Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.2, с. 80–117

УДК 519.876.2
ББК 22.18

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Владислав В. Шумов
Международный научно-исследовательский институт
проблем управления
117312, Москва, пр-кт 60-летия Октября, 9
e-mail: v.v.shumov@yandex.ru

Всеволод О. Корепанов*
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: moskvo@yandex.ru

Основными видами общевойсковых боевых действий являются наступление и оборона. С использованием функции победы в бою, являющейся расширением функции конфликта Таллока, решены следующие теоретико-игровые задачи. Во-первых, исследована расширенная модель Гросса-Гермейера «нападение-защита», являющаяся частным случаем более общей модели «наступление-оборона» и описывающей решение сторонами ближайших тактических задач. Во-вторых, доказано, что в задаче прорыва пунктов обороны (ближайшая тактическая задача) критерии «прорыв слабейшего пункта» и «прорыв хотя бы одного пункта» эквивалентны. В-третьих, в модели распределения ресурса наступающих и обороняющихся

* Работа частично поддержана грантом РНФ № 16-19-10609.

между тактическими задачами (эшелонами) применение двух критериев: 1) произведение вероятностей решения ближайшей и последующей тактической задачи, 2) минимальное значение названных вероятностей, – дает два принципиально разных решения. В-четвертых, выполнена проверка результатов решений на соответствие принципам военного искусства и практике боев, сражений и операций.

Ключевые слова: вероятностная модель, общевойсковой бой, наступление, оборона, распределение ресурса между пунктами и тактическими задачами, принятие решений в условиях неопределенности.

Поступила в редакцию: 04.03.20 *После доработки*: 05.12.21 *Принята к публикации*: 01.03.21

1. Введение

Основоположником моделирования боя, сражения, операции считается Михаил Павлович Осипов. Им разработаны принципы моделирования боевых действий[14]:

1. Неразрывная связь военной статистики, военного искусства и математического моделирования.

2. Более предпочтительны аналитические модели, основанные на тактических принципах и физических законах, чем статистические, основанные на «подгонке» результатов под ограниченный набор статистических данных. Аналитические модели в сравнении с эмпирическими более понятны и допускают расширения для учета новых факторов (ввод в бой резервов, операционные потери, возможности боевого обеспечения, искусство полководца, моральный фактор и др.).

3. Свидетельством «правильности» моделей является соответствие результатов моделирования принципам военного искусства.

4. Практическое предназначение моделей боя («*теория потерь не отвергает никаких воинских уставов или правил, а наоборот, требует исполнения их, напоминая, что всякое упущение в этом отношении изменяет среднее, законное соотношение потерь в другое, клонящее в пользу противника, т.е. влечет за*

собою излишние потери у нас, которых можно было бы избежать»).

Теоретико-игровые модели боевых действий, в частности, исследовали Борель (игра полковника Блотто [22]), Карлин (многоуровневая система защиты на заданном направлении [10]), Гермейер (модель «нападение-оборона» [5]), Огарышев (расширение модели Гросса [13]), Новиков (иерархические модели боя [12]), Морозов и Шалбузов (задача распределения ресурсов при защите объекта [11]), Перевозчиков, Решетов и др. (эшелонированная оборона [15,16]). Известен класс задач (игры безопасности и военные игры) в которых для поиска оптимальных стратегий используется равновесие Штакельберга [23,28,29]. В настоящее время модели боя входят в учебные курсы теории игр и исследования операций [1,2].

Целью настоящей работы является анализ содержательных вопросов общевойскового боя и их отражение в соответствующих математических моделях, а также развитие ранее полученных результатов [19, 21]. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

2. Функции победы в боестолкновении и расширение модели Гросса–Гермейера «нападение–защита»

2.1. Функции победы в боестолкновении

Поскольку существует два основных способа получения дохода (производительная и конфликтная деятельность), то им ставятся в соответствие производственные функции (Production function) и функции конкурса или конфликта (Contest Functions и Conflict Functions). Функции конфликта отличаются от производственных двумя особенностями [26]. Во-первых, значениями функций конфликта являются вероятности победы, тогда как значения производственных функций – ожидаемый объем производства (детерминированный результат). Во-вторых, функции конфликта антагонистичны: рост усилий первой стороны увеличивает ее шансы на успех, так же как и снижение усилий второй стороны.

В общем случае функции конфликта (конкурса) подразделяются на (основание классификации – метод обоснования модели) [27]:

стохастические (теоретико-вероятностные) модели; модели, построенные на основе аксиом (предположений); конкурсные и аукционные модели, полученные на основе дизайна экономических механизмов (mechanism design), модели на основе агрегирования микроэкономических показателей (подмоделей).

Положим, что в конфликте (конкурсе, аукционе) участвуют две стороны. Их усилия (ресурсы) обозначим через $x > 0$ и $y > 0$, соответственно. Любой комбинации усилий сторон поставлены в соответствие вероятности успеха (победы) – $p_x(x, y)$ и $p_y(x, y)$. Достаточно хорошо исследованным является следующий класс функций победы:

$$p_x(x, y) = \frac{f_x(x)}{f_x(x) + f_x(y)}, \tag{2.1}$$

где $f_x(\cdot)$ и $f_y(\cdot)$ – неотрицательные, строго возрастающие функции.

Отметим наиболее часто встречающиеся функциональные формы модели (2.1). Модель Таллока

$$p_x(x, y) = \frac{x^\mu}{x^\mu + y^\mu}, \tag{2.2}$$

где $\mu > 0$ – параметр решительности сторон, относится к классу моделей на основе отношения потенциалов (результат зависит от отношения усилий сторон). Модель Макфаддена и Хиршляйфена

$$p_x(x, y) = \frac{exp(\mu x)}{exp(\mu x) + exp(\mu y)} = \frac{1}{1 + exp(\mu(y - x))}, \tag{2.3}$$

относится к классу моделей на основе разности потенциалов. К этому же классу относится пробит-модель $p_x(x, y) = \Phi(x - y)$, где Φ – функция Лапласа.

Jia, Skaperdas, Vaidua отмечают, что несмотря на наличие значительного числа публикаций по моделированию конфликтов, конкурсов и аукционов в различных сферах деятельности, лишь в небольшом количестве публикаций затрагиваются вопросы верификации функций конфликта на реальных данных [27].

В работах [20,21] в качестве функции победы на объекте предложено использовать расширение функции конфликта Таллока – вероятность победы $p_x(x, y)$ первой стороны равна:

$$p_x(x, y) = \frac{(\beta x)^m}{(\beta x)^m + y^m} = \frac{q^m}{q^m + 1}, q = \frac{\beta x}{y}, \beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}\omega, \omega = \sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}, \tag{2.4}$$

где β – параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй, q – соотношение сил сторон, m – параметр формы, $0 < \lambda_x < 1$ $(0 < \lambda_y < 1)$ – доля «кровавых» потерь (убитыми и раненными), выдерживаемая первой (второй) стороной, ω – параметр технологического (организационно-технического) превосходства первой стороны над второй. Компоненты параметра ω вытекают из определения боя (бой представляет собой совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач); $\omega_1(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$ – превосходство первой стороны над второй в боевом опыте командиров и их подчиненных (соответственно, в разведке, маневренности и огневых возможностях). Опытом командиров и слаженностью подразделений обеспечивается согласованность действий. Частные коэффициенты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты; дальности обнаружения – с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и т.д. Параметр морального превосходства λ_x/λ_y имеет решающее значение на исход боя. По Осипову, «*победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее будет считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного %. Таким % в среднем можно считать 20%...*» [14].

При малых численностях боевых единиц сторон и при преобладании нетрадиционных форм боя (нападения из засад, партизанские действия и т.д.) целесообразно использовать значение параметра формы $m = 0.5 - 0.75$. Успех боестолкновений в этом случае зависит от множества случайных факторов, учесть которые почти невозможно. Чтобы добиться высокой вероятности победы, необходимо обеспечить многократное превосходство в силах и средствах над противником. Например, при $m = 0.5$ вероятность победы 0.75 достигается при боевом превосходстве над противником $q_i \approx 9$. Данный результат подтверждается практикой контртеррористических и специальных операций: опыт внутренних конфликтов свидетельствует о том, что соотношение численности правительственных войск к повстанцам должно быть в пределах (8–10) : 1 (восемь–десять единиц к одной). Многие государства Запада исходят именно из таких показателей при определении численности сил правопорядка [9].

Действия небольших тактических подразделений (рот, батальонов, полков, тактических групп) в наступлении и обороне могут быть описаны моделью отношения сил со значением параметра формы $m = 1$. В этом случае вероятность победы 0.75 достигается при трехкратном превосходстве в силах и средствах над противником, что соответствует сложившимся представлениям о ведении общевойскового боя. На участках прорыва рекомендуется обеспечить десятикратное превосходство над противником. При этом вероятность успеха будет не ниже 0.9.

