуальной устойчивости паретоовского равновесия угроз и контругроз в одной дифференциальной линейно-квадратичной игре трех лиц без побочных платежей, найден явный вид соответствующего равновесия.

Ключевые слова: равновесие угроз и контругроз, коалиционная игра, индивидуальная устойчивость, дифференциальная игра.

Поступила в редакцию: 12.10.2020 *После доработки:* 21.11.2020 *Принята к публикации:* 09.03.2021

1. Общие понятия

Рассматривается коалиционная игра трех лиц (игроков) с порядковыми номерами $\{1, 2, 3\} = \mathbb{N}$. Протекание коалиционной игры будем рассматривать как согласованный выбор игроками (на «коалиционных совещаниях») коалиционных стратегий, после чего в сложившейся ситуации каждый участник игры получает свой выигрыш. Коалиция (от лат. *coalito* – союз) – добровольное объединение нескольких лиц (групп лиц) для достижения определенной цели. Коалиция \mathfrak{K} **внутренне устойчива** – каждому игроку невыгодно выходить из коалиции \mathfrak{K} , и **внешне устойчива**, если игрокам из $\mathbb{N} \setminus \mathfrak{K}$ невыгодно к \mathfrak{K} присоединяться.

Коалиционная структура – разбиение всего множества игроков \mathbb{N} на попарно непересекающиеся множества. В игре трех лиц таких коалиционных структур пять: $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathfrak{K}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{K}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathfrak{K}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\mathfrak{K}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Заметим, что в игре четырех лиц (где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$) таких коалиционных структур уже 15:

Тип структуры	Коалиционные структуры
{****}	{1,2,3,4}
{*},{***}	{{1},{2,3,4}}, {{2},{2,3,4}}, {{3},{1,2,4}}, {{4},{1,2,3}}
{**},{*},{*}	{{1,2},{3},{4}}, {{1,3},{2},{4}}, {{1,4},{2},{3}}, {{2,3},{1},{4}}, {{2,4},{1},{3}}, {{3,4},{1},{2}}
{**},{**}	{{1,2},{3,4}}, {{1,3},{2,4}}, {{1,4},{2,3}}
{*},{*},{*},{*}	{{1},{2},{3},{4}}

Следуя ляпуновской теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, будем считать, что коалиционная структура (КС) устойчива, если она сохраняется под действием внешних возмущений (воздействий). Итак, КС будем считать **устойчивой**, если никакой из коалиций (ее образующих) невыгодно «испортить» эту КС, то есть каждая коалиция из КС внутренне и внешне устойчива.

КС **индивидуально устойчива**, если [4, с. 74] она устойчива относительно индивидуальных отклонений (**возмущений**) игроков, которые ограничены четырьмя видами: игроки

– могут выйти из своей текущей коалиции и присоединиться к другой,

– могут «изменить» своим первоначально оговоренным стратегиям,

– могут одновременно осуществить оба оговоренных выше возмущения,

– наконец, коалиция, содержащая двух игроков, может распасться на две коалиции, включающих только по одному игроку.

Мы исключим из рассмотрения коалицию из всех игроков $\mathfrak{K}_1 = \{1, 2, 3\}$ (случай кооперативной игры), КС из отдельных игроков $\mathfrak{K}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (случай бескоалиционной игры), и ограничимся индивидуальной устойчивостью КС $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Тогда возмущения \mathfrak{K} сводятся

1) к объединению первого игрока со вторым в коалицию $\{1, 2\}$ и тем самым переход от коалиционной структуры \mathfrak{K} к структуре $\mathfrak{K}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$;

2) к объединению первого игрока с третьим в коалицию $\{1, 3\}$ и, в результате, к переходу от \mathfrak{K} к коалиционной структуре $\mathfrak{K}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$;

3) разбиение коалиции $\{2, 3\}$ на две отдельные коалиции $\{2\}$ и $\{3\}$, содержащие только по одному игроку;

Наконец, еще раз подчеркнем, что в этой работе ограничимся коалиционными играми **без побочных платежей** (с нетрансферабельными выигрышами).

