

УДК 519.83, 519.86

ББК 22.18

ПЕРЕХОДНАЯ ДИНАМИКА В СЕТЕВОЙ ИГРЕ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ АГЕНТАМИ: СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

АЛЕКСЕЙ В. КОРОЛЕВ

Санкт-Петербургский филиал

Национального исследовательского университета

«Высшая школа экономики»

190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

e-mail: danitschi@gmail.com

В данной статье вводятся стохастические параметры в модели сетевой игры с производством и экстерналиями знаний. Исходная модель была сформулирована В.Д. Матвеевко и А.В. Королевым и представляла собой обобщение простой двухпериодной модели Ромера, перенесенной на сети. В рассматриваемой модели продуктивности агентов имеют не только детерминистскую, но и винеровскую составляющие. В работе изучается динамика изолированного агента и динамика в треугольнике, возникающая при объединении агентов. Получено явное выражение динамики в форме броуновского случайного процесса. Выполнен качественный анализ поведения решений стохастического уравнения и системы стохастических уравнений.

Ключевые слова: сетевые игры, дифференциальные игры, равновесие Нэша, броуновское движение, стохастические дифференциальные уравнения, лемма Ито, гетерогенные агенты, продуктивность.

Поступила в редакцию: 04.10.2020 *После доработки:* 21.12.2020 *Принята к публикации:* 09.03.2021

1. Введение

В последние десятилетия развивались исследования в таких областях, как анализ социальных сетей, экономика сетей и игры на сетях (напр., [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10]). Многочисленные теоретические результаты в этих областях привели к широкому распространению реальных сетей, таких как интернет, отношения людей в коллективах и населенных пунктах, отношения между странами и т.д. Однако до сих пор недостаточное внимание в литературе уделялось сетям с производством. В [11] рассмотрена модель с производством и экстерналиями знаний, обобщающая модель Ромера с двумя временными периодами [14], где по существу изучается специальный случай полной сети. Агенты, владеющие исходным запасом в первом периоде, находятся в вершинах сети произвольной формы. Агенты распределяют свой начальный запас между инвестициями в знания и потреблением.

Потребление во втором периоде определяется производством, которое зависит как от инвестиций самого агента, так и от инвестиций его соседей по сети. Полезность агента определяется его потреблением в обоих периодах.

В [11] вводится понятие равновесия Нэша с экстерналиями, при котором, как и при обычном равновесии Нэша, агенты максимизируют свои выигрыши и ни одному из агентов не выгодно менять свою стратегию, в случае, если остальные агенты не меняют своего поведения. Однако в этой модели предполагается, что агент не способен полностью произвольно менять свое поведение, как это позволяет понятие равновесия Нэша, а в определенном смысле агент привязан к равновесной ситуации в данной игре. Более точно, в [11] предполагается, что агент принимает решение, в то время как определенная среда сформирована им и его соседями и он включен в формирование среды в момент принятия решения, но среда в этот момент рассматривается им как экзогенно заданная.

Однако, в [11] рассматривались только сети с однородными агентами. В [12] изучалось обобщение модели [11] в котором продуктивности агентов могут быть различными. Выяснялись условия, при которых агент в равновесии ведет себя тем или иным образом: пассивен (не инвестирует), активен (инвестирует часть дохода), гиперактивен

(инвестирует весь доход). Также были найдены условия существования внутреннего равновесия (т.е. равновесия, при котором все агенты активны) для некоторых сетей и доказана теорема о сравнении полезностей агентов. Введена динамика сетей в дискретном времени, определено понятие динамической устойчивости равновесий. Переходные процессы между состояниями равновесия, которые возникают при объединении сетей, изучались в [12] также в дискретном времени.

В [13] динамика в сетях с производством и экстерналиями знаний и понятие динамической устойчивости равновесий рассматривались в непрерывном времени. Однако во всех названных работах параметры сетей были детерминированными. В данной статье рассматривается описание переходной динамики в стохастическом случае, когда продуктивность агента имеет как детерминистскую, так и броуновскую компоненты. Изучается поведение изолированного агента и агентов в треугольнике. Оказывается, что границы различных сценариев поведения агентов в стохастическом случае сдвигаются по сравнению с детерминированным случаем.

Дальнейшее содержание статьи следующее. Второй раздел содержит описание нашей основной модели и обзор предшествующих результатов. В частности, даны определения равновесия Нэша в сети с производством и экстерналиями знаний и динамической устойчивости равновесия. Также во втором разделе приводится характеристика типов поведения агентов, т.е. создаются основные инструменты анализа. В конце раздела формулируется новая модификация модели. Третий раздел содержит динамику изолированного агента в детерминистском и стохастическом случаях. Получено явное выражение динамики агента в форме броуновского случайного процесса (Предложение 3.1). Выполнен качественный анализ решения стохастического уравнения (Следствие 3.2). В четвертом разделе изучается динамика в треугольнике для стохастического случая. Получено явное решение системы стохастических дифференциальных уравнений в форме броуновского случайного процесса (Теорема 4.1). Проведен качественный анализ решения (Следствие 4.1). В пятом разделе подводятся итоги и перечисляются возможные направления дальнейших исследований.

2. Детерминистская модель и обзор основных результатов

Начнем с описания основной модели и перечисления некоторых ее свойств, так как наша новая модель отличается от исходной модели стохастической природой параметров. Основная модель, которую мы рассматриваем (детерминистская версия) была сформулирована в [11] и представляет собой перенесение на сеть обобщенной модели Ромера [14].

Имеется сеть (неориентированный граф), с n вершинами, $i = 1, 2, \dots, n$; каждая вершина представляет агента. В период 1 каждый агент i обладает начальным запасом блага, e , и использует его частично для потребления в первый период жизни, c_1^i , и частично для инвестиций в знания, k_i , которые используются при производстве блага для потребления во втором периоде жизни,

$$c_1^i + k_i = e, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Инвестиции непосредственно и взаимно-однозначно трансформируются в знания, которые используются в производстве благ для потребления во втором периоде, c_2^i .

