Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.2, с. 62–79

УДК 519.711.7
ББК 22.1

ИГРА БАЛАНСА ЗАГРУЗКИ С ЛИНЕЙНЫМИ ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

Юлия В. Чиркова*
ИПМИ КарНЦ РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: julia@krc.karelia.ru

В работе рассматривается игра баланса загрузки системы обслуживания, где игроки распределяют свои задачи различного объема между машинами, различающимися задержкой, зависящей как от собственной загрузки, так и от загрузки других машин. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранной им машине. Затратами системы является максимальное время работы среди всех машин. Для случая двух машин в данной модели доказано существование чистого равновесия по Нэшу и получено аналитическое выражение цены анархии.

Ключевые слова: система обслуживания, баланс загрузки, линейные экстерналии, равновесие по Нэшу, цена анархии.

Поступила в редакцию: 24.12.20 *После доработки*: 11.02.21 *Принята к публикации*: 01.03.21

1. Введение

Баланс загрузки – одна из основных проблем в сетях и системах распределенных вычислений, поскольку оптимизация загрузки обеспечивает эффективное использование ресурсов. Современные системы, такие как телекоммуникационные сети, системы облачных вычислений, GRID и т.п., состоят из независимых компонент, в них зачастую отсутствует возможность централизованного управления компонентами. Теоретико-игровой подход позволяет рассматривать баланс загрузки как игру, в которой участники действуют эгоистично и могут достигать некоторого равновесного состояния, когда никому не выгодно отклоняться от выбранной стратегии. Сравнение таких равновесий с глобальным оптимумом позволяет оценить эффективность системы. Для сравнения эгоистичного равновесного и оптимального сценариев выполнения задач используется критерий, предложенный впервые в [17] и названный впоследствии "ценой анархии" [18, 15, 10].

В работе рассматривается задача баланса загрузки машин, также известная как задача составления расписания [2], в виде игры, подобной KP-модели (Koutsoupias, Papadimitriou) [10, 13], с введенными в нее экстерналиями. Множество задач различных объемов должно быть распределено между машинами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Объемом задачи считается время ее обслуживания в полностью свободной от других задач системе на машине со скоростью 1. Загрузкой машины является суммарный объем выполняющихся на ней задач. Отношение загрузки к скорости машины плюс влияние загрузок остальных машин определяет ее задержку, то есть время завершения работы данной машины. Каждый игрок выбирает машину для обслуживания своей задачи, стараясь минимизировать свою задержку. Игроки действуют эгоистично и достигают равновесия по Нэшу – такого распределения задач на машинах, когда никому из игроков не выгодно единолично менять выбранную машину на другую.

Считаем, что на задержку при выполнении задач на машине влияет не только ее собственная загрузка, но также и загрузка других машин через экстерналии. Это можно интерпретировать так, что часть своих ресурсов машины тратят на совместное выполнение управляющих операций, участие в организации, контроле и поддержке процесса выполнения задач, а также на связанный вместе с этими операциями обмен данными. Поэтому даже не загруженная задачами машина имеет некоторую задержку, поскольку участвует в организации работы загруженных машин.

Работа [9] является одной из первых, где было введено понятие экстерналий как внешних эффектов, создаваемых соседними игроками в сети. В моделях маршрутизации трафика в сетях также вводятся экстерналии различного вида. В работах [4, 8, 1, 11] рассматриваются игры маршрутизации с положительными, связанными с разделением затрат (cost-sharing) и отрицательными перегрузочными (congestion) экстерналиями. В [16] показывается, что перегрузочные экстерналии могут быть причиной неэффективности по Парето равновесий, в том числе вызывать возникновение парадокса Браесса [3, 18, 15]. В [14] учитываются экстерналии смешанного типа, включающие отрицательные и положительные компоненты и влияющие на возникновение и характеристики парадокса Браесса в сети. Данная работа иллюстрирует возможность введения экстерналий линейного вида в функции задержки в KP-модели, подобно тому, как это было сделано в работах [12, 7] для модели Вардропа транспортной системы с параллельными каналами.

В данной статье рассматривается только чистое равновесие по Нэшу, показано, что подобно KP-модели без экстерналий [6], что для игр такого типа с двумя машинами оно всегда существует, в отличие от общего случая. Затратами системы (или социальными затратами) для полученного распределения задач на машинах является максимальная задержка среди всех машин. Цена анархии – это максимум отношения затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальным затратам системы. В данной работе найдено аналитическое выражение для цены анархии для случая двух машин.

2. Модель системы

Рассмотрим систему $S = S(N, v, e)$, состоящую из $n = |N|$ обслуживающих машин со скоростями $v = (v_1, \dots, v_n)$ и экстерналиями e_{ik}, где $i, k \in N, i \neq k$, а каждый коэффициент e_{ik} отражает степень влияния загрузки машины $k \neq i$ на задержку машины i. Система используется множеством игроков $U = U(M, w)$, где каждый из $m = |M|$ игроков выбирает машину для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока j равен w_j, $j = 1, \dots, m$. Все задачи игроков составляют профиль задач $w = (w_1, \dots, w_m)$. Суммарный объем всех задач обозначим как $W = \sum\limits_{j=1}^{m} w_j$. Время выполнения задачи объемом w_j в свободной от других задач системе на машине i со скоростью v_i равно $\frac{w_j}{v_i}$.

