Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.3, с. 58–74

УДК 519.83
ББК 22.18

КАРТОЧНАЯ ИГРА «ТЕССЕРАКТ»

Максим А. Савченко
Факультет вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: pdunan@gmail.com

В работе описывается новая карточная игра для четверых участников, которая требует от них принятия решений в условиях информационной асимметрии, проистекающей из присутствия у каждого хода игроков тайного компонента. Демонстрируется существенность информационной асимметрии для исхода игры и освещаются перспективы её анализа.

Ключевые слова: карточные игры, несовершенная информация, иерархии вер, коррелированные стратегии.

Поступила в редакцию: 21.01.21 *После доработки*: 24.03.21 *Принята к публикации*: 01.09.21

1. Введение

Многие карточные игры благодаря сочетанию относительной простоты правил и сложности эффективных стратегий давно вызывают интерес у математиков. Главной особенностью, отличающей их от большинства других азартных интеллектуальных развлечений, очевидно, является заведомая неполнота информации, находящейся в распоряжении участников. Каждый игрок использует против своих оппонентов не только свою руку, но и тот факт, что им приходится догадываться, какие именно карты он имеет возможность сыграть. Это обстоятельство делает карточные игры прекрасным материалом для анализа влияния, оказываемого информационными асимметриями на антагонистические и неантагонистические конфликты, ярчайшим примером чему может служить повальное увлечение покером в среде классиков теории игр. Знаменитая теорема о минимаксе была впервые сформулирована и доказана Джоном фон Нейманом в статье «К теории салонных игр» [7], вдохновлённой его поисками формальной модели покерного блефа. Позднее Джон Нэш и Ллойд Шепли также посвятили статью анализу равновесий в упрощённой версии покера для трёх игроков [8]. Томас Фергюсон в соавторстве со своим сыном Крисом (звездой турнирного покера международного масштаба) написал несколько статей [4–6], использование результатов которых в реальной игре принесло Крису 6 чемпионских титулов и почти 9 миллионов долларов суммарного выигрыша. Впрочем, не одним только покером развлекаются математики – немало усилий было ими потрачено также на формализацию моделей преферанса и блэкджека. В учебном пособии В.В. Мазалова [1] глава 5 посвящена доступному изложению основ анализа этих и других азартных игр. Там же можно найти и обзор литературы для более глубокого погружения в вопрос.

В этой статье, однако, не планируется подвергать подобному анализу известные игры – вместо этого здесь будет описана новая под названием «Тессеракт», созданная автором в ходе работы над формальной моделью многосторонних конфликтов с информационными асимметриями специального вида. Не смотря на то, что правила «Тессеракта» разрабатывались скорее в целях иллюстрирования этой модели, хотелось бы надеяться, что некоторые из читателей найдут в нём ещё и азартное развлечение для компании друзей.

2. Правила

Для игры в тессеракт необходимы:

- 4 игрока;
- преферансная колода (4 масти с достоинствами от семёрки до туза, всего 32 карты);
- фишки или иной способ подсчёта очков;
- игрокам, только знакомящимся с игрой, поначалу может быть полезна распечатка диаграммы на рис. 1.

Игра состоит из любого (заранее обговорённого и/или по достижении лимита выигрышей/проигрышей) числа независимых раздач.

Результатом одной раздачи может стать перераспределение между игроками (с нулевой суммой) некоторого количества фиксированных ставок. Ни один игрок не может проиграть или выиграть более 3 ставок за раздачу.