Функция полезности должна обладать некоторыми естественными для нее свойствами: быть возрастающей по потреблению в обоих периодах и быть вогнутой по обоим аргументам. Был выбран наиболее простой вид такой функции, когда она возрастает по первому аргументу (в рассматриваемом диапазоне его значений) и строго вогнута (квадратична) по первому аргументу, а по второму аргументу – возрастает и нестрого вогнута (линейна).

Предпочтения агента i описываются квадратичной функцией полезности:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + b_i c_2^i,$$

где a – коэффициент насыщения, $b_i > 0$ представляет собой параметр, характеризующий ценность комфорта и здоровья во втором периоде жизни по сравнению с потреблением в первом периоде. Предполагается, что $c_1^i \in [0, e]$, полезность возрастает по c_1^i , и функция полезности вогнута (предельная полезность убывает) по отношению к c_1^i . Достаточным условием для выполнения данных предположений является условие $0 < a < 1/2$.

Средой агента i будем называть сумму инвестиций самого агента и его соседей:

$$K_i = k_i + \tilde{K}_i, \tilde{K}_i = \sum_{j \in N(i)} k_j,$$

где $N(i)$ – множество вершин, соседствующих с вершиной i ; сумму инвестиций соседей, \tilde{K}_i , будем называть *чистой экстерналией*. Производство в вершине i описывается производственной функцией,

$$c_2^i = F(k_i, K_i) = B_i k_i K_i, \quad B_i > 0,$$

которая зависит от состояния знаний в i -ой вершине, k_i , и от среды, K_i , а B_i – технологический коэффициент.

Будем обозначать произведение $b_i B_i$ через A_i и предположим, то $a < A_i$. Величина потребления во втором периоде пропорциональна B_i при постоянных значениях k_i и K_i , что непосредственно следует из определения производственной функции, а предельная полезность этого потребления равна b_i , что непосредственно следует из определения функции полезности. Поскольку увеличение любого из параметров b_i , B_i способствует увеличению потребления во втором периоде, будем называть A_i *продуктивностью*. Будем предполагать, что $A_i \neq 2a$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если $A_i > 2a$, будем говорить, что i -ый агент продуктивен, а если $A_i < 2a$, будем говорить, что i -ый агент непродуктивен.

Возможны три способа поведения агента: агент i называется *пассивным*, если он делает нулевые инвестиции, $k_i = 0$ (т.е. потребляет весь свой начальный запас в первом периоде); *активным* – если $0 < k_i < e$; *гиперактивным* – если он делает максимально возможные инвестиции, $k_i = e$ (т.е. ничего не потребляет в первом периоде).

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты, $i = 1, 2, \dots, n$. Стратегиями игрока i являются значения инвестиций k_i из промежутка $[0, e]$. *Равновесие Нэша с экстерналиями* (для краткости *равновесие* – это профиль уровней знаний (инвестиций) $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$, таких, что каждое k_i^* является решением следующей задачи $P(K_i)$ максимизации полезности i -го игрока при данной среде K_i^* :

$$U_i(c_1^i, c_2^i) \xrightarrow{c_1^i, c_2^i} \max \begin{cases} c_1^i \leq e - k_i, \\ c_2^i \leq F(k_i, K_i^*), \\ c_1^i \geq 0, c_2^i \geq 0, k_i \geq 0, \end{cases}$$

где среда K_i^* определяется профилем $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$:

$$K_i^* = k_i^* + \sum_{j \in N(i)} k_j^*.$$

При любых значениях k_i максимум функции $U_i(c_1^i, c_2^i)$ достигается при $c_1^i = e - k_i$, $c_2^i = F(k_i, K_i^*)$, т.е. первые два ограничения задачи $P(K_i)$ в точке оптимума, очевидно, выполняются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, получаем новую функцию (*платежную функцию*, или *косвенную функцию полезности*):

$$V_i(k_i, K_i) = U_i(e - k_i, F_i(k_i, K_i)) = (e - k_i)(e - a(e - k_i)) + A_i k_i K_i = e^2(1 - a) - k_i e(1 - 2a) - a k_i^2 + A_i k_i K_i. \quad (2.1)$$

Если все решения игроков внутренние ($0 < k_i^* < e$), т.е. все игроки активны, то равновесие будем называть *внутренним* равновесием. В противном случае (если в состоянии равновесия среди игроков найдется хотя бы один не активный, а пассивный или гиперактивный игрок), то данное равновесие называется *угловым* равновесием. Угловое равновесие, в котором уровень знаний в каждой вершине равен 0 или e , т.е. все игроки пассивны или гиперактивны, будем называть *чисто угловым* равновесием. Таким образом, чисто угловое равновесия является частным случаем углового равновесия. Ясно, что внутреннее равновесие (если оно существует для данных значений параметров) определено системой уравнений

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

или, в соответствии с (2.1),

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = e(2a - 1) - 2a k_i + A_i K_i = 0, \quad (2.3)$$

где D_1 обозначает частную производную от функции нескольких переменных по первому аргументу.

Введем следующие обозначения: \tilde{A} – диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся числа A_1, A_2, \dots, A_n , I – единичная $n \times n$ -матрица, M – матрица смежности сети. В этой матрице $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если существует дуга, соединяющая вершины i и j , и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ – в противном случае. Считаем, что $M_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Система уравнений (2.3) принимает форму:

$$(\tilde{A} - 2aI)k + \tilde{A}Mk = \bar{e}, \quad (2.4)$$

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T$, $\bar{e} = (e(1 - 2a), e(1 - 2a), \dots, e(1 - 2a))^T$.