Полагаем, что каждый игрок может выбирать любую из машин. Стратегией игрока j является номер машины l_j, которую он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре Γ – это вектор $L = (l_1, \ldots, l_m)$. Загрузку машины i, то есть суммарный объем задач на ней, обозначим как $\delta_i(L) = \sum\limits_{j \in M: l_j = i} w_j$. Задержка машины i обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L),$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данную машину. Можно также доопределить $e_{ii} = \frac{1}{v_i}$, и тогда записать компактнее

$$\lambda_i(L) = \sum_{k \in N} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \sum_{k \in N} e_{ik} \delta_k(L).$$

Таким образом, мы определили игру $\Gamma = < S(N, v, e), U(M, w), \lambda >$ в чистых стратегиях. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только чистых стратегий.

Затататы системы определяются как максимальная среди всех машин задержка

$$SC(L) = \max_{i \in N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ профиль в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)$$

оптимальные затраты, или затраты системы в оптимальном случае, где минимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$.

Профиль стратегий L, где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранную в L машину на другую для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того, чтобы дать формальное определение, обозначим $L(j \to i) = (l_1, \ldots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \ldots, l_m)$ профиль, получаемый из профиля L, если игрок j меняет выбранную им в L машину l_j на некоторую машину i, а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

Определение 2.1. *Профиль стратегий L называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, если каждый игрок выбрал* *машину с минимальной задержкой, то есть для каждого игрока* $j \in M$ *выполняется* $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \to i))$ *для всех машин* $i \in N$.

Введем предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Рассмотрим произвольный профиль L. Во-первых, будем считать, что экстерналии таковы, что перевод любой задачи объема w_j с машины l_j на машину k строго уменьшает задержку на машине l_j и строго увеличивает задержку на машине k. Для этого должно выполняться следующее.

Предположение 2.1. *Для всех пар машин* i, k *выполняется* $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$.

Тогда $\lambda_{l_j}(L(j \to k)) = \lambda_{l_j}(L) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L)$ и $\lambda_k(L(j \to k)) = \lambda_k(L) + w_j(\frac{1}{v_k} - e_{kl_j}) < \lambda_{l_j}(L)$.

Во-вторых, естественно предположить, что загрузка машины $\delta_i(L)$ в большей степени влияет на задержку машины i, чем на задержку остальных машин. То есть, выполняется следущее.

Предположение 2.2. *Для всех пар машин* i, k *выполняется* $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$.

В-третьих, предположим, что влияние экстерналий обратно пропорционально скоростям машин. Это означает, что на более быструю машину в меньшей степени влияют загрузки остальных машин, чем на медленную.

Предположение 2.3. *Для всех пар машин* i, k*, таких, что* $v_i \geq v_k$*, выполняется* $\sum\limits_{l \neq i} e_{il} \leq \sum\limits_{l \neq k} e_{kl}$.

Заметим, что в случае модели с экстерналиями при переводе задачи с машины i на машину k также могут увеличиться или уменьшиться задержки на других машинах $l \neq i, k$. Поэтому в отличие от классической КР-модели, где чистое равновесие по Нэшу существует всегда, в модели с экстерналиями в общем случае равновесие по Нэшу может не существовать, как показывает пример 2.1. Однако, как будет показано в следующем разделе, в модели с двумя машинами равновесие по Нэшу существует.

Пример 2.1. Приведем пример простой игры, в которой чистого равновесия по Нэшу не существует. Рассмотрим игру с двумя задачами единичного объема и тремя машинами с единичными скоростями. Экстерналии заданы в виде матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } 0 < \epsilon < 1.$$

Расмотрим любой профиль, например, $L = (1, 2)$. Задержка для первой задачи равна $1+\epsilon$, для второй 1. Первая задача может перейти на свободную машину 3 и получить задержку, равную 1, что она и делает. Тогда у второй задачи задержка увеличивается до $1+\epsilon$, что заставляет его перейти на освободившуюся первую машину. Это в свою очередь увеличивает задержку для первой задачи, которая переходит на машину 2. И так далее, получается бесконечный цикл профилей $(1, 2) \to (3, 2) \to (3, 1) \to (2, 1) \to (2, 3) \to (1, 3) \to (1, 2) \to \ldots$.

Пусть система и наборы задач игроков таковы, что чистое равновесие по Нэшу существует. Тогда можно говорить о цене анархии для данной системы.

Определение 2.2. *Ценой анархии для системы S называется максимум отношения затрат систем в наихудшем чистом равновесии по Нэшу к затратам системы в оптимальном случае:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max\limits_{L \text{ – равновесие по Нэшу в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)}{OPT(S,U)}.$$

3. Случай двух машин

В работе [6] показано, что в KP-модели без экстерналий всегда существует чистое равновесие по Нэшу. Используя аналогичную идею доказательства покажем, что это же справедливо в случае рассматриваемой в данной работе модели с экстерналиями для случая двух машин.

