

УДК 519.837.2

ББК 22.18

# РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КООРДИНАЦИИ ДВУХ ФИРМ С МЕНЯЮЩИМИСЯ ЦЕНАМИ

АНДРЕЙ П. ПАРФЕНОВ

Санкт-Петербургский государственный университет  
Факультет прикладной математики–процессов управления  
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35  
Институт проблем региональной экономики РАН  
190013, Санкт-Петербург, ул. Серпуховская, 38  
e-mail: keldoor@gmail.com

Рассмотрена модель взаимодействия двух фирм, обменивающихся друг с другом продукцией, которую также можно продавать на рынке. Цена продукции меняется с течением времени. Взаимодействие фирм формализовано с помощью динамической игры с дискретным временем, аналогичной введенной Розенталем игре «Многоножка». Исследованы условия на договор об обмене продукцией между фирмами, при которых им будет невыгодно нарушать этот договор до окончания взаимодействия. Такое взаимодействие соответствует парето-оптимальному равновесию по Нэшу в игре. Оказывается, для этого достаточно, чтобы договор предполагал выплату штрафа в случае отказа от обмена товаром и фирмы регулярно обновляли договор с периодом, равным 2 моментам времени. Определены необходимые ограничения на размер штрафа.

*Ключевые слова:* динамические игры, сетевые игры, цепи поставок, равновесия по Нэшу.

*Поступила в редакцию:* 18.09.20 *После доработки:* 13.02.21 *Принята к публикации:* 01.09.21

## 1. Введение

Когда фирмы – в частности, поставщики и покупатели в сетях поставок – заключают соглашение друг с другом, важен вопрос об устойчивости этого соглашения, то есть гарантиях его ненарушения. Эти гарантии могут быть прописаны в соглашении, где также могут содержаться штрафные санкции за его нарушение. Также устойчивость соглашения может быть основана на том, что ни одной из фирм невыгодно его нарушать. Кроме того, само соглашение чаще всего заключается потому, что оно выгодно всем участвующим в нем фирмам.

Вопрос об экономической выгодности соглашений для их участников формализован в математической теории игр. Если ни одному из участников невыгодно нарушать соглашение, то, с точки зрения теории игр, это равновесие по Нэшу [1].

Для моделирования взаимодействия между поставщиками и покупателями используются игры формирования сетей [9, 10]. В них стратегии поставщиков и покупателей – взаимные предложения друг к другу. Поставка товара осуществляется только в том случае, когда предложения обеих сторон друг к другу совпадают.

Если действия одних фирм влияют на другие фирмы, а решения принимаются фирмами последовательно, основываясь на имеющейся в каждый момент времени информации, подобное взаимодействие моделируется динамическими играми. При этом возникает проблема сохранения устойчивости соглашения – то есть его выгоды для каждого из участников – с течением времени. Если соглашение со временем продолжает оставаться устойчивым, ситуация в игре динамически устойчива. Любое равновесие по Нэшу обладает этим свойством. Если даже при нарушении соглашения одним из участников оно продолжает оставаться устойчивым, ситуация в игре позиционно динамически устойчива. Этим свойством обладают только абсолютные равновесия [5].

Равновесие в динамической игре моделирует длительное устойчивое соглашение между фирмами, при котором они образуют стабильную логистическую сеть (logistics network), на основе которой создаются цепи поставок (supply chain). На рынке, отличном от рынка совершенной конкуренции, подобные соглашения важны для фирм,

поскольку позволяют минимизировать транзакционные издержки от смены контрагентов [6].

Пример динамической игры – игра многоножки, она же сороконожка Розенталя [11]. В этой игре парето-оптимальная ситуация не является равновесной по Нэшу. Единственное равновесие (оно же является единственным абсолютным равновесием) – ситуация, которая очень далека от оптимума: в ней первый игрок сразу же завершает игру. Ауманн показал, что при естественных предположениях о рациональном поведении игроков единственное оптимальное решение также приводит к немедленному завершению игры [7].

Экспериментальные исследования показывают, что в реальных ситуациях, моделируемых игрой многоножки, действующие лица делают некоторое количество ходов прежде, чем завершают игру. Возможно, это связано со стремлением индивидуумов к кооперации друг с другом (если индивидуумы уже собраны в группы, это стремление ослабевает) [8]. В любом случае, в реальных ситуациях действующие лица также не доводят игру до конца – то есть не получают выигрыши, оптимальные по Парето.

Ранее автор построил модель взаимодействия фирм, аналогичную игре многоножки, в которой добавлены договоры между фирмами, причем при нарушении договора фирма выплачивает штраф [4]. Взаимодействие между фирмами формализовано с помощью игры формирования сети, обобщающей игру многоножки. Определены условия, наложенные на договоры, при которых парето-оптимальная ситуация, в которой оба игрока довели игру до конца, является равновесной по Нэшу. При этом цены и штрафы предполагались не меняющимися во времени.

В данной работе построена более общая модель взаимодействия фирм, в которой цены и штрафы меняются во времени (более подробно рассмотрен случай изменения в геометрической прогрессии с разными показателями дисконта). При этом в качестве принципа оптимальности рассмотрены не только равновесия по Нэшу, но и абсолютные равновесия. Определены условия, наложенные на договоры между фирмами, при которых парето-оптимальная ситуация равновесна по Нэшу, а также условия, при которых она является абсолютным равновесием.

## 2. Экономическая модель

### 2.1. Модель классической игры «Многоножка»

Пусть имеются две фирмы  $A$  и  $B$ . Фирма  $A$  принимает решения в нечетные моменты времени  $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ , а фирма  $B$  – в четные моменты времени  $2, 4, 6, \dots, 2n$ .

Действия, выполняемые фирмами, заключаются в следующем. Фирма  $A$  посылает  $B$   $m_A = 1$  единицу продукции 1,  $B$  ее перерабатывает и получает  $q_B = 3$  единицы продукции 2. Из этого количества  $B$  посылает назад  $m_B = 1$  единицу, а остальные 2 единицы продает.  $A$  с ее помощью производит еще  $q_A = 3$  единицы продукции 1 и  $m_A = 1$  единицу посылает  $B$ , а остальные 2 единицы продает. И так далее  $A$  и  $B$  последовательно получают 3-кратное производство продукции. Но  $A$  и  $B$  в каждый момент времени могут отказаться от взаимовыгодного обмена и оставить у себя всю продукцию. Выигрыш фирмы равен количеству проданных ею единиц продукции.

Модель легко обобщить, изменив количество производимых и продаваемых единиц продукции. В качестве продукции у одной из фирм – например, фирмы  $A$  – могут выступать и деньги. Тогда  $A$  и  $B$  связаны отношениями купли-продажи, производство продукции фирмы  $A$  – это получение дохода от продукции фирмы  $B$  тем или иным способом (переработка, перевозка, и т.п.), пересылка денег от  $A$  к  $B$  – это оплата будущих поставок, а продажа продукции на рынке – это просто изъятие денег из оборота.

Таким образом, в каждый момент времени только одна фирма делает ход. Следовательно, это поочередная игра (игра с полной информацией), в которой всегда существует абсолютное равновесие. Данная ситуация описывается игрой в развернутой форме, известной как «многоножка» [11]. Например, для  $2n = 100$  моментов времени дерево игры выглядит как на рис. 1.

В каждом узле соответствующий игрок может либо закончить игру, выбрав стрелку вниз, либо двинуться вправо, предлагая сделать следующий ход другому игроку. Например, в первом узле  $A$  может либо остановить игру, продав единственную имеющуюся у него единицу продукции и оставив  $B$  без продукции, либо двинуться вправо. Игра заканчивается, если кто-нибудь выберет стрелку вниз, или на сотом ходу.

