Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.2, с. 40–61

УДК 519.83
ББК 22.18

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ НЕДОМИНИРУЕМОЙ МАКСИМИННОЙ СТРАТЕГИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИГРОКА С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША В ДВУХШАГОВОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЕ N ЛИЦ СО СТРАТЕГИЯМИ-СИНТЕЗАМИ И КОНЕЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ИГРОКОВ

Вячеслав В. Сушкин
Тверской государственный университет
Математический факультет
170002, Тверь, Садовый пер., 35
e-mail: vsushkin@mail.ru

Исследуется двухшаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков. Получено достаточное условие для недоминируемой максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, максиминная стратегия, недоминируемая стратегия, многошаговая позиционная игра, стратегия-синтез, терминальная функция выигрыша.

Поступила в редакцию: 20.11.20 *После доработки*: 08.12.20 *Принята к публикации*: 01.03.21

1. Введение

В работе исследуется принцип оптимальности [1] для бесколиционных игр n лиц [1], реализациями которого являются недоминируемые [2] максиминные [3,4] стратегии одного из игроков, т.е. такие максиминные стратегии игрока, которые не доминируются никакими другими стратегиями данного игрока. Для выяснения того, является ли та или иная максиминная стратегия игрока недоминируемой, необязательно сравнивать её с другими стратегиями в рамках всего множества стратегий данного игрока, достаточно выполнить сравнение лишь в пределах множества максиминных стратегий. Максиминная стратегия игрока, не доминируемая никакими другими его максиминными стратегиями оказывается (см. утверждение 5.3) недоминируемой. И далее возникает такой вопрос: а есть ли у множества максиминных стратегий игрока (пусть это будет множество A) такое подмножество B (непустое и необязательно совпадающее с A), для которого будет выполнено следующее: любая стратегия b из множества B, не доминируемая никакими другими стратегиями из B, оказывается недоминируемой стратегией данного игрока. Поиск ответа на этот вопрос в работе проводится для двухшаговой позиционной игры n лиц [5] со стратегиями-синтезами и конечными множествами управляющих воздействий игроков. Функция выигрыша игрока, о множестве максиминных стратегий которого идёт речь в вышеупомянутом вопросе, является при этом терминальной. В итоге результатом поиска оказывается утвердительный ответ, при этом не только устанавливается существование подмножества B, но и приводится описание этого подмножества. В работе основные утверждения представлены в пункте 6. Необходимые определения, обозначения, а также ряд вспомогательных утверждений приведены в пунктах со второго по пятый.

2. Некоторые понятия и обозначения

Пусть M – множество. Введём ряд обозначений, связанных с M:

$\mathfrak{M}(M)$ – множество подмножеств множества M,

$\mathfrak{M}_+(M)$ – множество непустых подмножеств множества M,

$\mathfrak{M}_1(M)$ – множество одноэлементных подмножеств множества M.

Пусть M – множество, а a – элемент некоторого множества A, сам каким-либо множеством не являющийся. Запись $M \setminus a$ будем использовать для обозначения разности $M \setminus \{a\}$.

Пусть даны множества M_i, $i = \overline{i_1, i_2}$, где i_1 и i_2 – это целые числа, удовлетворяющие условию $i_1 \leqslant i_2$. Запись $M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_2}$ в случае, если $i_1 = i_2$, будет представлять собой обозначение множества M_{i_1}.

Символ $\mathbf{R}$ в работе является обозначением множества действительных чисел, а символ $\overline{\mathbf{R}}$ – обозначением объединения $\mathbf{R}$ и множества $\{-\infty, \infty\}$.

Пусть M – некоторое подмножество множества $\overline{\mathbf{R}}$. Символом $\inf M$ будем обозначать число $r \in \overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned}
&(\forall a \in \overline{\mathbf{R}}, ((a \in M) \Rightarrow (r \leqslant a)))\wedge \\
&\wedge (\forall \tilde{r} \in \overline{\mathbf{R}}, \\
&((\forall \tilde{a} \in \overline{\mathbf{R}}, ((\tilde{a} \in M) \Rightarrow (\tilde{r} \leqslant \tilde{a}))) \Rightarrow (\tilde{r} \leqslant r))),
\end{aligned}$$

а символом $\sup M$ – число $r \in \overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее такому условию

$$\begin{aligned}
&(\forall a \in \overline{\mathbf{R}}, ((a \in M) \Rightarrow (a \leqslant r)))\wedge \\
&\wedge (\forall \tilde{r} \in \overline{\mathbf{R}}, \\
&((\forall \tilde{a} \in \overline{\mathbf{R}}, ((\tilde{a} \in M) \Rightarrow (\tilde{a} \leqslant \tilde{r}))) \Rightarrow (r \leqslant \tilde{r}))).
\end{aligned}$$

3. Бескоалиционная игра n лиц. Определение. Основные понятия, связанные с игрой

Определение 3.1. [1] *Бескоалиционной игрой n лиц, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, принято называть набор*

$$\Gamma = \langle I, V(1), \ldots, V(n), J(1), \ldots, J(n) \rangle,$$

в котором

I – это множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, называемое множеством номеров игроков,

$V(i)$, $i \in I$, – непустое множество, называемое множеством стратегий i-го игрока,

$J(i)$, $i \in I$, – отображение с областью определения $V(1) \times \ldots \times V(n)$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, называемое функцией выигрыша i-го игрока.
Множество $V(1) \times \ldots \times V(n)$ принято называть множеством ситуаций. Элементы множества номеров игроков, множества стратегий i-го игрока, $i \in I$, и множества ситуаций называются соответственно.

Предположим, рассматривается произвольная бескоалиционная игра n лиц, $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Так же, как и в определении бескоалиционной игры, множество номеров игроков будем обозначать символом I, множество стратегий i-го игрока, $i \in I$, – символом $V(i)$, функцию выигрыша i-го игрока, $i \in I$, – символом $J(i)$. Для обозначения множества ситуаций будем использовать букву V. Стратегии i-го игрока, $i \in I$, будем обозначать символом $v(i)$, ситуации – символом v.