Теорема 3.1. *В KP-модели с линейными экстерналиями с двумя машинами при предположениях 2.1, 2.2 и 2.3 всегда существует чистое равновесие по Нэшу.*

Доказательство. Каждому чистому профилю L соответствует вектор задержек на машинах $\lambda(L) = (\lambda_1(L), \lambda_2(L))$. Пусть вектор $\lambda'(L) = (\lambda'_1(L), \lambda'_2(L))$ состоит из компонент вектора $\lambda(L)$, отсортированных в порядке убывания. Пусть λ'^0 – лексикографический минимум из множества векторов $\lambda'(L)$ для всех возможных чистых профилей L, а L^0 – соответствующий ему профиль. Покажем, что L^0 – чистое равновесие по Нэшу.

Пусть это не так. Тогда существует некоторый игрок j, которому выгодно перевести свою задачу с машины l_j на машину $k \neq l_j$. Это означает, что во-первых $\lambda_{l_j}(L^0) > \lambda_k(L^0)$, то есть машина l_j более загружена. Во-вторых, при переходе задачи задержки на обеих машинах становятся меньше чем $\lambda_{l_j}(L^0)$, так как $\lambda_{l_j}(L^0(j \to k)) = \lambda_{l_j}(L^0) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L^0)$, а $\lambda_k(L^0(j \to k)) < \lambda_{l_j}(L^0)$. То есть λ'^0 не является лексикографическим минимумом. □

Для удобства, не умаляя общности, для модели двух машин скорости машин определим как $v_1 = 1$, $v_2 = s \geq 1$. Обозначим также для сокращения записи величины $\eta = \eta(s) = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$, $\zeta = \zeta(s) = 1 - se_{12}e_{21}$.

Приведем следующие оценки, справедливые для игры рассматриваемого типа при предположениях 2.1, 2.2 и 2.3. Они будут использованы в дальнейшем анализе.

Предложение 3.1. *Затраты системы в равновесии не могут быть больше, чем затраты системы в случае, когда все задачи выполняются на одной, самой быстрой машине:*

$$SC(L) \leq \frac{W}{s}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть равновесный профиль L такой, что $SC(L) > \frac{W}{s}$. Пусть $SC(L) = \lambda_2(L) = \frac{W-\Delta}{s} + e_{21}\Delta = \frac{W}{s} - \Delta(\frac{1}{s} - e_{21}) < \frac{W}{s}$, где Δ составляют задачи из общего объема W, находящиеся на машине 2. Тогда пусть $SC(L) = \lambda_1(L) = W - \Delta + e_{12}\Delta \leq \frac{\Delta + w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$, где Δ составляют задачи из общего объема W, находящиеся на машине 2, а w_j – любая из задач на машине 1. Тогда $\frac{W}{s} < \frac{\Delta + w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$, откуда $\frac{1}{s} < e_{21}$, что противоречит предположению 2.1. □

Предложение 3.2. *Для оптимальных затрат системы справедлива следующая оценка.*

$$OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta} \tag{3.2}$$

Доказательство. Оптимальные затраты системы не могут быть меньше, чем в ситуации, когда задержка на обеих машинах одинакова:

$$OPT \geq \frac{W-\Delta}{v_i} + e_{ik}\Delta = \frac{\Delta}{v_k} + e_{ki}(W-\delta).$$

Отсюда $\Delta = \frac{W(v_k - e_{ki}s)}{\eta}$ и $\frac{W-\Delta}{v_i} + e_{ik}\Delta = \frac{W\zeta}{\eta}$. □

3.1. Цена анархии

В работе [5] найдено точное значение цены анархии для системы двух машин без экстерналий:

$$PoA^0(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{if } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s, & \text{if } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{if } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases}$$

Найдем подобную оценку для системы с экстерналиями.

3.1.1 Верхняя оценка цены анархии

Непосредственно из оценок (3.1) и (3.2) получается следующая верхняя оценка для цены анархии.

Лемма 3.1. *Для системы S двух машин с линейными экстерналиями цена анархии имеет следующую верхнюю оценку:*

$$PoA(S) \leq \frac{\eta}{s\zeta}. \tag{3.3}$$

Найдем другие оценки, уточняющие данную.

Лемма 3.2. *Для системы S двух машин с линейными экстерналиями при предположениях 2.1, 2.2 и 2.3 цена анархии имеет следующую верхнюю оценку:*

$$PoA(S) \leq \max\{\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}, \frac{s(1-e_{12})}{\eta - s + s^2 e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}\}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое равновесие по Нэшу L. Пусть i – номер машины с наибольшей задержкой такой, что $\lambda_i(L) = SC(L)$. Ее скорость равна v_i. Номер и скорость другой машины обозначим, соответственно, k и v_k. Обозначим $w' = \min\limits_{j:l_j=i} w_j$ – минимальная по объему задача на машине i, $a = \sum\limits_{j\neq k:l_j=i} w_j$ – объем всех остальных задач на машине i. Тогда объем задач на машине k равен $W - a - w'$.

$$\lambda_i(L) = \frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{W - a}{v_k} + e_{ki}a. \qquad (3.5)$$

Выразим a из (3.5)

$$a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$$

и оценим левую часть (3.5), равную $SC(L)$, подставив в нее оценку a.

$$\frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{w'(1 - e_{ik}v_i)(1 - e_{ki}v_k) + W\zeta}{\eta}. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим два случая: в первом на машине i находится более одной задачи, во втором – одна задача.

