Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.3, с. 3–27

УДК 519.865+519.95
ББК 22.18

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ДОБРОЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ ИГРОКА НИЖНЕГО УРОВНЯ

Михаил А. Горелов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2
e-mail: griefer@ccas.ru

Предлагается новый принцип оптимальности, обобщающий принцип равновесия Штакельберга. Исследуется его связь с классическим определением. Обсуждается техника работы с новым определением. В качестве примера найдены решения в двух иерархических играх с обратной связью.

Ключевые слова: игры с фиксированным порядком ходов, равновесие Штакельберга, информация, доброжелательность.

Поступила в редакцию: 18.11.20 *После доработки*: 05.02.21 *Принята к публикации*: 01.09.21

1. Введение

При моделировании конфликта нужно описать возможности игроков, их интересы и отношение к неопределенности. Последний момент, пожалуй, самый тонкий, поскольку «померить» это отношение никак нельзя, и рассчитывать на то, что конкуренты будут откровенно рассказывать что-то о себе, тоже не приходится.

В 1934 г. Г. фон Штакельберг (английский перевод [17]) начал рассматривать игры с фиксированной последовательностью ходов.

В таком предположении почти все проблемы с описанием отношения к неопределенности снимаются. Будем говорить об играх двух лиц – лидера и ведомого. Если лидер делает свой ход первым, и его выбор становится известным ведомому, то для последнего неопределенности не остается, и ему просто нужно искать максимум своего выигрыша. Но тогда в типичном случае и лидер может однозначно предсказать выбор ведомого в ответ на любую свою стратегию. Поэтому и ему приходится решать обычную задачу оптимизации, пусть и довольно сложную.

Проблемы возникают лишь с существованием и единственностью решения задачи максимизации выигрыша ведомого. Непонятно, как лидер должен оценивать его выбор в случае, когда соответствующий максимум не достигается. А также не ясно, на какой выбор ведомого должен ориентироваться лидер, если точек максимума несколько.

Начнем с обсуждения второй проблемы. Ее решают двумя противоположными способами: либо предполагают доброжелательность ведомого по отношению к лидеру, либо считают лидера осторожным. Первый подход традиционно связывают с именем Штакельберга (см., например, [12]). На втором всегда активно настаивал Ю.Б. Гермейер [5]. Этой традиции будем придерживаться и в данной статье.

Первая проблема носит в значительной степени технический характер, но, как оказалось, решается сложнее. В простейших моделях, которые рассматривал сам Штакельберг, существование максимума следует из стандартных теорем анализа. Новый всплеск интереса к играм с фиксированной последовательностью ходов начался в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века [4,14,16].

В это время Ю.Б. Гермейер начал рассматривать иерархические игры с обратной связью [4]. В этих моделях лидер, принимая свое решение, рассчитывает на получение какой-то информации о выборе партнера. Таким образом, стратегиями лидера становятся функции. И утверждение о том, что для любой такой функции максимум выигрыша ведомого достигается, становится попросту неверным. В работе [4] связанная с этим проблема обходится молчанием. В следующих работах [6] она решается примерно так, как описано в следующем разделе. По сути, считается, что если максимум достигается, то рациональными выборами являются все точки максимума, а в противном случае – все точки, «достаточно хорошо» реализующие точную верхнюю грань. Причем слова, взятые в кавычки, часто понимаются по-разному. В большинстве работ погрешность неявно предполагается малой, а, например, в [2] она считается сколь угодно большой. В некоторых случаях ограничения на эту погрешность выглядят совсем сложно [7, с. 70] или [10].

Все это не слишком красиво, но решает возникающие проблемы: обычно оказывается, что среди «оптимальных» стратегий лидера всегда имеются такие, для которых максимум выигрыша ведомого достигается, а полученные результаты вполне разумны. Для игр с доброжелательным ведомым даже такую «заплатку» поставить не удавалось. Между тем нужда в таком определении явно есть. В некоторых случаях доброжелательность является чертой моделируемой ситуации. А чаще предположение доброжелательности существенно упрощает решение возникающих задач. Поэтому работы, посвященные таким моделям, появлялись неоднократно. И в них приходилось работать без точного определения. В хороших работах (например, [1]) проблему удавалось каким-то образом обойти. В плохих получались просто неверные результаты.

По мере развития теории рассматриваемые модели усложняются, и разного рода «подводных камней» становится все больше. Поэтому формулировка точного определения становится актуальнее. Этому и посвящена данная статья. При решении этой проблемы приходится отказаться от традиционного определения результата Штакельберга. Далее используются идеи, впервые неявно появившиеся в [8] и развитые в [9].

Новое определение позволяет использовать новую технику решения возникающих задач. Традиционно такие задачи решались следующим образом: на основе содержательных соображений угадывалась структура оптимальной стратегии, затем доказывалось, что среди оптимальных стратегий непременно найдется стратегия предполагаемого вида и в указанном классе находилась оптимальная. Новая техника позволяет избежать этапа угадывания, сводя решение задачи к преобразованиям формул. Об этом тоже речь пойдет ниже.

2. Постановка проблемы

В дальнейшем будет удобно пользоваться следующим не совсем стандартным обозначением. Будем обозначать через $\Phi(X, Y)$ класс всех функций, отображающих множество X в множество Y.

Будем рассматривать игры двух лиц в нормальной форме вида $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$. Здесь U и V – множества, а g и h – функции, отображающие декартово произведение $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков соответственно. Функции g и h описывают их интересы. Будем считать, что игроки стремятся к максимизации «своих» функций. Тогда можно называть их функциями выигрыша. Далее будем предполагать, что все параметры игры Γ точно известны обоим игрокам.

В дальнейшем основные результаты будут получены в следующих предположениях. Множества U и V наделены топологиями и компактны в этих топологиях. А функции g и h непрерывны в топологии декартова произведения $U \times V$.

Наряду с игрой Γ будем рассматривать два ее информационных расширения Γ_* и $\Gamma_\#$ (см. [11]).