Положим, $n \geqslant 2$.

Введём множества $V(J)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$.

$$V(I \setminus i) = \begin{cases} V(i+1) \times \ldots \times V(n), \text{ если } i = 1, \\ V(1) \times \ldots \times V(i-1) \times V(i+1) \times \ldots \times V(n), \\ \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ V(1) \times \ldots \times V(i-1), \text{ если } i = n, \end{cases}$$

$i \in I$.

Для обозначения элемента множества $V(J)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$, будем использовать символ $v(J)$.

Допустим, $v \in V$, а $i \in I$. В качестве обозначения элемента v будем также использовать следующую запись

$$v(i); v(I \setminus i).$$

Определение 3.2. [4] *Допустим, $i \in I$. Отображение с областью определения $V(i)$ и множеством значений в $\overline{\mathbf{R}}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу $v(i) \in V(i)$ ставит в* *соответствие значение, равное*

$$\inf_{v(I \setminus i) \in V(I \setminus i)} J(i)(v(i); v(I \setminus i)).$$

принято называть гарантированным выигрышем i-го игрока. Данное отображение будем обозначать символом $G(i)$.

Положим, $i \in I$. Значение

$$\sup_{v(i) \in V(i)} G(i)(v(i))$$

будем обозначать символом $G^*(i)$.

Определение 3.3. [3] *Допустим, $i \in I$. Стратегию $v^\circ(i)$ i-го игрока принято называть максиминной стратегией этого игрока, если выполнено равенство*

$$G(i)(v^\circ(i)) = G^*(i).$$

Множество максиминных стратегий i-го игрока будем обозначать символом $V^\circ(i)$.

Определение 3.4. [2] *Допустим, $i \in I$, а $v'(i)$ и $v''(i)$ – произвольные стратегии i-го игрока. Говорят, что стратегия $v'(i)$ доминируется стратегией $v''(i)$ (или, по-другому, что стратегия $v''(i)$ доминирует стратегию $v'(i)$), если выполнены следующие условия*

1) $\forall v(I \setminus i) \in V(I \setminus i), J(i)(v'(i); v(I \setminus i)) \leqslant J(i)(v''(i); v(I \setminus i)),$

и

2) $\exists \hat{v}(I \setminus i) \in V(I \setminus i), J(i)(v'(i); \hat{v}(I \setminus i)) < J(i)(v''(i); \hat{v}(I \setminus i)).$

Для обозначения того, что стратегия $v'(i)$ доминируется стратегией $v''(i)$, будем использовать запись

$$v'(i) \preceq (i) v''(i).$$

Определение 3.5. [2] *Допустим, $i \in I$. Стратегию $\bar{v}(i)$ i-го игрока принято называть недоминируемой стратегией этого игрока, если*

$\bar{v}(i)$ не доминируется никакой другой стратегией i-го игрока, т.е. если выполнено условие

$$\forall v(i) \in V(i), ((v(i) \neq \bar{v}(i)) \Rightarrow \neg(\bar{v}(i) \preceq (i) v(i))).$$

Множество недоминируемых стратегий i-го игрока будем обозначать символом $N(i)$.

4. Описание многошаговой позиционной игры со стратегиями-синтезами

Многошаговая позиционная игра n лиц [5] со стратегиями-синтезами, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, представляет собой бескоалиционную игру n лиц, множества стратегий и функции выигрыша которой определяются следующим образом.

Заданным является число $k'_\circ \in \{1, 2, \ldots\}$. Целые числа от 0 до $k'_\circ$, называемые номерами моментов времени, составляют множество $K_\circ$, называемое соответственно: множеством номеров моментов времени.

Для каждого $k \in K_\circ$ заданным является непустое множество $\mathbf{X}_k$, называемое пространством позиций, соответствующих моменту k. Элементы этого множества (соответствующим образом называемые) будем обозначать символом x_k.

Для каждой пары $(i, k) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)$ заданным является непустое множество $\mathbf{U}_k(i)$, называемое пространством управляющих воздействий на шаге $k+1$. Элементы указанного множества (соответствующим образом называемые) будем обозначать символом $u_k(i)$. Допустим, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$. Символ $\mathbf{U}_k$ будем использовать для обозначения декартова произведения $\mathbf{U}_k(1) \times \ldots \times \mathbf{U}_k(n)$, а символ u_k для обозначения элементов множества $\mathbf{U}_k$.

Для каждого $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$ заданным является отображение

$$F_k : \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \to \mathbf{X}_{k+1},$$

называемое составляющей оператора перехода, соответствующей шагу $k+1$. Оператором перехода принято называть последовательность $\{F_k\}_{k=0}^{k'_\circ - 1}$.

Символом $\mathbf{U}(k_1, k_2)(i)$, где $i \in I$, $k_1 \in K_\circ \setminus k'_\circ$, а $k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$, будем обозначать множество $\mathbf{U}_{k_1}(i) \times \ldots \times \mathbf{U}_{k_2}(i)$. Для обозначения элементов данного множества будем использовать символ $u(k_1, k_2)(i)$. Допустим, $i \in I$, а $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$. Символом $\mathbf{U}[k](i)$ будем обозначать множество

$$\bigcup_{k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}} \mathbf{U}(k, k_2)(i),$$

а символом $\mathbf{U}(i)$ – множество $\mathbf{U}[0](i)$. Элементы множества $\mathbf{U}(i)$ будем называть управлениями i-го игрока и обозначать символом $u(i)$, а элементы множества $\mathbf{U}[k](i)$ – усечёнными управлениями i-го игрока и обозначать символом $u[k](i)$. Положим, $i \in I$, $k_1 \in K_\circ \setminus k'_\circ$, $k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$, и пусть $u(k_1, k_2)(i) \in \mathbf{U}(k_1, k_2)(i)$, а $k \in \{k_1, \ldots, k_2\}$. Величину $u_k(i)$ будем называть компонентой усечённого управления $u(k_1, k_2)(i)$, соответствующей k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k), величину $u_{k_2}(i)$ будем также называть последней компонентой усечённого управления $u(k_1, k_2)(i)$.