При моделировании действий дивизий (корпусов, армий) в сражении (операции) представляется статистически обоснованным использовать значение параметра формы $m = 2 - 3$ [20]. Здесь успех сражения (операции) почти гарантирован при двух-трех кратном общем превосходстве над противником в силах и средствах. Полученные статистические выводы подтверждаются специалистами в области военной науки и искусства. Президент Академии военных наук генерал армии Гареев отмечал, что за время Великой Отечественной войны не было ни одной успешной оборонительной операции, проведенной значительно меньшими силами, чем у наступающего противника. Возможно отражение атак превосходящих сил противника в тактическом звене, но не в оперативно-стратегическом [9].

2.2. Расширение модели Гросса–Гермейера «нападение–защита»

В работе [5] Ю.Б. Гермейер определил и исследовал модификацию модели Гросса «нападение–защита». Пусть имеется n обороняемых пунктов, а r_x и r_y – количество бесконечно делимых средств нападения и защиты. Стратегия первого игрока (нападения) состоит в распределении средств по пунктам в соответствии с вектором

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = \{x| \sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}. \qquad (2.5)$$

Второй игрок (защита) использует аналогичную стратегию

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in y = \{y | \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y, y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}. \qquad (2.6)$$

Целевая функция первого игрока (общее количество средств нападения, прорвавшихся через все пункты) Ю.Б. Гермейером определена в виде

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0], \qquad (2.7)$$

где μ_i – количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств защиты на пункте i. В условиях общего знания стороны принимают решения одномоментно и независимо друг от друга. Ю.Б. Гермейером найдены решения антагонистической игры в области чистых и смешанных стратегий.

Восстановим функцию победы в боестолкновении Ю.Б. Гермейера. Заметим, что в выражении (2.7) используется следующая вероятность прорыва обороны на пункте i

$$\pi_x(x_i, y_i) = \begin{cases} \frac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i}, & \beta_i x_i - y_i \geq 0, \\ 0, & \beta_i x_i - y_i < 0, \end{cases} \beta_i = \frac{1}{\mu_i},$$

а количество прорвавшихся единиц определяется как произведение $\pi_x(x_i, y_i)$ на x_i. Т.е. при $\pi_x(x_i, y_i) = 0$ вероятность победы $p_x(x_i, y_i) = 0.5$, т.к. $\beta_i x_i = y_i$. Естественно предположить, что $p_x(x_i, y_i) = 1$ при $y_i = 0$. Рассмотрим простейший, линейный по $p_x(x_i, y_i)$, случай вида функции победы: $2p_x(x_i, y_i) - 1 = \pi_x(x_i, y_i)$. Тогда получим:

$$2p_x(x_i, y_i) - 1 = \frac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i} \Rightarrow p_x(x_i, y_i) = \frac{2\beta_i x_i - y_i}{2\beta_i x_i}, \quad 2\beta_i x_i \geq y_i.$$

Содержательно трудно объяснить наличие в функции победы Гермейера сомножителя 2 в числителе и знаменателе и использование функции разности сил.

Используя функцию победы (2.4), т.е. расширенную модель Таллока, тактический уровень (параметр формы $m = 1$) и учитывая, что прорыв обороны противника возможен при соотношении сил сторон $q_i > 1$ [8,18], т.е. при $p_x(x_i, y_i) > 0.5$, получим следующее выражение для вероятности прорыва пункта обороны i:

$$\pi_x(x_i, y_i) = 2p_x(x_i, y_i) - 1 = \frac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i + y_i}.$$

Тогда целевая функция нападающих будет иметь вид

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \max\left[x_i \frac{\beta_i x_i - y_i}{\beta_i x_i + y_i}, 0\right], \tag{2.8}$$

где x и y принадлежат X и Y из (2.5) и (2.6).

Введем следующие содержательные предположения и допущения. Будем считать, что продолжительности циклов боевых действий сторон (принятие решений, маневрирование, разведка, огневое поражение противника) примерно одинаковы, что позволяет сделать предположение об одновременном и независимом выборе игроками своих стратегий. Исключим из рассмотрения возможность передачи противнику любых сведений о своих решениях, т.е. действия по дезинформации противника нами не исследуются. Положим, что каждому из игроков известны цели действий сторон и их боевые возможности. Исследуется только этап подготовки к боевым действиям (по Гермейеру [5, с. 25]), когда сторонам неизвестны решения о распределении противником своих средств по пунктам.

Напомним необходимые определения и теоремы [2].

Определение 2.1. *Тройка (x^0, y^0, v) называется решением антагонистической игры Γ в чистых стратегиях, если (x^0, y^0) – седловая точка функции $f(x, y)$ на декартовом произведении $X \times Y$: $f(x, y^0) \le f(x^0, y^0) = v \le f(x^0, y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. При этом v называется значением игры Γ, а x^0, y^0 – оптимальными стратегиями.*

Определение 2.2. *Стратегии x^0, y^0 называются соответственно максиминной и минимаксной, а $\bar{v}$ и $\underline{v}$ – нижним и верхним значениями игры Γ, если*

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{y \in Y} f(x^0, y), \quad \bar{v} = \min_{y \in Y} \sup_{s \in X} f(x, y) = \sup_{x \in X} f(x, y^0).$$

Для того, чтобы игра Γ имела решение в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{v} = \bar{v}$.

Определение 2.3. *Антагонистическая игра* $\Gamma =< X, Y, f(x,y) >$ *называется игрой с* вогнутой функцией выигрыша, *если* $X \subset E^m, Y \subset E^n$ *– выпуклые компакты евклидовых пространств, функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* $X \times Y$ *и при любом* $y \in Y$ *она вогнута по* x. *Соответственно, игра* Γ *называется игрой с* выпуклой функцией выигрыша, *если (вместо требования вогнутости) при любом* $x \in X$ *функция* $f(x,y)$ *выпукла по* y.

Теорема 2.1. *Игра* Γ *с выпуклой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида* $(\phi^0, y^0, \bar{v})$, *где* y^0 *– минимаксная стратегия второго игрока,*

$$\phi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\bar{x}_i}, \quad p^0 = (p_1^0, \ldots, p_{n+1}^0) \in P, I_{\bar{x}_i} = \begin{cases} 1, \bar{x}_i = x^i, \\ 0, \bar{x}_i \neq x^i \end{cases},$$

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1}) \in \operatorname*{Argmax}_{x^j, j \in \{1,\ldots,n+1\}} \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n+1} f(x^i, y),$$

а p^0 *– максиминная стратегия в задаче*

$$\max_{p \in P} \min_{y \in Y} \Phi(p,y), \quad \Phi(p,y) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(\bar{x}_i, y).$$

Лемма 2.1 [2]. *Пусть* $f(x,y)$ *есть выпуклая (вогнутая) по* x *функция в задаче «нападение-защита»,* $x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = r_x$. *Тогда имеет место равенство*

$$\max_{x \in X} f(x,y) = \max_{1 \le i \le n} f(x^{(i)}, y), \forall y, \tag{2.9}$$

где $x_i^{(i)} = r_x, x_j^{(i)} = 0, j \neq i$ *– выделение всего ресурса нападения на* i*-ый пункт.*

Доказательство. Представим x в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r_x} x^{(i)}$. По определению выпуклой функции

$$f(x,y) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r_x} f(x^{(i)}, y) \le \max_{i=1,\ldots,n} f(x^{(i)}, y).$$

Следовательно,

$$\max_{x \in X} f(x,y) \le \max_{i=1,\ldots,n} f(x^{(i)}, y) \le \max_{x \in X} f(x,y)$$

и равенство (2.9) доказано. Для вогнутой функции доказательство аналогично (неравенства $\leq$ достаточно заменить на $\geq$).

Исследуем целевую функцию (2.8). Заметим, что $f(x,y)$ строго выпукла по x и y. По теореме 2.1 $v = \bar{v}$ и минимальная стратегия y^0 защиты оптимальна. Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях. Без ограничения общности положим:$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$ (1-й пункт обороны слабейший).

Шаг (а). Покажем, что

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \max\left[r_x\frac{\beta_1 r_x - r_y}{\beta_1 r_x + r_y}, 0\right],$$

$x^{(1)} = (r_x, 0, \ldots, 0)$ - максиминная стратегия нападения.