В игре $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, g_*, h_* \rangle$ множество $U_* = \Phi(V, U), V_* = V$, а функции g_* и h_* определяются условиями

$$g_*(u_*, v_*) = g(u_*(v_*), v_*), h_*(u_*, v_*) = h(u_*(v_*), v_*).$$

В игре $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, g_\#, h_\# \rangle$ полагаем

$$U_\# = \Phi(\Phi(U, V), U), V_\# = \Phi(U, V),$$

$$g_\#(u_\#, v_\#) = g(u_\#(v_\#), v_\#(u_\#(v_\#))),$$
$$h_\#(u_\#, v_\#) = h(u_\#(v_\#), v_\#(u_\#(v_\#))).$$

Интерпретируются эти конструкции следующим образом. В игре Γ_* первый игрок рассчитывает и действительно будет иметь информацию об управлении, выбранном партнером. И его стратегией будет функция, ставящая каждому выбору второго игрока управление первого. В игре $\Gamma_\#$ уже второй игрок рассчитывает иметь информацию о «физическом» выборе партнера и планирует свои действия в зависимости от полученной информации. Подробная информация о таком плане становится известной первому игроку, и в зависимости от нее он выбирает свое управление. В обоих случаях выигрыши игроков не зависят от способов обмена информацией и выбранных планов, а зависят только от «физических» управлений, выбранных партнерами.

Сделаем одно терминологическое замечание. Выше неоднократно использовались термины «управление» и «стратегия». Формально эти термины следует считать синонимами. Но в дальнейшем неоднократно придется рассматривать пары игр: игру Γ_* и игру Γ или игру $\Gamma_\#$ вместе с игрой Γ. В таком случае удобно относить термин «управление» к более простой игре Γ, а термин «стратегия» – к ее информационному расширению. Этого соглашения и будем придерживаться впредь.

Таким образом, игра в нормальной форме – это удобный способ описать возможности игроков и их интересы, а также их информированность. Для получения замкнутой модели конфликта, необходимо описать еще отношение игроков к неопределенности. В данной статье это будет сделано при одном дополнительном предположении.

Будем считать, что игрок номер один обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию, и этот выбор становится известным его партнеру.

В таком случае совсем просто описать поведение второго игрока. Если первый игрок выбрал стратегию u, и это стало известно второму, то для него неопределенности в момент принятия решения не остается, и если его интересы описываются стремлением к максимизации функции h, то он выберет свое управление из множества

$$BR\,(u) = \left\{ v \in V : h\,(u,v) = \max_{w \in V} h\,(u,w) \right\}. \tag{2.1}$$

В этих условиях первый игрок может оценить множество рациональных выборов партнера $BR\,(u)$ и для него неопределенность сведется к неизвестному выбору элемента $v \in BR\,(u)$. Здесь уже остается простор для выбора разных гипотез.

Г. фон Штакельберг предполагал, что второй игрок доброжелательно относится к партнеру и потому из равноценных для него управлений из множества $BR(u)$ всегда выбирает то, которое более предпочтительна для первого игрока. Тогда, выбрав стратегию $u \in U$, первый игрок вправе рассчитывать на получение выигрыша

$$\sup_{v \in BR(u)} g(u,v), \tag{2.2}$$

а при наилучшем выборе своей стратегии получит выигрыш

$$S(\Gamma) = \sup_{u \in U} \sup_{v \in BR(u)} g(u,v). \tag{2.3}$$

Ю.Б. Гермейер предполагал, что первому игроку неизвестны принципы выбора управления $v \in BR(u)$ и он осторожен, поэтому при выборе стратегии $u \in U$, он может гарантированно рассчитывать на получение выигрыша

$$\inf_{v \in BR(u)} g(u,v), \tag{2.4}$$

а при наилучшем выборе своей стратегии, он с гарантией получит выигрыш

$$R(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR(u)} g(u,v).$$

Эти два определения мы и будем обсуждать. Разумеется, оба они годятся и для игр Γ_* и $\Gamma_\#$, поскольку это такие же игры в нормальной форме, только наделенные некоторой дополнительной структурой.

Всякое определение должно удовлетворять, по меньшей мере, двум условиям:

1) иметь убедительную содержательную интерпретацию;

2) быть формально корректным.

С первым условием все достаточно благополучно в обоих случаях. Игра Γ описывает, например, ситуацию, когда покупатель приходит в магазин, видит ценники и в зависимости от них выбирает объемы покупок. Игрой Γ_* удобно моделировать механизмы стимулирования работника за выполненную работу. Игры типа $\Gamma_\#$ могут описывать процессы выделения кредитов под инвестиционные проекты (подробнее см. [3]).

Принцип Гемейера более оправдан методологически (подробности см. в [5]). Принцип Штакельберга использует дополнительную, плохо проверяемую на практике гипотезу о доброжелательности, но, в общем, тоже разумен. Кроме того, во многих случаях задачу с принципом Штакельберга исследовать проще , чем аналогичную задачу с принципом Гермейера, поэтому его можно использовать на предварительных этапах решения задачи.

Со вторым условием все обстоит не так хорошо. Основные проблемы связаны с достижимостью максимума в определении множества $BR\,(u)$ (формула (2.1)). Для того, чтобы определения величин $R\,(\Gamma)$ и $S\,(\Gamma)$ были корректными, нужно, чтобы этот максимум достигался для любой стратегии $u \in U$. В случае игры Γ, если выполнены сделанные выше топологические предположения, достижимость этого максимума следует из стандартных теорем анализа. Именно этот случай и рассматривал Штакельберг. Но как только мы переходим к играм с обратной связью, типа игр Γ_* или $\Gamma_\#$, ситуация резко меняется.

Например, в случае игры Γ_* функция $u_* : V \to U$ вполне может оказаться разрывной, и зависимость выигрыша второго игрока от его стратегии $\varphi\,(v) = h\,(u_*\,(v)\,,v)$ при такой стратегии u_* вполне может выглядеть так, как на рисунке 1. Таким образом, определения величин $R\,(\Gamma_*)$ и $S\,(\Gamma_*)$ становятся некорректными. Примерно то же происходит и с игрой $\Gamma_\#$.