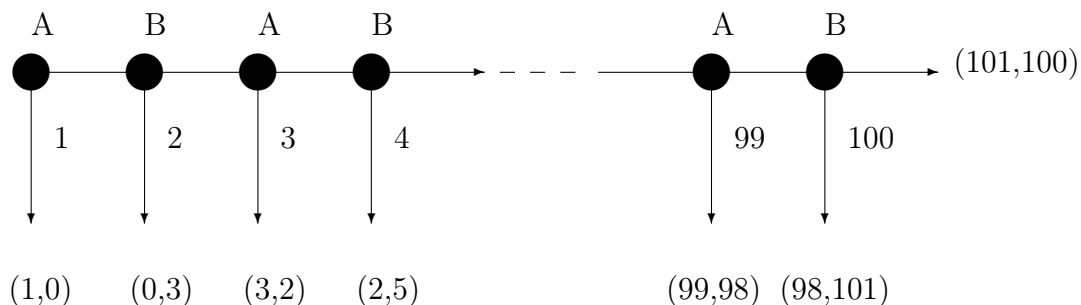


Рисунок 1. Дерево игры «многоножка» для 100 моментов времени

В этой игре всего два исхода оптимальны по Парето – предпоследний и последний. Причем последний в большей степени является «справедливым», поскольку  $A$  при этом пересылает  $B$  столько же единиц, сколько  $B$  пересылает  $A$  ( $A$  получает на 1 единицу прибыли больше, поскольку у него изначально была 1 единица продукции).

Но в этой игре, казалось бы, очень выгодного взаимодействия фирм абсолютное равновесие очень далеко от оптимального по Парето. Из рекуррентного алгоритма получаем, что для каждого игрока оптимальной стратегией будет ход вниз при первой же возможности. В частности, фирма  $A$  должна закончить игру на первом шаге, оставив у себя всю продукцию.

Максиминный выигрыш на шаге  $t$  для игрока  $i = A, B$  достигается в том случае, когда  $i$  сразу же делает ход вниз и завершает игру. Действительно, иначе второй игрок на следующем шаге  $t + 1$  сделает ход вниз, и игрок  $i$  получит меньший выигрыш.

Поэтому никаких равновесий в стратегиях наказания, в которой игроки делают ходы вперед, также не существует. Ведь игрок, двигаясь вперед на шаге  $t$ , не достигает максиминного выигрыша, поскольку второму игроку выгодно на шаге  $t + 1$  сделать ход вниз. Следовательно, никаких других равновесий, кроме единственного абсолют-

ного равновесия, в котором  $A$  сразу завершает игру, не существует.

Именно поэтому в реальной экономике агенты страхуют себя от таких обрывов цепочек, заключая договоры, в которых прописывают штрафы за нарушение договора. Договоры между фирмами удобно моделировать с помощью игр формирования сетей.

## 2.2. Более общая модель с различными и меняющимися ценами

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть в момент времени 1 фирма  $A$  посылает фирме  $B$   $m_A$  единиц продукции 1, фирма  $B$  ее перерабатывает и получает  $q_B$  единиц продукции 2. Из этого количества фирма  $B$  в момент времени 2 посылает назад фирме  $A$   $m_B$  единиц, а остальные  $q_B - m_B$  единиц продает по цене  $p_A(1)$ . Фирма  $A$  с их помощью производит еще  $q_A$  единиц продукции 1 и в момент времени 3  $m_A$  единиц посылает фирме  $B$ , а остальные  $q_A - m_A$  единиц продает по цене  $p_B(3)$ . Далее  $A$  и  $B$  аналогично на каждом шаге увеличивают количество производимой продукции. Но в каждый момент времени  $A$  или  $B$  может отказаться от взаимовыгодного обмена и оставить у себя всю продукцию.

Таким образом, на каждом шаге фирмы продают часть продукции по ценам  $p_A(t)$ ,  $p_B(t)$ . Выигрыш фирмы равен суммарному доходу за проданные ею единицы продукции с учетом функций дисконта  $d_A(t)$ ,  $d_B(t)$ . Т.е, выигрыш игрока  $A$  равен

$$\begin{aligned} H_A &= (q_A - m_A)p_A(1)d_A(1) + \dots + (q_A - m_A)p_A(2k+1)d_A(2k+1) = \\ &= (q_A - m_A) \sum_{i=0}^k p_A(2i+1)d_A(2i+1) \end{aligned}$$

если игра продолжается до  $(2k+1)$ -го шага и  $A$  не обрывает ее, либо

$$H_A = m_A p_A(2k+1)d_A(2k+1) + (q_A - m_A) \sum_{i=0}^k p_A(2i+1)d_A(2i+1),$$

если  $A$  обрывает игру на  $(2k+1)$ -м шаге.

Выигрыш игрока  $B$  равен

$$\begin{aligned} H_B &= (q_B - m_B)p_B(2)d_B(2) + \dots + (q_B - m_B)p_B(2k)d_B(2k) = \\ &= (q_B - m_B) \sum_{i=0}^k p_B(2i)d_B(2i), \end{aligned}$$

если игра продолжается до  $2k$ -го шага и  $B$  не обрывает ее, либо

$$H_B = m_B p_B(2k) d_B(2k) + (q_B - m_B) \sum_{i=0}^k p_B(2i) d_B(2i),$$

если  $B$  обрывает игру на  $2k$ -м шаге.

Взаимодействие фирм можно описать игрой в развернутой форме. В каждый момент времени только одна фирма выполняет действия, а значит, взаимодействие фирм описывается конечной поочередной игрой (игрой с полной информацией). В такой игре всегда существуют равновесие.

Для  $q_A = q_B = 1$ ,  $m_A = m_B = 3$ ,  $p_A(t) = p_A$ ,  $p_B(t) = p_B$  (цены константные) и  $n = 50$  (то есть для  $2n = 100$  шагов игры) получаем игру, эквивалентную игре «многоножка».

Далее удобно сразу рассматривать динамику цен с учетом дисконта, поэтому под  $p_i(t)$  будем далее обозначать произведение  $p_i(t)d_i(t)$ . Это произведение отражает как объективную динамику цен, так и динамику субъективных ожиданий.

Прежде всего, рассмотрим частный случай, когда субъективные цены  $p_i(t)$  растут или убывают в геометрической прогрессии:

$$p_i(t) = P_{i0} e^{\lambda_i t},$$

где  $\lambda_i$  – скорость роста для игрока  $i$ .

### 2.3. Оптимумы по Парето и равновесия

В случае, когда  $p_A(t)$  и  $p_B(t)$  являются константами (то есть  $\lambda_A = \lambda_B = 0$ ), завершение игры на  $(t + 2)$ -м шаге более выгодно обоим игрокам, чем завершение на  $t$ -м шаге, поскольку при этом оба игрока получают больший выигрыш. Игрок  $i$ , сходящийся на  $t$ -м шаге и завершивший игру на  $(t + 2)$ -м шаге, получает на  $(q_i - m_i)p_i(t)$  единиц дохода больше, и ему все равно, в какой момент получить дополнительные  $m_i p_i(t) = m_i p_i(t + 2)$  единиц: на  $t$ -м или на  $(t + 2)$ -м шаге. Аналогично, игрок  $j$ , сходящийся на  $(t + 1)$ -м шаге, получает на  $(q_i - m_i)p_i(t + 1)$  единиц дохода больше. В этом случае, в игре всего два исхода оптимальны по Парето – предпоследний и последний. Причем последний в большей степени является «справедливым», поскольку

$A$  при этом пересылает  $B$  столько же единиц, сколько  $B$  пересылает  $A$ .