Для произвольного x определим вспомогательную (выравнивающую) стратегию защиты $\bar{y}$:

$$\bar{y}_i = r_y\frac{\beta_i x_i}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k x_k}, i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \leq f(x,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}\max\left[x_i\frac{\beta_i x_i - \bar{y}_i}{\beta_i x_i + \bar{y}_i}, 0\right].$$

При $r_y \geq \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_k x_k (\bar{y}_i \geq \beta_i x_i, i = 1, \ldots, n)$ имеем $f(x,\bar{y}) = 0$. Иначе, при $\bar{y}_i \leq \beta_i x_i, i = 1, \ldots, n$:

$$f(x,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\beta_i x_i - \bar{y}_i}{\beta_i x_i + \bar{y}_i} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k x_k - r_y}{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k x_k + r_y}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq r_x\frac{\beta_1 r_x - r_y}{\beta_1 r_x + r_y}.$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \leq \max\left(r_x\frac{\beta_1 r_x - r_y}{\beta_1 r_x - r_y}, 0\right) = \min_{y\in Y}\max\left(r_x\frac{\beta_1 r_x - r_y}{\beta_1 r_x - r_y}, 0\right) =$$
$$= \min_{y\in Y} f(x^{(1)}, y),$$

и $x^{(1)}$ – максиминная стратегия нападения.

Шаг (б). Покажем, что

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max\left[r_x \frac{r_x B - r_y}{r_x B + r_y}, 0\right], \quad B = \sum_{k=1}^{n} \beta_k,$$

а

$$y^0 : y_i^0 = r_y \frac{\beta_i}{\beta}, i = 1, \ldots, n$$

– минимаксная стратегия обороны.

Учитывая равенство (2.9)(лемма 2.1), имеем

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x^{(i)}, y) = \min_{y \in Y} \max_{i=1,\ldots,n} \max\left[r_x \frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i}; 0\right]$$

$$= \min_{y \in Y} \max\left[\max_{i=1,\ldots,n} r_x \frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i}; 0\right]. \qquad (2.10)$$

Функция $h_i(y_i) = \frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i}$ убывает по y_i и её максимум достигается в точке 0: $h_i(0) = 1$ вне зависимости от β_i и r_x. Следовательно, чем больше средств y_i выделяет защита, тем меньше $h_i(y_i)$, а чтобы минимизировать максимум по $(r_x h_i)$ в (2.10) защите нужно выровнять $h_i(y_i) = h_j(y_j)$ с учетом ограничения $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = r_y$. Получаем:

$$\frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i} = c \Rightarrow \beta_i r_x - y_i = c\beta_i r_x + c y_i \Rightarrow (1 - c)\beta_i r_x = (1 + c) y_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_i = \frac{1 - c}{1 + c} \beta_i r_x,$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = r_y \Rightarrow \frac{1 - c}{1 + c} r_x B = r_y \Rightarrow r_x B - r_y = c(r_y + r_x B) \Rightarrow c = \frac{r_x B - r_y}{r_x B + r_y},$$

где c – константа.

Тогда минимаксная стратегия защиты, минимизирующая (2.10):

$$y_i^* = \frac{\beta_i}{B} r_y,$$

а (2.10) обращается в

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max\left[r_x \frac{r_x B - r_y}{r_x B + r_y}; 0\right],$$

что и требовалось доказать.

Если $r_y \geq r_x B$, то $\bar{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0$ и, следовательно, $\bar{v} = \underline{v} = 0$. Для нападения любая стратегия оптимальна. В этом случае защита может распределить свои силы так, чтобы не позволить нападению, использующему концентрированный удар, прорваться на каком-либо пункте.

Если $r_y < r_x B$, то функция $f(x, y)$ седловой точки не имеет. Действительно,
$$\bar{v} = r_x \frac{r_x B - r_y}{r_x B + r_y} > r_x \frac{r_x \beta_1 - r_y}{r_x \beta_1 + r_y} = \underline{v}.$$

Шаг (в). Рассмотрим смешанную стратегию нападения
$$\phi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad p_i^0 = \beta_i / B,$$
где $I_{x^{(i)}}$ – вырожденная смешанная стратегия, принимающая значение x_i с вероятностью 1. Докажем, что
$$\forall y \in Y : f(\phi^0, y) \geq \bar{v}$$
(это будет значить, что $\bar{v}$ есть значение игры в смешанных стратегиях, а (ϕ^0, y^0) – равновесие Нэша в смешанных стратегиях).
Используя известное неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \max[a_i, b_i] \geq \max\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)$ и неравенство Йенсена, имеем
$$f(\phi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 f(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max\left[r_x \frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i}; 0\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \max\left[p_i^0 r_x \frac{\beta_i r_x - y_i}{\beta_i r_x + y_i}; 0\right] \geq \max\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B} \frac{r_x(\beta_i r_x - y_i)}{\beta_i r_x + y_i}; 0\right] \geq$$
$$\geq (\text{неравенство Йенсена}) \geq \max\left[r_x \frac{r_x - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B} \frac{y_i}{\beta_i}}{r_x + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B} \frac{y_i}{\beta_i}}\right] = \max\left[r_x \frac{B r_x - r_y}{B r_x + r_y}; 0\right].$$

Таким образом, найдено решение игры, соответствующее положениям военной науки: важнейшей задачей командиров и штабов при организации наступления является определение уязвимого места в обороне противника и выбор направления главного удара (принцип решительного сосредоточения усилий на главном направлении в решающий момент).

3. Модель «наступление–оборона» на тактическом уровне

Здесь и далее будем рассматривать действия общевойсковых подразделений на тактическом уровне.

3.1. Постановка задачи на моделирование

Основной формой тактических действий является бой. Наступательный бой применяется в целях разгрома противостоящей тактической группировки войск противника и овладения важным районом (рубежом, объектом) на его территории. Разновидностями наступательного боя являются прорыв, встречный бой и преследование. Подразделениям и частям в наступлении ставится ближайшая задача (обычно это разгром противника в опорных пунктах и районах на переднем крае обороны и овладение ими), последующая задача (расширение участка прорыва, отражение контратаки противника) и направление дальнейшего наступления [3, 4]. Оборонительный бой применяется для срыва или отражения наступления превосходящих сил противника, удержания занимаемых позиций (рубежей), предотвращения прорыва противника к прикрываемым объектам и создания условий для перехода в наступление [3]. В зависимости от обстановки оборона может подготавливаться заблаговременно или организовываться в ходе боя, при отсутствии непосредственного соприкосновения с противником и в условиях соприкосновения с ним. В зависимости от боевой задачи, наличия сил и средств, а также от характера местности оборона может быть позиционной (упорное удержание подготовленных районов обороны и местности) и манёвренной (разгром противника на заранее подготовленных в глубине обороны рубежах путем контрударов и контратак).

Пусть имеется n обороняемых пунктов (районов, участков, направлений) с номерами $i = 1, \ldots, n$, где возможен прорыв средствами наступающих. Обозначим R_x и R_y – количества боевых средств в распоряжении наступающих и обороняющихся. Ресурсы R_y и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, приданных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи. Наступающая сторона состоит из боевых единиц, предназначенных для решения ближайшей (прорыва обороны противника) и последующей (отражения контратаки резервов противника, занятия рубежа или объекта в глубине обороны) задачи (рис. 1). Вектор средств наступающих:

$$x = (x_1, \ldots, x_n, u) \in X = \left\{ x | \sum_{i=1}^{n} x_i + u = R_x \right\}, r_x = R_x - u, x_i, u \in \Re,$$

где $x_i \geq 0$ – количество средств решения ближайшей задачи(первого эшелона), действующих на пункте i, r_x – суммарное количество средств решения ближайшей задачи, $u > 0$ – количество средств решения последующей задачи (второго эшелона).

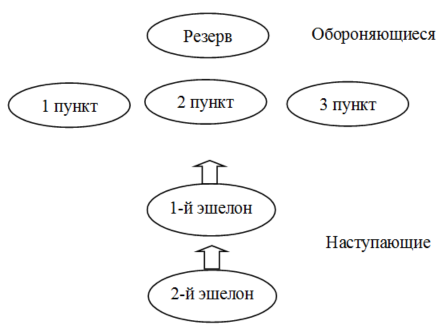

Рисунок 1. Условная схема задачи «наступление-оборона»

Обороняющаяся сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) – в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны. Вектор средств обороны:

$$y = (y_1, \ldots, y_n, w) \in Y = \left\{ y | \sum_{i=1}^{n} y_i + w = R_y \right\}, r_y = R_y - w, y_i, w \in \Re,$$

где $y_i \geq 0$ – количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i, r_y – суммарное количество средств решения первой задачи (удержания пунктов обороны), $w > 0$ – количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i (вторая задача).

Определим целевую функцию наступающих в виде [21]:

$$F(x,y) = f(x,y)g(u,w), g(u,w) = \frac{(\delta u)^m}{(\delta u)^m + w^m}, \tag{3.1}$$

$$0 < u_1 \leq u \leq u_2 < R_x, 0 < w_1 \leq w \leq w_2 < R_y, \tag{3.2}$$

где $f(x,y)$ – вероятность решения наступающими ближайшей задачи, $g(x,y)$ – вероятность решения наступающими последующей задачи, δ – параметр боевого превосходства наступающих при решении ими последующей задачи, $u_1 > 0, u_2 > 0, w_1 > 0, w_2 > 0$ – малые величины. Ограничения (3.2) отражают тактическую необходимость решения сторонами двух задач.