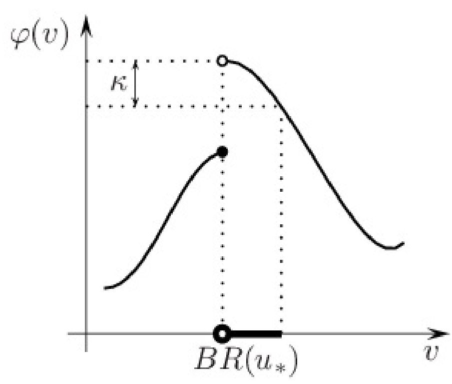

Рисунок 1.

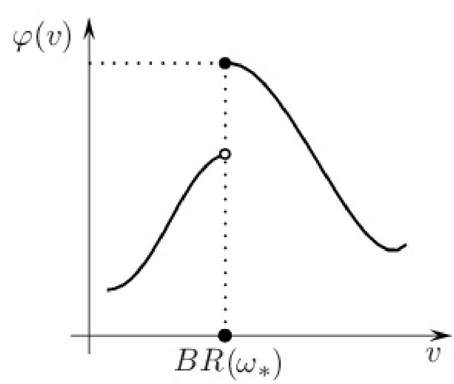

Рисунок 2.

Для принципа Гермейера проблема была решена давно. Определение множества $BR\,(u)$ видоизменялось так, что если максимум в формуле (2.1) достигался, это множество по-прежнему определялось формулой (2.1), а в противном случае оно определялось условием

$$BR\,(u) = \left\{ v \in V : h\,(u,v) \geq \sup_{w \in V} h\,(u,w) - \kappa \right\}, \tag{2.5}$$

где κ – какое-то положительное число.

При этом выяснялось, что разрывную стратегию u_* всегда можно подправить в точке разрыва так, что для подправленной стратегии ω_* зависимость выигрыша второго игрока от его выбора будет выглядеть как на рисунке 2. Тогда множество рациональных ответов BR резко сузится, а величина (4) увеличится. По этой причине среди оптимальных стратегий первого игрока всегда найдется такая, что для нее максимум в определении множества BR достигается. Как следствие, величина $R\,(\Gamma_*)$ не зависит от κ (подробности см. в [9]). Все это хорошо интерпретируется.

Для принципа Штакельберга такой способ решения проблемы работает плохо. При сужении множества BR величина (2.2) напротив, уменьшается. Поэтому в модели первый игрок «провоцируется» выбирать стратегии, для которых максимум не достигается. На практике дело обстоит, конечно же, не так. Это говорит о неадекватности получившейся модели.

Можно, разумеется, поступить несколько иначе, определив множество BR формулой (2.5) для всех стратегий u. Проблема, описанная в предыдущем абзаце, будет решена. Но потеряется главное – простота задачи. Скажем, задачу поиска величины $S\,(\Gamma_*)$ для такого определения решить можно, но и решение и ответ в соответствующей задаче будут гораздо сложнее, чем в игре Γ_2. И смысл перехода от принципа Гермейера к принципу Штакельберга во многом теряется. Кроме того, величина $S\,(\Gamma_*)$ будет существенно зависеть от κ. По этой причине возникнут проблемы с идентификацией модели, поскольку «измерить» величину κ обычно непросто.

Поэтому нужен иной подход к определению величины $S\,(\Gamma_*)$.

3. Альтернативное определение

В [9] было предложено следующее определение величины $R(\Gamma)$ (в неявном виде эта идея впервые появилась в [8]).

Определение 3.1. *Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ, что выполняются условия*

1°. существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$;

2°. для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda$. Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Γ.

Выяснилось, что при выполнении сделанных в предыдущем разделе предположений о непрерывности и компактности, и для самой игры Γ и для ее информационных расширений Γ_* и $\Gamma_\#$ это определение равносильно традиционному. Оказывается, что его можно модифицировать так, чтобы получить разумное обобщение определения Штакельберга.

Прежде всего заметим, что второй пункт определения 1 выполняется и для управления w, существование которого предусмотрено первым пунктом этого определения. Поэтому определение 1 можно переписать в эквивалентной форме.

Определение 3.1′. *Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ, что выполняются условия*

1°. существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u, w) \geq \lambda$ и $g(u, w) \geq \gamma$;

2°. для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u, v) \geq \gamma$, либо $h(u, v) < \lambda$. Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре Γ.

А теперь можно лишь чуть-чуть подправить его, чтобы получить новое определение.

Определение 3.2. *Число γ называется достижимым результатом первого игрока в игре Γ в предположении доброжелательности* *партнера, если существуют такие стратегия $u \in U$ и число λ, что выполняются условия*

1°. существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u,w) \geq \lambda$ и $g(u,w) \geq \gamma$;

2°. для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u,v) \geq \gamma$, либо $h(u,v) \leq \lambda$. Точная верхняя грань $S(\Gamma)$ достижимых результатов первого игрока в предположении доброжелательности партнера называется максимальным достижимым результатом первого игрока в игре Γ *в предположении доброжелательности партнера, или, короче, результатом Штакельберга.*

Относительно этого определения сразу возникает, как минимум, два вопроса:

1) как соотносится это определение с классическим определением Штакельберга?

2) насколько разумные результаты получаются при его использовании?

Ответам на эти вопросы посвящена оставшаяся часть статьи.

Начнем с первого из них. Разумеется, ставить его можно лишь для тех игр, для которых классическое определение корректно. В таком случае ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть игра $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$ такова, что для любой стратегии $u \in U$ максимум $\max_{v \in V} h(u,v)$ достигается. Тогда величина $S(\Gamma)$, задаваемая определением 2, совпадает с величиной из формулы (2.3).*

Доказательство. Временно обозначим результат Штакельберга в смысле определения 2 через $S'(\Gamma)$, сохранив обозначение $S(\Gamma)$ для величины, определенной формулой (2.3). Нужно доказать равенство $S(\Gamma) = S'(\Gamma)$.