Но, если функции  $p_i(t)$  не являются константами, оптимумы по Парето могут быть иными. Ведь, если для игрока  $i$  выполняется неравенство

$$m_i p_i(t) - m_i p_i(t+2) \geq (q_i - m_i) p_i(t), \quad (2.1)$$

то ему выгоднее завершить игру на  $t$ -м шаге, чем на  $(t+2)$ -м. Неравенство (2.1) эквивалентно

$$(2m_i - q_i) p_i(t) \geq m_i p_i(t+2),$$

то есть

$$\frac{p_i(t+2)}{p_i(t)} \leq 2 - \frac{q_i}{m_i}.$$

Если предположить рост (или убывание) субъективных цен в геометрической прогрессии как  $p_i(t) = p_{i0} e^{\lambda_i t}$ , неравенство (2.1) эквивалентно

$$e^{2\lambda_i} \leq 2 - \frac{q_i}{m_i}. \quad (2.2)$$

Неравенство (2.2) можно интерпретировать так: продукция у игрока  $i$  производится медленнее, чем она (объективно или субъективно) обесценивается. В этом случае, выигрыши игрока  $i$  со временем убывают, и ему выгодно завершить игру как можно раньше. Если же неравенство (2.2) не выполняется, его выигрыши со временем растут, и ему выгодно завершить игру как можно позже (но не в том случае, когда ее завершит другой игрок).

Таким образом, возможны 3 случая:

1. Если для обоих игроков выполняется неравенство (2.2), то в игре есть 2 ситуации, оптимальные по Парето: когда игра завершается на 1-м и на 2-м шаге.
2. Если для одного игрока неравенство (2.2) выполняется, а для другого нет, то все ситуации в игре оптимальны по Парето (поскольку выигрыш одного игрока со временем растет, а другого – падает).
3. Если для обоих игроков неравенство (2.2) не выполняется, то в игре есть 2 ситуации, оптимальные по Парето: когда игра завершается на предпоследнем и на последнем шаге.

Далее будем рассматривать наиболее интересный случай, когда неравенство (2.2) не выполняется для обоих игроков – то есть, с точки зрения оптимумов по Парето, обоим игрокам выгодно продолжать игру до конца.

С равновесиями все проще. Независимо от динамики цен и функций дисконта, единственное равновесие (оно же единственное абсолютное равновесие) достигается, когда игра завершается сразу.

Действительно, максиминный выигрыш на шаге  $t$  для игрока  $i = A, B$  достигается в том случае, когда  $i$  сразу же делает ход вниз и завершает игру. Иначе второй игрок на следующем шаге  $t + 1$  сделает ход вниз, и игрок  $i$  получит меньший выигрыш. Поэтому никаких равновесий – ни абсолютных, ни равновесий в стратегиях наказания, в которой игроки делают ходы вперед, также не существует. Ведь игрок, двигаясь вперед на шаге  $t$ , не достигает максиминного выигрыша, поскольку второму игроку выгодно на шаге  $t + 1$  сделать ход вниз. Следовательно, никаких других равновесий, кроме единственного равновесия, в котором  $A$  сразу завершает игру, не существует.

### 3. «Многоножка» как динамическая сетевая игра

Договоры между экономическими агентами, действующие только при взаимном исполнении, описываются играми формирования сетей [9]. В такой игре стратегия игрока – вектор, включающий в себя в качестве компонент предложения к другим игрокам. Если компонент равен 1, предложение присутствует, если 0 – отсутствует. Договор между игроками  $i$  и  $j$  действует, только если оба предложения  $u_{ij} = u_{ji} = 1$ . В результате образуется сеть, ребра которой – соединения между игроками, возникающие при наличии взаимных предложений.

Если имеется 2 игрока  $A$  и  $B$ , можно описать стратегию игрока  $A$  значением  $u_{AB} \in \{0, 1\}$ , а стратегию игрока  $B$  – значением  $u_{BA} \in \{0, 1\}$ . При этом наличие соединения между игроками описывается переменной  $u = \min(u_{AB}, u_{BA}) \in \{0, 1\}$ . Пусть  $S_A, S_B$  – множества «внутренних» стратегий игроков  $A$  и  $B$ , не связанных с их соединением. Тогда ситуация в игре – это вектор  $((s_A, u_{AB}), (s_B, u_{BA}))$ , где  $s_A \in S_A, s_B \in S_B$ . Ситуация порождает сеть, которая описывается вектором  $N = (s_A, s_B, \min(u_{BA}, u_{AB}))$ . На множестве сетей определены функции выигрыша  $H_A, H_B$ .

Сеть называется *стабильной*, если она возникает из равновесной по Нэшу ситуации. В игре формирования сети с двумя игроками сеть  $N = (s_A, s_B, u)$  стабильна тогда и только тогда, когда ситуация  $((s_A, u), (s_B, u))$  является равновесием по Нэшу. Кроме того, сеть  $N = (s_A, s_B, 1)$  стабильна тогда и только тогда, когда ни одному игроку  $i$  невыгодно изменить стратегию  $s_i$  и/или оборвать связь, установив  $u = 0$ , а сеть  $N = (s_A, s_B, 0)$  стабильна тогда и только тогда, когда ни одному игроку  $i$  невыгодно изменить стратегию  $s_i$ . Возможность добавления связи не рассматривается, поскольку оно возможно только при одновременном изменении стратегии обоими игроками [9].

Напомним, что максиминная стратегия игрока  $i$  – стратегия, на которой достигается максимум его выигрыша  $H_i$  из минимумов  $H_i$  по стратегиям другого игрока  $j$  [1]. В игре формирования сети с конечным множеством ситуаций максимин для игрока  $i$  существует и достигается на сети, в которой  $i$  не имеет связей с другими игроками [3].

Динамическая игра формирования сети введена автором в [2]. Рассмотрим упрощенный частный случай этого определения для 2 игроков.

**Определение 3.1.** Динамическая игра формирования сети с двумя игроками – это позиционная игра

$$\Gamma = (N = \{A, B\}, 2n, M_d, (S_i)_{i \in N}, (s_i^0)_{i \in N}, (S'_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N}, (H_i)_{i \in N}),$$

где

- $N$  – множество игроков (они же вершины сети);
- $2n$  – количество моментов времени;
- $M_d \subseteq N \times N$  – множество динамических дуг, определяющих, какие игроки влияют друг на друга;
- $S_i$  – множество состояний вершины  $i$ -го игрока;
- $s_i^0 \in S_i$  – состояние вершины  $i$ -го игрока в начальный момент времени;

- $S'_i$  – множество внутренних ходов  $i$ -го игрока в каждый момент времени;
- $f_i: \prod_{(j,i) \in M_d} S_j \times \{0,1\} \times S'_i \rightarrow S_i$  – функция, определяющая состояние вершины, в зависимости от состояний вершин сети в предыдущий момент времени и наличия/отсутствия соглашения между игроками;
- $H_i: S_i \times \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция выигрыша  $i$ -го игрока в каждый момент времени.

Множество состояний игры в каждый момент времени – это множество состояний сети  $X = \prod_{i \in N} S_i \times \{0,1\}$ , то есть вектор, состоящий из состояний вершин и ребра, соединяющего игроков. Множество ходов  $i$ -го игрока –  $S'_i \times \{0,1\}$ , то есть вектор, состоящий из внутреннего хода игрока и его предложения к другому игроку по взаимодействию.

В сети, кроме динамических дуг, имеется ребро взаимодействия между игроками  $A$  и  $B$ , которое в момент времени  $t$  находится в состоянии  $u(t) = \min(u_{AB}(t), u_{BA}(t)) \in \{0,1\}$ , где  $u_{ij}(t)$  – предложение игрока  $i$  игроку  $j$  взаимодействовать. Состояние  $s_i(t)$  вершины игрока  $i$  в момент времени  $t$  зависит от входящих в вершину динамических дуг, состояния  $u(t-1)$  договора между игроками  $A$  и  $B$  в предыдущий момент времени и выбора  $s'_i(t) \in S'_i$  игрока  $i$  в момент времени  $t$ :

$$s_i(t) = f_i((s_j(t-1))_{(j,i) \in M_d}, s'_i(t), u(t-1)).$$

Выигрыш игрока суммируется из выигрышей, полученных им на траектории игры  $(x(1), \dots, x(2n))$ :

$$H_i(x, t) = H_i(s_i(1), u(1), t) + \dots + H_i(s_i(2n), u(2n), t).$$

Для динамической игры выполняются те же свойства стабильной сети и максиминной стратегии, что и для статической [2]. В частности, траектория игры стабильна тогда и только тогда, когда в каждый момент времени  $t$ :

- если  $u(t) = 1$ , то ни одному игроку  $i$  невыгодно изменить свой ход  $s_i(t)$  и/или оборвать связь в момент  $t$ , установив  $u(t) = 0$ ;

- если  $u(t) = 0$ , то ни одному игроку  $i$  невыгодно изменить стратегию  $s_i(t)$ .