Символом $\mathbf{U}(k_1, k_2)$, где $k_1 \in K_\circ \setminus k'_\circ$, а $k_2 \in \{k_1, \ldots, k'_\circ - 1\}$, будем обозначать множество $\mathbf{U}(k_1, k_2)(1) \times \ldots \times \mathbf{U}(k_1, k_2)(n)$. Для обозначения элементов данного множества будем использовать символ $u(k_1, k_2)$. Допустим, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$. Множество

$$\bigcup_{k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}} \mathbf{U}(k, k_2),$$

будем обозначать символом $\mathbf{U}[k]$, а множество $\mathbf{U}[0]$ – символом $\mathbf{U}$. Символы $u[k]$ и u соответственно будем использовать для обозначения элементов множеств $\mathbf{U}[k]$ и $\mathbf{U}$.

Символом $\mathbf{X}(k_1, k_2)$, где $k_1 \in K_\circ \setminus k'_\circ$, а $k_2 \in \{k_1 + 1, \ldots, k'_\circ\}$, будем обозначать множество $\mathbf{X}_{k_1} \times \ldots \times \mathbf{X}_{k_2}$. Для обозначения элементов данного множества будем использовать символ $x(k_1, k_2)$. Допустим, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$. Множество

$$\bigcup_{k_2 \in \{k+1, \ldots, k'_\circ\}} \mathbf{X}(k, k_2),$$

будем обозначать символом $\mathbf{X}[k]$, а множество $\mathbf{X}[0]$ – символом $\mathbf{X}$. Элементы множества $\mathbf{X}$ будем называть траекториями и обозначать символом x, а элементы множества $\mathbf{X}[k]$ – усечёнными траекториями и обозначать символом $x[k]$.

Символом $k_2^u[k]$, где $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{U}[k]$ и множеством значений в множестве $\{k, \ldots, k'_\circ - 1\}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу $u[k] \in \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие число $k_2 \in \{k, \ldots, k'_\circ - 1\}$ такое, что последняя компонента каждого из усечённых управлений $u[k](i)$, $i \in I$, является компонентой (данного усечённого управления), соответствующей моменту с номером k_2.

Символом $F[k]$, где $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ и множеством значений в $\mathbf{X}[k]$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, u[k]) \in \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие усечённую траекторию $\tilde{x}(k, k_2^u[k](u[k]) + 1)$, определяемую с помощью соотношений

$$\tilde{x}_k = x_k,$$
$$\tilde{x}_{l+1} = F_l(\tilde{x}_l, u_l), l = \overline{k, k_2^u[k](u[k])}.$$

Отображение $F[0]$ будем обозначать символом F.

Для каждой пары $(i, k) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)$ заданным является отображение $F_k^\circ(i) : \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \to \mathbf{R}$, а для каждой пары $(i, k) \in I \times (K_\circ \setminus 0)$ – отображение $\Phi_k(i) : \mathbf{X}_k \to \mathbf{R}$, последнее (имеется в виду отображение $\Phi_k(i)$) принято называть терминальной функцией i-го игрока, соответствующей k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k).

Символом $J^u[k](i)$, где $i \in I$, а $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, будем обозначать отображение с областью определения $\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, u[k]) \in \mathbf{X}_k \times \mathbf{U}[k]$ ставит в соответствие значение суммы

$$\sum_{l=k}^{k_2} F_l^\circ(i)(\tilde{x}_l, u_l) + \Phi_{k_2+1}(i)(\tilde{x}_{k_2+1}),$$

здесь $k_2 = k_2^u[k](u[k])$, а $(\tilde{x}_k, \ldots, \tilde{x}_{k_2+1}) = F[k](x_k, u[k])$. Отображение $J^u[0](i)$ будем обозначать символом $J^u(i)$.

Заданным является множество $X_0 \in \mathfrak{M}_1(\mathbf{X}_0)$, называемое начальным множеством. Элемент этого множества будем называть начальной позицией и обозначать символом x_0^η.

Для каждого $k \in K_\circ$ заданным является множество $X'_k \in \mathfrak{M}(\mathbf{X}_k)$, называемое терминальным множеством, соответствующим k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k), при этом $X'_\circ = \varnothing$, а $X'_{k'_\circ} = \mathbf{X}_{k'_\circ}$.

Для каждого набора

$$(i, k, x_k) \in \bigcup_{(\tilde{i}, \tilde{k}) \in I \times (K_\circ \setminus k'_\circ)} (\{\tilde{i}\} \times \{\tilde{k}\} \times \mathbf{X}_{\tilde{k}})$$

заданным является множество $U_k(i)(x_k) \in \mathfrak{M}_+(\mathbf{U}_k(i))$, называемое множеством управляющих воздействий i-го игрока на шаге $k+1$, соответствующих позиции x_k. Положим, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, а $x_k \in \mathbf{X}_k$. Для обозначения декартова произведения $U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(n)(x_k)$ будем использовать символ $U_k(x_k)$.

Символами X_k, $k \in K_\circ \setminus 0$, будем обозначать множества, определяемые с помощью следующих соотношений

$$\begin{aligned}
&X_{k+1} = \{x_{k+1} \in \mathbf{X}_{k+1} \mid \exists x_k \in \mathbf{X}_k,\\
&((x_k \in X_k \setminus X'_k) \wedge (\exists u_k \in U_k(x_k), x_{k+1} = F_k(x_k, u_k)))\},\\
&k \in K_\circ \setminus k'_\circ.
\end{aligned}$$

Множество X_k, $k \in K_\circ \setminus 0$, принято называть множеством достижимости, соответствующим k-му моменту времени (или (другой вариант) моменту с номером k).