Докажем неравенство $S(\Gamma) \geq S'(\Gamma)$. Фиксируем произвольное число $\gamma < S'(\Gamma)$. Тогда γ – достижимый результат в предположении доброжелательности, поэтому можно выбрать $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}, w \in V$ так, что будут выполняться оба пункта определения 2. Начнем с конкретизации значения λ.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = \max_{\omega \in V} h(u,\omega)$. В самом деле, пусть $\lambda_0 = \max\limits_{\omega \in V} h(u, \omega)$. Тогда

$$\lambda \leq h\,(u, w) \leq \max_{\omega \in V} h\,(u, \omega) = \lambda_0.$$

Если $\lambda = \lambda_0$, то доказывать нечего. Если же $\lambda < \lambda_0$, то для любого $w_0 \in \left\{\omega \in V : h\,(u, \omega) = \max\limits_{\omega \in V} h\,(u, \omega)\right\}$ имеем $h\,(u, w_0) > \lambda$ и, значит, в силу второго пункта определения 2 имеет место неравенство $g\,(u, w_0) \geq \gamma$. Значит, первый пункт определения 2 выполняется для $\lambda = \lambda_0$ и $w = w_0$. А второй пункт определения 2 выполняется в силу условия $\lambda < \lambda_0$. Итак, в дальнейшем будем считать, что $\lambda = \max\limits_{\omega \in V} h(u, \omega)$.

Поэтому выбранные двумя абзацами выше управления u и w удовлетворяют условию $w \in BR\,(u)$. А тогда из неравенства $g\,(u, w) \geq \gamma$ следует условие $\sup\limits_{w \in BR(u)} g\,(u, w) \geq \gamma$ и тем более

$$S\,(\Gamma) = \sup_{u \in U} \sup_{w \in BR(u)} g\,(u, w) \geq \sup_{w \in BR(u)} g\,(u, w) \geq \gamma.$$

В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $S\,(\Gamma) \geq S'\,(\Gamma)$.

Докажем обратное неравенство $S'\,(\Gamma) \geq S\,(\Gamma)$. Фиксируем произвольное $\gamma < S\,(\Gamma)$. Выберем $u \in U$ и $w \in BR\,(u)$ так, что выполняется неравенство $g\,(u, w) \geq \gamma$. Положим $\lambda = \max\limits_{\omega \in V} h(u, \omega)$.

Тогда будем иметь $h\,(u, w) \geq \lambda$ и $g\,(u, w) \geq \gamma$, т.е. первый пункт определения 3.2 выполнен. А в силу условия $\lambda = \max\limits_{\omega \in V} h(u, \omega)$ для любого управления $v \in V$ справедливо неравенство $h\,(u, v) \leq \lambda$, т.е. выполнен и второй пункт определения.

Итак, γ – достижимый результат в предположении доброжелательности, поэтому $S'\,(\Gamma) \geq \gamma$, а в силу произвольности γ имеем $S'\,(\Gamma) \geq S\,(\Gamma)$. □

Условие теоремы выполнено, если в игре Γ справедливы обычные предположения о непрерывности и компактности. Оно выполняется также и для игр с обратной связью, типа игр Γ_* или $\Gamma_\#$ в случае, когда множество V конечно. А поскольку бесконечные множества – это все-таки математическая идеализация, упрощающая работу с большими конечными множествами, доказанная теорема – веский аргумент в пользу определения 3.2.

Остановимся на содержательной интерпретации этого определения. Если первый игрок обладает правом первого хода, то второй принимает решение в условиях полной определенности. А тогда для него все выборы разбиваются на рациональные и невыгодные (т.е. дающие маленький выигрыш). В определении предполагается, что это разделение происходит по «пороговому» принципу, и этот порог задается числом λ. Первый пункт определения отвечает за то, что среди рациональных управлений доброжелательный игрок всегда может выбрать управление, выгодное и его партеру. Второй пункт определения тем легче выполнить, чем больше значение λ. Поэтому этот пункт косвенным образом отвечает за то, чтобы «порог» не был выбран слишком низким, т.е. второй игрок все-таки не забывал о своих личных интересах (первый пункт не позволит выбрать этот «порог» слишком большим).

Итак, ответ на первый вопрос, сформулированный в данном разделе, получен. Чтобы получить какие-то ответы на второй, вычислим результаты Штакельберга для игр Γ_* и $\Gamma_\#$.

4. Выбор техники

Начнем с нескольких предварительных замечаний.

Определение 3.2 содержит достаточно много слов «для любого» и «существует» поэтому оказывается довольно длинным. Если начать с ним систематически работать, то рассуждения оказываются слишком длинными. Для сокращения можно перейти на язык исчисления предикатов. Тогда это определение можно переписать в следующем виде.

Число γ называется достижимым результатом первого игрока в игре Γ в предположении доброжелательности партнера, если выполняется условие

$$\begin{gathered}\exists u \in U \exists \lambda \in \mathbb{R} : [\exists w \in V : h(u,w) \geq \lambda \& g(u,w) \geq \gamma] \& \\ \&[\forall v \in V g(u,v) \geq \gamma \vee h(u,v) \leq \lambda].\end{gathered} \tag{4.1}$$

Но такая запись дает больше, чем просто сокращение. Можно получать содержательные утверждения, просто выполняя тождественные преобразования формул исчисления предикатов.

Преобразования сводятся, в основном, к перестановке кванторов. Разумеется, одноименные кванторы можно переставлять всегда. Иногда это полезно, но не приводит к упрощению. Центральным, обычно, является использование следующего способа преобразования. Если $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, то утверждение $\forall \varphi \in \Phi\,(Y, X)\,\exists y \in Y :\ f(\varphi(y), y) \le 0$ равносильно утверждению $\exists y \in Y \forall x \in X\ f(x, y) \le 0$.

Если в первой формуле предыдущего абзаца фигурирует функциональное пространство $\Phi\,(X, Y)$, то во второй его уже нет.

Можно воспользоваться другим, может быть, более привычным для специалистов по теории игр языком.