Теорема 2.1. ([12], теорема 1.1) Система уравнений (2.4) для полной сети имеет единственное решение.

Компоненты этого решения мы будем обозначать k_i^s и называть стационарными значениями инвестиций. Во внутреннем равновесии $k_i^* = k_i^s$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Центральную роль в анализе равновесий в детерминистской версии модели играет следующее утверждение.

Предложение 2.1. ([12], леммы 2.1, 2.2 и следствие 2.1) В равновесии:

агент i пассивен тогда и только тогда когда

$$K_i \leq \frac{e(1 - 2a)}{A_i};$$

агент i активен, тогда и только тогда когда

$$\frac{e(1 - 2a)}{A_i} < K_i < \frac{e}{A_i},$$

или, что равносильно,

$$k_i = \frac{e(2a - 1) + A_i \tilde{K}_i}{2a - A_i}, \quad 0 < k_i < e;$$

агент i гиперактивен, тогда и только тогда когда

$$K_i \geq \frac{e}{A_i}.$$

В [12] вводится динамика приспособления в дискретном времени, которая может начаться после малого отклонения стратегий агентов от положения равновесия или после объединения сетей, каждая из которых до объединения находилась в положении равновесия. В [13] динамика приспособления определяется в непрерывном времени.

Определение 2.1. ([12], определение 5). *Каждый агент максимизирует свою полезность, выбирая уровень инвестиций; в момент принятия решения он рассматривает свою среду как экзогенно заданную. Поэтому, в непрерывном времени, если $k_i(t) = 0$ и $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leq 0$ или если $k_i(t) = e$ и $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geq 0$, где t – произвольный момент времени, $\dot{k}_i(t) = 0$; во всех остальных случаях $k_i(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\dot{k}_i = \frac{A_i}{2a} \tilde{K}_i + \frac{A_i - 2a}{2a} k_i - \frac{e(1 - 2a)}{2a}.$$

Определение 2.2. ([13], определение 6). *Равновесие называется динамически устойчивым, если после малого отклонения одного из агентов от равновесия начинается динамика, которая возвращает сеть в начальное состояние. В противном случае равновесие называется динамически неустойчивым.*

Следующей естественной задачей является отказ от детерминизма и переход к стохастическим параметрам агентов в нашей модели. Предположение о наличии стохастической компоненты продуктивностей агентов представляется совершенно реалистичным, в то время как начальный запас агентов по своей природе и смыслу является постоянной величиной.

В новой версии модели продуктивность каждого агента имеет не только детерминированную A , но также и броуновскую (винеровскую) составляющую αW_t ($W_0 = 0$). Таким образом, полная продуктивность i -го агента равна теперь $A_i + \alpha W_t^i$. Остальные предположения остаются теми же самыми, что и в нашей основной модели.

3. Динамика приспособления изолированного агента

Рассмотрим сначала динамику изолированного агента. Мы предположили, что детерминированная составляющая его продуктивности A не зависит от времени, а его начальные инвестиции в момент

времени $t = 0$ были $k(0) = k_0$. Тогда продуктивность агента равна $A + \alpha W_t$ ($W_0 = 0$), динамика изолированного агента выражается следующим уравнением:

$$\dot{k} = \left(\frac{A + \alpha W_t}{2a} - 1 \right) k - \frac{e(1 - 2a)}{2a}, \quad (3.1)$$

или, в дифференциальной форме,

$$dk = \left(\frac{A}{2a} - 1 \right) k dt + \frac{\alpha}{2a} k dW_t - \frac{e(1 - 2a)}{2a} dt. \quad (3.2)$$

Предложение 3.1. Динамика инвестиций в знания изолированного агента такова:

$$k(t) = \exp\{-\Psi_t\} \left(k_0 - \frac{e(1 - 2a)}{2a} \int_0^t \exp\{\Psi_\tau\} d\tau \right) = \exp\{\lambda t + \mu W_t - \frac{\mu^2}{2} t\} k_0 - \frac{e(1 - 2a)}{2a} \int_0^t \exp\{\lambda(t - \tau) - \frac{\mu^2}{2}(t - \tau) + \mu(W_t - W_\tau)\} d\tau. \quad (3.3)$$

где

$$\lambda = \frac{A}{2a} - 1, \quad \mu = \frac{\alpha}{2a}, \quad \Psi_t = -\lambda t - \mu W_t + \frac{1}{2} \mu^2 t. \quad (3.4)$$

Доказательство. Умножая уравнение (3.2) на $\exp\{\Psi_t\}$, с учетом обозначений (3.4), получаем

$$\exp\{\Psi_t\} dk = \lambda k \exp\{\Psi_t\} dt + \mu k \exp\{\Psi_t\} dW_t - \frac{e(1 - 2a)}{2a} \exp\{\Psi_t\} dt. \quad (3.5)$$

Заметим, что по лемме Ито:

$$d \exp\{\Psi_t\} = -\lambda \exp\{\Psi_t\} dt - \mu \exp\{\Psi_t\} dW_t + \frac{1}{2} \mu^2 \exp\{\Psi_t\} dt + \frac{1}{2} \mu^2 \exp\{\Psi_t\} dt = \exp\{\Psi_t\} (-\lambda dt - \mu dW_t + \mu^2 dt), \quad (3.6)$$

и, следовательно, учитывая (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned} d(k \exp\{\Psi_t\}) &= \exp\{\Psi_t\} dk + k d \exp\{\Psi_t\} + dk d \exp\{\Psi_t\} = \\ &= \lambda k e^{\Psi_t} dt + \mu k e^{\Psi_t} dW_t - \frac{e(1 - 2a)}{2a} e^{\Psi_t} dt + \\ &+ k \exp\{\Psi_t\} (-\lambda dt - \mu dW_t + \mu^2 dt) - \mu^2 k \exp\{\Psi_t\} dt = \\ &= -\frac{e(1 - 2a)}{2a} \exp\{\Psi_t\} dt. \end{aligned}$$

Записывая данный результат в конечной форме, получаем (3.3). \square

Предложение 3.2. Математическое ожидание геометрического броуновского движения без сноса, т.е. $\exp\{\mu W_t\}$, где $W_0 = 0$, равно $\exp\{\frac{\mu^2}{2}t\}$.