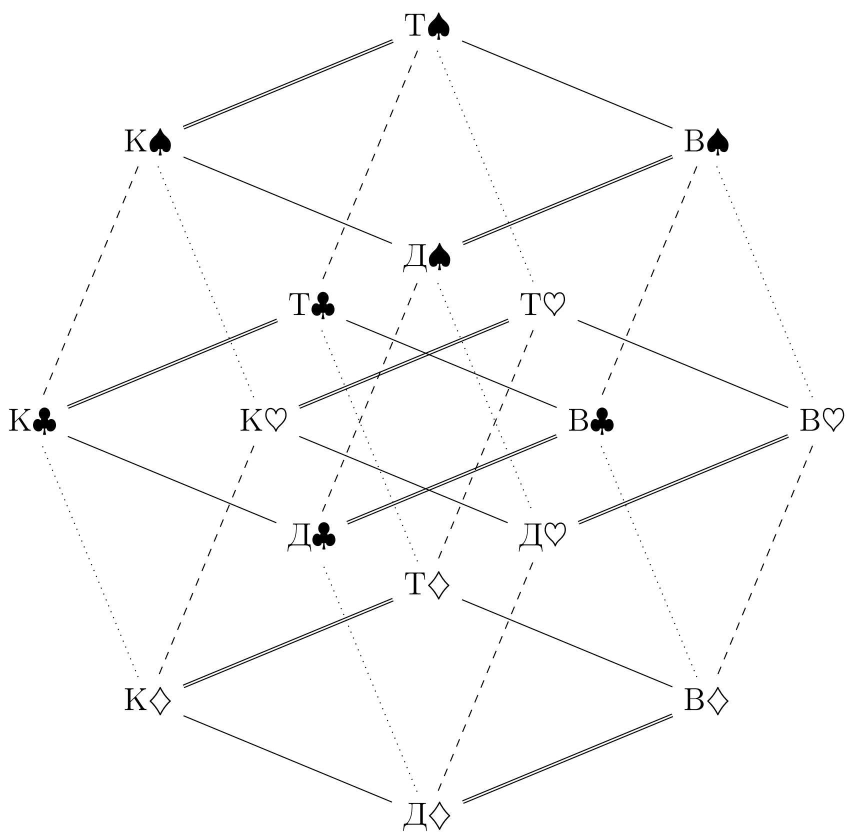

Рисунок 1. Тессеракт парных карт

Раздача начинается с деления колоды на старшие (В, Д, К, Т) и младшие (7, 8, 9, 10) карты.[1] Старшая колода перемешивается и сдаётся игрокам в открытую (лицом вверх), по 4 карты каждому.

[1]Можно перемешивать и раздавать колоду целиком, не разделяя, по 8 карт каждому лицом вверх, однако в таком случае будут нередко случаться расклады, существенно благоволящие одним игрокам в ущерб другим. Например, если кому-либо будет сдана рука из одних только младших карт, то он фактически превратится в болванчика, не имеющего возможности влиять на исход игры вообще. Игрок с одной старшей картой в руке, хотя и будет иметь возможность один раз за розыгрыш повлиять на игровую ситуацию, не сможет совершать тайных

Младшая колода раздаётся без перемешивания (тут масти и достоинства не имеют значения), также по 4 карты на игрока. После того как все увидели расклад, каждый игрок подбирает сданные ему старшие и младшие карты, объединяя их в закрытой руке. После этого начинается розыгрыш, состоящий из четырёх кругов.

В течение каждого круга ходов игроки должны в произвольном порядке совершить по два действия: а) сыграть одну карту перед собой рубашкой вверх и б) сбросить одну карту в общую стопку сброса рубашкой вверх. После того как все закончат, сыгранные (но не сброшенные) карты раскрываются. По завершении всех четырёх кругов у игроков не остаётся карт в руках, перед каждым лежат лицом вверх по 4 сыгранные карты, и подводится итог розыгрыша. Каждый игрок должен сосчитать вскрытые непарные карты и, соответственно, свой штраф.

С точки зрения каждого игрока 16 старших карт по своему разбиваются на 8 пар. Способ разбиения определяется в зависимости от его порядкового номера за столом:

1. парны валеты и дамы одной масти, парны короли и тузы одной масти;

2. парны трефы и пики одного достоинства, парны червы и бубны одного достоинства;

3. парны пики и червы одного достоинства, парны бубны и трефы одного достоинства;

4. парны валеты и тузы одной масти, парны дамы и короли одной масти.