В самом деле, пусть функция f определена на множестве X и принимает действительные значения. Тогда условие $\exists x\ f(x) \ge 0$ равносильно неравенству $\sup\limits_{x\in X} f(x) \ge 0$. А утверждение $\forall x\ f(x) \ge 0$ эквивалентно условию $\inf\limits_{x\in X} f(x) \ge 0$.

Соответственно, формула (4.1) равносильна формуле

$$\begin{gathered}\sup_{u\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\{[\sup_{w\in V}\min\left(h\left(u,v\right)-\lambda, g\left(u,w\right)-\gamma\right)],\\ \inf_{v\in V}\max[g\left(u,v\right)-\gamma, \lambda-h\left(u,v\right)]\}\ge 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Можно пользоваться преобразованиями этой формулы, переставляя операторы sup и inf. Вновь одноименные операторы можно переставлять всегда. А для перестановки разноименных операторов можно пользоваться следующим утверждением.

Если $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, то

$$\sup_{\varphi\in\Phi(Y,X)}\inf_{y\in Y} f(\varphi(y), y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)$$

(см., например, [12, стр. 36]).

Этот факт стал, наверное, первым инструментом в теории игр. В каком-то виде он есть уже в книге [15]. В работе [13], впервые вышедшей в 1913 г., он играет центральную роль. Он же составляет, по существу, основу метода динамического программирования.

В следующих разделах будут доказаны два утверждения: одно с помощью преобразования формулы (4.1), другое с помощью преобразования формулы (4.2). Кстати говря, уже здесь видно, что принцип Штакельберга «проще» принципа Гермейера. В определении 3.2, в отличие от определения 3.1, все неравенства нестрогие. Поэтому переход от формулы (4.1) к формуле (4.2) – простой. С определением 3.1 все сложнее.

5. Игра Γ_*

Теперь можно приступить к вычислению величины $S(\Gamma_*)$.

С учетом структуры игры Γ_* формула (4.1) записывается в виде

$$\begin{gathered}\exists u_* \in \Phi(V,U)\,\exists\lambda \in \mathbb{R}: \\ [\exists w \in V : h(u_*(w),w) \geq \lambda \& g(u_*(w),w) \geq \gamma]\& \\ \&[\forall v \in V g(u_*(v),v) \geq \gamma \vee h(u_*(v),v) \leq \lambda].\end{gathered}$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы упростить эту формулу, избавившись от функционального пространства $\Phi(V,U)$.

Начнем с того, что поменяем порядок кванторов существования:

$$\begin{gathered}\exists\lambda \in \mathbb{R}\exists u_* \in \Phi(V,U): \\ [\exists w \in V : h(u_*(w),w) \geq \lambda \& g(u_*(w),w) \geq \gamma]\& \\ \&[\forall v \in V g(u_*(v),v) \geq \gamma \vee h(u_*(v),v) \leq \lambda].\end{gathered} \tag{5.1}$$

Теперь сделаем одно преобразование, использующее специфику данной формулы, а именно, то обстоятельство, что условие

$$h(u_*(w),w) \geq \lambda \& g(u_*(w),w) \geq \gamma$$

влечет условие

$$g(u_*(w),w) \geq \gamma \vee h(u_*(w),w) \leq \lambda.$$

Покажем, что формула (5.1) равносильна формуле

$$\begin{gathered}\exists\lambda \in \mathbb{R}\exists\omega_* \in \Phi(V,U)\,\exists\varpi_* \in \Phi(V,U): \\ [\exists w \in V : h(\omega_*(w),w) \geq \lambda \& g(\omega_*(w),w) \geq \gamma]\& \\ \&[\forall v \in V g(\varpi_*(v),v) \geq \gamma \vee h(\varpi_*(v),v) \leq \lambda].\end{gathered} \tag{5.2}$$

Очевидно, формула (5.1) влечет формулу (5.2). Но и обратно, формула (5.2) влечет формулу (5.1). В самом деле, если ω_* и ϖ_* – функции, существование которых утверждает формула (5.2), то для функции

$$u_*(v) = \begin{cases} \omega_*(w), \text{если } v = w, \\ \varpi_*(v), \text{если } v \neq w, \end{cases}$$

выполняется условие

$$[\exists w \in V : h(u_*(w),w) \geq \lambda \& g(u_*(w),w) \geq \gamma]\&$$

$$[\forall v \in V g\left(u_*\left(v\right), v\right) \geq \gamma \vee h\left(u_*\left(v\right), v\right) \leq \lambda]$$

(при тех же w, λ и γ).

Формулу (5.2) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\exists\lambda \in \mathbb{R}[\exists\omega_* \in \Phi\left(V, U\right) : \exists w \in V : \\ h\left(\omega_*\left(w\right), w\right) \geq \lambda \& g\left(\omega_*\left(w\right), w\right) \geq \gamma]\& \\ \&[\exists\varpi_* \in \Phi\left(V, U\right) \forall v \in V g\left(\varpi_*\left(v\right), v\right) \geq \gamma \vee h\left(\varpi_*\left(v\right), v\right) \leq \lambda].\end{gathered} \tag{5.3}$$

Условие

$$\exists\omega_* \in \Phi\left(V, U\right) : \exists w \in V : h\left(\omega_*\left(w\right), w\right) \geq \lambda \& g\left(\omega_*\left(w\right), w\right) \geq \gamma$$

очевидно равносильно условию

$$\exists\omega \in U \exists w \in V : h\left(\omega, w\right) \geq \lambda \& g\left(\omega, w\right) \geq \gamma,$$

а условие

$$\exists\varpi_* \in \Phi\left(V, U\right) \forall v \in V g\left(\varpi_*\left(v\right), v\right) \geq \gamma \vee h\left(\varpi_*\left(v\right), v\right) \leq \lambda \text{ –}$$

условию

$$\forall v \in V g \exists\varpi \in U g\left(\varpi, v\right) \geq \gamma \vee h\left(\varpi, v\right) \leq \lambda$$

(в последнем случае использовано свойство, сформулированное в предыдущем разделе).