Доказательство. По лемме Ито

$$d \exp\{\mu W_t\} = \mu \exp\{\mu W_t\} dW_t + \frac{1}{2} \mu^2 \exp\{\mu W_t\} dt,$$

или, в конечной форме,

$$\exp \mu W_t = \exp\{\mu W_0\} + \mu \int_0^t \exp\{\mu W_s\} dW_s + \frac{1}{2} \mu^2 \int_0^t \exp\{\mu W_s\} ds. \quad (3.7)$$

Беря математическое ожидание от обеих частей (3.7) и учитывая свойства броуновских процессов $E \left[\int_0^t \exp\{\mu W_s\} dW_s \right] = 0$, получаем

$$E [\exp\{\mu W_t\}] = E [\exp\{\mu W_0\}] + \frac{1}{2} \mu^2 \int_0^t E [\exp\{\mu W_s\}] ds,$$

или

$$\frac{d}{dt} E [\exp\{\mu W_t\}] = \frac{1}{2} \mu^2 E [\exp\{\mu W_t\}], \quad E [\exp\{\mu W_0\}] = 1.$$

Решая данное дифференциальное уравнение, находим

$$E [\exp\{\mu W_t\}] = \exp\{\frac{\mu^2}{2}t\}.$$

□

Замечание 3.1. Математическое ожидание стохастического процесса $k(t)$, соответствующего (3.3), равно

$$\begin{aligned} E [k(t)] &= \exp\{\lambda t\} k_0 + \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\{\lambda(t-\tau)\} d(t-\tau) = \\ &= (k_0 - k^s) \exp\{\frac{A-2a}{2a}t\} + k^s, \end{aligned}$$

где

$$k^s = \frac{e(1-2a)}{A-2a}$$

– стационарное значение инвестиций.

Таким образом, динамика математического ожидания величины инвестиций в знания изолированного агента совпадает с динамикой его инвестиций в знания в детерминистском случае, когда $\alpha = 0$, т.е. с решением уравнения (3.1) с начальными условиями $k(0) = k_0$, которое, очевидно, также равно

$$k(t) = (k_0 - k^s) e^{\frac{A-2a}{2a}t} + k^s. \quad (3.8)$$

Однако границы различных сценариев поведения агента (и само поведение) в стохастическом случае очевидным образом изменяются по сравнению с детерминистским случаем.

Замечание 3.2. В детерминистском случае, из двух возможных угловых равновесий равновесие $k = 0$ всегда возможно, согласно предложению 2.1, и всегда устойчиво, потому что, согласно формуле (2.1),

$$D_1V(0, 0) = e(2a - 1) < 0,$$

а равновесие $k = e$, согласно предложению 2.1, возможно, если $A \geq 1$, и устойчиво, если $A > 1$, так как согласно (2.1),

$$D_1V(e, e) = e(2a - 1) - 2ae + Ae = Ae - e.$$

Внутреннее равновесие

$$k^* = k^s = \frac{e(1 - 2a)}{A - 2a},$$

в соответствии с предложением 2.1, возможно тогда и только тогда, когда $0 < k^s < e$, т. е. когда $A > 2a$, $A > 1$.

Внутреннее равновесие неустойчиво, так как корень характеристического уравнения для (3.1) при тех значениях параметров, при которых равновесие возможно, положителен: $\lambda = (A - 2a)/2a > 0$.

Следствие 3.1. *В детерминистском случае возможны следующие варианты.*

1) $A < 2a < 1$. Тогда $k^s < 0$, $\lambda < 0$, поэтому при любом начальном значении $k_0 \in [0, e]$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

2) $2a < A < 1$. Тогда $k^s > e$, $\lambda > 0$, поэтому при любом начальном значении $k_0 \in [0, e]$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

3) $A = 1$. Тогда $k^s = e$, $\lambda > 0$, поэтому при любом начальном значении $k_0 \in [0, e)$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0,$$

а при начальном значении $k_0 = e$, агент остается в неустойчивом равновесии $k = e$, но при малейшем отклонении от этого положения начинает уменьшать свои инвестиции и приходит к устойчивому равновесию $k = 0$.

4) $A > 1 > 2a$. Тогда $k^s \in (0, e)$, $\lambda > 0$, поэтому возможны три случая. Если $k_0 \in [0, k^s)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

Если $k_0 \in (k^s, e]$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = e.$$

Если же $k_0 = k^s$ то агент остается в этом неустойчивом равновесии $k = k^s$, но при малейшем отклонении от него, будет продолжать двигаться в ту же сторону, в которую произошло отклонение, и придет, соответственно, к одному из двух устойчивых равновесий $k = 0$ или $k = e$.

В стохастическом случае мы будем использовать закон повторного логарифма.

Теорема 3.1. ([9], закон повторного логарифма) Для одномерного броуновского движения W_t , имеет место равенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \quad a.s.,$$

где *a.s.* обозначает почти наверное, т.е. за исключением множества исходов меры ноль.