Очевидно, множество $X_{k'_\circ} \setminus X'_{k'_\circ}$ пусто. Символом k' будем обозначать значение $\min\{k \in K_\circ \mid X_k \setminus X'_k = \varnothing\}$. Легко установить, что $1 \leqslant k' \leqslant k'_\circ$. Множество $\{0, 1, \ldots, k'\}$ будем обозначать символом K. Нетрудно убедиться в справедливости следующих условий

1) $(\forall k \in K \setminus k', X_k \setminus X'_k \neq \varnothing) \wedge (\forall k \in \{k', \ldots, k'_\circ\}, X_k \setminus X'_k = \varnothing)$ и
2) $(\forall k \in K, X_k \neq \varnothing) \wedge (\forall k \in K_\circ, ((k > k') \Rightarrow (X_k = \varnothing)))$.

Символом $V_k(i)$, где $i \in I$, а $k \in K \setminus k'$, будем обозначать множество всевозможных отображений $\gamma : X_k \setminus X'_k \to \mathbf{U}_k(i)$, для каждого из которых справедливо следующее

$$\forall x_k \in X_k \setminus X'_k, \gamma(x_k) \in U_k(i)(x_k).$$

Для обозначения декартова произведения $V_k(i) \times \ldots \times V_{k'-1}(i)$ будем использовать символ $V[k](i)$. Элементы множеств $V_k(i)$ и $V[k](i)$ соответственно будем обозначать символами $v_k(i)$ и $v[k](i)$. В определяемой игре множество стратегий i-го игрока совпадает с множеством $V[0](i)$.

Символом V_k, где $k \in K \setminus k'$, будем обозначать множество $V_k(1) \times \ldots \times V_k(n)$, а символом $V[k]$ – множество $V[k](1) \times \ldots \times V[k](n)$. Элементы множеств V_k и $V[k]$ соответственно будем обозначать символами v_k и $v[k]$. Нетрудно убедиться в том, что $V = V[0]$.

Символом $U[k]\{x_k\}$, где $k \in K \setminus k'$, а $x_k \in X_k \setminus X'_k$, будем обозначать множество всевозможных элементов $u[k] \in \mathbf{U}[k]$, для каждого из которых справедливо следующее: набор $\tilde{x}(k, k_3)$ из $\mathbf{X}(k, k_3)$ (здесь k_3 – это значение суммы $k_2^u[k](u[k]) + 1$), равный $F[k](x_k, u[k])$, удовлетворяет условию

$$(\forall l \in \{k, \ldots, k_3 - 1\}, (u_l \in U_l(\tilde{x}_l)) \wedge (\tilde{x}_l \notin X'_l)) \wedge (\tilde{x}_{k_3} \in X'_{k_3}).$$

Для обозначения множества $U[0]\{x_0\}$, где x_0 – это элемент множества X_0, будем использовать символ $U\{x_0\}$.

Символом Π_k, где $k \in K \setminus k'$, будем обозначать отображение с областью определения $(X_k \setminus X'_k) \times V_k$ и множеством значений в $\mathbf{U}_k$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, v_k) \in (X_k \setminus X'_k) \times V_k$ ставит в соответствие элемент $u_k \in U_k(x_k)$, определяемый следующим образом

$$u_k(i) = v_k(i)(x_k), i = \overline{1, n}.$$

Символом $\Pi[k]$ будем обозначать отображение с областью определения $(X_k \setminus X'_k) \times V[k]$ и множеством значений в $\mathbf{U}[k]$, которое (имеется в виду отображение) произвольной паре $(x_k, v[k]) \in (X_k \setminus X'_k) \times V[k]$ ставит в соответствие такой элемент $u[k] \in U[k]\{x_k\}$, который вместе с набором $\tilde{x}(k, k_3)$ из $\mathbf{X}(k, k_3)$ (здесь k_3 – это значение суммы $k_2^u[k](u[k]) + 1$), равным $F[k](x_k, u[k])$, удовлетворяет следующему

$$\forall l \in \{k, \ldots, k_3 - 1\}, u_l \in \Pi_l(\tilde{x}_l, v_l);$$

нетрудно показать, что для данной пары $(x_k, v[k])$ указанный элемент $u[k]$ существует и единственен. Символом Π будем обозначать отображение $\Pi[0]$.

Символом $J[k, x_k](i)$, где $i \in I$, $k \in K \setminus k'$, а $x_k \in X_k \setminus X'_k$, будем обозначать отображение с областью определения $V[k]$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному $v[k] \in V[k]$ ставит в соответствие значение $J^u[k](i)(x_k, \Pi[k](x_k, v[k]))$.

В определяемой игре функция выигрыша i-го игрока совпадает с функцией $J[0, x_0^\eta](i)$.

Функцию выигрыша i-го игрока, $i \in I$, принято называть терминальной функцией выигрыша, если выполнено следующее условие

$$\forall k \in K_\circ \setminus k'_\circ, \forall x_k \in \mathbf{X}_k, \forall u_k \in \mathbf{U}_k, F_k^\circ(i)(x_k, u_k) = 0.$$

Описанную многошаговую позиционную игру будем также называть k'-шаговой позиционной игрой и, в частности, если $k' = 2$, – двухшаговой позиционной игрой.

5. Вспомогательные утверждения

В данном пункте для произвольной бескоалиционной игры n лиц, $n \geqslant 2$, а также для многошаговой позиционной игры n лиц со стратегиями-синтезами и конечными множествами управляющих воздействий игроков представлен ряд утверждений, необходимых для доказательства утверждений, сформулированных в следующем пункте.

Предположим, рассматривается произвольная бескоалиционная игра n лиц, $n \geqslant 2$.