Таким образом, формула (5.3), а с ней и формула (5.1) равносильна условию

$$\begin{gathered}\exists\lambda \in \mathbb{R}[\exists\omega \in U \exists w \in V : h\left(\omega, w\right) \geq \lambda \& g\left(\omega, w\right) \geq \gamma]\& \\ \&[\forall v \in V g \exists\varpi \in U g\left(\varpi, v\right) \geq \gamma \vee h\left(\varpi, v\right) \leq \lambda].\end{gathered} \tag{5.4}$$

Теперь можно получить явную формулу для величины $S\left(\Gamma_*\right)$. Начнем с нижней оценки. Для справедливости условия (5.4) достаточно выполнения условия

$$\begin{gathered}\exists\lambda \in \mathbb{R}[\exists\omega \in U \exists w \in V : h\left(\omega, w\right) \geq \lambda \& g\left(\omega, w\right) \geq \gamma]\& \\ \&\forall v \in V g \exists\varpi \in U h\left(\varpi, v\right) \leq \lambda.\end{gathered}$$

Но условие

$$\forall v \in V g \exists\varpi \in U h\left(\varpi, v\right) \leq \lambda$$

равносильно неравенству $L \leq \lambda$, где

$$L = \max_{v \in V} \min_{\varpi \in U} h(\varpi, v).$$

Поэтому формула (5.4) эквивалентна формуле

$$\exists \lambda \geq L \exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq \lambda \& g(\omega, w) \geq \gamma,$$

или

$$\exists \omega \in U \exists w \in V : h(\omega, w) \geq L \& g(\omega, w) \geq \gamma.$$

Последнее условие может быть выполнено, например, когда γ равно

$$K = \max_{(\omega, w) \in D_*} g(\omega, w),$$

где

$$D_* = \{(\omega, w) \in U \times V : h(\omega, w) \geq L\}.$$

Поэтому $S(\Gamma_*) \geq K$.

Но верно и обратное неравенство. В самом деле, пусть $\gamma > K$. Предположим, что для такого γ выполняется условие (5.4). Тогда для управлений ω и w, существование которых предусмотрено этим условием, выполняется неравенство $h(\omega, w) < L$, а значит и $\lambda < L$. Рассмотрим стратегию $v^0 \in V$ для которой $\min_{u \in U} h(u, v^0) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v)$. Следовательно, для любой стратегии u^0 пара $(u^0, v^0) \in D_*$, поэтому выполняются неравенства $g(u^0, v^0) \leq K < \gamma$. Но тогда в силу второй части формулы (5.4) должно выполняться условие

$$\exists u \in U : g\left(u, v^0\right) \leq \lambda < L,$$

что противоречит выбору стратегии v^0.

Полученное противоречие доказывает, что для $\gamma > K$ условие (5.4) выполняться не может и потому $S(\Gamma_*) \leq K$. Таким образом, доказана

Теорема 5.1. *Справедливо равенство* $S(\Gamma_*) = K$.

Формула (5.4) подсказывает следующую структуру оптимальной стратегии первого игрока. Пусть точка $(u^0, v^0) \in D_*$ выбрана так, что $g(u^0, v^0) = K$. Определим абсолютно оптимальную стратегию первого игрока u_*^a и стратегию наказания второго игрока первым u_*^p условиями

$$g\left(u_*^a\left(v\right),v\right)=\max_{u\in U} g\left(u,v\right),\ \ h\left(u_*^p\left(v\right),v\right)=\min_{u\in U} h\left(u,v\right).$$

Тогда оптимальной будет стратегия вида

$$u_*^0\left(v\right)=\begin{cases} u^0,\ \text{если } v=v^0,\\ u_*^a\left(v\right),\ \text{если } g\left(u_*^a\left(v\right),v\right)\geq K \text{ и } v\neq v^0,\\ u_*^p\left(v\right)\ \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Впрочем, можно использовать и стратегию вида

$$u_*^1\left(v\right)=\begin{cases} u^0,\ \text{если } v=v^0,\\ u_*^p\left(v\right),\ \text{если } v\neq v^0.\end{cases}$$

И в том и в другом случае непосредственно проверяется, что выбранная стратегия позволяет первому игроку получить выигрыш, равный K.

Вторая стратегия проще, но первая менее «кровожадна», поэтому, вероятно, ее легче интерпретировать.

Достижимость всех максимумов и минимумов, которые писались в этом разделе, непосредственно следует из предположений о компактности множеств U и V и непрерывности функций g и h. Из приведенных рассуждений также получается следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Величина $S\left(\Gamma_*\right)$ является достижимым результатом первого игрока в игре Γ_* в предположении доброжелательности партнера.*

Этим игра с доброжелательным вторым игроком выгодно отличается от игры Γ_2 (всегда приятнее решать задачу, у которой есть точное, а не только приближенное решение).

Данным замечанием завершим обсуждение игры Γ_* и перейдем к исследованию игры $\Gamma_\#$.

6. Игра $\Gamma_{\#}$

На сей раз оттолкнемся от условия (4.2). Для конкретной игры оно будет выглядеть следующим образом:

$$\sup_{u_{\#}\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \min \Big\{ \sup_{w_{\#}\in\Phi(U,V)} \min\left[h\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left. g\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \gamma\right], \tag{6.1}$$
$$\inf_{v_{\#}\in\Phi(U,V)} \max\left[g\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right) - \gamma,\right.$$
$$\left.\lambda - h\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right)\right] \Big\} \geq 0.$$