Перепишем выражение (3.3), принимая во внимание обозначения (3.4), следующим образом:

$$k(t) = \exp\left\{\frac{A-2a}{2a}t + \frac{\alpha}{2a}W_t - \frac{\alpha^2}{8a^2}t\right\} \times \\ \times \left(k_0 - \frac{e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp\left\{-\frac{A-2a}{2a}\tau - \frac{\alpha}{2a}W_\tau + \frac{\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau\right). \quad (3.9)$$

Для проведения качественного анализа, т.е. выяснения поведения решения при $t \rightarrow \infty$, нам важно знать, в случае $A > 2a + \frac{\alpha^2}{4a}$, достигает ли значение интегрального члена в правой части выражения (3.9) значения k_0 при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 3.3. Плотность распределения случайной величины

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{A-2a}{2a}\tau - \frac{\alpha}{2a}W_\tau + \frac{\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau$$

если $A > 2a + \frac{\alpha^2}{4a}$, в соответствии с [1], равна

$$f(k) = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{8a^2}\right)^{-\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2}+1} \exp\left(-\frac{8a^2}{\alpha^2 k}\right)}{\Gamma\left(\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2} - 1\right)} \cdot \frac{1}{k^{\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2}}},$$

где Γ обозначает гамма-функцию, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $z \in C$, $Re z > 0$.

Тогда вероятность того, что величина

$$\frac{e(1-2a)}{2a} \cdot \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{A-2a}{2a}\tau - \frac{\alpha}{2a}W_\tau + \frac{\alpha^2}{8a^2}\tau\right\} d\tau$$

не достигнет при $t \rightarrow \infty$ величины k_0 , равна

$$\hat{P} = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{8a^2}\right)^{-\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2}+1}}{\Gamma\left(\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2} - 1\right)} \cdot \int_0^{\frac{2ak_0}{e(1-2a)}} \frac{\exp\left(-\frac{8a^2}{\alpha^2 k}\right)}{k^{\frac{4a(A-2a)}{\alpha^2}}} dk. \quad (3.10)$$

Следствие 3.2. В стохастическом случае возможны следующие варианты.

1) $A < 2a + \frac{\alpha^2}{4a}$. Тогда, в соответствии с законом повторного логарифма, мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0 \quad \text{a.s.}$$

2) $A = 2a + \frac{\alpha^2}{4a}$. Тогда процесс $k(t)$ будет флуктуировать между 0 и e .

3) $A > 2a + \frac{\alpha^2}{4a}$. Тогда с вероятностью \hat{P} , которая определена (3.10), мы получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = e$$

и с вероятностью $1 - \hat{P}$, соответственно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0.$$

4. Динамика приспособления в треугольнике

Определение 4.1. *Треугольником будем называть полную сеть, состоящую из трех вершин, соединенных дугами.*

Предположим, что три агента с разными продуктивностями и с начальными значениями инвестиций в знания k_1^0 , k_2^0 и k_3^0 объединились и создали треугольник. Продуктивность каждого агента имеет постоянную и случайную (броуновскую) составляющую. Будем считать, что изменения продуктивностей агентов треугольника вызваны одними и теми же случайными влияниями в сети, а размеры случайных компонент пропорциональны постоянным слагаемым продуктивностей агентов. Другими словами, продуктивность первого агента $A_1 + \alpha_1 W_t$, продуктивность второго агента $A_2 + \alpha_2 W_t$, продуктивность третьего агента $A_3 + \alpha_3 W_t$, при этом

$$\frac{A_1}{\alpha_1} = \frac{A_2}{\alpha_2} = \frac{A_3}{\alpha_3}. \quad (4.1)$$

Динамика в такой сети описывается системой стохастических уравнений

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = \left(\frac{A_1}{2a} - 1\right) k_1 + \frac{\alpha_1}{2a} W_t k_1 + \frac{A_1}{2a} k_2 + \frac{\alpha_1}{2a} W_t k_2 + \frac{A_1}{2a} k_3 + \frac{\alpha_1}{2a} W_t k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}, \\ \dot{k}_2 = \frac{A_2}{2a} k_1 + \frac{\alpha_2}{2a} W_t k_1 + \left(\frac{A_2}{2a} - 1\right) k_2 + \frac{\alpha_2}{2a} W_t k_2 + \frac{A_2}{2a} k_3 + \frac{\alpha_2}{2a} W_t k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}, \\ \dot{k}_3 = \frac{A_3}{2a} k_1 + \frac{\alpha_3}{2a} W_t k_1 + \frac{A_3}{2a} k_2 + \frac{\alpha_3}{2a} W_t k_2 + \left(\frac{A_3}{2a} - 1\right) k_3 + \frac{\alpha_3}{2a} W_t k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}, \end{cases}$$

или, в дифференциальной форме,

$$\left\{ \begin{array}{l} dk_1 = \left(\frac{A_1}{2a} - 1\right) k_1 dt + \frac{\alpha_1}{2a} k_1 dW_t + \frac{A_1}{2a} k_2 dt + \frac{\alpha_1}{2a} k_2 dW_t + \\ \quad + \frac{A_1}{2a} k_3 dt + \frac{\alpha_1}{2a} k_3 dW_t - \frac{\epsilon(1-2a)}{2a} dt, \\ dk_2 = \frac{A_2}{2a} k_1 dt + \frac{\alpha_2}{2a} k_1 dW_t + \left(\frac{A_2}{2a} - 1\right) k_2 dt + \frac{\alpha_2}{2a} k_2 dW_t + \\ \quad + \frac{A_2}{2a} k_3 dt + \frac{\alpha_2}{2a} k_3 dW_t - \frac{\epsilon(1-2a)}{2a} dt, \\ dk_3 = \frac{A_3}{2a} k_1 dt + \frac{\alpha_3}{2a} k_1 dW_t + \frac{A_3}{2a} k_2 dt + \frac{\alpha_3}{2a} k_2 dW_t + \\ \quad + \left(\frac{A_3}{2a} - 1\right) k_3 dt + \frac{\alpha_3}{2a} k_3 dW_t - \frac{\epsilon(1-2a)}{2a} dt. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Матричная запись системы (4.2) имеет вид