1. $a > 0$. Тогда $w' \leq a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$, откуда $w' \leq \frac{W(v_i - se_{ik})}{\eta + v_k - se_{ik}}$ и из (3.6) $SC(L) \leq \frac{W(\zeta+1-v_ie_{ik})}{\eta+v_k-se_{ik}}$. Используем оценку (3.2), и тогда $PoA \leq \frac{\eta(\zeta+1-v_ie_{ik})}{\zeta(\eta+v_k-se_{ik})}$. То есть $PoA \leq \max\{\frac{\eta(\zeta+1-e_{12})}{\zeta(\eta+s-se_{12})}, \frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}\} = \frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$ при $s \geq \frac{2}{e+e_{12}-e_{21}}$ (то есть $e_{12} \geq e_{21}$, так как $s \geq 1$) и $s < \frac{1}{e_{21}}$.

2. $a = 0$. Тогда $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') \leq \frac{W}{v_k}$. Пусть в оптимальном профиле w' также остается на канале i. Тогда $OPT \geq \frac{w'+\Delta}{v_i} + e_{ik}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w')$. Тогда $\frac{SC(L)}{OPT} = 1$.

Пусть теперь в оптимальном профиле w' переходит на канал k. Тогда $OPT \geq \frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w')$.

а) Пусть сначала $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') = \frac{W}{v_k}$. Отсюда выражаем $w' = \frac{W(\frac{1}{v_k} - e_{ik})}{\frac{1}{v_i} - e_{ik}}$. Подставляем его в OPT и получаем $OPT \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w') = W\frac{v_i - s(e_{ik}+e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1-v_ie_{ik})}$, обозначим $OPT^{eq} = W\frac{v_i - s(e_{ik}+e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1-v_ie_{ik})}$. Тогда $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{W}{v_jOPT^{eq}} = \frac{s(\frac{1}{v_i} - e_{ik})}{v_i - s(e_{ik}+e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}$. То есть $PoA \leq \max\{\frac{s(1-e_{12})}{1-s(e_{12}+e_{21})+e_{21}s^2}, \frac{1-se_{21}}{s-s(e_{12}+e_{21})+e_{12}}\} = \max\{\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+e_{21}s^2}, \frac{1-se_{21}}{\eta-1+e_{12}}\} =$

$\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+e_{21}s^2}$, так как $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+e_{21}s^2} \geq 1$, а $\frac{1-se_{21}}{\eta-1+e_{12}} \leq 1$. Обозначим $Est^{eq} = \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+e_{21}s^2}$. Заметим, что данная оценка не превосходит $\frac{\eta}{s\zeta}$ при $s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1 \leq 0$.

b) Теперь рассмотрим ситуацию, когда $SC(L) = \frac{w'}{v_i}+e_{ik}(W-w') < \frac{W}{v_k}$. Заметим, что для любой величины $\Delta \geq 0$ справедливо $SC(L) = \frac{w'}{v_i}+e_{ik}(W-w') \leq \frac{w'+\Delta}{v_i}+e_{ik}(W-w'-\Delta)$, так как $\frac{1}{v_i}-e_{ik} > 0$. Согласно (3.2) $OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta}$.

Пусть сначала $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} = \frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W-w'-\Delta) = \frac{W-w'-\Delta}{v_i} + e_{ik}(w'+\Delta)$, где $\Delta \geq 0$ – некоторый объем задач, занимающих в отптимальном профиле машину i вместе с задачей w'. Отсюда $w'+\Delta = \frac{Wv_k(1-v_ie_{ki})}{\eta}$ и $W-w'-\Delta = \frac{Wv_i(1-e_{ik}v_k)}{\eta}$. Тогда $SC(L) \leq \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1-v_ke_{ik})$. Обозначим $Est^i = \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1-v_ke_{ik}))$ и заметим, что $Est^i \leq \frac{W}{\eta}(s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12}))$, так как данное неравенство эквивалентно $s^2(1-e_{12})^2 \geq (1-se_{12})^2$, которое выполняется при $1+e_{12} \leq \frac{1}{s}+e_{21}$.

Обозначим $Est^s = \frac{W}{\eta}(s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})) \geq \frac{W}{s\eta}(1-se_{12}+s^2e_{21}(1-e_{21})) = Est^1$.

В этом случае отношение $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$. Заметим, что данная оценка не превосходит $\frac{\eta}{s\zeta}$ так же, как и предыдущая Est^{eq}, при $s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1 \leq 0$. Кроме того, данная оценка не менее Est^{eq} при $(se_{21}-e_{12})(s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1) \geq 0$. Отсюда необходимые условия для актуальности данной оценки: $se_{21}-e_{12} \leq 0$ и $s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1 \leq 0$. Если же $se_{21}-e_{12} \geq 0$ и $s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1 \leq 0$, то более актуальна оценка Est^{eq}.