2. Максимальность по Парето

Поводом к подготовке этой работы явились две, вышедшие недавно, статьи [1,4]. В [4] исследована индивидуальная устойчивость коалиционных структур в играх трех лиц с трансферабельными выигрышами (с побочными платежами) в статическом случае, в [1] «проглядывает» возможность рассмотреть аналогичную задачу, но уже для *дифференциальной* линейно-квадратичной позиционной игры с *нетрансферабельными выигрышами* (без побочных платежей), устойчивость базируется на паретовском равновесии угроз и контругроз из книги [2]. В настоящей работе будут изложены теоретические основы предлагаемого подхода и получены коэффициентные условия индивидуальной устойчивости для коалиционной структуры $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ в дифференциальной игре трех лиц (в нормальной форме)

$$\Gamma = \langle \{\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}\}, \Sigma, \{\mathfrak{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$x, u_i \in \mathbb{R}^n, \quad \vartheta = \text{const} > t_0 \geq 0, \quad A(\cdot) \in C^{n \times n}[0, \vartheta],$$

$$\mathfrak{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = P_i(t)x, \quad P_i(\cdot) \in C^{n \times n}[0, \vartheta]\} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$x(t) \Rightarrow u_i[t] = P_i(t)x(t), \quad u = (u_1, u_2, u_3),$$

$$J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u_j'[t] D_{ij} u_j[t] dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Игре Γ поставим в соответствие трехкритериальную динамическую задачу

$$\Gamma_v = \left\langle \Sigma, \mathfrak{U} = \prod_{j=1}^3 \mathfrak{U}_j, \{J_i(U = (U_1, U_2, U_3), t_0, x_0)\}_{i \in \mathbb{N}} \right\rangle.$$

Альтернатива U^P *максимальна по Парето* для Γ_v , если при $\forall U \in \mathfrak{U}$ и $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \{\mathbb{R}^n \setminus 0_n\}$ несовместна система неравенств

$$J_i(U, t_0, x_0) \geq J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

Далее $D > 0$ ($D < 0$) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно положительна (отрицательна), штрих сверху – операцию транспонирования.

В [1] было доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Пусть в дифференциальной игре Γ

1°. $n \times n$ -матрицы

$$D_{ii} > 0, D_{ij} < 0, C_i < 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i) \quad (1)$$

постоянные и симметричные;

2°.

$$[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}]. \quad (2)$$

Тогда при $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ максимальной по Парето будет ситуация

$$U^P \div u^P(t, x) = (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x); \quad (3)$$

при этом выигрыши равны

$$J^P = (J_1^P, J_2^P, J_3^P), J_i^P = x_0' \Theta_i(t_0) x_0 \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

Здесь непрерывные симметричные $n \times n$ -матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta^P(t) &= [X^{-1}(t)]' \{C^{-1} + \\ &+ \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau) [D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}] [X^{-1}(\tau)]' d\tau\}^{-1} X^{-1}(t), \\ \Theta_i(t) &= [Y^{-1}(t)]' \left\{ C_i - \int_t^\vartheta Y'(\tau) \Theta^P(\tau) M_i(\tau) \Theta^P(\tau) Y(\tau) d\tau \right\} Y^{-1}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $i \in \mathbb{N}$; $n \times n$ -матрица $X(t)$ ($Y(t)$) — фундаментальная матрица решения системы $\dot{x} = A(t)x, X(\vartheta) = E_n$ (соответственно $\dot{y} = N(t)y, Y(\vartheta) = E_n$); матрицы $C, N(t), M_i(t)$ определяются равенствами

$$C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3, D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3},$$

$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}) \Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t) [D_1^{-1} D_{i1} D_1^{-1} + D_2^{-1} D_{i2} D_2^{-1} + D_3^{-1} D_{i3} D_3^{-1}] \Theta^P(t), \quad (6)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right], \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\Lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right],$$

величина Λ_{ij} ($-\Lambda_{ij}$) — наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $\det[D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$) ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$).

3. Индивидуальная и коллективная рациональность

Перейдем еще раз к формализации понятия индивидуальная устойчивость коалиционной структуры (ИУКС).