Утверждение 5.1. *Допустим, X – некоторое непустое множество, а f и g – действительные функции с областью определения X. Пусть при этом выполнено условие*

$$\forall x \in X, f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда справедливо следующее

$$\inf_{x \in X} f(x) \leqslant \inf_{x \in X} g(x).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании определения inf. □

Утверждение 5.2. *Допустим, $i \in I$, а $v'(i)$ и $v''(i)$ – произвольные стратегии i-го игрока. Пусть при этом $v'(i) \preceq (i) v''(i)$. Тогда справедливо следующее*

$$G(i)(v'(i)) \leqslant G(i)(v''(i)).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждения 5.1 и определений 3.2 и 3.4. □

Утверждение 5.3. *Допустим,* $i \in I$, $v^\circ(i) \in V^\circ(i)$, $\bar{v}(i) \in V(i)$, *и пусть при этом* $v^\circ(i) \preceq (i)\bar{v}(i)$. *Тогда справедливо следующее*

$$\bar{v}(i) \in V^\circ(i).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждения 5.2 и определения 3.3. □

Предположим теперь, что рассматривается произвольная многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами $U_k(i)(x_k)$, $i \in I$, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, $x_k \in \mathbf{X}_k$.

Символом $V[k](i)$, где $i \in I$, а $k \in \{k'\}$, будем обозначать множество $\{0\}$. Для обозначения элемента этого множества будем использовать символ $v[k](i)$.

Введём множества $V[k](J)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$, $k \in K \setminus k'$.

$$V[k](I \setminus i) = \begin{cases} V[k](i+1) \times \ldots \times V[k](n), \text{ если } i = 1, \\ V[k](1) \times \ldots \times V[k](i-1) \times V[k](i+1) \times \ldots \times V[k](n), \\ \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ V[k](1) \times \ldots \times V[k](i-1), \text{ если } i = n, \end{cases}$$

$i \in I, k \in K \setminus k'$.

Для обозначения элемента множества $V[k](J)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$, $k \in K \setminus k'$, будем использовать символ $v[k](J)$. Очевидно, что при любом $i \in I$ $V[0](I \setminus i) = V(I \setminus i)$.

Допустим, $k \in K \setminus k'$, $v[k] \in V[k]$, а $i \in I$. В качестве обозначения элемента $v[k]$, в том числе, будем использовать такую запись

$$v[k](i); v[k](I \setminus i)\ .$$

Нетрудно убедиться в том, что множества $V[k](I \setminus i)$, $i \in I$, $k \in K \setminus k'$, являются непустыми и конечными.

Символом $G[k, x_k](i)$, где $i \in I$, $k \in K$, а $x_k \in X_k$, будем обозначать отображение с областью определения $V[k](i)$ и множеством значений в $\mathbf{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольному элементу

$v[k](i) \in V[k](i)$ ставит в соответствие значение $\Phi_k(i)(x_k)$, если $k \in K \setminus 0$, а $x_k \in X_k \cap X'_k$, и значение

$$\begin{aligned} &\min J[k, x_k](i)(v[k](i); v[k](I \setminus i)), \\ &v[k](I \setminus i) \in V[k](I \setminus i) \end{aligned}$$

если $k \in K \setminus k'$, а $x_k \in X_k \setminus X'_k$. Нетрудно убедиться в том, что при любом $i \in I$ $G[0, x_0^\eta](i) = G(i)$.

Введём множества $U_k(J)(x_k)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, $x_k \in \mathbf{X}_k$.

$$U_k(I \setminus i)(x_k) = \begin{cases} U_k(i+1)(x_k) \times \ldots \times U_k(n)(x_k), \text{ если } i = 1, \\ U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(i-1)(x_k) \times U_k(i+1)(x_k) \times \ldots \times \\ \times U_k(n)(x_k), \text{если } (i \neq 1) \wedge (i \neq n), \\ U_k(1)(x_k) \times \ldots \times U_k(i-1)(x_k), \text{ если } i = n, \end{cases}$$

$i \in I, k \in K_\circ \setminus k'_\circ, x_k \in \mathbf{X}_k.$

Для обозначения элемента множества $U_k(J)(x_k)$, $J \in \{I \setminus i \mid i \in I\}$, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, $x_k \in \mathbf{X}_k$, будем использовать символ $u_k(J)$.

Допустим, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, $x_k \in \mathbf{X}_k$, $u_k \in U_k(x_k)$, а $i \in I$. В качестве обозначения элемента u_k будем, в том числе, использовать такую запись

$$u_k(i); u_k(I \setminus i) \ .$$

Нетрудно показать, что множества $U_k(I \setminus i)(x_k)$, $i \in I$, $k \in K \setminus k'$, $x_k \in \mathbf{X}_k$, являются непустыми и конечными.

Пусть i – произвольный элемент множества I. Введём отображения

$$\begin{aligned} G_k(i) :& X_k \to \mathbf{R}, k \in K, \text{ и} \\ G_k^u(i) :& \cup (\{\tilde{x}_k\} \times U_k(i)(\tilde{x}_k)) \to \mathbf{R}, k \in K \setminus k'. \\ & \tilde{x}_k \in X_k \setminus X'_k \end{aligned}$$

$$G_k(i)(x_k) = \Phi_k(i)(x_k), k \in \{l \in K \setminus 0 \mid X_l \cap X'_l \neq \varnothing\}, x_k \in X_k \cap X'_k,$$

$$\begin{cases} G^u_k(i)(x_k, u_k(i)) = \\ = \min\limits_{u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k)} (F^\circ_k(i)(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i)) + G_{k+1}(i)(F_k(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i)))), \\ x_k \in X_k \setminus X'_k, u_k(i) \in U_k(i)(x_k), \\ G_k(i)(x_k) = \max\limits_{u_k(i) \in U_k(i)(x_k)} G^u_k(i)(x_k, u_k(i)), \\ x_k \in X_k \setminus X'_k, \end{cases}$$

$k = k' - 1, \ldots, 0.$

Символом $V^g[k](i)$, где $i \in I$, а $k \in K$, будем обозначать множество $\{0\}$, если $k = k'$, и множество

$$\{v[k](i) \in V[k](i) \mid \forall l \in \{k, \ldots, k'-1\}, \forall x_l \in X_l \setminus X'_l,$$
$$G^u_l(i)(x_l, v_l(i)(x_l)) = \max_{u_l(i) \in U_l(i)(x_l)} G^u_l(i)(x_l, u_l(i))\},$$

если $k \in K \setminus k'$. Для обозначения $V^g[0](i)$ будем использовать символ $V^g(i)$.