Пусть теперь $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{v_k}+e_{ki}(W-w'-\Delta), \frac{W-w'-\Delta}{v_i} + e_{ik}(w'+\Delta)\}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $k=1$, а $i=2$. Тогда $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{w'+\Delta+e_{12}(W-w'-\Delta), \frac{W-w'-\Delta}{s}+e_{21}(w'+\Delta)\}$. Тогда $w'+\Delta = \frac{W(1-se_{12})}{\eta}+\gamma$, $W-w'-\Delta = \frac{Ws(1-e_{21})}{\eta}-\gamma$ и $SC(L) \leq Est^1 + \gamma(\frac{1}{s}-e_{21})$. Если $\gamma < 0$, то $Est^1 + (\frac{1}{s}-e_{21}) < Est^1 \leq Est^s$, а $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(\frac{1}{s}-e_{21}) > \frac{W\zeta}{\eta}$. В этом случае $\frac{SC(L)}{OPT} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$. Если $\gamma > 0$, то $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(1-e_{12})$. Тогда отношение $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{Est^1+\gamma(\frac{1}{s}-e_{21})}{\frac{W\zeta}{\eta}+\gamma(1-e_{12})} \leq Est^s\frac{\eta}{W\zeta}$, так как $Est^1 \leq Est^s$ и $(\frac{1}{s}-e_{21})\zeta \leq (s-se_{21}+e_{12}-se_{12}^2)(1-e_{12})$, что эквивалентно $\eta(1-s+se_{12}(e_{21}-e_{12})) \leq 0$ и выполнено при $e_{21} \leq e_{12}$

(предположение 2.3).

Теперь пусть $k=2$, $i=1$. Тогда $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{s}+e_{21}(W-w'-\Delta), W-w'-\Delta+e_{12}(w'+\Delta)\}$. Тогда $w'+\Delta = \frac{Ws(1-e_{21})}{\eta}+\gamma$, $W-w'-\Delta = \frac{W(1-se_{12})}{\eta}-\gamma$ и $SC(L) \le Est^s + \gamma(1-e_{12})$. Если $\gamma<0$, то $Est^s+\gamma(1-e_{12}) < Est^s$, а $OPT = \frac{W\zeta}{\eta}-\gamma(1-e_{12}) > \frac{W\zeta}{\eta}$. В этом случае $\frac{SC(L)}{OPT} \le Est^s\frac{\eta}{W\zeta}$. Если $\gamma>0$, то $OPT = \frac{W\zeta}{\eta}-\gamma(\frac{1}{s}-e_{21})$. Тогда отношение $\frac{SC(L)}{OPT} \le \frac{Est^s+\gamma(1-e_{12})}{\frac{W\zeta}{\eta}+\gamma(\frac{1}{s}-e21)} \le Est^s\frac{\eta}{W\zeta}$, при условии $\eta(se_{21}-e_{12}) \le 0$, когда данная оценка не меньше Est^{eq}.

Если же $se_{21}-e_{12}>0$, то становится актуальной оценка Est^{eq}. Проверим ее справедливость в этом случае. Напомним, что $SC(L) = w'+e_{12}(W-w') < \frac{W}{s}$, то есть $w' = \frac{W(\frac{1}{s}-e_{12})}{1-e_{12}}-\gamma$, где $\gamma>0$. Тогда $SC(L) = \frac{W}{s}-\gamma(1-e_{12})$, а $OPT \ge OPT^{eq}-\gamma(\frac{1}{v_k}-e_{ki}) = W\frac{\eta-s+e_{21}s^2}{s^2(1-e_{12})} - \gamma(\frac{1}{s}-e_{21})$. Тогда отношение $\frac{SC(L)}{OPT} \le \frac{\frac{W}{s}-\gamma(1-e_{12})}{W\frac{\eta-s+e_{21}s^2}{s^2(1-e_{12})}-\gamma(\frac{1}{s}-e_{21})} \le \frac{\frac{W}{s}}{W\frac{\eta-s+e_{21}s^2}{s^2(1-e_{12})}} = Est^{eq}$, так как $\frac{\eta-s+e_{21}s^2}{s} \ge \frac{1}{s}-e_{21}$ при $se_{21}>e_{12}$. □

На основе оценок (3.3) и (3.4) из лемм 3.1 и 3.2 получаем следующую обобщенную оценку сверху для цены анархии.

Теорема 3.2. *Для системы S двух машин с линейными экстерналиями цена анархии $PoA(S) \le Est(S)$, где*

$$Est(S) = \min\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\}, \tag{3.7}$$

$$Est^{max}(S) = \max\{\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}, \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}, \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}\}.$$

3.1.2 Нижняя оценка цены анархии

Покажем, что для системы S двух машин с экстерналиями величина $Est(S)$, определенная формулой (3.7), является также нижней оценкой цены анархии, то есть $PoA(S) \ge Est(s)$.