На рис. 1 парность карт для разных игроков обозначена линиями различной штриховки. При этом легко заметить, что 16-ти старшим картам можно поставить в соответствие вершины четырёх-мерного гиперкуба (отсюда название «Тессеракт») таким образом, что для

от других игроков осмысленных ходов, что сделает его стратегию более предсказуемой, и т.д.. Впрочем, если участники готовы мириться с усилением элемента случайности в игре, то подобный «ленивый» способ раздачи использовать не возбраняется.

каждого игрока отношение парности соответствует своему набору параллельных рёбер.

В контексте подсчёта штрафов непарной картой для игрока считается вскрытая старшая карта, не образующая по его правилам пары с другими вскрытыми картами. Штраф игрока считается по формуле $|2l - 8|$, где l – количество непарных с его точки зрения карт. Желающему избежать штрафа игроку следует ходить таким образом, чтобы к концу розыгрыша было сыграно ровно 4 непарные для него карты, так как каждая карта отклонения в большую или меньшую сторону увеличивает его штраф на 2. Средний штраф определяется как среднее арифметическое суммарных штрафов каждого из игроков. При окончательном расчёте игроки, чей штраф больше среднего, вносят в банк фишки кол-ом равным разнице между своим штрафом и средним. Те же игроки, чей штраф меньше среднего, наоборот, забирают из банка разницу между средним и своим штрафами.

3. Пример расклада

Поскольку младшие карты не используются при подсчёте штрафов, начальная раздача определяется раскладом старших карт:

Таблица 1.

Игрок	Рука			
1	В$\diamondsuit$	Д$\clubsuit$	К$\clubsuit$	Т$\clubsuit$
2	К$\spadesuit$	К$\heartsuit$	К$\diamondsuit$	В$\clubsuit$
3	Д$\spadesuit$	В$\heartsuit$	Д$\heartsuit$	Д$\diamondsuit$
4	В$\spadesuit$	Т$\spadesuit$	Т$\heartsuit$	Т$\diamondsuit$

Дальнейший процесс разыгрывания можно записать в таблице следующего вида:

Таблица 2.

Игрок	Круги ходов							
	1		2		3		4	
1	Д$\clubsuit$	Т$\clubsuit$				К$\clubsuit$		В$\diamondsuit$
2	К$\spadesuit$			В$\clubsuit$		К$\heartsuit$	К$\diamondsuit$	
3	В$\heartsuit$		Д$\diamondsuit$			Д$\heartsuit$	Д$\spadesuit$	
4	Т$\heartsuit$		Т$\diamondsuit$		Т$\spadesuit$			В$\spadesuit$

Здесь, опять же, младшие карты не показаны в силу их неразличимости с точки зрения правил, на белом фоне показаны сыгранные старшие карты, а на сером – сброшенные. Например, первый игрок на первом круге сыграл перед собой даму треф и сбросил туза треф, на втором круге сыграл и сбросил по младшей карте и т.д.. Посчитаем непарные карты с точки зрения каждого из игроков, записывая в скобках соответствующую сброшенную парную карту:

1. Д♣ (В♣), В♡ (Д♡), Т♡ (К♡), Д♢ (В♢), Д♠ (В♠)
2. К♠ (К♣), В♡ (В♢), Д♢ (Д♡), Т♠ (Т♣), К♢ (К♡)
3. К♠ (К♡), В♡ (В♠), Т♢ (Т♣), К♢ (К♣), Д♠ (Д♡)
4. Д♣ (К♣), Т♢ (В♢), Т♠ (В♠)

У первого игрока из 9 вскрытых карт 4 образуют пары: К♢-Т♢ и К♠-Т♠. Остаются 5 непарных карт, что соответствует $|2 \cdot 5 - 8| = 2$ очкам штрафа. Повторив ту же процедуру для остальных игроков, можно дополнить таблицу столбцом штрафов:

Таблица 3.

Игрок	Круги ходов								Штраф
	1		2		3		4		
1	Д♣	Т♣				К♣		В♢	2
2	К♠			В♣		К♡	К♢		2
3	В♡		Д♢			Д♡	Д♠		2
4	Т♡		Т♢		Т♠			В♠	2

Штрафы всех игроков равны, а значит никто никому не платит.