$$dk = Akdt + \alpha k dW + \epsilon dt, \quad (4.3)$$

где

$$dk = \begin{pmatrix} dk_1 \\ dk_2 \\ dk_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{2a} - 1 & \frac{A_1}{2a} & \frac{A_1}{2a} \\ \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} - 1 & \frac{A_2}{2a} \\ \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} - 1 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2a} & \frac{\alpha_1}{2a} & \frac{\alpha_1}{2a} \\ \frac{\alpha_2}{2a} & \frac{\alpha_2}{2a} & \frac{\alpha_2}{2a} \\ \frac{\alpha_3}{2a} & \frac{\alpha_3}{2a} & \frac{\alpha_3}{2a} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon(1-2a)}{2a} \\ -\frac{\epsilon(1-2a)}{2a} \\ -\frac{\epsilon(1-2a)}{2a} \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим детерминистский случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Предложение 4.1. *В детерминистском случае динамика инвестиций в знания агентов в треугольнике выражается следующим образом*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 k_1(t) = \frac{2a[(A_2+A_3)k_1^0 - A_1(k_2^0+k_3^0)] - e(1-2a)(2A_1-A_2-A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} + \\
 + \frac{A_1}{\sum_{i=1}^3 A_i} \left(\sum_{i=1}^3 k_i^0 + \frac{3e(1-2a)}{2a - \sum_{i=1}^3 A_i} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - 1 \right) t \right\} + D_1, \\
 k_2(t) = \frac{2a[(A_1+A_3)k_2^0 - A_2(k_1^0+k_3^0)] - e(1-2a)(2A_2-A_1-A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} + \\
 + \frac{A_2}{\sum_{i=1}^3 A_i} \left(\sum_{i=1}^3 k_i^0 + \frac{3e(1-2a)}{2a - \sum_{i=1}^3 A_i} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - 1 \right) t \right\} + D_2, \\
 k_3(t) = \frac{2a[(A_1+A_2)k_3^0 - A_3(k_1^0+k_2^0)] - e(1-2a)(2A_3-A_1-A_2)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} + \\
 + \frac{A_3}{\sum_{i=1}^3 A_i} \left(\sum_{i=1}^3 k_i^0 + \frac{3e(1-2a)}{2a - \sum_{i=1}^3 A_i} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - 1 \right) t \right\} + D_3,
 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

где D_1 , D_2 и D_3 определяются как

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_1 = \frac{e(1-2a)(2A_1-A_2-A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} + \frac{3A_1 e(1-2a)}{\sum_{i=1}^3 A_i (2a - \sum_{i=1}^3 A_i)}, \\
 D_2 = \frac{e(1-2a)(2A_2-A_1-A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} + \frac{3A_2 e(1-2a)}{\sum_{i=1}^3 A_i (2a - \sum_{i=1}^3 A_i)}, \\
 D_3 = \frac{e(1-2a)(2A_3-A_1-A_2)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} + \frac{3A_3 e(1-2a)}{\sum_{i=1}^3 A_i (2a - \sum_{i=1}^3 A_i)}.
 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Доказательство. Система дифференциальных уравнений в детерминистском случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{k}_1 = \left(\frac{A_1}{2a} - 1 \right) k_1 + \frac{A_1}{2a} k_2 + \frac{A_1}{2a} k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}, \\
 \dot{k}_2 = \frac{A_2}{2a} k_1 + \left(\frac{A_2}{2a} - 1 \right) k_2 + \frac{A_2}{2a} k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}, \\
 \dot{k}_3 = \frac{A_3}{2a} k_1 + \frac{A_3}{2a} k_2 + \left(\frac{A_3}{2a} - 1 \right) k_3 - \frac{e(1-2a)}{2a}.
 \end{array} \right.$$

Характеристическое уравнение выглядит следующим образом

$$(\lambda + 1)^2 \left(\lambda + 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} \right) = 0,$$

поэтому собственные числа:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - 1.$$

В качестве собственных векторов матрицы A можно выбрать

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение в детерминистском случае

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(-t) + \\ + C_3 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - 1 \right) t \right\} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что D_1 , D_2 и D_3 определяются выражениями (4.5). Определяя из начальных условий значения C_1 , C_2 и C_3 получаем решение задачи Коши в виде (4.4). \square

Теорема 4.1. *В стохастическом случае динамика инвестиций в знания агентов в треугольнике выражается уравнениями*

$$k_1(t) = \frac{e(1-2a)(2A_1 - A_2 - A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} + \\ + \frac{2a[(A_2 + A_3)k_1^0 - A_1(k_2^0 + k_3^0)] - e(1-2a)(2A_1 - A_2 - A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} + \\ + \frac{A_1}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^3 k_i^0 - \frac{3e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp \left\{ \left(\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right) \right\} d\tau \right], \quad (4.6)$$

$$k_2(t) = \frac{e(1-2a)(2A_2 - A_1 - A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} +$$

$$+ \frac{2a[(A_1 + A_3)k_2^0 - A_2(k_1^0 + k_3^0)] - e(1-2a)(2A_2 - A_1 - A_3)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} +$$

$$+ \frac{A_2}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^3 k_i^0 - \frac{3e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp \left\{ \left(\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right) \right\} d\tau \right], \quad (4.7)$$

$$k_3(t) = \frac{e(1-2a)(2A_3 - A_1 - A_2)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} +$$

$$+ \frac{2a[(A_1 + A_2)k_3^0 - A_3(k_1^0 + k_2^0)] - e(1-2a)(2A_3 - A_1 - A_2)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_3}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \times \\
& \times \left[\sum_{i=1}^3 k_i^0 - \frac{3e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp \left\{ \left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right\} d\tau \right], \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Доказательство. Ясно, что матрицы A и α коммутируют в силу условия (4.1), поэтому для матричных экспонент справедливо соотношение

$$\exp\{At\} \exp\{\alpha W_t\} = \exp\{At + \alpha W_t\}$$

и можно решить матричное уравнение (4.3) умножением слева на интегрирующий множитель – матричную экспоненту

$$\exp\left\{-At - \alpha W_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}.$$