Теорема 3.3. *Для системы S двух машин с линейными экстерналиями при предположениях 2.1, 2.2 и 2.3 цена анархии $PoA(S) \ge Est(S)$, где величина $Est(S)$ определяется формулой (3.7).*

Доказательство. Цена анархии определяется для каждой системы S, как максимум отношения затрат системы в наихудшем чистом равновесии по Нэшу к оптимальным затратам. При этом максимум берется по всем возможным множествам игроков U с задачами, поступающими в систему. Если существует некоторое множество игроков U^*, для которого отношение затрат системы в наихудшем чистом равновесии к оптимальным равно некоторой заданной величине (S), то максимум по всем возможным наборам U также будет не менее, чем $C(S)$. Это означает, что для доказательства нижней оценки цены анархии достаточно привести примеры игр с системой S, в которых значение цены анархии совпадает со значением $Est(S)$.

1. Пример для $PoA(S) \geq \frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$.

В системе четыре игрока с задачами $w = (\eta s(1-e_{21}), \eta s(1-e_{21}), s(1-e_{21})(1-se_{21}), (1-se_{12})(\eta+1-se_{21}) - s\eta(1-e_{21}))$. Значение $w_4 \geq 0$ при актуальной рассматриваемой в данном пункте оценке цены анархии, в частности, когда $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})} \geq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$, так как оба неравенства выполняются, когда $s^2(e_12^2 + e_{12}e_{21} - 1 - e_{21}^2 + 2e_{21}) - s(3e_{12} + e_{21}) + 2 \geq 0$.

В равновесии L на второй машине с скоростью s находятся задачи w_1 и w_2, а w_3 и w_4 – на первой машине со скоростью 1. Задержки $\lambda_2(L) = \eta(\zeta+1-se_{21}) \geq \lambda_1(L) = \eta(2\zeta - s + se_{12})$. При переводе w_1 на машину 1 задержка на ней становится равной $\lambda_2(L)$. В оптимальном профиле на первой машине находится w_2 и w_4, а на второй w_1 и w_3. Задержки на обеих машинах равны $\zeta(\eta+1-se_{21})$.

2. Пример для $PoA(S) \geq \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$.

В системе два игрока с задачами $w = (s(1-se_{12}), s(s-1))$. В равновесном профиле L задача w_1 находится на первой машине со скоростью 1, а w_2 на машине со скоростью s. Задержки $\lambda_1(L) = s(1-e_{12}) \geq \lambda_2(L) = s-1+se_{21}(1-se_{12})$. При переводе w_1 на машину 2 задержка на ней становится равна $\lambda_1(L)$. В оптимальном профиле w_1 и w_2 меняются местами. На первой машине располагается w_2, на второй w_1. Покажем,что задержки $\lambda_1(OPT) = s(s-1) + se_{12}(1-se_{12}) = s(1-e_{12})(s-1+se_{12}) \leq \lambda_2(OPT) = \eta - s + s^2e_{21}$, когда $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}} \leq \frac{\eta}{s\zeta}$, то есть актуально рассматриваемое в данном пункте значение оценки цены анархии. Первое неравенство преобразуется к виду $s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1 \geq 0$, а второе к виду

$(se_{21}-1)(s^2(e_{12}^2+e_{21}-1)+s(1-2e_{12}-e_{21})+1)\leq 0$. Оба неравенства выполняются одновременно, так как $se_{21}-1<0$ при $e_{21}<\frac{1}{s}$.

3. Пример для $PoA(S)\geq\frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$.

В системе два игрока с задачами $w=(s(1-e_{21}),1-se_{12})$. В равновесии L задача w_1 находится на машине 1, а w_2 на машине 2. Задержки $\lambda_1(L)=s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})\geq\lambda_2(L)=\frac{1}{s}-e_{12}+se_{21}(1-e_{21})$, что эквивалентно неравенству $s^2(1-e_{21})^2\geq(1-se_{12})^2$, которое выполняется при предположении 2.3. При переводе w_1 на машину 2 задержка на ней становится равна $\frac{\eta}{s}\geq\lambda_1(L)$ при $s^2(1-e_{12}^2-e_{21})-s(1-2e_{12}-e_{21})-1\leq 0$, когда актуальна данная оценка.

В оптимальном профиле w_1 и w_2 меняются местами. На первой машине располагается w_2, на второй w_1. При этом на обеих машинах задержка равна ζ.

4. Пример для $PoA(S)\geq\frac{\eta}{s\zeta}$.