Пусть целевая функция обороняющихся равна $1 - F(x,y)$, т.е. мы имеем антагонистическую игру.

Учитывая принципы боя («решительное сосредоточение усилий на главном направлении в решающий момент»), положения военной науки (направление главного удара выбирается на уязвимом направлении) и исследования операций (свертка частных критериев в форме максимизации [5, с. 61]), вероятность решения наступающими ближайшей задачи определим в виде

$$f(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n}(\pi_i(x_i,y_i)) = \max_{i=1,\ldots,n}\frac{(\beta_i x_i)^m}{(\beta_i x_i)^m + (y_i)^m},$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = r_x, \sum_{i=1}^n y_i = r_y \tag{3.3}$$

(нанесение удара по слабейшему пункту обороны противника). Отметим важное преимущество предлагаемого критерия (3.3) в сравнении с критерием задачи Гросса-Гермейера (выражения 2.7 и 2.8). В военной науке доказано [7, 14, 19], что всякий бой есть психологический акт, заканчивающийся отказом от него одной из сторон. Поэтому в ходе боя бойцы делятся на три группы: активно участвующие в бою; убитые или раненные; отказавшиеся от участия в бою (дезертиры, имитирующие болезнь и т.д.). В моделях (2.7) и (2.8) третья группа не учитывается, по умолчанию полагается, что количество прорвавшихся единиц равно разности между общим их количеством и количеством пораженных единиц. Критерии вида (3.3) снимают данное противоречие: во-первых, максимизируя вероятность победы, командир тем самым минимизирует как потери среди подчиненных убитыми и раненными, так и случаи отказа от боя, во-вторых, в модели (3.3) не используется количество (доля) прорвавшихся через пункт обороны боевых единиц.

Исследуем функцию (3.3).

Лемма 3.1. *Функция* $h(y) = c/(c + y^m), y \geq 0, c \geq 0, m > 0$ *выпукла при* $m \leq 1$.

Доказательство. Для любых y_1, y_2 и $0 \leq \lambda \leq 1$ по определению выпуклой функции имеем

$$h(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \frac{c}{c + [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]^m} \leq \lambda h(y_1) + (1-\lambda)h(y_2).$$

Данное неравенство справедливо только при выполнении следующего неравенства $[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]^m \geq \lambda(y_1)^m + (1-\lambda)(y_2)^m$. Следовательно, функция y^m должна быть вогнутой, что возможно только при $0 < m \leq 1$. $\square$

Лемма 3.2. *Функция* $h(x) = x^m/(x^m + c), x \geq 0, c \geq 0, m > 0$ *вогнута при* $m \leq 1$.

Доказательство. Для любых x_1, x_2 и $0 \leq \lambda \leq 1$ по определению вогнутой функции имеем

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \frac{1}{1 + \frac{c}{[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^m}} \geq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2).$$

Данное неравенство справедливо только при выполнении следующего неравенства $[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^m \geq \lambda(x_1)^m + (1-\lambda)(x_2)^m$. Следовательно, функция x^m должна быть вогнутой, что возможно только при $0 < m \leq 1$. $\square$

Утверждение 3.1. *Целевая функция (3.3) выпукла по* y *и вогнута по* x *только при значении параметра формы* $m = 1$.

Доказательство. Зафиксируем переменную x и найдем условия, когда функция (3.3) выпукла по y. Поскольку функция $f(x, y)$ является поточечным супремумом функций $(\beta_i x_i)^m/[(\beta_i x_i)^m + (y_i)^m], i = 1, \ldots, n$, то она выпукла по y при $0 < m \leq 1$.

Зафиксируем y и рассмотрим функции $g_i(x_i) = (\beta_i x_i)^m/[(\beta_i x_i)^m + (y_i)^m], i = 1, \ldots, n$. Целевая функция (3.3) вогнута по x при выполнении двух условий: 1) $0 < m \leq 1$ (лемма 3.2) и 2) значение функции $f(x, y)$ совпадает с одной из функций $g_i(\xi)$ при $0 \leq \xi \leq r_x$. Иными словами, должен найтись индекс i, что при фиксированных β_i и y_i, β_k и y_k, и при $0 \leq \xi \leq r_x, i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n, k \neq i$ будет выполняться неравенство

$$\frac{(\beta_i\xi)^m/[(\beta_i\xi)^m + (y_i)^m]}{(\beta_k\xi)^m/[(\beta_k\xi)^m + (y_k)^m]} = \frac{(\beta_i)^m[(\beta_k\xi)^m + (y_k)^m]}{(\beta_k)^m[(\beta_i\xi)^m + (y_i)^m]} \geq 1.$$

Последнее возможно только в случае линейности функций в числителе и знаменателе, т. е. при $m = 1$. □

3.2. Решение задачи распределения ресурсов между пунктами обороны

Без потери общности положим, что $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$ (первый пункт для обороны является слабейшим), чего легко добиться перенумерацией пунктов обороны. Целевая функция наступающих имеет вид

$$f(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y}, \tag{3.4}$$

В силу выпуклости функции (3.4) по y и вогнутости по x для наличия седловой точки необходимо и достаточно [2]:

$$\max_{x \in X \backslash u} \min_{y \in Y \backslash w} f(x, y) = \min_{y \in Y \backslash w} \max_{x \in X \backslash u} f(x, y),$$

причем в силу выпуклости функции по y цена игры равна верхней цене игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна.

Утверждение 3.2. *Нижняя цена игры прорыва пунктов обороны равна:*

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y}, \tag{3.5}$$

а $x^{(1)} = \{r_x, 0, \ldots, 0\}$ *есть максиминная стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении удара всеми силами (концентрированного удара) по слабейшему (первому) пункту.*

Доказательство. Для любой стратегии наступающих определим вспомогательную («выравнивающую») стратегию обороняющихся:

$$\bar{y}_i = \frac{\beta_i x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j} r_y, i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \leq f(x, \bar{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + \bar{y}},$$

$$f(x, \bar{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j + r_y} \leq \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y}.$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \leq \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} = \min_{y \in Y} f(x^{(1)}, y),$$

и $x^{(1)}$ - максиминная стратегия наступающих. □

Верхняя цена игры.

Предварительно рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру с диагональной матрицей A, в которой диагональные элементы $a_i > 0$ и предположим, что все элементы оптимальных смешанных стратегий ϕ^0, π^0 положительны (нет доминируемых стратегий). Тогда по теореме (свойству дополняющей нежесткости) [2, с. 36] получено:

$$A(i, \pi^0) = \alpha_i \pi_i^0 = v, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 = 1.$$

Решение системы относительно $n+1$ неизвестных π_i^0, v равно [2]:

$$\phi^0 = \pi^0 = \frac{v}{\alpha_1}, i = 1, \ldots, n, v = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j)^{-1}}.$$

Утверждение 3.3. *В игре прорыва объектов обороны верхняя цена и минимаксная стратегия обороняющихся равны:*

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \frac{r_x \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j}{r_x \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j + r_y} = \frac{B r_x}{B r_x + r_y}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \beta_j,$$

$$y^0 : y_i^0 = \frac{\beta_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j} r_y, i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $x^{(i)} = \{0, \ldots, r_x, 0, \ldots, 0\}$ есть стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении всеми силами удара по i-му объекту обороны. По лемме 2.1 имеет место равенство:

$$\max_{x \in X} f(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} f(x^{(1)}, y), \quad \forall y \in Y \setminus w. \tag{3.6}$$

Запишем целевую функцию в виде

$$f(x^{(1)}, y) = \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i} = \left(1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x}\right)^{-1},$$

и рассмотрим вспомогательную целевую функцию с заменой переменных

$$g(i, y) = \frac{1}{f(x^{(1)}, y)} = 1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x} = g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{\beta_i r_x} \pi_i,$$

где $\pi = y/r_y \in \prod = \left\{ \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) | \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1, \pi_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \right\}$.

Найдем ее максимин (с учетом выражения (3.6) и $a_i = 1/\beta_i$)

$$\max_{\pi \in \prod} \min_{i=1,\ldots,n} g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{r_x} \max_{\pi \in \prod} \min_{i=1,\ldots,n} \frac{\pi_i}{\beta_i} = 1 + \frac{r_y}{r_x \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j} = 1 + \frac{r_y}{B r_x}.$$

В результате получаем верхнюю цену игры прорыва объектов обороны

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \frac{r_x B}{r_x B + r_y}$$

и оптимальное решение обороняющихся

$$y_i^0 = \frac{v}{\alpha_i} r_y = \frac{\beta_i}{B} r_y, i = 1, \ldots, n.$$

□

Равновесие игры прорыва объектов обороны в чистых стратегиях при $n > 1$ не существует, поскольку $\underline{v} < \bar{v}$ или

$$\frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} < \frac{B r_x}{B r_x + r_y}.$$

Решение игры в смешанных стратегиях.