Обозначим, как и в одномерном случае, для краткости

$$\Psi = -At - \alpha W_t + \frac{\alpha^2}{2}t.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
d(\exp\{\Psi\}k) &= \exp\{\Psi\} \cdot dk + d \exp\{\Psi\} \cdot k + d \exp\{\Psi\} \cdot dk = \\
&= \exp\{\Psi\} (Akd t + \alpha k dW_t + \varepsilon dt) + \\
&+ \exp\{\Psi\} \left(-A dt - \alpha dW_t + \frac{\alpha^2}{2} dt + \frac{\alpha^2}{2} dt \right) k - \exp\{\Psi\} k \alpha^2 dt = \\
&= \exp\{\Psi\} \varepsilon dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (4.3) принимает форму

$$d \left(\exp\left\{-At - \alpha W_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\} k \right) = \exp\left\{-At - \alpha W_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\} \varepsilon dt,$$

поэтому решение матричного уравнения (4.3) можно записать в виде

$$k(t) = \exp\left\{At + \alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right\}k_0 + \exp\left\{At + \alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right\} \left(\int_0^t \exp\{-A\tau - \alpha W_\tau + \frac{\alpha^2}{2}\tau\}d\tau\right) \varepsilon. \quad (4.9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2} &= \frac{1}{8a^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы

$$A - \frac{\alpha^2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_1 - 1 & \frac{A_1}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_1 & \frac{A_1}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_1 \\ \frac{A_2}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_2 & \frac{A_2}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_2 - 1 & \frac{A_2}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_2 \\ \frac{A_3}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_3 & \frac{A_3}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_3 & \frac{A_3}{2a} - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{8a^2} \alpha_3 - 1 \end{pmatrix}$$

равны, очевидно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{(\sum_{i=1}^3 \alpha_i)^2}{8a^2} - 1$. В качестве собственных векторов мы можем выбрать

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

или, ввиду (4.1),

$$e_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы α есть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a}$, и очевидно, мы можем выбрать те же самые e_1 , e_2 и e_3 в качестве собственных векторов для матрицы α , что и для матрицы $A - \frac{\alpha^2}{2}$. Следовательно, чтобы привести к диагональной форме матрицы $\left(A - \frac{\alpha^2}{2}\right)t$ и αW_t мы можем использовать одну и ту же матрицу перехода

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A_1 \\ -1 & 1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 A_i} \begin{pmatrix} A_2 + A_3 & -A_1 & -A_1 \\ A_3 & A_3 & -(A_1 + A_2) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и мы получаем

$$\left(A - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha W_t = S(Jt + \Lambda W_t)S^{-1},$$

где

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right)^2}{8a^2} - 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} \end{pmatrix},$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} & \exp\left(\left(A - \frac{\alpha^2}{2}\right)t + \alpha W_t\right) = \\ & = S \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right)^2}{8a^2} - 1\right)t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t\right\} \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.9), получаем

$$\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 A_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & A_1 \\ -1 & 1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} A_2 + A_3 & -A_1 & -A_1 \\ A_3 & A_3 & -(A_1 + A_2) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ k_3^0 \end{pmatrix} - \\
 & - \frac{e(1-2a)}{2a} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^3 A_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & A_1 \\ -1 & 1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} \int_0^t \exp\{\tau\} d\tau & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^t \exp\{\tau\} d\tau & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^t \exp \left\{ \left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right\} d\tau \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} A_2 + A_3 & -A_1 & -A_1 \\ A_3 & A_3 & -(A_1 + A_2) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 & = \frac{(A_2 + A_3)k_1^0 - A_1(k_2^0 + k_3^0)}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
 & + \frac{A_3(k_1^0 + k_2^0) - (A_1 + A_2)k_3^0}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp\{-t\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^3 k_i^0}{\sum_{i=1}^3 A_i} \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) t + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_t \right\} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \\
& - \frac{e(1-2a)(A_2 + A_3 - 2A_1)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} (1 - \exp\{-t\}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \\
& - \frac{e(1-2a)(2A_3 - A_1 - A_2)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} (1 - \exp\{-t\}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3e(1-2a)}{2a \sum_{i=1}^3 A_i} \times \\
& \times \int_0^t \exp \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - 1 \right) (t - \tau) + \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} (W_t - W_\tau) \right\} d\tau \times \\
& \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Группируя слагаемые в (4.11) и записывая полученное векторное выражение по координатам, находим выражения (4.6) – (4.8). \square

Динамика агентов в треугольнике в дискретном времени для основной детерминистской модели подробно рассмотрена в [4].

В стохастическом случае не так много состояний равновесия. Равновесие в стохастическом случае – это такая точка в фазовом пространстве, к которой (стохастический) переходный процесс сходится почти наверное, при стремлении t к бесконечности. Таким образом, в нашей стохастической модели само понятие неустойчивого равновесия становится бессмысленным.