В системе три игрока с задачами $w=(\eta(1-se_{12}),s(1-se_{12})(1-e_{12}),s^2(1-e_{12})(1-e_{21})-\eta(1-se_{12}))$. Преобразуем $w_3=-(s^2(e_{12}^2+e_{21}-1)+s(1-2e_{12}-e_{21})+1)$. Из доказательства в пункте 3. следует, что величина w_3 неотрицательна при актуальной рассматриваемой в данном пункте оценке, в частности, когда $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}\geq\frac{\eta}{s\zeta}$. В равновесии L задача w_1 находится на первой машине со скоростью 1, а w_2 и w_3 на второй со скоростью s. Задержки равны $\lambda_1(L)=\eta(1-e_{12})\geq\lambda_2(L)=\frac{\eta}{s}(s-1+se_{21}(1-se_{12}))$. При переводе w_1 на вторую машину задержка на ней становится равна $\lambda_1(L)$. В оптимальном профиле w_2 находится на машине со скоростью 1, а w_1 и w_3 на машине со скоростью s. Задержки на обеих машинах равны $s\zeta(1-e_{12})$. $\square$

3.1.3 Точное значение цены анархии

Из теорем 3.2 и 3.3 следует, что значение $Est(s)$ определенное в формуле (3.7), является точным значением цены анархии в рассматриваемой модели.

Теорема 3.4. *Для системы S двух машин с линейными экстерналиями при предположениях 2.1, 2.2 и 2.3 цена анархии $PoA(S)=Est(S)$, где*

$$Est(S)=\min\{Est^{max}(S),\frac{\eta}{s\zeta}\},$$

$$Est^{max}(S) = \max\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2 e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\},$$

$\eta = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$, $\zeta = 1 - se_{12}e_{21}$.

Заметим, что при нулевых значениях экстерналий данное значение совпадает со значением $PoA^0(S)$ цены анархии для системы без экстерналий.

4. Численные эксперименты

Приведем численные примеры, позволяющие визуально продемонстрировать полученное значение цены анархии для рассматриваемой системы двух машин с экстерналиями. На графиках Рис. 1 и Рис. 2 пунктирными линиями показаны значения a – оценка $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$, b – оценка $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$, c – оценка $\frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$, d – оценка $\frac{\eta}{s\zeta}$. Сплошной толстой линией показано $PoA(S)$ – значение цены анархии для рассматриваемой модели. Для сравнения дано $PoA^0(S)$ – значение цены анархии для системы без экстерналий.

На Рис. 1 видно, что при $se_{21} \geq e_{12}$ значение оценки b превышает c, а на Рис. 2 при $se_{21} \leq e_{12}$ актуальной является оценка c.

На обоих рисунках из-за введения экстерналий произошел сдвиг влево пикового значения цены анархии, на втором рисунке это вызвало пересечение графиков, однако в большинстве случаев график для системы с экстерналиями находится ниже графика для системы без экстерналий. Цена анархии принимает большие значения, когда в оптимуме затраты системы минимальны и задержки машин принимают близкие значения, а в худшем равновесии одна из машин загружена значительно больше другой. Введение экстерналий снижает эту разницу по двум причинам. Во-первых, по сравнению с моделью без экстерналий, увеличивается значение оптимальных затрат системы (на долю загрузки менее загруженной машины пропорционально экстерналии). Во-вторых, уход задачи с более загруженной машины точно так же в меньшей степени, чем в случае без экстерналий, снижает задержки как для самой задачи, так и для машины, которую она покидает. Это оказывает влияние на структуру наихудшего равновесия. Исследование вопроса, при каких условиях и на сколько

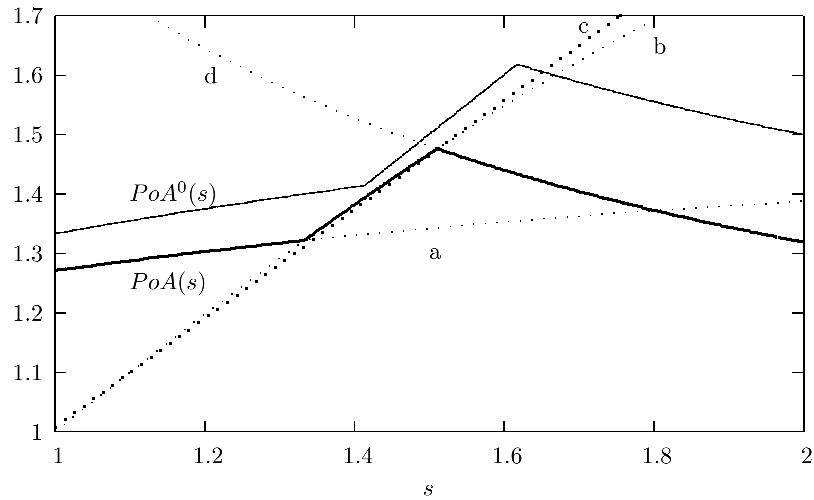

Рисунок 1. Зависимость значения цены анархии от s для $e_{12} = 0.11$, $e_{21} = 0.1$.