Утверждение 3.4. *В игре прорыва объектов обороны существует решение в смешанных стратегиях вида* $(\phi^0, y^0, \bar{v})$*, где* y^0 *– чистая минимаксная стратегия обороны, а оптимальная смешанная стратегия наступающих имеет вид*

$$\phi^0 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad \pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, i = 1, \ldots, n,$$

где $I_{x^{(i)}}$ *– вероятностная мера, сосредоточенная в точке* $x^{(i)}$.

Доказательство. Наличие чистой минимаксной стратегии обороняющихся следует из выпуклости целевой функции по y (см. теорему 5.4 в [2]). Для смешанной стратегии наступающих проверим выполнение условия:

$$f(\phi^0, y) \geq \bar{v}, \quad \forall y \in Y.$$

Имеем

$$f(\phi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^0 f(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x + y_i}{\beta_i r_x} \right)} = \frac{B r_x}{\sum\limits_{i=1}^{n} (\beta_i r_x + y_i)} = \frac{B r_x}{B r_x + r_y}.$$

Мы воспользовались известным неравенством

$$x_i > 0, \sum_{j=1}^{n} \pi_i = 1, \pi_i > 0, i = 1, \ldots, n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi_i}{x_i} \geq \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_i x_i}.$$

□

Таким образом, цена игры при прорыве обороны равна

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{r_x \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j}{r_x \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j + r_y}. \tag{3.7}$$

Если объекты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$), то цена игры равна

$$v = \frac{n\beta r_x}{n\beta r_x + r_y}.$$

Вынужденность обороны непосредственно следует из последнего выражения – с ростом количества объектов обороны возможности наступающих существенно возрастают. На практике количество объектов обычно не превышает трех – пяти.

3.3. Распределение ресурсов между задачами (эшелонами)

На тактическом уровне целевая функция (3.1) имеет вид

$$F(u,w) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_x - w} \times \frac{\delta u}{\delta u + w}. \tag{3.8}$$

Набор действий (u, w) является равновесием Нэша в игре G с нулевой (постоянной) суммой, если

$$\forall u' \in S_1 : F(u,w) \geq F(u',w) \text{ и } \forall w' \in S_2 : F(u,w) \leq F(u,w'),$$

$$S_1 = [u_1, u_2], S_2 = [w_1, w_2].$$

Известна теорема Дебрю-Гликсберга-Фана [25]: если пространства действий игроков S_1, S_2 непустые компактные и выпуклые подмножества Евклидового пространства, а целевые функции непрерывны и квазивогнуты по u и w, то в игре существует равновесие Нэша.

Остается доказать квазивогнутость (унимодальность) целевых функций игроков и найти равновесие Нэша (см. [21]).

Заметим, что

$$F(0,w) = F(r_x,w) = 0 \text{ и } F(u,w) > 0 \text{ при } u \in (0, R_x). \tag{3.9}$$

Из непрерывности F на S_1 и (3.9) следует, что максимум функции $F(u,w)$ по u существует на интервале $(0, R_x)$, а также

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall u \in [0, \varepsilon] : \frac{\partial F(u,w)}{\partial u} > 0, \text{ и } \forall u \in [R_x - \varepsilon, R_x] : \frac{\partial F(u,w)}{\partial u} < 0.$$

Частная производная $\frac{\partial F(u,w)}{\partial u}$ целевой функции $F(u,w)$ по u равна:

$$\frac{\partial F(u,w)}{\partial u} =$$

$$= B\delta \frac{(Bw - R_y\delta + w\delta)u^2 + 2w(w - BR_x - R_y)u + wR_x(BR_x + R_y - w)}{[B(R_x - u) + R_y - w]^2(\delta u - w)^2}.$$

Видим, что знаменатель производной строго положителен, а числитель является полиномом второй степени по u. Следовательно, производная $\partial F(u,w)/\partial u$ будет равна нулю максимум в двух точках по u. При этом для выполнения (3.9) необходимо, чтобы число нулей производной на $(0, R_x)$ было нечётным, из этого следует, что на $(0, R_x)$ будет только один ноль производной. Следовательно, функция $F(u, w)$ на $u \in (0, R_x)$ имеет только один максимум, слева от которого она растёт, а справа убывает, т.е. функция унимодальна по первому аргументу.

Частная производная $\frac{\partial F(u,w)}{\partial w}$ целевой функции $F(u, w)$ по w равна:

$$-\frac{B\delta u(R_x - u)[B(R_x - u) - \delta u + R_y - 2w]}{(\delta u + w2)^2[B(R_x - u) + R_y - w]^2}.$$

Производная $\frac{\partial F(u,w)}{\partial w}$ равна 0 только в точке

$$w = \frac{BR_x + R_y - (B + \delta)u}{2}. \tag{3.10}$$

Получаем, что по w у целевой функции $F(u, w)$ только один минимум на $(0, Ry)$, так как слева от (3.10) производная отрицательна, а справа положительна. Получаем, что целевая функция $F(u, w)$ по w также унимодальна.

Условия теоремы Дебрю-Гликсберга-Фана выполнены, следовательно, равновесие Нэша существует. Пусть (u^*, w^*) – равновесие Нэша, тогда эта точка должна удовлетворять системе:

$$\frac{\partial F(u,w)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F(u,w)}{\partial w} = 0, \tag{3.11}$$

Сервис WolframAlpha даёт два решения (3.11), в одном из которых w отрицательно, т.е. допустимое решение одно [21]:

$$u^* = R_x D, \quad w^* = R_y D, \tag{3.12}$$

$$D = \frac{R_y + BR_x}{2R_y + (B + \delta)R_x} = 1 - \frac{R_y + \delta R_x}{2R_y + (B + \delta)R_x}. \tag{3.13}$$

Содержательно значение параметра D есть доля войск, выделенных во второй эшелон (резерв). Эта доля растет с увеличением параметра B и уменьшается с увеличением параметра δ.

Агрегированный параметр боевого превосходства B увеличивается, если, например, оборона неподготовлена (слабо подготовлена) или обороняющиеся вынуждены удерживать первым эшелоном достаточно большое количество пунктов. В этом случае обороняющимся выгоднее значительную часть войск иметь в резерве для нанесения контратак по прорвавшемуся противнику с целью срыва его планов. Разумеется, наступающие на такое поведение обороняющихся ответят увеличением доли войск своего второго эшелона.

Вместе с тем, доля D войск во втором эшелоне (резерве) мало меняется при изменении численностей боевых единиц сторон. Следовательно, при планировании боя (сражения, операции) и распределении своих войск между эшелонами важно знать не точное количество войск противника, а свои и его возможности, а также степень подготовленности обороны, которая зависит от времени с момента занятия войсками позиций до начала наступления.

При $R_y = 1000, B = \{1, 3, 6\}, \delta = 1$ на рис. 2 показаны оптимальные решения сторон.

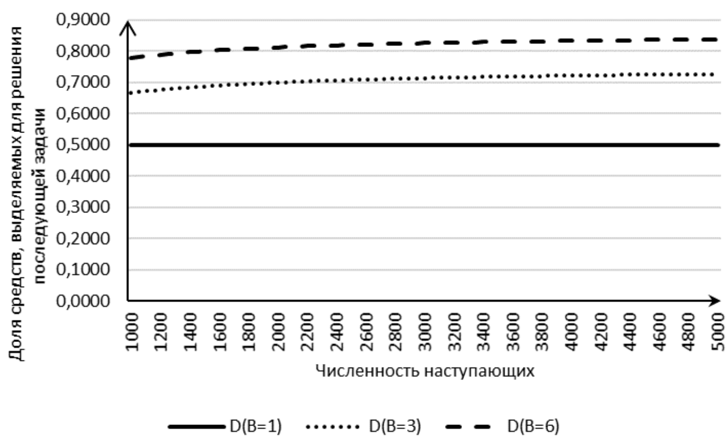

Рисунок 2. Оптимальные доли средств, выделяемые сторонами для решения последующей задачи

В условиях хорошо укрепленной и заранее подготовленной обороны с небольшим количеством пунктов ($B = 1$) при изменении численности R_x наступающих от 1000 до 5000 единиц значение параметра D остается равным 0.5 – стороны выделяют для решения последующих задач половину имеющихся сил и средств.

Если оборона поспешно занята или содержит значительное количество пунктов ($B = 6$), значение параметра D меняется от 0.78 до 0.84. Иными словами, в указанных условиях стороны выделают большую часть сил и средств для решения последующей задачи.