Утверждение 5.4. [6]

$$\forall i \in I, \forall k \in K \setminus k', \forall x_k \in X_k \setminus X'_k, \forall v[k](i) \in V[k](i),$$
$$G[k, x_k](i)(v[k](i)) = \min_{u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k)} (F^\circ_k(i)(x_k, v_k(i)(x_k); u_k(I \setminus i)) +$$
$$+ G[k+1, F_k(x_k, v_k(i)(x_k); u_k(I \setminus i))](i)(v[k+1](i))).$$

Утверждение 5.5. [6]

$$\begin{aligned} &\forall i \in I, \\ &((V^g(i) \neq \varnothing) \wedge \\ &\wedge (V^g(i) \subset V^\circ(i)) \wedge \\ &\wedge (G^*(i) = G_0(i)(x^\eta_0))). \end{aligned}$$

Символом I' будем обозначать множество

$$\{i \in I \mid \forall k \in K_\circ \setminus k'_\circ, \forall x_k \in \mathbf{X}_k, \forall u_k \in \mathbf{U}_k, F^\circ_k(i)(x_k, u_k) = 0\}.$$

Положим, $I' \neq \varnothing$.

Допустим, $i \in I'$, $k \in K_\circ \setminus k'_\circ$, а γ – это произвольное отображение с областью Z определения, являющейся элементом множества $\mathfrak{M}_+(\mathbf{X}_k)$, и множеством значений в $\mathbf{U}_k(i)$, удовлетворяющее такому условию

$$\forall z \in Z, \gamma(z) \in U_k(i)(z).$$

Определим множества $U_k(i)(x_k)\{\gamma\}$, $x_k \in \mathbf{X}_k$.

$$U_k(i)(x_k)\{\gamma\} = \begin{cases} \{\gamma(x_k)\}, \text{ если } x_k \in Z, \\ U_k(i)(x_k), \text{ если } x_k \in \mathbf{X}_k \setminus Z. \end{cases}$$

Допустим, $i \in I'$, а $v(i) \in V(i)$. Определим множества $X_k\{i, v(i)\}$, $k \in K$.

$$\begin{aligned} & X_0\{i, v(i)\} = X_0, \\ & X_{k+1}\{i, v(i)\} = \{x_{k+1} \in \mathbf{X}_{k+1} \mid \exists x_k \in \mathbf{X}_k, ((x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k) \wedge \\ & \wedge (\exists u_k(i) \in U_k(i)(x_k)\{v_k(i)\}, \exists u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k), \\ & x_{k+1} = F_k(x_k, u_k(i); u_k(I \setminus i))))\}, \\ & k = 0, \dots, k' - 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $X_{k'}\{i, v(i)\} \setminus X'_{k'} = \varnothing$. Символом $k'\{i, v(i)\}$ будем обозначать значение $\min\{k \in K \mid X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k = \varnothing\}$.

Утверждение 5.6. [7]

$$\begin{aligned} & \forall i \in I', \forall v(i) \in V(i), \\ & ((X_0\{i, v(i)\} = X_0) \wedge \\ & \wedge (\forall k \in K \setminus 0, X_k\{i, v(i)\} \subset X_k)). \end{aligned}$$

Утверждение 5.7. [7]

$$\begin{aligned} & \forall i \in I', \forall v(i) \in V(i), \\ & ((X_0\{i, v(i)\} \setminus X'_0 = X_0 \setminus X'_0) \wedge \\ & \wedge (\forall k \in K \setminus 0, X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k \subset X_k \setminus X'_k)). \end{aligned}$$

Утверждение 5.8. [7]

$$\begin{aligned} & \forall i \in I', \forall v(i) \in V(i), \\ & k'\{i, v(i)\} \in K \setminus 0. \end{aligned}$$

Утверждение 5.9. [7]

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((\forall k \in \{0, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}, X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k \neq \varnothing)\wedge\\
&\wedge (\forall k \in \{k'\{i, v(i)\}, \ldots, k'\}, X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k = \varnothing)).
\end{aligned}$$

Утверждение 5.10. [7]

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((\forall k \in \{0, \ldots, k'\{i, v(i)\}\}, X_k\{i, v(i)\} \neq \varnothing)\wedge\\
&\wedge (\forall k \in K, ((k > k'\{i, v(i)\}) \Rightarrow (X_k\{i, v(i)\} = \varnothing)))).
\end{aligned}$$

Утверждение 5.11. [7]

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i), \forall k \in \{0, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},\\
&X_{k+1}\{i, v(i)\} = \{x_{k+1} \in \mathbf{X}_{k+1} \mid \exists x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k,\\
&\exists u_k(I \setminus i) \in U_k(I \setminus i)(x_k), x_{k+1} = F_k(x_k, v_k(i)(x_k); u_k(I \setminus i))\}.
\end{aligned}$$

Утверждение 5.12. [7]

$$\begin{aligned}
&\forall i \in I', \forall v(i) \in V(i),\\
&((v(i) \in V^{\circ}(i)) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow ((G_0(i)(x_0^{\eta}) = G_0^u(i)(x_0^{\eta}, v_0(i)(x_0^{\eta})))\wedge\\
&\wedge (\forall k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},\\
&((1 \leqslant k) \Rightarrow (\forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k, G_0(i)(x_0^{\eta}) \leqslant G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k))))))).
\end{aligned}$$

6. Полученные результаты

В данном пункте для двухшаговой позиционной игры n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами управляющих воздействий игроков получено достаточное условие для недоминируемой максиминной стратегии произвольного игрока, функция выигрыша которого является терминальной.

Пусть далее рассматривается произвольная многошаговая позиционная игра n лиц со стратегиями-синтезами, $n \geqslant 2$, и конечными множествами $U_k(i)(x_k)$, $i \in I$, $k \in K_{\circ} \setminus k'_{\circ}$, $x_k \in \mathbf{X}_k$, удовлетворяющая условию: множество I' – непусто.