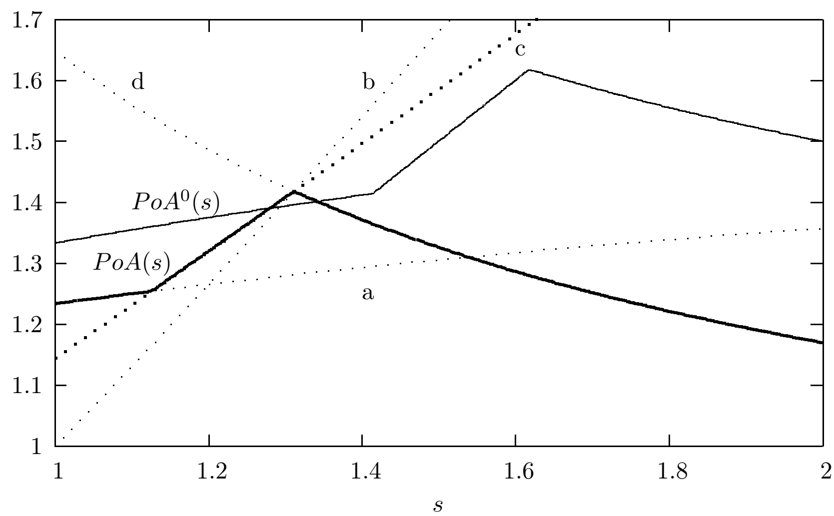

Рисунок 2. Зависимость значения цены анархии от s для $e_{12} = 0.3$, $e_{21} = 0.1$.

уменьшается цена анархии с введением экстерналий является важной проблемой, однако выходит за рамки данной статьи, являясь темой дальнейших исследований.

5. Заключение

В статье рассмотрена игра баланса загрузки системы обслуживания на основе KP-модели с линейными экстерналиями. Определены предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Показано, что в общем случае даже при сделанных предположениях чистое равновесие по Нэшу может не существовать. Для случая двух машин в данной модели доказано существование чистого равновесия по Нэшу и получено аналитическое выражение цены анархии. Приведены численные эксперименты, позволяющие визуально оценить зависимость цены анархии от параметров системы, а также сравнить данное значение с ценой анархии для модели без экстерналий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu D., Ozdaglar A. *Flow control, routing, and performance from service provider viewpoint.* LIDS report, 2004. 74.

2. Andelman N., Feldman M., Mansour Y. *Strong price of anarchy* // Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2007. P. 189–198.

3. Braess D. *Uber ein Paradoxon der Verkehrsplanung* // Unternehmensforschung. 1968. V. 12. P. 258–268.

4. Easley D., Kleinberg J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about Highly Connected World.* Cambridge: Cambridge University Press. 2010.

5. Epstein L. *Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy* // Acta Informatica. 2010. V. 47 (7-8). P. 375–389.

6. Fotakis D., Kontogiannis S.C., Koutsoupias E., Mavronicolas M., Spirakis P.G. *The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game* // Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2002). 2002. P. 123–134.

7. Gao H., Mazalov V.V., Xue J. *Optimal Parameters of Service in a Public Transportation Market with Pricing* // Journal of Advanced Transportation. 2020. V. 2020. Safety, Behavior, and Sustainability under the Mixed Traffic Flow Environment. 2020.

8. Holzman R., Monderer D. *Strong equilibrium in network congestion games: Increasing versus decreasing costs* // International Journal of Game Theory. 2015. V. 44. P. 647–666.

9. Jacobs J. *The economy of cities.* New York: Random House, 1969.

10. Koutsoupias E., Papadimitriou C.H. *Worst-case Equilibria* // Proc. of STACS 1999. 1999. V. 1563. P. 404–413.

11. Kuang Z., Lian Z., Lien J.W., Zheng J. *Serial and parallel duopoly competition in multi-segment transportation routes* // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2020. V. 133. P. 101821.

12. Kuang Z., Mazalov V.V., Tang X., Zheng J. *Transportation network with externalities* //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. V. 382. P. 113091.

13. Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M., Spirakis P., Vrto I. *Which is the Worst-case Nash Equilibrium?* // Proc. of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. 2003. LNCS. V. 2747. P. 551–561.

14. Mak V., Seale D.A., Gishces E.J. et al. *The Braess Paradox and Coordination Failure in Directed Networks with Mixed Externalities* // Production and Operations Management. 2018. V. 27, iss. 4. P. 717–733.

15. Mazalov V., Chirkova J. *Networking Games. Network Forming Games and Games on Networks.* Academic Press, 2019.

16. Milchtaich I. *Network topology and the efficiency of equilibrium* // Games and Economic Behavior. 2006. V. 57, iss. 2. P. 321–346.

17. Papadimitriou C.H., Koutsoupias E. *Worst-Case Equilibria* // LNSC. 1999. V. 1563. P. 404–413.

18. Roughgarden T., Tardos É. *How bad is selfish routing?* // Journal of the ACM. 2002. Vol. 49, no. 2. P. 236–259.

MACHINE LOAD BALANCING GAME WITH LINEAR EXTERNALITIES

Julia V. Chirkova, IAMR KarRC RAS, Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The Machine Load Balancing Game with linear externalities is considered. A set of jobs is to be assigned to a set of machines with different latencies depending on their own loads and also loads on other machines. Jobs choose machines to minimize their own latencies. The social cost of a schedule is the maximum delay among all machines, i.e. *makespan*. For the case of two machines in this model an Nash equilibrium existence is proven and of the expression for the Price of Anarchy is obtained.

Keywords: machine load balancing game, linear externalities, Nash equilibrium, price of anarchy.