Чтобы получить максиминную стратегию игрока  $i$ , можно взять в каждый момент времени  $u(t) = 0$ . Чтобы получить максиминную стратегию игрока  $i$  в подыгре, начинающейся с момента  $t_0$ , можно взять  $u(t) = 0$  при  $t \geq t_0$ .

Игру «многоножка» можно рассматривать как динамическую игру формирования сети, в которой есть только динамические дуги:  $M_d = \{(A, B), (B, A)\}$ , а ребро взаимодействия отсутствует. Состояние вершины – количество продукции, имеющейся у фирмы. Множество ходов игрока в каждый момент времени состоит из 2 элементов: поставить продукцию другой фирме или завершить взаимодействие.

## 4. Модель с договорами

### 4.1. Описание модели

Рассмотрим теперь модель с договорами, которые формализованы ребром взаимодействия в сетевой игре. На каждом шаге наличие ребра взаимодействия означает договор, за нарушение которого на следующем шаге уплачивается штраф.

Подобное взаимодействие фирм в общем виде выглядит так. Пусть имеется  $2n$  шагов, на которых поочередно ходят фирмы  $A$  и  $B$ . На шаге 1 фирма  $A$  имеет  $q_A$  единиц продукции 1, которую может продать по цене  $p_A(1)$ , причем из них посылает фирме  $B$   $m_A$  единиц продукции 1 или продает их и завершает взаимодействие. На шаге 2  $B$  ее перерабатывает и получает  $q_B$  единиц продукции 2. Из этого количества  $B$  посылает назад  $m_B$  единиц, а остальные  $(q_B - m_B)$  единиц продает по цене  $p_B(2)$ , или продает все  $q_B$  единиц и завершает взаимодействие. На шаге 3  $A$  с помощью полученной от  $B$  продукции производит  $q_A$  единиц продукции 1, а затем  $m_A$  единиц посылает  $B$ , а остальные  $(q_A - m_A)$  единиц продает по цене  $p_A(3)$ , или же продает все  $q_A$  единиц и завершает взаимодействие. И так далее.

Договор состоит в том, что фирмы не завершают взаимодействие раньше шага  $2n$ . Пусть штраф за нарушение договора равен  $c_A(t)$  для  $A$  и  $c_B(t)$  для  $B$ . Штрафы также рассматриваем с учетом дисконта (то есть уже домноженные на функции дисконта  $d_A(t)$ ,  $d_B(t)$ ).

Взаимодействие формализуется динамической сетевой игрой  $\Gamma_1(n, m_A, q_A, p_A, A, m_B, q_B, p_B, c_B)$ , в которой:

- $M_d = \{(A, B), (B, A)\}$ ;
- $S_i = \{0, 1, -1\} \times \{0, 1\}$ ;
- $s_i(0) = (0, 0)$ ;
- $S'_i = \{0, 1\}$ ;
- для  $s_j(t-1) = 0$   $f_i((0, u(t-1)), s_i^1(t)) = (s_i^1(t), u(t-1))$  и для  $s_j(t-1) \in \{1, -1\}$   $f_i((s_j(t-1), u(t-1)), s_i^1(t)) = (-1, u(t-1))$ ;
- если игра завершена, то  $H_i(-1, u, t) = 0$ ;
- если игра не завершена, причем  $t = 2k - 1$  и  $i = A$  или  $t = 2k$  и  $i = B$ , то  $H_i(s_i, u, t) = (q_i - m_i s_i^1) p_i(t) - u s_i^1 c_i(t)$ ;
- если игра не завершена, причем  $t = 2k - 1$  и  $i = B$  или  $t = 2k$  и  $i = A$ , то  $H_i(s_i, u, t) = u s_j^1 c_j(t)$ .

Поясним эти формулы. Состояние вершины игрока  $i$ :  $s_i(t) = (s_i^1(t), s_i^2(t))$ , где  $s_i^1(t) = 0$ , если игрок  $i$  в момент  $t$  переправил продукцию другому игроку,  $s_i^1(t) = 1$ , если он решил завершить игру, и  $s_i(t) = -1$ , если игра уже завершена. Компонента  $s_A^2(t) = s_B^2(t) = u(t-1)$  определяет, был ли заключен договор в предыдущий момент времени.

При этом устанавливаем начальное условие  $s_i^2(1) = u(0) = 0$ , поскольку  $u(0) = 1$  означало бы, что еще до начала игры игроки заключили между собой договор. Но нас интересует не только, выгодно ли игрокам соблюдать договор, но и выгодно ли его заключать. Поэтому сам процесс заключения договора тоже должен быть частью игры.

Тогда выигрыш для  $A$  равен:

- В случае доведения игры до конца:

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^n p_A(2i+1) + m_A p_A(2n+1).$$

- Если  $B$  обрывает игру на  $2k$ -м шаге:

$$\begin{aligned} H_A &= (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{k-1} p_A(2i+1) + s_B^2(2k)c_B(2k) = \\ &= (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{k-1} p_A(2i+1) + u(2k-1)c_B(2k). \end{aligned}$$

- Если  $A$  обрывает игру на  $(2k+1)$ -м шаге:

$$\begin{aligned} H_A &= (q_A - m_A) \cdot \\ &\cdot \sum_{i=1}^k p_A(2i+1) + m_A p_A(2k+1) - s_A^2(2k+1)c_A(2k+1) = \\ &= (q_A - m_A) \sum_{i=1}^k p_A(2i+1) + m_A p_A(2k+1) - u(2k)c_A(2k+1). \end{aligned}$$

Аналогично, выигрыш для  $B$  равен:

- В случае доведения игры до конца:

$$H_B = \sum_{i=1}^n (q_B - m_B) p_B(2i).$$

- Если  $A$  обрывает игру на  $(2k+1)$ -м шаге:

$$\begin{aligned} H_B &= \sum_{i=1}^k (q_B - m_B) p_B(2i) + s_A^2(2k+1)c_A(2k) = \\ &= \sum_{i=1}^k (q_B - m_B) p_B(2i) + u(2k)c_A(2k). \end{aligned}$$

- Если  $B$  обрывает игру на  $2k$ -м шаге:

$$\begin{aligned} H_B &= \sum_{i=1}^k (q_B - m_B) p_B(2i) + m_B p_B(2k) - s_B^2(2k)c_B(2k) = \\ &= \sum_{i=1}^k (q_B - m_B) p_B(2i) + m_B p_B(2k) - u(2k-1)c_B(2k). \end{aligned}$$

Игра, рассмотренная в предыдущем разделе, очевидно, эквивалентна  $\Gamma_1(50, 1, 3, 1, 0, 1, 3, 1, 0)$ .

#### 4.2. Равновесия

Если  $c_A(t) = c_B(t) = 0$ , то есть штрафы нулевые, заключение договора можно не учитывать, поскольку оно не влияет на выигрыш. Очевидно, тогда при любых параметрах  $n > 1$ ,  $q_A > m_A > 0$ ,  $q_B > m_B > 0$ ,  $p_A(t) > 0$ ,  $p_B(t) > 0$  существует лишь одно равновесие, при котором игрок  $A$  сразу завершает игру. Далее будем рассматривать случай  $c_A(t) > 0$ ,  $c_B(t) > 0$ .