Для того чтобы выполнить качественный анализ поведения решения, нам важно знать, в случае

$$\sum_{i=1}^3 A_i > \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{4a} + 2a,$$

достигнут ли значения интегральных членов в правых частях уравнений (4.6) – (4.8) значения $\sum_{i=1}^3 k_i^0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. достигнет ли случайный процесс

$$\int_0^t \exp \left\{ \left(\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right) \right\} d\tau$$

величины

$$\frac{2a \sum_{i=1}^3 k_i^0}{3e(1-2a)}.$$

Замечание 4.1. Плотность случайной величины

$$\int_0^t \exp \left\{ \left(\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right) \right\} d\tau$$

при условии $\sum_{i=1}^3 A_i > \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2 / (4a) + 2a$, согласно [1], равна

$$f(k) = \frac{\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} \right)^{-\frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} + 1}}{\Gamma \left(\frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} - 1 \right)} \cdot \frac{\exp \left(-\frac{8a^2}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} k \right)}{k^{\frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}}}, \quad k \in [0, \infty).$$

Тогда вероятность того, что

$$\frac{3e(1-2a)}{2a} \int_0^t \exp \left\{ \left(\left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right) \right\} d\tau <$$

$$< \sum_{i=1}^3 k_i^0,$$

которая может быть переписана как вероятность того, что

$$\int_0^t \exp \left\{ \left(-\frac{\sum_{i=1}^3 A_i}{2a} + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} + 1 \right) \tau - \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2a} W_\tau \right\} d\tau <$$

$$< \frac{2a \sum_{i=1}^3 k_i^0}{3e(1-2a)},$$

равна

$$\tilde{P} = \frac{\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{8a^2} - \frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} + 1 \right)}{\Gamma \left(\frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} - 1 \right)} \cdot \int_0^{\frac{2a \sum_{i=1}^3 k_i^0}{3e(1-2a)}} \frac{\exp \left(-\frac{8a^2}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} k \right)}{\frac{4a \left(\sum_{i=1}^3 A_i - 2a \right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2} k} dk. \quad (4.12)$$

Следствие 4.1. В треугольнике в стохастическом случае возможны следующие варианты.

1) Если $\sum_{i=1}^3 A_i < 2a + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{4a}$ то согласно закону повторного логарифма, мы получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) = 0 \quad a.s.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_2(t) = 0 \quad a.s.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_3(t) = 0 \quad a.s.$$

2) Если $\sum_{i=1}^3 A_i = 2a + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{4a}$ то процессы $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$ будут флуктуировать между 0 and e .

3) Если $\sum_{i=1}^3 A_i > 2a + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right)^2}{4a}$ то с вероятностью \tilde{P} (см. (4.12)) мы получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) = e,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_2(t) = e,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_3(t) = e,$$

и с вероятностью $1 - \tilde{P}$, соответственно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_2(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_3(t) = 0.$$

5. Заключение

В данной статье рассматривается развитие модели [11] – [12]. Дается описание переходной динамики в стохастическом случае, когда продуктивность агентов имеет не только детерминированную, но и броуновскую составляющие. В предшествующих исследованиях переходная динамика между состояниями устойчивого равновесия в сети рассматривалась только в детерминированном случае. Оказывается, границы различных сценариев поведения агентов (и само поведение) в стохастическом случае смещаются по сравнению с детерминированным случаем. Мы получили явное выражение для динамики изолированного агента и для динамики агентов треугольника в форме броуновского случайного процесса (предложение 3.1, теорема 4.1). Был проведен качественный анализ поведения решений стохастического уравнения и системы стохастических уравнений (следствия 3.2 и 4.1). Тем самым, было установлено, в каком направлении и с какой вероятностью будет развиваться случайный процесс и в какое состояние он придет в конечном итоге.

Следующей задачей является изучение переходной динамики в полных стохастических сетях с агентами, имеющими винеровскую составляющую продуктивности. Также было бы интересно рассмотреть динамику в сетях с произвольными корреляционными функциями между винеровскими составляющими различных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borodin A.N., Salminen P. *Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae*. Birkhauser Verlag. Basel. Boston. Berlin. 1996.
2. Bramoullé Y., Kranton R. *Public goods in networks* // Journal of Economic Theory. 2007. V. 135. P. 478–494.
3. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network games* // Review of Economic Studies. 2010. V. 77. P. 218–244.
4. Garmash M.V., Kaneva X.A. *Game equilibria and adjustment dynamics in full networks and in triangle with heterogeneous agents* // Automation and Remote Control. 2020. V. 81, no. 6. P. 1149–1165.
5. Granovetter M.S. *The strength of weak ties* // American Journal of Sociology. 1973. V. 78. P. 1360–1380.
6. Jackson M.O. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2008.
7. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks* // In: Young P. and Zamir S. eds. Handbook of game theory. 2014. V. 4. P. 95–163.
8. Lamperti J. *Stochastic processes*. Springer – Verlag, 1977.
9. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. V. 4(4). P. 475–492.
10. Matveenko V.D., Korolev A.V. *Network game with production and knowledge externalities* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. V. 8. P. 199–222.
11. Matveenko V., Korolev A., Zhdanova M. *Game equilibria and unification dynamics in networks with heterogeneous agents* // International Journal of Engineering Business Management. 2017. V. 9. P. 1–17.

12. Matveenko V., Garmash M., Korolev A. *Game Equilibria and Transition Dynamics in Networks with Heterogeneous Agents* // In: *Frontiers of Dynamic Games* / Ed. by L. A. Petrosyan, V. V. Mazalov, N. A. Zenkevich. Birkhauser/Springer. 2018. V. 10. P. 165–188.
13. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // *The Journal of Political Economy*. 1986. V. 94. P. 1002–1037.

TRANSITIONAL DYNAMICS IN NETWORK GAME WITH HETEROGENEOUS AGENTS: STOCHASTIC CASE

Alexey V. Korolev, St. Petersburg filial of Higher School of Economics
(danitschi@gmail.com)

Abstract: In this paper, stochastic parameters are introduced into the network games model with production and knowledges externalities. This model was formulated by V. Matveenko and A. Korolev and generalized two-period Romer model. Agents' productivities have deterministic and Wiener components. The research represents the dynamics of a single agent and the dynamics in a triangle which occurs in the process of unifying agents. Explicit expressions of the dynamics of a single agent and dyad agents in the form of Brownian random processes were obtained. A qualitative analysis of the solutions of stochastic equations and systems was carried out.

Keywords: network games, differential games, Nash equilibrium, Brounian motion, stochastic differential equations, Ito's Lemma, heterogeneous agents, productivity.