4. Формальная модель

С формальной точки зрения каждый расклад «Тессеракта» можно представить в виде игры развёрнутой формы с несовершенной информацией. Дерево игры имеет фиксированную высоту в 32 ребра от корня до каждой из терминальных вершин и разбивается на 4 слоя по 8 рёбер в высоту каждый, соответствующих кругам розыгрыша. Каждая вершина характеризуется набором параметров $\langle i, a, T, H \rangle$:

- $i = 1 \dots 4$ – номер слоя/круга;
- $a = 1 \dots 4$ – номер игрока с правом хода;
- $T = (T^1, T^2, T^3, T^4)$ – множества старших карт, сыгранных к этому моменту на каждом круге;
- $H = (H^1, H^2, H^3, H^4)$ – множества старших карт, оставшихся к этому моменту в руках игроков.

Нетерминальные вершины бывают двух типов - для игры и для сброса. В игровой вершине слоя i игрок a с правом хода может переместить один любой элемент из множества H^a в множество T^i (при непустоте H^a). В вершине для сброса же, соответственно, игрок a может исключить из H^a один любой элемент. Кроме того в вершинах обоего типа игрок с правом хода, в том случае если количественно оставшихся у него ходов включая текущий больше чем старших карт в руке, может ничего не менять, что соответствует игре или сбросу младшей карты. Легальная цепочка ходов в каждом слое дерева включает по одной вершине обоих типов для каждого из игроков. При этом информационные наборы таковы, что вершины одного типа $\langle i_1, a_1, T_1, H_1 \rangle$ и $\langle i_2, a_2, T_2, H_2 \rangle$ входят в один набор в том и только том случае, когда $i_1 = i_2$, $a_1 = a_2$, $T_1^k = T_2^k, \forall k < i$ и $H_1^a = H_2^a$. Такая информационная структура отражает то, что в рамках одного круга карты играются всеми соперниками сперва в закрытую, а раскрываются только после того, как все завершили сброс, фактически делая несущественным порядок ходов внутри каждого слоя.

Для терминальных вершин из этого набора параметров выводится единственный имеющий смысл для определения выплат – множество всех сыгранных старших карт $T^* = T^1 \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$. Если обозначить символом $\mathcal{D}^a(T^*)$ операцию исключения из множества сыгранных карт парных с точки зрения игрока a, то вектор штрафов приобретает вид $f = (f^1, f^2, f^3, f^4), f^a = |2\,|\mathcal{D}^a(T^*)| - 8|$. Соответственно выводится вектор выплат $u = (u^1, u^2, u^3, u^4), u^a = \frac{1}{4}(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) - f^a$. С использованием всего этого теоретически возможно построение полного дерева любого расклада, однако при помощи элементарного комбинаторного рассуждения можно подсчитать, сколько всевозможных партий можно сыграть на одной раздаче

– $(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)^4 \approx 8 \cdot 10^{12}$. Хотя в эпоху современной вычислительной техники 8 триллионов – уже не настолько пугающее число, подобные экзерсисы выходят за рамки данной статьи.

Во избежание вскрывшегося комбинаторного взрыва множество стратегий любого игрока a можно представить в виде пространства всевозможных комбинаций четырёх элементов $S^a = S_1^a \times S_2^a \times S_3^a \times S_4^a$, по одному на каждый круг ходов. Каждая компонента $s_i^a \in S_i^a$ представляет собой произвольную функцию, берущую аргументами текущую руку H^a и все предыдущие сыгранные круги $T^k, k < i$ и возвращающую пару карт $(p, d \in H^a \cup \{\varnothing\})$, где p обозначает карту для игры, d – карту для сброса, а $\varnothing$ – произвольную младшую карту. Понятное дело, если обе карты старшие, то они должны быть различны, а младшие карты можно использовать, только если их ещё хватает в руке. Естественно сразу задаться вопросом, а нельзя ли для этой игры подобрать какое-то более простое представление с совершенной информацией – вдруг закрытость сброса не имеет большого значения для хода игры? Опровергнем это на примере того же розыгрыша из предыдущего раздела, обратив внимание только на последний круг ходов, представимый в виде обычной игры в нормальной форме:

Таблица 4.