Перепишем его в виде

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{u_{\#}\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \min \Big\{ \sup_{w_{\#}\in\Phi(U,V)} \min\left[h\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left. g\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \gamma\right], \tag{6.2}$$
$$\inf_{v_{\#}\in\Phi(U,V)} \max\left[g\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right) - \gamma,\right.$$
$$\left.\lambda - h\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(u_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right)\right] \Big\} \geq 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{\omega_{\#}\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{\varpi_{\#}\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{w_{\#}\in\Phi(U,V)}$$
$$\min\{[\min\left(h\left(\omega_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(\omega_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left. g\left(\omega_{\#}\left(w_{\#}\right), v_{\#}\left(\omega_{\#}\left(w_{\#}\right)\right)\right) - \gamma\right)], \tag{6.3}$$
$$\inf_{v_{\#}\in\Phi(U,V)} \max[g\left(\varpi_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(\varpi_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right) - \gamma,$$
$$\lambda - h\left(\varpi_{\#}\left(v_{\#}\right), v_{\#}\left(\varpi_{\#}\left(v_{\#}\right)\right)\right)]\} \geq 0.$$

В самом деле, очевидно

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{\omega_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{\varpi_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{w_\#\in\Phi(U,V)} \min$$
$$\{[\min\left(h\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left.g\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \gamma\right)],$$
$$\inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max[g\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right) - \gamma,$$
$$\lambda - h\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)]\} \geq$$
$$\geq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{u_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{w_\#\in\Phi(U,V)} \min$$
$$\{[\min(h\left(u_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \lambda,$$
$$g\left(u_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \gamma)],$$
$$\inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max[g\left(u_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(v_\#\right)\right)\right) - \gamma,$$
$$\lambda - h\left(u_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(v_\#\right)\right)\right)]\}.$$

С другой стороны, пусть выполняется неравенство (6.3). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\lambda, \omega_\#, \varpi_\#$ и $w_\#$ так, что

$$\min\{[\min\left(h\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left.g\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \gamma\right)],$$
$$\inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max[g\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right) - \gamma,$$
$$\lambda - h\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)]\} \geq -\varepsilon.$$

Тогда для стратегии

$$u_\#\left(v_\#\right) = \begin{cases} \omega_\#\left(w_\#\right), & \text{если } v_\# = w_\#, \\ \varpi_\#\left(v_\#\right), & \text{если } v_\# \neq w_\#, \end{cases}$$

и тех же λ и $w_\#$ выполняется неравенство

$$\min\{[\min\left(h\left(u_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \lambda,\right.$$
$$\left.g\left(u_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(w_\#\right)\right)\right) - \gamma\right)],$$
$$\inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max[g\left(u_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(v_\#\right)\right)\right) - \gamma,$$
$$\lambda - h\left(u_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(u_\#\left(v_\#\right)\right)\right)]\} \geq -\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует неравенство (6.2).

Перепишем формулу (6.3) в виде

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \min \left\{ \left[\sup_{\omega_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{w_\#\in\Phi(U,V)} \min\left(h\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right)-\lambda,\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. g\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right)-\gamma\right)\right],$$
$$\sup_{\varpi_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max\left[g\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)-\gamma,\right.$$
$$\left.\left.\lambda-h\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)\right]\right\} \geq 0.$$

Очевидно,

$$\sup_{\omega_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \sup_{w_\#\in\Phi(U,V)} \min\left(h\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right)-\lambda,\right.$$
$$\left. g\left(\omega_\#\left(w_\#\right), v_\#\left(\omega_\#\left(w_\#\right)\right)\right)-\gamma\right)=$$
$$=\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min\left(h\left(\omega,w\right)-\lambda,\ g\left(\omega,w\right)-\gamma\right)$$

(в задачах оптимизации информированность не существенна). А дважды переставляя операторы sup и inf получим

$$\sup_{\varpi_\#\in\Phi(\Phi(U,V),U)} \inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \max[g\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)-\gamma,$$
$$\lambda-h\left(\varpi_\#\left(v_\#\right), v_\#\left(\varpi_\#\left(v_\#\right)\right)\right)]=$$
$$=\inf_{v_\#\in\Phi(U,V)} \sup_{\varpi\in U} \max[g\left(\varpi, v_\#\left(\varpi\right)\right)-\gamma, \lambda-h\left(\varpi, v_\#\left(\varpi\right)\right)]=$$
$$=\max_{\varpi\in U}\min_{v\in V} \max[g\left(\varpi,v\right)-\gamma, \lambda-h\left(\varpi,v\right)].$$

Таким образом, неравенство (6.3), а значит, и неравенство (6.1) равносильны условию

$$\begin{gathered}\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V}\min[h\left(\omega,w\right)-\lambda, g\left(\omega,w\right)-\gamma],\\ \max_{\varpi\in U}\min_{v\in V}\max[g\left(\varpi,v\right)-\gamma, \lambda-h\left(\varpi,v\right)]\}\geq 0.\end{gathered} \tag{6.4}$$

В принципе уже эта формула дает инструмент для поиска величины $S\left(\Gamma_\#\right)$. Действительно, в левой части этой формулы стоит функция одной переменной γ (обозначим ее через $c\left(\gamma\right)$). Немного длинными, но стандартными рассуждениями доказывается, что эта функция непрерывна и не возрастает на отрезке

$$\left[\min_{(u,v)\in U\times V} g(u,v),\ \max_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)\right].$$

Кроме того, она неотрицательна в левом конце этого отрезка, и неположительна в его правом конце. Следовательно, имеет на этом отрезке корни. Выше, по сути, установлено, что $S(\Gamma_{\#})$ – наибольший корень уравнения $c(\gamma)=0$.

Но можно получить и явную формулу. Сделаем это.

Очевидно,

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \min\Big\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma], \max_{\varpi\in U}\min_{v\in V}[\lambda-h(\varpi,v)]\Big\} \geq$$
$$\geq \max_{\lambda\in\mathbb{R}} \min\Big\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma], \max_{\varpi\in U}\min_{v\in V} \max[g(\varpi,v)-\gamma, \lambda-h(\varpi,v)]\Big\}.$$

и

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \min\Big\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma], \max_{\varpi\in U}\min_{v\in V}[\lambda-h(\varpi,v)]\Big\} =$$
$$= \max_{\lambda\in\mathbb{R}} \min\Big\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma], \lambda-\min_{\varpi\in U}\max_{v\in V} h(\varpi,v)\Big\}.$$

Обозначим

$$L'=\max_{\varpi\in U}\min_{v\in V} h(\varpi,v).$$

Тогда условие

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \min\Big\{\max_{\omega\in U}\max_{w\in V} \min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma], \lambda-\min_{\varpi\in U}\max_{v\in V} h(\varpi,v)\Big\} \geq 0$$

может быть переписано в виде

$$\max_{\lambda\geq L'}\max_{\omega\in U}\max_{w\in V}\min[h(\omega,w)-\lambda, g(\omega,w)-\gamma] \geq 0.$$

Наибольшее значение γ, при котором выполняется это условие равно

$$K'=\max_{(u,v)\in D'} g(u,v),$$

где

$$D' = \{(u, v) \in U \times V : h(u, v) \geq L'\} .$$

Поэтому $S(\Gamma_{\#}) \geq K'$.