Найдем в игре  $\Gamma_1(n, m_A, q_A, p_A, c_A, m_B, q_B, p_B, c_B)$  абсолютные равновесия. Исходя из теоремы о стабильной сети в динамической игре [2], каждому абсолютному равновесию соответствует сеть, в которой  $u(t) \in \{0, 1\}$ , при этом на  $t$ -м шаге, если  $u(t) = 1$ , то ни  $A$ , ни  $B$  невыгодно разорвать связь и перейти к  $u(t) = 0$ . Невыгодность в данном случае означает, что при разрыве связи игроком в момент  $t$  и, возможно, сменой им варианта хода в момент  $t$ , абсолютное равновесие (хотя бы одно) в получившейся подыгре  $\Gamma_1^{t+1}$  даст ему не больший выигрыш, чем в исходной ситуации.

На последнем,  $2n$ -м шаге, если  $m_B p_B(2n) > c_B(2n)$ , то  $B$  выгодно остановить игру, и тогда равновесные выигрыши игроков равны

$$l val_A(u(2n-1), 2n) = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + u(2n-1)c_B(2n)$$

$$val_B(u(2n-1), 2n) = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i) + m_B p_B(2n) - u(2n-1)c_B(2n).$$

Если  $m_B p_B(2n) \leq c_B(2n)$ , то  $B$  выгодно остановить игру тогда и только тогда, когда  $u(2n-1) = 0$ , и в этом случае выигрыши игроков равны

$$l val_A(0, 2n) = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1)$$

$$val_B(0, 2n) = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i) + m_B p_B(2n).$$

Если же  $u(2n-1) = 1$ , то  $B$  выгодно продолжить игру, так что игроки получают выигрыши

$$lval_A(1, 2n) = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^n p_A(2i+1) + m_A p_A(2n+1)$$

$$val_B(1, 2n) = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i).$$

Состояние соединения  $u(2n)$  может быть любым – оно в данном случае ни на что не влияет.

На предпоследнем,  $(2n-1)$ -м шаге, если  $u(2n-1) = 0$ , то  $A$  получает

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - u(2n-2)c_A(2n-1),$$

остановив игру, и

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1),$$

продолжив ее. Следовательно, как и в случае с  $t = 2n$ , получаем, что при  $m_A p_A(2n-1) > c_A(2n-1)$   $A$  выгодно остановить игру, и тогда выигрыши игроков равны

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - u(2n-2)c_A(2n-1)$$

$$H_B = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^{n-1} p_B(2i) + u(2n-2)c_A(2n-1).$$

При  $m_A p_A(2n-1) \leq c_A(2n-1)$   $A$  выгодно остановить игру тогда и только тогда, когда  $u(2n-2) = 0$ , и в этом случае выигрыши игроков равны

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1)$$

$$H_B = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^{n-1} p_B(2i).$$

Если же  $u(2n-2) = 1$ , то  $A$  выгодно продолжить игру, так что игроки получают выигрыши

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i-1)$$

$$H_B = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i) + m_B p_B(2n).$$

Если же  $u(2n-1) = 1$ , то  $A$  получает все те же

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - u(2n-2) c_A(2n-1),$$

остановив игру, и

$$\begin{cases} (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + c_B(2n), & m_B p_B(2n) \geq c_B(2n), \\ (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1), & m_B p_B(2n) \leq c_B(2n), \end{cases}$$

продолжив ее (если  $m_B p_B(2n) = c_B(2n)$ , то возможны оба варианта). Таким образом, при  $m_B p_B(2n) \leq c_B(2n)$   $A$  выгодно продолжить игру. При  $m_B p_B(2n) \geq c_B(2n)$   $A$  выгодно продолжить игру, если  $m_A p_A(2n-1) \leq c_B(2n) + c_A u(2n-2)$ , и остановить ее, если  $m_A p_A(2n-1) \geq c_B(2n) + c_A u(2n-2)$ .

Но в этом случае важен и выбор игроков относительно связи  $u(2n-1)$ . Сравнив выигрыши  $A$  при  $u(2n-1) = 0$  и  $u(2n-1) = 1$ , видим, что  $A$  в любом случае не получит никакой выгоды от обрыва связи. Но игроку  $B$  выгодно оборвать связь в том случае, когда  $A$  выгодно продолжить игру, поскольку при этом равновесный выигрыш  $B$  в любом случае увеличится. Если же  $A$  выгодно остановить игру, то состояние связи  $u(2n-1)$  не имеет значения, поскольку выигрыши игроков от него не зависят.

Таким образом, равновесный вариант с продолжением игры возможен только при  $u(2n-1) = 0$ , и при этом  $B$  на следующем шаге останавливает игру. Аналогично, при меньших  $k$  получаем, что на  $2k$ -м шаге равновесный вариант с продолжением игры возможен только при  $u(2k) = 0$ , при этом  $A$  на следующем шаге останавливает игру, а

на  $(2k + 1)$ -м шаге равновесный вариант с продолжением игры возможен только при  $u(2k + 1) = 0$ , при этом  $B$  на следующем шаге останавливает игру.

Таким образом, никаких новых абсолютных равновесий при добавлении ребра взаимодействия не появилось, поскольку на каждом шаге один из игроков разрушает взаимодействие, рассчитывая остановить игру на следующем шаге.

Максимин на шаге  $t$  для игрока  $i = A, B$  достигается в том случае, когда  $i$  сразу же завершает игру. Действительно, иначе второй игрок на шаге  $t$  разорвет договор и на следующем шаге  $t + 1$  завершит игру, и игрок  $i$  получит меньший выигрыш. Поэтому никаких дополнительных равновесий в стратегиях наказания тоже не появляется.

Заметим, что, даже если всегда  $u(t) = 1$  и игроки по каким-то причинам не могут разорвать связь, в случае  $m_{BPB}(2k) > c_B(2k)$  игроку  $B$  все равно выгодно остановить игру на шаге  $2k$ , а в случае  $m_{APB}(2k - 1) > c_A(2k - 1)$  и  $m_{BPB}(2k) > c_B(2k)$  игроку  $A$  выгодно остановить игру на шаге  $2k - 1$ . Таким образом, оптимальное по Парето равновесие при этом не будет достигнуто. Если нас интересуют случаи, при которых достигается «справедливое» оптимальное по Парето равновесие, следует предположить, что для любого  $k$

$$m_{BPB}(2k) \leq c_B(2k). \quad (4.1)$$

Далее будем предполагать, что неравенство (4.1) выполняется для любого  $k$ .

## 5. Модель с растянутыми во времени договорами

### 5.1. Описание модели

Итак, договор, который можно разорвать немедленно, не добавляет в игру никаких новых равновесий. Попробуем растянуть процесс разрыва договора во времени: пусть его расторжение на шаге  $t$  приведет к тому, что он перестанет действовать не на шаге  $t + 1$ , а только на шаге  $t + k$ , при этом в течение данного промежутка времени его можно восстановить. Иначе говоря, договор накладывает на фирмы обязательство, действующее  $k$  моментов времени.

То есть введем игру  $\Gamma_k(n, m_A, q_A, p_A, A, m_B, q_B, p_B, c_B)$ , где выполнены неравенства (4.1) (в противном случае равновесием всегда будет немедленное завершение игры) и не выполнены неравенства (2.2) (в противном случае немедленное завершение игры всегда будет парето-оптимальным). Формально, по-прежнему  $u(t) = \min(u_{AB}(t), u_{BA}(t)) \in \{0, 1\}$ . Но теперь состояние вершины игрока  $i$ :  $s_i(t) = (s_i^1(t), s_i^2(t)) \in \{0, 1\} \times \{0, k\}$ , где  $s_i^1(t)$  определяется как раньше, а вторая компонента  $s_i^2(t)$  «хранит память» о заключении договора за  $k$  предыдущих моментов времени:

$$s_i^2(t) = \begin{cases} s_i^2(t-1) - 1, & u(t-1) = 0 \\ k, & u(t-1) = 1. \end{cases}$$

При этом, опять же, устанавливаем начальные условия  $u(0) = 0$ ,  $s_i^2(0) = 0$ , предполагающие, что до начала игры игроки не заключали никаких договоров. Будем считать, что игрок  $i$  платит штраф  $c_i(t)$  при нарушении договора в момент  $t$ , если  $s_i^2(t) > 0$ . Тогда выигрыши игроков определяются так же, как и в предыдущей игре, с той разницей, что  $s_i^2(t) = u(t-1)$  заменяется на  $\min(s_i^2(t), 1) = \max_{\tau=t-k, \dots, t-1} u(\tau)$ . При этом для удобства записи установим начальные условия  $u(-1) = u(-2) = \dots = u(-k+1) = 0$ .