О важности выделения значительных сил в резерв (второй эшелон) на успех боя свидетельствует опыт Великой Отечественной войны [6]. Наиболее важные улучшения в области тактической обороны войск Красной Армии произошли летом 1943 г. Во время Курской битвы стрелковые корпуса занимали участки фронта с двумя стрелковыми дивизиями в первом эшелоне и одной во втором эшелоне, развернутой на втором оборонительном рубеже. Дивизии этих корпусов образовывали построение в один или два эшелона: либо все три стрелковых полка в первой линии, либо два полка в первом эшелоне и один – во втором. Стрелковые полки, в свою очередь, обычно оборонялись в двухэшелонном боевом построении. Командиры научились эффективно использовать в обороне артиллерию, танковые резервы, противотанковые средства и подвижные отряды заграждения. В результате оборона стала активной. За счет нанесения контратак и контрударов летом 1943 года стрелковые корпуса и дивизии сдерживали атакующие войска вермахта уже на тактическом уровне, тогда как ранее остановить противника удавалось только на оперативной или стратегической глубине.

Найденные зависимости распределения боевых единиц обороняющейся стороны по задачам (эшелонам) соответствуют взглядам военных специалистов США на подготовку и ведение оборонительных действий. В частности, когда обороняющиеся не уступают наступающим в мобильности и при поспешно занимаемой обороне организуется мобильная оборона, при которой значительная часть сил и средств (до двух третьих) выделяется во второй эшелон (резерв) с целью разгрома вклинившегося противника в ходе контратак. Позиционная оборона основывается на прочном удержании в течение определенного времени заранее подготовленных в инженерном отношении оборонительных позиций, максимальном использовании огневых средств, расположении главных сил и средств в основном районе обороны соединения.

4. Частный случай задачи прорыва пунктов обороны

В ряде случаев задача прорыва пунктов обороны может быть описана целевой функцией нападающего вида

$$G(x,y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_x(x_i, y_i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right), \qquad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r_x, \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y$$

(вероятность прорыва хотя бы одного пункта обороны противника).

Решение задачи не изменится, если записать целевую функцию в эквивалентной форме

$$1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow -\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right) \Rightarrow$$

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{y_i}{\beta_i x_i + y_i}\right). \qquad (4.2)$$

Зафиксируем x и рассмотрим функцию

$$h(y) = \ln\left(\frac{C}{y} + 1\right), y > 0, C \geq 0.$$

Ее производные равны

$$h'(y) = -C[Cy + y^2]^{-1}, \quad h''(y) = C\frac{C + 2y}{(Cy + y^2)^2} \geq 0.$$

Следовательно, функция (4.2) выпукла по y. Отсюда, значение игры равно верхней цене игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна.

Легко показать, что функция (4.2) вогнута по x (логарифм является вогнутой функцией, сумма вогнутых функций вогнута). Тогда для наличия седловой точки необходимо и достаточно

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} g(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} g(x,y).$$

Утверждение 4.1. *Нижняя цена игры с целевой функцией (4.2) равна:*

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} g(x,y) = \ln\left(\frac{\beta_1 r_x + r_y}{r_y}\right), \qquad (4.3)$$

а $x^{(1)} = r_x, 0, \ldots, 0$ *есть максиминная стратегия наступающих.*

Для произвольного x определим вспомогательную (выравнивающую) стратегию защиты $\bar{y}$:

$$\bar{y} = r_y \frac{\beta_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i}, i = 1, \ldots n.$$

Тогда

$$\min_{y \in Y} g(x, y) \leq g(x, \bar{y}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\beta_i x_i + \bar{y}_i}{\bar{y}_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\beta_i x_i \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i + r_y \beta_i x_i}{r_y \beta_i x_i} \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i + r_y}{r_y} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{1}{r_y} \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{\beta_i}{r_y} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \ln \left(1 + \frac{\beta_i r_x}{r_y} \right).$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y \in Y} g(x, y) \leq \ln \left(\frac{\beta_1 r_x + r_y}{r_y} \right) = \min_{y \in Y} g(x^{(1)}, y),$$

и $x^{(1)}$ – максиминная стратегия нападения.

Утверждение 4.2. *Имеет место*

$$\bar{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} g(x, y) = \ln \left(\frac{B r_x + r_y}{r_y} \right),$$

а

$$y^0 : y_i^0 = r_y \frac{\beta_i}{B}, B = \sum_{k=1}^{n} \beta_k, i = 1, \ldots, n$$

– минимаксная стратегия обороны.

Доказательство. По лемме 2.1 имеем равенство

$$\max_{x \in X} g(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} g(x^{(1)}, y), \forall y \tag{4.4}$$

где $x_i^{(i)} = r_x, x_j^{(i)} = 0, j \neq i$ – удар по i-му пункту.

Далее получим

$$\bar{v} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} g(x,y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} g(x^{(i)},y) =$$

$$= \min_{y\in Y} \max_{i-1,\dots,n} \ln\left(\frac{\beta_i r_x + y_i}{y_i}\right) = \min_{y\in Y} \ln\left(1 + \max_{i-1,\dots,n} \frac{\beta_i r_x}{y_i}\right). \qquad (4.5)$$

Функция $h_i(y_i) = \frac{\beta_i r_x}{y_i}$ убывает по y_i. Следовательно, защите нужно выровнять $h_i(y_i) = h_i(y_i), i \neq j$ с учётом ограничения $\sum_{i=1}^{n} y_i = r_y$. Получаем

$$\frac{\beta_i r_x}{y_i} = c \Rightarrow y_i = \frac{\beta_i r_x}{c}, \sum_{i=1}^{n} y_i = r_y \Rightarrow \frac{r_x}{c}B = r_y \Rightarrow c = \frac{r_x}{r_y}B,$$

где c – константа. Тогда минимаксная стратегия защиты, минимизирующая (4.5):

$$y_i^* = \frac{\beta_i}{c} r_x = \frac{\beta_i r_x}{r_x B} r_y = \frac{\beta_i}{B} r_y,$$

а (4.5) обращается в

$$\bar{v} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} g(x,y) = \ln\left(\frac{Br_x + r_y}{r_y}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Так как

$$\underline{v} = \ln\left(\frac{\beta_1 r_x + r_y}{r_y}\right) < \bar{v} = \ln\left(\frac{Br_x + r_y}{r_y}\right),$$

то функция $g(x,y)$ седловой точки не имеет.

Утверждение 4.3. *Рассмотрим смешанную стратегию нападения*

$$\phi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad p_i^0 = \beta_i / B,$$

где $I_{x^{(i)}}$ – вырожденная смешанная стратегия, принимающая значение $x(i)$ с вероятностью 1. Докажем, что

$$\forall y \in Y : g(\phi^0, y) \geq \bar{v}$$

(это будет значить, что $\bar{v}$ есть значение игры в смешанных стратегиях, а (ϕ^0, y^0) – равновесие Нэша в смешанных стратегиях).

Используя неравенство Йенсена, имеем

$$g(\phi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 g(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \ln\left(\frac{\beta_i r_x + y_i}{y_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B} \ln\left(\frac{r_x + \frac{y_i}{\beta_i}}{\frac{y_i}{\beta_i}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\beta_i}{B} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_x + \frac{y_i}{\beta_i}}{\frac{y_i}{\beta_i}}\right) \geq \ln\left(\frac{r_x + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B}\frac{y_i}{\beta_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B}\frac{y_i}{\beta_i}}\right) = \ln\left(\frac{Br_x + r_y}{r_y}\right) = \bar{v}.$$

Сравним на примере найденные решения игры «нападение–защита» при двух различных целевых функциях.

Пример 4.1. Пусть $r_x = 200, r_y = 100, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, \beta_3 = 0.5$, $n = 3, B = 2$. Тогда получим

Таблица 1.

Показатели	Задача (3.4)	Задача (4.1)
Нижняя цена игр (удар по 1-му пункту)	$\frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} = \frac{2}{3}$ ≈ 0.67	$1 - \frac{r_y}{\beta_1 r_x + r_y} = \frac{2}{3}$ ≈ 0.67
Верхняя цена игр (удар по одному пункту)	$\frac{Br_x}{Br_x + r_y} = 0.8$	$1 - \frac{r_y}{Br_x + r_y} = 0.8$
Минимаксная (оптимальная) стратегия защиты	50; 25; 25	50; 25; 25
Оптимальные вероятности выбора нападением объектов защиты	0.5; 0.25; 025	0.5; 0.25; 0.25
Значение игры	$\frac{Br_x}{Br_x + r_y} = 0.8$	0.8

Из примера видно, что решения игры для двух критериев (1:*Выбор для удара всеми силами и средствами уязвимого пункта защиты*), и (2: *Прорыв хотя бы одного пункта обороны*) одинаковы, следовательно задачи эквивалентны. Предпочтение следует отдать задаче (3.4) в силу ее простоты и соответствию принципам военного искусства.

5. Особенности решения тактической задачи «наступление–оборона» как элемента армейской (фронтовой) операции

Последующая задача полка (дивизии) обычно является ближайшей задачей дивизии (корпуса, армии), и в этой связи успех всей операции определяется в значительной степени успехом прорыва обороны противника на тактическую глубину.