Под решением задачи ИУКС в теории коалиционных игр обычно понимают пару $(U^P, J(U^P, t_0, x_0)) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^3$, тем самым отвечая сразу на два вопроса:

- a) какие действия (стратегии) рекомендуется использовать в Γ ?
- b) какой выигрыш $J_i(U^P, t_0, x_0)$ ($i \in \mathbb{N}$) каждый игрок при этом получит?

В теории коалиционных игр первоначальными требованиями для этого являются выполнения условий *индивидуальной и коллективной рациональности*. Условие индивидуальной рациональности сводится к выигрышу каждым игроком величины не меньшей его максимального значения, а коллективная рациональность означает максимальность по Парето в Γ_v ситуации U^P , входящей в решение. Согласно приведенному выше утверждению, выполнение требований (1) и (2) достаточно для коллективной рациональности решения задачи ИУКС, при этом его явный вид определяется в (3) и (4).

Условие индивидуальной рациональности снимается для игры Γ , ибо, согласно приводимой ниже лемме 3.2, при выполнении условия $D_{ij} < 0$ ($i \neq j$) из (1) в игре Γ отсутствуют максимины.

Перейдем к вспомогательным утверждениям, которые

- *во-первых*, позволили сразу судить об отсутствии в дифференциальных играх вида Γ равновесия по Нэшу (конечно, при выполнении условий (1) и (2));

- *во-вторых*, реализовали для Γ концепцию равновесия угроз и контругроз;

- *в-третьих*, в конце концов, обеспечивают индивидуальную устойчивость КС $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

Причем эти сведения получаются на основании специальной знакоопределенности квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша $J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)$ ($i \in \mathbb{N}$)

Не оговаривая особо, далее предполагаем, что выполнены ограничения (1) и (2) и поэтому существует максимальная по Парето в

Γ_v ситуация

$$\begin{aligned} U^P &= (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div (u_1^P(t, x), u_2^P(t, x), u_3^P(t, x)) = u^P(t, x) = \\ &= (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, Q_3^P(t)x) = \\ &= (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x), \end{aligned}$$

и соответствующие выигрыши $J^P = (J_1^P, J_2^P, J_3^P)$.

Перейдем к вспомогательным утверждениям.

Лемма 3.1. (из [1, с. 57]). Пусть в $J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)$ ($i \in \mathbb{N}$) при $i = 1$ матрица $D_{11} > 0$, тогда для максимальной по Парето в Γ ситуации U^P существует постоянная $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такая, что при $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ и стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ будет

$$J_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)$$

для всех возможных начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \{\mathbb{R}^n \setminus 0_n\}$, и стратегия U_1^T реализует угрозу [2, с.45] на ситуацию U^P .

Очевидна эквиваленция

$$[D > 0] \Leftrightarrow [-D < 0],$$

где $(-D)$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на -1 .

Тогда лемма 3.1 приводит к справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2. (из [1, с. 62]). Пусть в $J_2(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)$ матрица $D_{12} < 0$. Тогда существует постоянная $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) > 0$ такая, что для стратегии второго игрока $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ будет

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0),$$

то есть стратегия $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ реализует в игре Γ неполную контругрозу [2, с.45] в ответ на угрозу U_1^T первого игрока.

Аналогично леммам 3.1 и 3.2 устанавливается справедливость следующих двух утверждений (леммы 3.3 и 3.4). В них считаем «замороженными» начальную позицию (t_0, x_0) , $n \times n$ -непрерывную матрицу $\Theta^P(t)$, стратегию $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$ неполной угрозы, фигурирующие в леммах 3.1 и 3.2.

Лемма 3.3. (из [1, с. 65]) *Имеет место импликация $D_{22} > 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(3)} = \alpha^{(3)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) = \text{const} > 0$ такая, что при $\forall \alpha \geq \alpha^{(3)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0)$ и стратегии $U_2^C \div \alpha x$ будет*

$$J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0),$$

то есть стратегия второго игрока $U_2^C \div (\max\{\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\})x$ завершает [2, с.45] полную контругрозу (совместно с $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$) на угрозу первого на U^P .