## 5.2. Абсолютные равновесия

Найдем абсолютные равновесия в этой игре, опять же, в каждый момент  $t$  рассматривая два случая  $s_i^2(t) = 0$  и  $s_i^2(t) > 0$  и проверяя, выгодно ли кому-нибудь из игроков разорвать связь при  $u(t) = 1$ .

На последнем,  $2n$ -м шаге, поскольку  $m_B p_B(2n) \leq c_B(2n)$ , игроку  $B$  выгодно остановить игру тогда и только тогда, когда  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-1} u(t) = 0$ , и в этом случае выигрыши игроков равны

$$\begin{aligned} val_A(0, 2n) &= (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) \\ val_B(0, 2n) &= (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i) + m_B p_B(2n). \end{aligned}$$

Если же  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-1} u(t) = 1$ , то  $B$  выгодно продолжить игру, так

что игроки получают выигрыши

$$s_A^2(2n) > 0 \Rightarrow val_A(s_A^2(2n), 2n) = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^n p_A(2i+1) + m_A p_A(2n+1)$$

$$s_B^2(2n) > 0 \Rightarrow val_B(s_B^2(2n), 2n) = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i).$$

На предпоследнем,  $(2n-1)$ -м шаге, если  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-1} u(t) = 0$ , то  $A$  получает

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - c_A(2n-1) \max_{t=2n-k-1, \dots, 2n-2} u(t),$$

остановив игру, и

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1),$$

продолжив ее. Следовательно, как и в случае с  $t = 2n$ , поскольку  $m_A p_A(2n-1) \leq c_A(2n-1)$ , игроку  $A$  выгодно остановить игру тогда и только тогда, когда  $\max_{t=2n-k-1, \dots, 2n-2} u(t) = 0$  (иначе говоря, с учетом предыдущего условия,  $\max_{t=2n-k-1, \dots, 2n-1} u(t) = 0$ ), и в этом случае выигрыши игроков равны

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - u(2n-2) c_A(2n-1)$$

$$H_B = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^{n-1} p_B(2i) + u(2n-2) c_A(2n-1).$$

Если  $\max_{t=2n-k-1, \dots, 2n-2} u(t) = 1$  (иначе говоря, с учетом предыдущего условия,  $u(2n-k-1) = 1$ ), то  $A$  выгодно продолжить игру, так что игроки получают выигрыши

$$H_A = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2n-1)$$

$$H_B = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i) + m_B p_B(2n).$$

Если же  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-1} u(t) = 1$ , то  $A$  получает все те же

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1) - c_A(2n-1) \max_{t=2n-k-1, \dots, 2n-2} u(t),$$

остановив игру, и

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1),$$

продолжив ее. Таким образом,  $A$  выгодно продолжить игру.

Но в этом случае важен и выбор игроков относительно связи  $u(2n-1)$ . Сравнив выигрыши  $A$  при  $u(2n-1) = 0$  и  $u(2n-1) = 1$ , видим, что  $A$  в любом случае не получит никакой выгоды от обрыва связи (ведь при этом величина  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-1} u(t)$  разве что уменьшится, что невыгодно игроку  $A$ ).

Игроку  $B$  выгодно оборвать связь в случае, когда  $A$  выгодно продолжить игру и при этом  $s_B^2(2n-1) \leq 1$ , т.е. когда при  $t = 2n-k, \dots, 2n-2$   $u(t) = 0$ . Если же существует такое  $t = 2n-k, \dots, 2n-2$ , что  $u(t) = 1$ , то  $B$  может и не обрывать связь, поскольку его равновесный выигрыш от этого не изменится. Если же  $A$  выгодно остановить игру, то состояние связи  $u(2n-1)$  не имеет значения, поскольку выигрыши игроков от него не зависят.

Таким образом, по сравнению с  $\Gamma_1$ , в  $\Gamma_k$  в подигре в развернутой форме  $\Gamma_k^{2n-1}$  на  $(2n-1)$ -м шаге появилось еще одно дополнительное равновесие – точнее, класс равновесий. Эти равновесия Парето-оптимальны в данной подигре. Они возможны при  $k \geq 2$  и достигаются при  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-2} u(t) = 1$  и любом  $u(2n-1)$ . При этом  $A$  продолжает игру, и равновесные выигрыши равны

$$s_A(2n-1) > 1 \Rightarrow$$

$$val_A(s_A(2n-1), 2n-1) = (q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1)$$

$$s_B(2n-1) > 1 \Rightarrow val_B(s_B(2n-1), 2n-1) = (q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i).$$

Аналогично, на  $j$ -м шаге, где  $2n-k \leq j \leq 2n-2$ , если  $\max_{t=2n-k, \dots, j} u(t) = 1$ , то обоим игрокам нет смысла разрывать связь, и они в равно-

весном случае продолжают игру. Отсюда получаем класс Парето-оптимальных абсолютных равновесий в подыгре в развернутой форме  $\Gamma_k^{2n-k}$ , при которых игра продолжается до конца. Если  $k \geq 2n$ , они являются абсолютными равновесиями в исходной игре  $\Gamma^k$  и, таким образом, решают поставленную задачу нахождения Парето-оптимальных абсолютных равновесий. Но при этом  $k$  должно быть достаточно большим, если  $n$  велико, что не всегда удобно. Попробуем найти Парето-оптимальные равновесия при меньших  $k$ .

Из условия  $\max_{t=2n-k, \dots, 2n-2} u(t) = 1$  следует, что существует такое минимальное  $j \in \{2n-k, \dots, 2n-2\}$ , что  $u(j) = 1$ . В этом случае  $\max_{t=2n-k, \dots, j} u(t) = 0$ , а значит, на  $j$ -м шаге у одного из игроков появляется возможность разорвать связь, чтобы в дальнейшем в некий момент до  $t = 2n$  завершить игру и не платить штраф.

Нас интересует случай, когда в  $\Gamma_k^j$  в любом равновесии одному из игроков выгодно на каком-то шаге завершить игру и при этом  $A$  получает выигрыш больше, чем

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^{n-1} p_A(2i+1) + m_A p_A(2n-1),$$

или  $B$  – больше, чем

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i).$$

В этом и только в этом случае в игре  $\Gamma_k^j$  ни одна ситуация, в которой игра продолжается до конца, не является абсолютным равновесием.

Чтобы игроку  $A$  было выгоднее на  $(2i+1)$ -м шаге завершить игру, чем все время ее продолжать, должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} & (q_A - m_A) \sum_{j=1}^{i-1} p_A(2j+1) + m_A p_A(2i-1) > \\ & > (q_A - m_A) \sum_{j=1}^{n-1} p_A(2j+1) + m_A p_A(2n-1), \end{aligned}$$

то есть

$$m_A(p_A(2i-1) - p_A(2n-1)) > (q_A - m_A) \sum_{j=i}^{n-1} p_A(2j+1),$$

более сильное, чем (2.1). Но это невозможно, поскольку мы предполагаем, что неравенство (2.1) не выполняется.

Чтобы игроку  $B$  было выгоднее на  $2i$ -м шаге завершить игру, чем все время ее продолжать, должно выполняться неравенство

$$(q_B - m_B) \sum_{j=1}^i p_B(2j) + m_B p_B(2i) > (q_B - m_B) \sum_{j=1}^n p_B(2j),$$

то есть

$$m_B p_B(2i) > (q_B - m_B) \sum_{j=i+1}^n p_B(2j)$$

откуда получаем

$$p_B(2i) > \frac{q_B - m_B}{m_B} \sum_{j=i+1}^n p_B(2j) \quad (5.1)$$

(в частности, всегда подходит случай  $i = n$ ).