Утверждение 6.1. *Допустим, $i \in I'$. Справедливо следующее*

$$V^{\circ}(i) = \{v(i) \in V(i) \mid (G_0^u(i)(x_0^\eta, v_0(i)(x_0^\eta)) = G_0(i)(x_0^\eta))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},$$
$$((1 \leqslant k) \Rightarrow (\forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k, G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)) \geqslant G_0(i)(x_0^\eta))))\}.$$

Доказательство. Утверждение 6.1 является очевидным следствием утверждения 5.12. □

Допустим, i – произвольный элемент множества I'. Символом $V^{(\circ)}(i)$ будем обозначать множество

$$\{v(i) \in V(i) \mid (G_0^u(i)(x_0^\eta, v_0(i)(x_0^\eta)) = G_0(i)(x_0^\eta))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},$$
$$((1 \leqslant k) \Rightarrow (\forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k, G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)) = G_k(i)(x_k))))\}.$$

Утверждение 6.2. *Допустим, $i \in I'$. Справедливо следующее*

1) $V^{(\circ)}(i) \subset V^{\circ}(i)$,

2) $V^{(\circ)}(i) \neq \varnothing$.

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 5.4 - 5.11, определения 3.3 и определений множеств $V^g(i)$, $i \in I'$, и $V^{(\circ)}(i)$, $i \in I'$. □

Допустим, i – произвольный элемент множества I'. Символом $V^{(\circ)n}(i)$ будем обозначать множество

$$\{v(i) \in V(i) \mid (v(i) \in V^{(\circ)}(i))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall \tilde{v}(i) \in V(i),$$
$$(((\tilde{v}(i) \in V^{(\circ)}(i)) \wedge (\tilde{v}(i) \neq v(i))) \Rightarrow \neg(v(i) \preceq (i)\tilde{v}(i))))\}.$$

Утверждение 6.3. *Допустим, $i \in I'$. Справедливо следующее*

1) $V^{(\circ)n}(i) \subset V^{(\circ)}(i)$,

2) $V^{(\circ)n}(i) \subset V^{\circ}(i)$.

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждения 6.2 и определений множеств $V^{(\circ)n}(i)$, $i \in I'$. □

Утверждение 6.4. *Допустим,* $i \in I'$. *Справедливо следующее*

$$V^{\circ}(i) \setminus V^{(\circ)}(i) = \{v(i) \in V(i) \mid (G_0^u(i)(x_0^\eta, v_0(i)(x_0^\eta)) = G_0(i)(x_0^\eta))\wedge$$
$$\wedge\,(\forall k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},$$
$$((1 \leqslant k) \Rightarrow (\forall x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k, G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)) \geqslant G_0(i)(x_0^\eta))))\wedge$$
$$\wedge\,(\exists k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\},$$
$$((1 \leqslant k) \wedge (\exists x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k, G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)) < G_k(i)(x_k))))\}.$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждения 6.1, определений множеств $V^{(\circ)}(i)$, $i \in I'$, и функций $G_k(i)$, $i \in I'$, $k \in K \setminus k'$. □

Утверждение 6.5. *Допустим,* $i \in I'$, $v'(i) \in V^{(\circ)n}(i)$. *Справедливо следующее*

$$(v'(i) \notin V^{\circ}(i) \cap N(i)) \Rightarrow (\exists v''(i) \in V(i), v'(i) \preceq (i) v''(i)).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждения 6.3 и определения 3.5. □

Утверждение 6.6. *Допустим,* $i \in I'$, $v'(i) \in V^{(\circ)n}(i)$, $v''(i) \in V(i)$. *Справедливо следующее*

$$(v'(i) \preceq (i) v''(i)) \Rightarrow (v''(i) \in V^{\circ}(i) \setminus V^{(\circ)}(i)).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 5.3 и 6.3, определения 3.4 и определений множеств $V^{(\circ)n}(i)$, $i \in I'$. □

Допустим, $i \in I'$, $v(i) \in V(i)$, $k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}$. Символом $\overline{X}_k\{i, v(i)\}$ будем обозначать множество

$$\{x_k \in X_k\{i, v(i)\} \setminus X'_k \mid G_k^u(i)(x_k, v_k(i)(x_k)) < G_k(i)(x_k)\}.$$

Утверждение 6.7. *Допустим,* $i \in I'$, $k' = 2$, $v'(i) \in V^{(\circ)n}(i)$, $v''(i) \in$

$V(i)$. Тогда справедливо следующее

$$\begin{aligned}&(v'(i) \preceq (i)v''(i)) \Rightarrow\\ &\Rightarrow ((k'\{i, v''(i)\} = 2)\wedge\\ &\wedge (X_1\{i, v''(i)\} \setminus X_1' \neq \varnothing)\wedge\\ &\wedge (X_1 \setminus X_1' \neq \varnothing)\wedge\\ &\wedge (\overline{X}_1\{i, v''(i)\} \neq \varnothing)\wedge\\ &\wedge (\exists u_0(I \setminus i) \in U_0(I \setminus i)(x_0^\eta), F_0(x_0^\eta, v_0''(i)(x_0^\eta); u_0(I \setminus i)) \in \overline{X}_1\{i, v''(i)\})).\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 5.7 - 5.9, 5.11, 6.4 и 6.6, а также на использовании определения величины x_0^η и определений множеств K и $\overline{X}_k\{i, v(i)\}$, $i \in I'$, $v(i) \in V(i)$, $k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}$. □