Аналогично лемме 3.2 доказывается

Лемма 3.4. (из [1, с. 66]) *Пусть U_2^T – угроза второго игрока на максимальную по Парето в Γ_v ситуацию $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$, то есть нашлась стратегия $U_2^T \div \alpha x$ такая, что при $\alpha \geq \alpha^{(2)}(U^P, t_0, x_0)$*

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U^P, t_0, x_0),$$

(такая стратегия U_2^T существует вследствие $D_{22} > 0$).

Тогда справедлива импликация

$$D_{21} < 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(4)} = \text{const} > 0 : \forall \alpha = \text{const} \geq \alpha^{(4)} \\ J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U^P, t_0, x_0)$$

для стратегии $U_1^C \div \alpha x$, то есть U_1^C реализует в игре Γ неполную контругрозу на ситуацию U^P .

4. К устойчивости коалиционной структуры $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

Перейдем теперь к формализации понятия индивидуальной устойчивости коалиционной структуры \mathfrak{K} для дифференциальной игры Γ .

Определение 4.1. *Коалиционную структуру $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ назовем индивидуально устойчивой в коалиционной дифференциальной игре трех лиц Γ относительно максимальной по Парето в трехкритериальной задаче Γ_v ситуации U^P , если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \{\mathbb{R}^n \setminus 0_n\}$*

1⁰) на угрозу выхода из коалиции $\{2, 3\}$ игрока 2, путем применения любой стратегии $U_2^T \in \mathfrak{U}_2$ такой, что

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U^P, t_0, x_0),$$

у игрока 3 имеется контругроза применения стратегии $U_3^C \in \mathfrak{U}_3$, при которой

$$\begin{aligned} J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &< J_1(U^P, t_0, x_0), \\ J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &< J_2(U^P, t_0, x_0), \\ J_3(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &> J_3(U^P, t_0, x_0); \end{aligned}$$

2⁰) на угрозу выхода из коалиции {2, 3} игрока 3, путем применения любой стратегии $U_3^T \in \mathfrak{U}_3$ такой, что

$$J_3(U_1^P, U_2^P, U_3^T, t_0, x_0) > J_3(U^P, t_0, x_0),$$

у игрока 2 имеется контругроза применения стратегии $U_2^C \in \mathfrak{U}_2$, при которой

$$\begin{aligned} J_1(U_1^P, U_2^C, U_3^T, t_0, x_0) &< J_1(U^P, t_0, x_0), \\ J_2(U_1^P, U_2^C, U_3^T, t_0, x_0) &> J_2(U^P, t_0, x_0), \\ J_3(U_1^P, U_2^C, U_3^T, t_0, x_0) &< J_3(U^P, t_0, x_0); \end{aligned}$$

2⁰) на угрозу отклонения коалиции {2, 3} от U^P путем применения набора стратегий $(U_2^T, U_3^T) \in \mathfrak{U}_2 \times \mathfrak{U}_3$, при котором

$$\begin{aligned} J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) &> J_2(U^P, t_0, x_0), \\ J_3(U_1^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) &> J_3(U^P, t_0, x_0), \end{aligned}$$

у игрока 3 имеется контругроза применения стратегии $U_3^C \in \mathfrak{U}_3$, при которой

$$\begin{aligned} J_1(U_1^C, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &> J_1(U^P, t_0, x_0), \\ J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &< J_2(U^P, t_0, x_0), \\ J_3(U_1^C, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) &< J_3(U^P, t_0, x_0). \end{aligned}$$

Итак, нами формализовано решение задачи ИУКС \mathfrak{K} с помощью пары $(U^P, J(U^P, t_0, x_0)) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^3$, где U^P – максимальная по Парето ситуация в трехкритериальной задаче Γ_v . Это решение будет устойчивым, если какие бы возможные возмущения не «обрушились» на \mathfrak{K} , они, как сейчас модно говорить, «обнулялись» контрмерами. Выше перечислены четыре вида возможных в игре Γ возмущений. Уточним их.