Игрок	Круги ходов								Штраф
	1		2		3				
1	Д♣	Т♣				К♣			
2	К♠			В♣		К♡			
3	В♡		Д♢			Д♡			
4	Т♡		Т♢		Т♠				

Таблица 5.

s^1 $u^1(s)$	s^2 $u^2(s)$	s^3 $u^3(s)$	s^4 $u^4(s)$
∅ 0	∅ 0	∅ 0	∅ 0
∅ -1	∅ -1	∅ -1	В♠ +3
∅ -3	∅ +1	Д♠ +1	∅ +1
∅ 0	∅ 0	Д♠ 0	В♠ 0
∅ +1	К♢ -3	∅ +1	∅ +1
∅ +1	К♢ -3	∅ +1	В♠ +1
∅ 0	К♢ 0	Д♠ 0	∅ 0
∅ +2	К♢ -2	Д♠ +2	В♠ -2
В♢ 0	∅ 0	∅ 0	∅ 0
В♢ 0	∅ 0	∅ 0	В♠ 0
В♢ 0	∅ 0	Д♠ 0	∅ 0
В♢ +1	∅ +1	Д♠ +1	В♠ -3
В♢ 0	К♢ 0	∅ 0	∅ 0
В♢ +2	К♢ -2	∅ +2	В♠ -2
В♢ +2	К♢ +2	Д♠ -2	∅ -2
В♢ +1	К♢ +1	Д♠ +1	В♠ -3

Рассмотрим расклад, когда у всех на руках осталось по две карты (таблица 4), как игру в нормальной форме $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A\rangle$. Здесь $A = \{1,2,3,4\}$, $S^1 = \{\varnothing, \text{В}\diamondsuit\}$, $S^2 = \{\varnothing, \text{К}\diamondsuit\}$, $S^3 = \{\varnothing, \text{Д}\spadesuit\}$, $S^4 = \{\varnothing, \text{В}\spadesuit\}$, а использование игроком стратегии s^a подразумевает, что карту s^a он играет, а оставшуюся сбрасывает. В таблице 5 перечислены значения функции выплат для всех сочетаний чистых стратегий, а серым выделено единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Если предполагать, что сокрытая от игроков информация не имеет значения, то разумно ожидать, что в любых альтернативных раскладах с совпадающим публичным знанием также будет существовать равновесие по Нэшу, разнящееся с этим только, возможно, стратегией знающего об отличии игрока. Продемонстрируем противоположное на слегка модифицированном розыгрыше, отличающемся от приведённого выше только лишь тем, что на третьем круге первый игрок сбросил В$\diamondsuit$ вместо К$\clubsuit$:

Таблица 6.

Игрок	Круги ходов								Штраф
	1		2		3				
1	Д$\clubsuit$	Т$\clubsuit$				В$\diamondsuit$			
2	К$\spadesuit$			В$\clubsuit$		К$\heartsuit$			
3	В$\heartsuit$		Д$\diamondsuit$			Д$\heartsuit$			
4	Т$\heartsuit$		Т$\diamondsuit$		Т$\spadesuit$				

В результате такого изменения множество доступных на последнем круге первому игроку стратегий превращается в $S^1 = \{\varnothing, \text{К}\clubsuit\}$, что даёт другую таблицу исходов:

Таблица 7.