Обратно, допустим что $S(\Gamma_{\#}) > K'$. Тогда для некоторого $\gamma > K'$ выполняется неравенство (6.4). Следовательно, для ω и w, реализующих соответствующие максимумы в формуле (6.4) выполняется неравенство $g(\omega, w) > K'$, а тогда в силу выбора γ получим $h(\omega, w) < L'$, а значит и $\lambda < L'$.

Фиксируем $v_0 \in V$ так, что $\min\limits_{u \in U} h(u, v_0) = \max\limits_{v \in V} \min\limits_{u \in U} h(u, v)$. Тогда для любого $\varpi \in U$ будем иметь $h(\varpi, v_0) \geq L' > \lambda$ и, следовательно, $g(\varpi, v_0) \geq K' < \gamma$. Поэтому

$$\max[g(\varpi, v_0) - \gamma, \lambda - h(\varpi, v_0)]\} < 0.$$

Тем более

$$\min_{v \in V} \max[g(\varpi, v) - \gamma, \lambda - h(\varpi, v)]\} < 0$$

и в силу произвольности ϖ

$$\max_{\varpi \in U} \min_{v \in V} \max[g(\varpi, v) - \gamma, \lambda - h(\varpi, v)]\} < 0,$$

а значит условие (15) выполнено быть не может. Полученное противоречие доказывает неравенство $S(\Gamma_{\#}) \geq K'$.

Таким образом, справедлива

Теорема 6.1. *Имеет место равенство $S(\Gamma_{\#}) = K'$.*

Одна из оптимальных стратегий первого игрока может быть построена следующим образом. Фиксируем точку $(u^0, v^0) \in D'$ так, что $g(u^0, v^0) = K'$ и зададим стратегию u^p условием

$$\max_{v \in V} h(u^p, v) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} h(u, v) .$$

Непосредственно проверяется, что стратегия

$$u_{\#}(v_{\#}) = \begin{cases} u^0, \text{ если } v_{\#}(u^0) = v^0, \\ u^p \text{ в противном случае} \end{cases}$$

позволяет первому игроку получит выигрыш, равный K'.

Отсюда получается следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Величина $S(\Gamma_{\#})$ является достижимым результатом первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$ в предположении доброжелательности партнера.*

7. Заключение

Итак, существенные аргументы в пользу применения определения 3.2 приведены. Центральное место, конечно, занимает теорема 3.1. Но и структура решений задач, относящихся к играм Γ_* и $\Gamma_{\#}$ вполне ожидаемы и нормально интерпретируются. Это тоже говорит в пользу предлагаемого определения.

Можно доказать и несколько более простых утверждений, вполне соответствующих интуитивным представлениям. Например, из теорем 5.1 и 6.1 легко следуют неравенства

$$S(\Gamma) \leq S(\Gamma_{\#}) \leq S(\Gamma_*) .$$

Непосредственно из определения следует, что для любого квазиинформационного расширения [11] $\Gamma_{\$}$ игры Γ выполняется неравенство $S(\Gamma) \leq S(\Gamma_{\$})$, и т.д.

В данной статье рассмотрены только игры двух лиц без неопределенных факторов. Конечно, для более сложных моделей принятия решений определение 3.2 придется несколько модифицировать. Но с этим проблем не возникает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Еналеев А.К. *Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах* // Автоматика и телемеханика. 1985. №3. С. 73–80.

2. Васин А.А., Морозов В.В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике.* М.: 2003.

3. Ватель И.А. , Ерешко Ф.И. *Математика конфликта и сотрудничества.* М.: Знание, 1973.

4. Гермейер Ю.Б. *Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 5 С. 1001–1004.

5. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971.

6. Гермейер Ю.Б.*Игры с непротивоположными интересами.* М.: Наука, 1976.

7. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах.* М.: Радио и связь, 1982.

8. Горелов М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации* // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С. 124–144.

9. Горелов М.А. *Максимальный гарантированный результат в иерархических играх* // Управление большими системами. 2017. Вып. 67. С. 4–31.

10. Кононенко А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. №. 2. С. 311–317.

11. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. *Теория неантагонистических игр.* М.: Изд-во МГУ, 1984.

12. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* М.: Мир, 1985.

13. Цермело Э. *О применении теории множеств к теории шахматной игры* // Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 167–172.

14. Burkov V.N., Lerner A.Ya. *Fairplay in Control of Active Systems* // Differential Games and Related Topics. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1971. P. 164–168.

15. De Méziriac B. *Problèmes plaisants et délectables, qui se sont par les nombres.* Lion, 1612.

16. Simaan M., Cruz J.B. *On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1973. Vol. 11, no. 5. P. 533–555.

17. Von Stackelberg H. *Market Structure and Equilibrium: 1st Edition Translation into English.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

HIERARCHICAL GAMES WITH FEEDBACK ON THE ASSUMPTION OF A LOWER-LEVEL PLAYER'S BENEVOLENCE

Mikhail A. Gorelov, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Cand.Sc. (griefer@ccas.ru).

Abstract: A new optimality principle is proposed that generalizes the Stackelberg equilibrium principle. Its connection with the classical definition is investigated. The technique of working with the new definition is discussed. As an example, solutions are found in two hierarchical games with feedback.

Keywords: games with a fixed order of moves, Stackelberg equilibrium, information, benevolence.