Игрок 2: объединяется с игроком 1 в коалицию $\{1, 2\}$, тем самым переводит КС \mathfrak{K} в $\mathfrak{K}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Ограничение $D_{22} > 0$ (и аналог леммы 3.1) обеспечит игроку 2 существование стратегии $U_2^T \div \alpha x$ такой, что, во-первых, $U_2^T \in \mathfrak{U}_2$, во-вторых, существует такая постоянная $\alpha^{(2)}(U^P, t_0, x_0)$, что при $\forall \alpha > \alpha^{(2)}(U^P, t_0, x_0)$ будет

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U^P, t_0, x_0). \quad (7)$$

Таким образом, игрок 2 обладает угрозой на КС \mathfrak{K} , ибо, применяя U_2^T , он увеличит свой выигрыш по сравнению с паретовским $J_2(U^P, t_0, x_0)$. Заметим, что выигрыш его партнера по новой коалиции $\{1, 2\}$ при этом станет $J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0)$. Далее считаем стратегию U_2^T и начальную позицию (t_0, x_0) «замороженными».

«Оставшись в одиночестве» (в коалиции $\{3\}$) игрок 3 может принять контрмеры (контругрозу). Согласно $D_{23} < 0$, $D_{13} < 0$, $D_{33} > 0$ и леммам 3.2 и 3.4, игрок 3 может использовать свою стратегию контругроз $U_3^C \in \mathfrak{U}_3$ $U_3^C \div \alpha x$ такую, что, во-первых,

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) < J_2(U^P, t_0, x_0), \quad (8)$$

$$J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0), \quad (9)$$

$$J_3(U_1^P, U_2^T, U_3^C, t_0, x_0) > J_3(U^P, t_0, x_0), \quad (10)$$

во-вторых, при этом будет выполняться (8) при $\forall \alpha > \alpha^{(8)}(U^P, U_2^T, t_0, x_0)$, строгое неравенство (9) для $\forall \alpha > \alpha^{(9)}(U^P, U_2^T, t_0, x_0)$, и, наконец, (10) при $\forall \alpha > \alpha^{(10)}(U^P, U_2^T, t_0, x_0)$.

Тогда для стратегии $U_3^C \in \mathfrak{U}_3$ годится любая постоянная $\alpha \geq \max(\alpha^{(8)}, \alpha^{(9)}, \alpha^{(10)})$. Неравенства (8) и (9) «наказывают» игроков 1 и 2 за применение угрозы U_2^T , а (10) толкает игрока (3) использовать стратегию «наказания» U_3^C . Итак, для каждой стратегии угрозы второго игрока U_2^T существует «своя» стратегия «наказания» U_3^C (у игрока 3), что «сводит на нет» применение U_2^T .

Игрок 3: объединяясь с игроком 1 в коалицию $\{1, 3\}$, тем самым переводит КС \mathfrak{K} в $\mathfrak{K}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$. Используя затем $D_{22} > 0$, игрок может сформировать (с помощью аналога леммы 3.1) стратегию угрозы U_2^T , а затем, согласно $D_{12} < 0$, $D_{32} < 0$, $D_{22} > 0$ и аналогу лемм 3.2 и 3.4, контругрозу $U_2^C \in \mathfrak{U}_2$ игрока 2, «обнуляющую» возможное действие угрозы U_2^T .

Таким образом, как и в предыдущем случае (игрок 2) возникает бесполезность применения в игре Γ угрозы U_2^T .

Коалиция $\{2, 3\}$: угрозой коалиции $\{2, 3\}$ на КС \mathfrak{K} является существование набора стратегий $(U_2^T, U_3^T) \in \mathfrak{U}_2 \times \mathfrak{U}_3$, при этом «улучшаются» выигрыши членов коалиции по сравнению с паретовскими:

$$\begin{aligned} J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) &> J_2(U^P, t_0, x_0), \\ J_3(U_1^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) &> J_3(U^P, t_0, x_0). \end{aligned}$$