Утверждение 6.8. *Допустим, $i \in I'$, $k' = 2$, $v'(i) \in V^{(\circ)n}(i)$, $v''(i) \in V(i)$, $v'''(i) \in V(i)$. Тогда справедливо следующее*

$$\begin{aligned}&((v'(i) \preceq (i)v''(i))\wedge\\ &\wedge (v_0'''(i)(x_0^\eta) = v_0''(i)(x_0^\eta))\wedge\\ &\wedge (\forall x_1 \in X_1 \setminus X_1',\\ &(((x_1 \notin \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (v_1'''(i)(x_1) = v_1''(i)(x_1)))\wedge\\ &\wedge ((x_1 \in \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (G_1^u(i)(x_1, v_1'''(i)(x_1)) = G_1(i)(x_1)))))) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (v'''(i) \in V^{(\circ)}(i)).\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 5.7, 5.11, 6.1, 6.6 и 6.7, а также на использовании определений множеств $\overline{X}_k\{i, v(i)\}$, $i \in I'$, $v(i) \in V(i)$, $k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}$, и $V^{(\circ)}(i)$, $i \in I'$, и функций $G_k(i)$, $i \in I'$, $k \in K$. □

Утверждение 6.9. *Допустим, $i \in I'$, $k' = 2$, $v'(i) \in V^{(\circ)n}(i)$, $v''(i) \in V(i)$, $v'''(i) \in V(i)$, $u_0(I \setminus i) \in U_0(I \setminus i)(x_0^\eta)$, $v(I \setminus i) \in V(I \setminus i)$, и пусть при этом выполнено условие*

$$\forall j \in I \setminus i, v_0(j)(x_0^\eta) = u_0(j);$$

пусть также x_1'' – это значение

$$F_0(x_0^\eta, v_0''(i)(x_0^\eta); u_0(I \setminus i)).$$

Тогда справедливо следующее

$$
\begin{aligned}
&((v'(i) \preceq (i)v''(i))\wedge \\
&\wedge (v_0'''(i)(x_0^\eta) = v_0''(i)(x_0^\eta))\wedge \\
&\wedge (\forall x_1 \in X_1 \setminus X_1', \\
&(((x_1 \notin \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (v_1'''(i)(x_1) = v_1''(i)(x_1)))\wedge \\
&\wedge ((x_1 \in \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (G_1^u(i)(x_1, v_1'''(i)(x_1)) = G_1(i)(x_1)))))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (((x_1'' \notin \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (J(i)(v'(i); v(I \setminus i)) \leqslant J(i)(v'''(i); v(I \setminus i))))\wedge \\
&\wedge ((x_1'' \in \overline{X}_1\{i, v''(i)\}) \Rightarrow (J(i)(v'(i); v(I \setminus i)) < J(i)(v'''(i); v(I \setminus i))))).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 5.7, 5.11, 6.3 и 6.7, а также на использовании определения 3.4 и определений множеств I', $\overline{X}_k\{i, v(i)\}$, $i \in I'$, $v(i) \in V(i)$, $k \in \{0, 1, \ldots, k'\{i, v(i)\} - 1\}$, и $V^{(\circ)}(i)$, $i \in I'$, и функций $J(i)$, $i \in I'$, $G_k^u(i)$, $i \in I'$, $k \in K \setminus k'$, и $G_k(i)$, $i \in I'$, $k \in K$. □

Утверждение 6.10. *Допустим, $i \in I'$, $k' = 2$. Тогда справедливо следующее*

$$V^{(\circ)n}(i) \subset V^\circ(i) \cap N(i).$$

Доказательство. Доказательство основано на использовании утверждений 6.5, 6.7, 6.8 и 6.9, а также на использовании определения 3.4 и определений множеств $V^{(\circ)n}(i)$, $i \in I'$. □

Утверждение 6.11. *Допустим, $i \in I'$, $k' = 2$ и $v(i) \in V(i)$. Тогда справедливо следующее*

$$(v(i) \in V^{(\circ)n}(i)) \Rightarrow (v(i) \in V^\circ(i) \cap N(i)).$$

Доказательство. Утверждение 6.11 является очевидным следствием утверждения 6.10. □

7. Заключение

Итак, нахождение недоминируемой максиминной стратегии i-го игрока, $i \in I'$, в исследуемой двухшаговой позиционной игре может быть, в частности, сведено к отысканию такой стратегии из множества $V^{(\circ)}(i)$, которая не доминируется никакой другой стратегией из этого множества. Очевидно, что при таком варианте поиска нет необходимости в нахождении и рассмотрении максиминных стратегий i-го игрока, принадлежащих разности $V^{\circ}(i) \setminus V^{(\circ)}(i)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьёв Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука, 1984.
2. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* М.: Мир, 1985.
3. Воробьёв Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985.
4. Лагунов В.Н. *Введение в дифференциальные игры.* Вильнюс: Институт математики и кибернетики АН Литовской ССР, 1979.
5. Лагунов В.Н., Сушкин В.В. *Многошаговые позиционные игры N лиц.* Тверь, 1993.
6. Сушкин В.В. *Необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока с терминальной функцией выигрыша в многошаговой позиционной игре n лиц со стратегиями-синтезами и конечными множествами управляющих воздействий игроков.* / Тверск. гос. у-нт. – Тверь, 2005. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.01.05, № 45-В2005.
7. Сушкин В.В. *Необходимое и достаточное условие для максиминной стратегии произвольного игрока с терминальной функцией выигрыша в многошаговой позиционной игре N лиц со стратегиями-синтезами и конечными множествами управляющих воздействий игроков.* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2009. № 12. С. 103-116.

SUFFICIENT CONDITION FOR NONDOMINATED MAXIMIN STRATEGY OF ARBITRARY PLAYER WITH TERMINAL PAYOFF FUNCTION IN TWO-STEP POSITIONAL GAME OF N PERSONS WITH STRATEGIES-SYNTHESES AND FINITE SETS OF CONTROLLING ACTIONS OF PLAYERS

Vyacheslav V. Sushkin, Tver State University, Department of Mathematics, Cand.Sc., docent (vsushkin@mail.ru).

Abstract: Two-step positional game of n persons with strategies-syntheses, $n \geqslant 2$, and finite sets of controlling actions of players is investigated. Sufficient condition for nondominated maximin strategy of arbitrary player, whose payoff function is terminal, has been obtained.

Keywords: noncooperative game, maximin strategy, nondominated strategy, multi-step positional game, strategy-synthesis, terminal payoff function.