Исходя из принципа гарантированного результата определим целевую функцию наступающих в виде:

$$F(u,w) = \min\left(\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}; \frac{\delta u}{\delta u+w}\right), \tag{5.1}$$

$$0 \le u \le R_x, 0 \le w \le R_y, B > \delta$$

(наступающие оценивают вероятность прорыва слабейшего пункта обороны и вероятность выполнения последующей задачи и принимают в качестве критерия минимальное значение). Соответственно, цель обороняющихся может быть оценена критерием $1 - F(u,w)$.

Исследуем функцию (5.1), вычислив частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}\right) = \frac{-B(R_y-w)}{[B(R_x-u)+R_y-w]^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}\right) = \frac{-2B^2(R_y-w)}{[B(R_x-u)+R_y-w]^3} < 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta u}{\delta u+w}\right) = \frac{\delta w}{(\delta u+w)^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\delta u}{\delta u+w}\right) = \frac{-2\delta^2 w}{(\delta u+w)^3} < 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}\right) = \frac{B(R_x-u)}{[B(R_x-u)+R_y-w]^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}\right) = \frac{2B(R_x-u)}{[B(R_x-u)+R_y-w]^3} > 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\delta u}{\delta u+w}\right) = \frac{-\delta u}{(\delta u+w)^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\delta u}{\delta u+w}\right) = \frac{2\delta u}{(\delta u+w)^3} > 0.$$

При фиксированном w первый элемент целевой функции убывает по u, а второй – возрастает, причем оба элемента строго вогнуты. Следовательно, целевая функция непрерывна и строго вогнута по u (свойство поточечного супремума выпуклой функции). При фиксированном u целевая функция непрерывна и унимодальна (строго квазивогнута) по w. Следовательно, мы имеем антагонистическую игру

Γ_1 с вогнутой функцией выигрыша. При $R_x = 500, R_y = 250, B = 2, \delta = 1$ на рис. 3 показаны графики целевой функции.

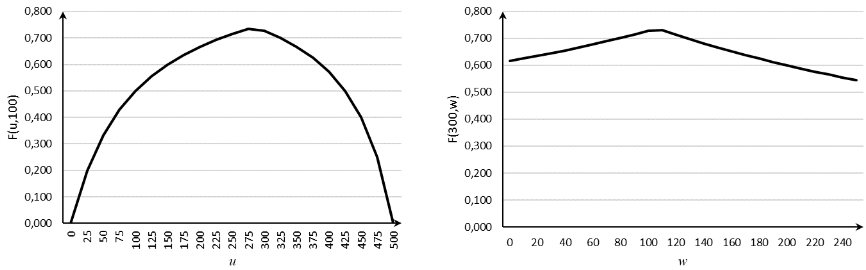

Рисунок 3. Графики функции $F(u, w)$

Утверждение 5.1. *Нижняя цена игры в задаче «наступление–оборона» равна*

$$\underline{v} = \max_{u \in [0, R_x]} \min_{w \in [0, R_y]} F(u, w) = \frac{\delta B R_x}{\delta B R_x + (B + \delta) R_y}, \tag{5.2}$$

а $u^0 = \frac{B}{B+\delta} R_x$ *есть максиминная стратегия наступающих.*

Доказательство. При фиксированном u найдем минимум функции $F(u, w)$ по w. Он достигается в точках $w = 0$ или $w = R_y$:

$$F(u, 0) = \min\left(\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y}; 1\right) = \frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y},$$

$$F(u, R_y) = \min\left(1; \frac{\delta u}{\delta u + R_y}\right) = \frac{\delta u}{\delta u + R_y}.$$

Стратегия u^0 и нижняя цена игры находятся из условия:

$$\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y} = \frac{\delta u}{\delta u + R_y}$$

□

Утверждение 5.2. *Верхняя цена игры в задаче «наступление–оборона» равна*

$$\bar{v} = \min_{w \in [0, R_y]} \max_{u \in [0, R_x]} F(u, w) = \frac{\delta R_x}{\delta R_x + R_y}, \tag{5.3}$$

а $w^0 = R_y$ *есть минимаксная стратегия обороняющихся.*

Доказательство. При фиксированном w найдем максимум функции по u. Он достигается в точке, где

$$\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y-w}=\frac{\delta u}{\delta u+w}, \quad u(w)=\frac{BR_xw}{\delta R_y+(B+\delta)w}.$$

Найдем минимум функции $F(u(w),w)$

$$\min_{w\in[0,R_y]}F(u(w),w)=\min_{w\in[0,R_y]}\min\left(\frac{B(R_x-u(w))}{B(R_x-u(w))+R_y-w};\frac{\delta u(w)}{\delta u(w)+w}\right)$$
$$=\min_{w\in[0,R_y]}\frac{\delta BR_x}{\delta(BR_x+R_y)+(B-\delta)w}=\frac{\delta BR_x}{\delta(BR_x+R_y)+(B-\delta)R_y}=$$
$$\frac{\delta R_x}{\delta R_x+R_y}.$$

□

Утверждение 5.3. *Решением игры в смешанных стратегиях в задаче «наступление–оборона» является тройка* $(u^0,\phi^0,\underline{v})$, *где* $u^0=\frac{B}{B+\delta}R_x$, $\phi^0=\pi_1^0 0+\pi_2^0R_y$, $\pi_1^0=\frac{\delta}{B+\delta},\pi_2^0=1-\pi_1^0$, $\underline{v}=\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+(B+\delta)R_y}$.

Доказательство. Известно, что в непрерывной игре Г для того, чтобы тройка ϕ^0,ϕ^0,v была решением игры в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие [2, с. 28]:

$$\forall u,w: F(u,\phi^0)\le v\le F(u^0,w). \tag{5.4}$$

Убедимся, что решение игры в смешанных стратегиях совпадает с нижней ценой игры

$$F(u^0,\phi^0)=$$
$$=\frac{\delta}{B+\delta}\min\left(\frac{B(R_x-u^0)}{B(R_x-u^0)+R_y};1\right)+\frac{B}{B+\delta}\min\left(1;\frac{\delta u^0}{\delta u^0+R_y}\right)$$
$$=\frac{\delta}{B+\delta}\frac{B(R_x-u^0)}{B(R_x-u^0)+R_y}+\frac{B}{B+\delta}\frac{\delta u^0}{\delta u^0+R_y}=$$
$$=\frac{\delta}{B+\delta}\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+R_y+(B+\delta)}+\frac{B}{B+\delta}\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+R_y+(B+\delta)}=$$
$$=\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+R_y+(B+\delta)}=\underline{v}.$$

Найдем максимальное значение функции $F(u,\phi^0)$ по u, для чего вычислим ее производную и приравняем нулю. Этого достаточно, поскольку $F(u,\phi^0)$ является вогнутой функцией как сумма вогнутых функций:

$$F(u,\phi^0) = \frac{\delta}{B+\delta}\frac{B(R_x-u)}{B(R_x-u)+R_y} + \frac{B}{B+\delta}\frac{\delta u}{\delta u+R_y},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}F(u,\phi^0) = \frac{\delta}{B+\delta}\frac{-BR_y}{[B(R_x-u)+R_y]^2} + \frac{B}{B+\delta}\frac{\delta R_y}{(\delta u+R_y)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{B+\delta}\frac{\delta BR_y}{[B(R_x-u)+R_y]^2} = \frac{1}{B+\delta}\frac{\delta BR_y}{(\delta u+R_y)^2},$$

$$|B(R_x-u)+R_y| = |\delta u+R_y|,$$

$$u_1 = \frac{2R_y+BR_x}{B-\delta} > R_x,\ \text{при}\ u < \frac{-R_y}{\delta} \vee u > R_x + R_y/B,$$
$$u_2 = \frac{BR_x}{B+\delta},\ \text{при}\ \frac{-R_y}{\delta} \le u \le R_x + R_y/B.$$

Первый корень уравнения не удовлетворяет ограничению $0 \le u \le R_x$, для второго корня проверим выполнение левой части неравенства (5.4):

$$F(u_1,\phi^0) = \frac{\delta}{B+\delta}\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+R_y(B+\delta)} + \frac{B}{B+\delta}\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+R_y(B+\delta)} = \underline{v}.$$

Найдем минимальное значение функции $F(u^0,w)$ по w:

$$F(u^0,w) = \min\left(\frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+(B+\delta)(R_y-w)}; \frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+(B+\delta)w}\right).$$

Первый аргумент функции min возрастает с увеличением w, а второй – убывает. Следовательно, минимум функции $F(u^0,w)$ достигается в точке $w_1 = 0$ или $w_2 = R_y$

$$F(u^0,w_1) = F(u^0,w_2) = \frac{\delta BR_x}{\delta BR_x+(B+\delta)R_y} = \underline{v}.$$

$\square$

Таким образом, найдено решение игры в задаче «наступление - оборона»: наступающая сторона выбирает чистую стратегию $u^0 = \frac{B}{B+\delta}R_x$, а обороняющаяся сторона с вероятностью $\frac{\delta}{B+\delta}$ распределяет все силы и средства на второй линии обороны, а с вероятностью $\frac{B}{B+\delta}$ – на первой.