Если субъективные цены  $p_B$  меняются не в геометрической прогрессии, множество моментов  $i$ , для которых выполняется неравенство (5.1), может быть устроено сколь угодно сложно. Предположим частный случай динамики цен:  $p_B(t) = p_{B0} e^{\lambda_B t}$ . Тогда неравенство (5.1) эквивалентно

$$\begin{aligned} p_{B0} e^{2i\lambda_B} &> \frac{q_B - m_B}{m_B} \sum_{j=i+1}^n p_{B0} e^{2j\lambda_B} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{2i\lambda_B} &> \frac{q_B - m_B}{m_B} e^{2(i+1)\lambda_B} \frac{e^{2(n-i)\lambda_B} - 1}{e^{2\lambda_B} - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow i &> n - \frac{1}{2\lambda_B} \ln \left( 1 + \frac{m_B}{q_B - m_B} (1 - e^{-2\lambda_B}) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, при  $j + k = 2i$ , откуда  $j = 2i - k$ , где для  $i$  соблюдается неравенство

$$i > n - \frac{1}{2\lambda_B} \ln \left( 1 + \frac{m_B}{q_B - m_B} (1 - e^{-2\lambda_B}) \right), \quad (5.2)$$

необходимое условие абсолютного равновесия в подыгре  $\Gamma_k^j$ : игроки после  $j$ -го шага не соблюдают договор, а  $A$  или  $B$  на  $(j + k)$ -м шаге завершает игру. Ведь, если  $B$  выгодно завершить игру, то абсолютное равновесие в подыгре достигается там, где любой игрок ее завершит, как только ему перестанет угрожать штраф за это. Если же для

$j = 2i - k$  неравенство (5.2) для  $i$  не выполняется, то необходимое условие абсолютного равновесия в подыгре  $\Gamma_k^j$ : игроки в какой-то момент  $j' \in \{2n - k, \dots, 2n - 2\}$  начали соблюдать договор ( $u(j') = 1$ ) и продолжают игру до конца (значения  $u(t)$  при  $t > j'$  могут быть любыми). В случае, когда  $j < 0$ , это эквивалентно тому, что  $u(t) = 0$  при любом  $t < j'$ .

Но является ли это условие достаточным? Ведь возможен еще вариант, когда игроку  $B$  выгодно нарушить равновесие до момента  $j'$ . Это выгодно, если существует такое  $i$ , что  $j' > 2i$ , где для  $i$  соблюдается неравенство (5.2). В этом случае ситуация, в которой игроки начали соблюдать договор в момент  $j'$ , не является абсолютным равновесием в  $\Gamma_k^j$ .

Если же  $j' \leq 2i$  для любого  $i$ , удовлетворяющего неравенству (5.2), то до момента  $j'$  игрокам невыгодно отклоняться от соблюдения договора и после него тоже, то есть ситуация, в которой игроки соблюдают договор до конца, действительно будет абсолютным равновесием в  $\Gamma_k^j$ . Это возможно, если

$$2n - k \leq j' \leq 2n - \max(T, 2),$$

где

$$T = \frac{1}{\lambda_B} \ln \left( 1 + \frac{m_B}{q_B - m_B} (1 - e^{-2\lambda_B}) \right). \quad (5.3)$$

Как ни удивительно, игроки в равновесном случае могут не заключать договор, предусматривающий штраф за нарушение, с начала и почти до самого конца игры – точнее, хотя бы до момента  $t = 2n - \max(T, 2)$ , где  $T$  определяется по формуле (5.3).

Таким образом, возможны 2 вида абсолютных равновесий в подыгре в развернутой форме  $\Gamma_k^j$ :

1. Предусматривающие, что игроки ходят до самого конца. Необходимое условие такого равновесия:  $u(j') = 1$ , где  $2n - k \leq j' \leq 2n - \max(T, 2)$ .
2. Предусматривающие, что в какой-то момент  $j'$  один из игроков завершает игру. Необходимые условия такого равновесия:

- (а) либо  $u(j) = 1$ , где  $2n - k - T < j < 2n - k$ , и после этого все время, вплоть до момента  $j' = j + k$ ,  $u(t) = 0$ ;

(b) либо  $j = 0$ ,  $u(0) = 0$ , и тогда игрок  $A$  завершает игру сразу.

В случае 1 это равновесие является абсолютным равновесием и в игре  $\Gamma_k$  в целом. Действительно, игрок  $A$ , как мы уже выяснили, не может улучшить свое положение. Игрок  $B$  мог бы его улучшить, лишь завершив игру после момента  $2n - T$ . Но при этом он, чтобы не платить штраф, должен сделать это либо до момента  $j'$ , либо после  $j' + k$ . Но до момента  $j'$  он не может этого сделать, поскольку  $j' \leq 2n - \max(T, 2)$ , а после момента  $j' + k$  — потому что  $j' + k \geq 2n$ .

Такое равновесие существует при условии  $k \geq \max(T, 2)$ .

В случае 2а) мы также получим абсолютное равновесие в игре  $\Gamma_k$ , поскольку, если в момент времени  $j + k$  ходит игрок  $B$ , ему выгодно завершить игру в какой-то момент времени до  $2n - T$ , и, рассуждая по индукции, получаем, что ему выгодно сделать это как можно раньше. Если ходит игрок  $A$ , ему выгодно завершить игру сразу, ибо иначе в следующий момент времени это сделает  $B$ .

Такое равновесие существует при условии  $T > 2$ .

В случае 2б) это уже готовое абсолютное равновесие в игре  $\Gamma_k$ . Оно существует всегда.

**Пример.** В начале мы рассмотрели игру  $\Gamma_1(50, 1, 3, 1, 0, 1, 3, 1, 0)$ . Цены  $p_A(t)$ ,  $p_B(t)$  в этой игре постоянны и равны 1. Введем постоянные штрафы, равные  $c_B(t) = m_B p_B(t) = 1$ ,  $c_B(t) = m_B p_B(t) = 1$  и договоры, растянутые на период  $k$ . Получим игру  $\Gamma_k(50, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1)$ . В ней  $T = \frac{2m_B}{q_B - m_B} = 1$ . При любом  $k \geq 2$  ситуация, в которой  $u(t) = 0$  вплоть до момента  $j'$ , где  $100 - k \leq j' \leq 100 - \max(T, 2) = 98$ , а  $u(j') = 1$ , является абсолютным равновесием. Действительно, до момента  $100 - T = 99$  ни  $A$ , ни  $B$  невыгодно завершать игру. Если же один из игроков разорвет договор в момент  $j'$ , то получится подыгра, в которой равновесие достигается при завершении игры сразу в момент  $j' + 1$ . Но, поскольку  $j' + 1 < 100$ , это отклонение невыгодно ни одному из игроков.

### 5.3. Равновесия в стратегиях наказания

Далее будем полагать  $k \geq 2$ , поскольку при  $k = 1$ , как мы уже выяснили, существует единственное равновесие, при котором  $A$  сразу

завершает игру. При подсчете максимина в момент  $t$ , согласно утверждению о максимине в динамической сетевой игре, можно предполагать, что  $u(\tau) = 0$  при  $\tau \geq t$ .

Ранее автор определил условия равновесия при отсутствии дисконта [4]: для этого необходимо и достаточно выполнения неравенств  $k \geq 2$  и

$$c_B \geq m_B p_B.$$

Рассмотрим теперь общий случай – с ценами и штрафами, меняющимися с течением времени.