Согласно аналогу лемм 3.2 и 3.4, а также $D_{21} < 0$, $D_{31} < 0$, существуют числа $\alpha_i^{(11)}(U^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) > 0$ ($i = 2, 3$) такие, что при $\forall \alpha \geq \max_{i=2,3} \alpha_i^{(11)}(U^P, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0)$ для стратегии первого игрока $U_1^C \div \alpha x$ будет

$$J_j(U_1^C, U_2^T, U_3^T, t_0, x_0) < J_j(U^P, t_0, x_0) \quad (j = 2, 3),$$

то есть коалиция $\{2, 3\}$ «наказывается» за угрозу. Здесь, как и в предыдущих двух случаях, «обнуляется» действие стратегии угрозы (U_2^T, U_3^T) за счет применения контругрозы $U_1^C \in \mathfrak{U}_1$.

Можно здесь применять и другой способ контрвозмущения, именно, в качестве возмущения использовать разделение коалиции $\{2, 3\}$ на две самостоятельные одноэлементные коалиции $\{2\}$ и $\{3\}$, с последующим (благодаря аналогу леммы 3.1 и $D_{22} > 0$, $D_{33} > 0$) применением игроком 2 стратегии $U_2^C \div \alpha x$ при любой постоянной $\alpha \geq \alpha(U^P, U_2^T, t_0, x_0) > 0$, а игроком 3 использованием стратегии $U_3^C \div \alpha x$ при любой постоянной $\alpha \geq \alpha(U^P, U_3^T, t_0, x_0) > 0$.

Таким образом, каждый из видов возмущений каждой из коалиций $\{1\}$, $\{2, 3\}$ КС \mathfrak{K} «не портит» внутреннюю и внешнюю устойчивость КС \mathfrak{K} , которая поэтому и является индивидуально устойчивой.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть для дифференциальной игры Γ выполнены требования (1) и (2). Тогда коалиционная структура \mathfrak{K} индивидуально устойчива относительно определенной в (3) ситуации U^P .

5. Заключение

Итак, в статье [1] было установлено, что в линейно-квадратичной позиционной дифференциальной игре Γ при выполнении ограниче-

ний (1) и (2) не существует равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт показывает, как указывалось в [1], настоятельную необходимость дополнительных исследований свойств этого равновесия, вопросов существования, нахождения других классов игр (и не дифференциальных тоже), а теперь, уже после этой статьи, для исследования вопросов устойчивости других коалиционных структур в играх с числом игроков более трех. Именно для этой цели и приведена таблица возможных 15 КС в игре четырех лиц. В заключение также отметим, что «нечто похожее» на пропагандируемый в данной статье подход к исследованию устойчивости КС в играх без побочных платежей был предпринят в 1996 г. в статье [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский В.И., Житенева Ю.Н., Бельских Ю.А. *Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц* // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, вып. 1. С. 39–72.
2. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры*. М.: Юрайт, 2017.
3. Жуковский В.И., Григорьев А.А. *Устойчивость коалиционной структуры в одной дифференциальной игре* // Сложные управляемые системы. М.: РосЗИТЛП. 1996. С. 94–97.
4. Сунь Ф., Парилина Е.М., Гао Х. *Индивидуальная устойчивость коалиционных структур в играх трех лиц* // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, вып. 1. С. 73–95.

TO THE INDIVIDUAL STABILITY OF PARETO
EQUILIBRIUM OF OBJECTIONS AND
COUNTEROBJECTIONS IN A COALITION
DIFFERENTIAL POSITIONAL 3-PERSON GAME
WITHOUT SIDE PAYMENTS

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof.
(zhkvlad@yandex.ru).

Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc.
(kudrkn@gmail.com).

Lydia V. Zhukovskaya, Central Economics and Mathematics
Institute RAS, Dr.Sc. (zhukovskaylv@mail.ru).

Irina S. Stabulit, South Ural State University (stabulitis@susu.ru).

Abstract: The notion «individual stability» of Pareto equilibrium of objections and counter objections in one differential linear-quadratic 3-person game without side payments is used. The explicit form corresponding equilibrium is found.

Keywords: equilibrium of objections and counter objections, coalition games, individual stability, differential games.