Рассмотрим содержательную интерпретацию задачи. Рассуждая об итогах Варшавско-Познаньской операции войск 1-го Белорусского фронта, Георгий Константинович Жуков отмечал, что противник способен определить время и направление главного удара, и не было полной гарантии о достижении оперативно-тактической внезапности, поэтому он, как командующий, шел на худшее и расчет строил также на худшее. «Что противник мог сделать, когда бы он разгадал наш замысел? Он мог оставить в первом эшелоне обороны, т.е. на своем переднем крае, усиленное прикрытие, станковые пулеметы, ручное автоматическое оружие, отдельные пушки и даже поставить танки. Любую разведку, которую бы мы вели, он отбрасывал бы и этим создавал впечатление, что он здесь сидит крепко. В глубине обороны противник мог расставить макеты, иметь дежурные средства, маневрируя которыми по траншеям мог создать впечатление, что непосредственные позиции, прилегающие к переднему краю на глубину 2-3 км, живут и не только живут, но и стреляют. Главные же силы он мог держать в 5-6 км от переднего края. Потеряв, наконец, от нашего первого удара 5-6 км территории и заставив нас расстрелять артзапасы, он достиг бы срыва нашей операции» [17].

Для достижения успеха операции Жуков предложил и реализовал план ложной атаки: «Значит, сила артудара, сила атаки не должны вызвать какое-либо подозрение у противника, и если окажется, что противник будет захвачен врасплох, дрогнет и не выдержит этого удара, мы используем этот успех, немедленно перейдем в атаку всеми силами и будем осуществлять свой генеральный план, т. е будем вести генеральную атаку. Допустим, что противник пошел все же на обман и очистил бы территорию на 3–5 км, дал возможность нашему первому эшелону атаки приблизиться к истинному переднему краю, а там бы его остановил и атака бы захлебнулась. В этом случае максимум через 1-1,5 часа после передачи соответствующих команд и распоряжений мы могли перейти к плану осуществления артподготовки генеральной атаки. Артсредства с основных позиции, не делая никаких перемещений, потому что артиллерия настолько близко была поставлена к переднему краю (дивизионная артиллерия располагалась в 700-1000 метров от переднего края), могли выполнить задачи артподготовки» [17].

Таким образом, полученные результаты моделирования не противоречат взглядам военных специалистов на ведение боевых действий и дают количественные основания для принятия обоснованных решений.

6. Заключение

Перечислим полученные авторами результаты.

Во-первых, обосновано использование в моделях боя расширения функции конфликта Таллока – функции победы наступающих над обороняющимися на объекте (позиции, в районе), основанной на определении и принципах боя и учитывающей отношение сил сторон.

Во-вторых, получено расширение классической задачи Гросса-Гермейера «нападение-защита» (являющейся элементом более общей модели «наступление-оборона» и описывающей решение сторонами ближайших тактических задач).

В-третьих, доказано, что в задаче прорыва пунктов обороны (ближайшая тактическая задача) критерий «прорыв слабейшего пункта» и критерий «прорыв хотя бы одного пункта» эквивалентны.

В-четвертых, в модели распределения ресурса наступающих и обороняющихся между тактическими задачами (эшелонами) применение двух критериев: 1)произведение вероятностей решения ближайшей и последующей тактической задачи, 2)минимальное значение названных вероятностей, – дает два принципиально разных решения. В первом случае стороны применяют чистые стратегии, распределяя свои ресурсы между тактическими задачами с учетом значений параметров боевого превосходства на пунктах и в глубине обороны. Во втором случае первая сторона (наступающие) использует чистую стратегию, а вторая сторона – смешанную, обороняя всеми силами или первую позицию, или позицию в глубине обороны.

В-пятых, исходя из принципов моделирования боевых действий Осипова, выполнена проверка результатов решений на соответствие принципам военного искусства и практике боев, сражений и операций.

Авторы признательны рецензенту за рекомендации и пожелания, позволившие существенно улучшить качество работы и обоснованность решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций*: учебное пособие. М.: Издательский центр Академия, 2008.

2. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики*: учебное пособие. М.: Макс-Пресс, 2005.

3. *Война и мир в терминах и определениях*: военно-политический словарь / под общ. ред. Д. Рогозина. М.: ПоРог, 2004.

4. Воробьев И.Н. *Тактика – искусство боя*: учебник. М.: Общевойсковая академия ВС России, 2002.

5. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971.

6. Гланц Д.М. *Советское военное чудо 1941-1943. Возрождение Красной Армии.* М.: Яуза, Эксмо, 2008.

7. Головин Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны.* Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938.

8. Дорохов В.Н., Ищук В.А. *Боевые потенциалы подразделений как интегральный критерий оценки боевых возможностей воинских формирований и боевой эффективности вооружения, военной и специальной техники* // Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2017. № 4 (99). С. 27-36.

9. Ионин Г. *Теория общевойскового боя требует переосмысления, развития и совершенствования* // Военно-промышленный курьер. 2005. № 21 (88). С. 4.

10. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* М.: Мир, 1964.

11. Морозов В.В., Шалбузов К.Д. *Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 4. С. 66–83.

12. Новиков Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. 2012. Вып. 37. С. 25–62.

13. Огарышев В.Ф. *Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 59.

14. Осипов М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. 1915. № 6. С. 59–74; № 7. С. 25–36; № 8. С. 31–40; № 9. С. 25–37.

15. Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г. *Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона»* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 57–69.

16. Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. *Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением* // Прикладная математика и информатика. 2015. № 49. С. 80–96.

17. *Речь Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г.* // Военная мысль. 1985. Специальный выпуск (февраль). С. 3, 17–33.

18. Цыгичко В.И., Стоили Ф. *Метод боевых потенциалов: история и настоящее* // Военная мысль. 1997. № 4. С. 23–28.

19. Шумов В.В. *Учет психологических факторов в моделях боя (конфликта)* // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 6. С. 951–964.

20. Шумов В.В. *Исследование функции победы в бою (сражении, операции)* // Проблемы управления. 2020. № 6. С. 19–30.

21. Шумов В.В., Корепанов В.О. *Математические модели боевых и военных действий* // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. С. 217–242.

22. Borel E. *La theorie du jeu les equations integrales a noyau symetrique* // Comptes Rendus de l'Academie. 1921. Vol. 173. P. 1304–1308.

23. Brown G., Carlyle M., Salmeron J., Wood K. *Defending Critical Infrastructure* // Interfaces. 2006. Vol. 36. No. 6. P. 530–544.

24. Clausewitz K. *Vom Krieg.* 1832/34.

25. Dasgupta P. et al. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory* // Review of Economic Studies. 1986. Vol.53. No. 1. P. 1–26.

26. Hirshleifer J. *The Macrotechnology of Conflict* // Journal of Conflict Resolution. 2000. Vol. 44(6). P. 773–792.

27. Jia H., Skaperdas S., Vaidya S. *Contest functions: Theoretical foundations and issues in estimation* // International Journal of Industrial Organization. 2013. No. 31. P. 211–222.

28. Kar D. et al. *Trends and Applications in Stackelberg Security Games.* In: Basar T., Zaccour G. (eds) Handbook of Dynamic Game Theory. Springer, Cham. 2016. P. 1–47.

29. Poropudas J., Virtanen K. *Game-theoretic validation and analysis of air combat simulation models* // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans. 2010. Vol. 40, No. 5. P. 1057–1070.

GAME-THEORETIC MODELS OF BATTLE ACTION

Vladislav V. Shumov, International Research Institute for Advanced Systems, Dr.Sc., associate professor (v.v.shumov@yandex.ru),
Vsevolod O. Korepanov, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc. (moskvo@yandex.ru).

Abstract: The main types of combined arms combat operations are offensive and defense. Using the function of victory in battle, which is an extension of the function of conflict by G. Tullock, the following game-theoretic problems have been solved. First, the extended Gross-Germeier "attack-defense" model, which is a special case of a more general "offensive-defense" model, and describing the solution by the parties of the nearest tactical tasks, is investigated. Secondly, it has been proved that in the problem of breaking through points of defense (the closest tactical task), the criteria "breaking through the weakest point" and "breaking through at least one point" are equivalent. Thirdly, in the model of resource distribution of attackers and defenders between tactical tasks (echelons), the use of two criteria: 1) the product of the probabilities of solving the nearest and subsequent tactical tasks, 2) the minimum value of the named probabilities, – gives two fundamentally different solutions. Fourthly, the results of decisions were checked for compliance with the principles of military art and the practice of battles, battles and operations.

Keywords: probabilistic model, combined arms battle, offensive, defense, resource distribution between points and tactical tasks, decision making in conditions of uncertainty.