Равновесий в стратегиях наказания в игре  $\Gamma_k$  довольно много (не меньше, чем абсолютных равновесий). Поэтому будем искать только парето-оптимальное равновесие, при котором игрокам выгодно довести игру до конца. Для этого максимин каждого игрока при завершении игры должен быть не больше выигрыша при ее продолжении. То есть, если ситуация равновесна, то максиминный выигрыш игрока  $A$  при любом отклонении от нее не больше

$$(q_A - m_A) \sum_{i=1}^n p_A(2i+1) + m_A p_A(2n+1) \quad (5.4)$$

а максиминный выигрыш игрока  $B$  – не больше

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2i). \quad (5.5)$$

Но выигрыш игрока  $A$ , если  $B$  не нарушает договор и не платит ему штраф, а неравенство (2.1) не выполняется, и не может быть больше (5.4). А при подсчете максимина мы предполагаем, что  $B$  не будет делать того, что может увеличить выигрыш  $A$ , а следовательно,  $A$  не получит максиминный выигрыш больше (5.4). Таким образом, условия равновесия для игрока  $A$  для парето-оптимальной ситуации выполняются всегда.

Проверим теперь условия равновесия для игрока  $B$ . Посчитаем его максиминный выигрыш  $m_B(t)$  при завершении игры в момент  $t$ . Если  $B$  завершает игру в момент  $2j$ , наступающий после окончания действия договора, то выигрыш  $B$  равен

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^j p_B(2i) + m_B p_B(2j).$$

Завершив игру в момент  $2j$  до окончания действия договора,  $B$  получает

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^j p_B(2i) + m_B p_B(2j) - c_B(2j),$$

что меньше (5.5), если

$$m_B p_B(2j) - c_B(2j) < (q_B - m_B) \sum_{i=j+1}^n p_B(2i)$$

а это всегда так, если выполняется условие (4.1). Если же это условие не выполняется,  $B$  выгодно оставить у себя продукцию в момент времени  $2n$ , получив выигрыш

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^n p_B(2n) + m_B p_B(2n) - c_B(2n).$$

Поскольку игрок  $A$  в этот момент уже никак не может ему помешать, игроку  $B$  при невыполнении условия (4.1) всегда невыгодно доводить игру до конца.

Если  $A$  завершает игру в момент  $2j+1 \geq t$  до окончания действия договора, то  $B$  получит

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^j p_B(2i) + c_A(2j+1).$$

Наконец, если  $A$  завершает игру после окончания действия договора, то  $B$  получит

$$(q_B - m_B) \sum_{i=1}^j p_B(2i),$$

то есть меньше равновесного значения (5.5).

Рассмотрим ситуацию, в которой игроки доводят игру до конца, причем  $u(t) = 1$  только в нечетные моменты времени, если  $k$  четное, или в четные моменты времени, если  $k$  нечетное. В остальные моменты времени  $u(t) = 0$ . Таким образом, поскольку  $k \geq 2$ , договор все время действует, и если  $B$  не разорвет договор, то при выполнении условия (4.1), завершив игру раньше времени, получит меньше равновесного значения (5.5). Если  $B$  разорвет договор в момент  $t$ , то

его действие истечет в момент  $t + k$ , а это нечетное число, и в этот момент ходит  $A$ . Тогда  $A$  завершит игру в момент  $t + k$ , и  $B$  опять получит меньше равновесного значения (5.5). Следовательно, данная ситуация является равновесием в стратегиях наказания.

## 6. Заключение

Построена модель динамического взаимодействия между фирмами  $A$  и  $B$ , пересылающих друг другу продукцию в объеме  $m_A$  и  $m_B$  и производящих на ее основе продукцию в объеме  $q_A$  и  $q_B$  с ценами  $p_A(t)$  и  $p_B(t)$ , зависящими от времени, при наличии функций дисконта. При отсутствии договоров между фирмами это взаимодействие описывается позиционной игрой, аналогичной известной игре «многonoжка».

Предполагается условие отсутствия обесценивания

$$m_i p_i(t) - m_i p_i(t + 2) < (q_i - m_i) p_i(t),$$

означающее, что, даже если цены на продукцию с учетом дисконта падают, это происходит медленнее, чем растет количество продукции в результате ее производства. Если это условие выполняется, то ситуация, в которой фирмы производят продукцию до последнего момента времени, не завершая игру досрочно, оптимальна по Парето.

В этой игре существует единственное неоптимальное по Парето равновесие, в котором фирмы сразу завершают взаимодействие. Но все меняется при добавлении добровольного договора между фирмами, действующего  $k$  моментов времени, при нарушении которого фирмы  $A$  и  $B$  платят штрафы в размере соответственно  $c_A(t)$  и  $c_B(t)$ , которые также зависят от времени с учетом функций дисконта.

В этом случае в игре существует равновесие в стратегиях наказания, в котором фирмы доводят взаимодействие до конца, при условии отсутствия обесценивания, а также условиях

$$\begin{aligned} k &\geq 2 \\ \forall j \ c_B(2j) &\geq m_B p_B(2j). \end{aligned}$$

При экспоненциальном росте субъективных цен 2-го игрока со скоростью  $\lambda_B$  существует абсолютное равновесие, в котором фирмы

доводят взаимодействие до конца, при условии отсутствия обесценивания, а также условиях

$$\begin{aligned} k &\geq 2 \\ \forall j \ c_B(2j) &\geq m_B p_B(2j) \\ k &\geq T = \frac{1}{\lambda_B} \ln \left( 1 + \frac{m_B}{q_B - m_B} (1 - e^{-2\lambda_B}) \right). \end{aligned}$$

Представляет интерес обобщение модели на число игроков больше 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. М. Мир, 1985.
2. Парфенов А.П. *Алгоритм нахождения равновесий в динамической сетевой игре* // Математическая теория игр и её приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 45–60.
3. Парфенов А.П., Малафеев О.А. *Равновесное и компромиссное управление в сетевых моделях многоагентного взаимодействия* // 39-й выпуск межвузовского сборника научных трудов «Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы». 2007. С. 154–167.
4. Парфенов А.П. *Равновесие в динамической модели координации двух фирм.* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. В печати.
5. Петросян Л.А, Кузютин Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость*. СПб.: издательство СПбГУ, 2002.
6. Семененко А.И., Сергеев В.И. *Логистика. Основы теории*. СПб: «Союз», 2001.
7. Aumann R.J. *On the Centipede Game* // Games and Economic Behavior. 1998. Vol. 23. P. 97–105.

8. Borstein G., Kugler T., Ziegelmeyer A. *Individual and group decisions in the centipede game : Are groups more "rational" players?* // Journal of Experimental Social Psychology. 2004. Vol. 40, no. 5. P. 599–605.
9. Jackson M.O., Wolinsky A. *A Strategic Model of Social and Economics Networks* // J. Econom. Theory. 1996. Vol. 71. P. 44–74.
10. Kranton R.E., Minehart D.F. *A Theory of Buyer-Seller Networks* // Dutta B., Jackson M.O. (eds) *Networks and Groups. Studies in Economic Design*. Springer, Berlin, Heidelberg. 2003.
11. Rosenthal R. *Games of Perfect Information, Predatory Pricing, and the Chain Store* // Journal of Economic Theory. 1981. Vol. 25 (1). P. 92–100.

## EQUILIBRIA IN A DYNAMIC MODEL OF TWO FIRMS COORDINATION WITH NON-FIXED PRICES

**Andrey P. Parfyonov**, Saint-Petersburg State University, Faculty of applied mathematics and control processes, Institute for Problems of Regional Economics RAS, Cand.Sc. (keldoor@gmail.com).

*Abstract:* Model of 2 companies' interaction is considered. Companies exchange two kinds of goods with each other. These goods also can be sold on the market. Prices of goods change over time. Iteration is modelled by positional game which is similar to Rosental's Centipede game. Conditions for a contract beetween companies are found. For these conditions, companies can't violate a contract because it is unprofitable for them. Such conditions are modelled by Nash equilibriua in a positional game. We found that sufficient conditions for contract: it renews each 2 points of time; each company pays rather big fine if it refused to transfer good to another company.

*Keywords:* dynamic games, network games, supply chains, Nash equilibrium.