s^1 $u^1(s)$	s^2 $u^2(s)$	s^3 $u^3(s)$	s^4 $u^4(s)$
$\varnothing$ 0	$\varnothing$ 0	$\varnothing$ 0	$\varnothing$ 0
$\varnothing$ -1	$\varnothing$ -1	$\varnothing$ -1	В♠ +3
$\varnothing$ -3	$\varnothing$ +1	Д♠ +1	$\varnothing$ +1
$\varnothing$ 0	$\varnothing$ 0	Д♠ 0	В♠ 0
$\varnothing$ +1	К♢ -3	$\varnothing$ +1	$\varnothing$ +1
$\varnothing$ +1	К♢ -3	$\varnothing$ +1	В♠ +1
$\varnothing$ 0	К♢ 0	Д♠ 0	$\varnothing$ 0
$\varnothing$ +2	К♢ -2	Д♠ +2	В♠ -2
К♣ -3	$\varnothing$ +1	$\varnothing$ +1	$\varnothing$ +1
К♣ -3	$\varnothing$ +1	$\varnothing$ +1	В♠ +1
К♣ -3	$\varnothing$ +1	Д♠ +1	$\varnothing$ +1
К♣ -2	$\varnothing$ +2	Д♠ +2	В♠ -2
К♣ 0	К♢ 0	$\varnothing$ 0	$\varnothing$ 0
К♣ 0	К♢ 0	$\varnothing$ 0	В♠ 0
К♣ -2	К♢ +2	Д♠ +2	$\varnothing$ -2
К♣ +1	К♢ +1	Д♠ +1	В♠ -3

В этой игре также присутствует одно равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, однако оно отличается от предыдущего ходами не только первого, но и третьего игроков, что говорит о существенности сброса в закрытую.

5. Тессеракт-n

Анализ «Тессеракта» в вышеописанном виде на первый взгляд представляется весьма непростым делом, даже в рамках поиска хотя бы одного равновесного набора стратегий в любом раскладе на наш выбор. Чтобы подобраться к решению этой проблемы ближе, имеет смысл попробовать итеративный метод – рассматривать заключительные круги ходов как обособленные подыгры основной игры, игнорируя информационную асимметрию, накопившуюся к их началу. Назовём «Тессерактом-n» ситуацию, складывающуюся после первых n кругов любого розыгрыша при допущении, что игроки знают содержимое накопившегося к этому моменту сброса. Очевидно, что «Тессеракту-0» соответствует игра целиком, а «Тессеракту-4» – только подсчёт штрафов в законченном розыгрыше. «Тессеракт-3» представляет собой простую игру в нормальной форме, поиск решений в которой тривиален, что и использовалось в иллюстративных целях выше.

Следующая по сложности задача в этой последовательности – «Тессеракт-2», анализ которой уже затрудняется несовершенством информации после сброса карт в третьем круге. Не пытаясь пока решить «Тессеракт-2» в общем виде, попробуем хотя бы сконструировать искусственный пример, являющийся представителем узкого класса вырожденных, легко разрешимых случаев. Рассмотрим специально подобранный расклад:

Таблица 8.

Игрок	Рука			
1	В♠	Т♠	К♡	Д♣
2	К♢	Т♢	К♣	Т♣
3	В♡	Т♡	В♢	В♣
4	Д♠	К♠	Д♡	Д♢

и предположим, что игроки договорились на первых двух кругах сыграть свои карты следующим образом:

Таблица 9.

Игрок	Круги ходов								Штраф
	1		2						
1	К♡		Т♠						
2	К♣		Т♢						
3	В♣		В♡						
4	Д♠		Д♢						

Сыгранный здесь набор содержит ровно по одной карте из каждой пары каждого игрока. Это значит, что каждая из оставшихся на руках старших карт с точки зрения любого из игроков является парной к какой-либо из уже сыгранных. Таким образом, рассматривая эту ситуацию как «Тессеракт-2», мы обнаруживаем, что на столе лежат 8 непарных карт для каждого из игроков, и любая сыгранная в дальнейшем карта уменьшает это количество на 1 для всех игроков одновременно. Как бы они ни действовали на оставшихся кругах, штрафы будут оставаться равными, а выплаты нулевыми, что делает равновесным любой набор стратегий. Естественно сразу задаться вопросом, легко ли встретить подобную ситуацию в реальной игре. Отрицательный ответ вытекает из следующего:

Утверждение 5.1. *Существует единственное разбиение множества старших карт на два подмножества таким образом, что не найдётся пары карт, целиком входящей в одно из них.*

Доказательство следует из единственности раскраски вершин гиперкуба в два цвета. Искомые подмножества:

- $\{Д\spadesuit, Т\spadesuit, В\heartsuit, К\heartsuit, Д\diamondsuit, Т\diamondsuit, В\clubsuit, К\clubsuit\}$
- $\{В\spadesuit, К\spadesuit, Д\heartsuit, Т\heartsuit, В\diamondsuit, К\diamondsuit, Д\clubsuit, Т\clubsuit\}$

Назовём карты из первого подмножества *чётными*, а второго – *нечётными*. Таким образом, каждая пара любого игрока состоит из чётной и нечётной карт. Теперь можно заметить, что ситуация в таблице 9 стала возможна благодаря раздаче каждому игроку по 2 чётные и 2 нечётные карты, что позволило сыграть на первых кругах все чётные карты (можно было с тем же успехом играть и все нечётные, по соображениям симметрии). Зафиксируем это в виде формального утверждения:

Лемма 5.1. *Если на первых двух кругах были одновременно сыграны (или одновременно сброшены) все чётные (или все нечётные) карты, то любой набор стратегий «Тессеракта-2» является решением с нулевыми выплатами.*

Доказательство. Очевидно следует из соображений симметрии. □

Легко заметить, что, хотя подобное вырожденное начало розыгрыша теоретически возможно, оно требует как относительно редкого, специально подобранного расклада, так и согласованных действий всех игроков. Можно ли выделить для «Тессеракта-2» более широкий класс розыгрышей, гарантированно имеющих точки равновесия по Нэшу в чистых стратегиях (а значит не требующих учёта информационной асимметрии), пока сказать сложно. Увы, во всех проверенных автором статьи кандидатах на роль такого класса были алгоритмически найдены не имеющие таких тривиальных решений представители. Если же говорить о заведомо более сложном «Тессеракте-1» (и тем более «Тессеракте-0»), то на данный момент нет никаких причин ожидать, что для них будет найден хотя бы один расклад, имеющий простое решение в рамках классических моделей теории игр. Окажется ли плодотворным предложенный итеративный подход покажет время.

6. Перспективы анализа

В большинстве распространённых карточных игр асимметрия знаний игроков возникает в результате получения ими приватной информации о случайном эксперименте – раздачи в закрытую перетасованной колоды и/или добора из неё карт в процессе игры. «Тессеракт» отличается от них тем, что процесс перетасовки колоды не создаёт неопределённости в оценке игроками расклада, так как раздача происходит лицом вверх. В тот момент, когда игроки забирают карты в руку чтобы начать первый круг розыгрыша, вся информация о доступных игрокам стратегиях и выплатах в случае реализации их сочетаний является их общим знанием. Такая ситуация в начале розыгрыша обычно нехарактерна для карточных игр, что роднит «Тессеракт» скорее с шашками или го. Кроме того, поскольку колода раздаётся целиком, дальнейший ход розыгрыша уже зависит исключительно от действий игроков, вовсе не имея объективно случайного компонента. Следует также вспомнить о классическом способе разрешения конфликтов – игре «камень-ножницы-бумага», с которой «Тессеракт» объединяет фактическая одновременность принятия решений игроками в рамках каждого круга ходов, поскольку по порядку действий они сначала играют карты рубашкой вверх, делают сброс и только после этого раскрывают сыгранные карты. Сброс при этом остаётся закрытым и создаёт информационную асимметрию на последующих кругах раздачи, заставляя игроков принимать решения, опираясь на предположения о том, какие карты оппоненты оставили в руках.

Такое не слишком распространённое сочетание свойств делает «Тессеракт» нетривиальной целью для формального анализа. Как было продемонстрировано выше, представление в виде игры развёрнутой формы не разбивается на подыгры из за несовершенства информации, а значит, даже не смотря на вполне обозримое конечное пространство игровых ситуаций, стандартные рекурсивные алгоритмы поиска равновесных сочетаний стратегий оказываются не применимы. Возможно, помочь в решении «Тессеракта» могли бы модели эпистемической теории игр (или, как это чаще называют по-русски, модели рефлексии [2]), однако на этом пути возникает ещё одно препятствие. Проблема в том, что иерархии вер в конфликтах с более чем двумя сторонами дают экспоненциальный рост количества «фантомных агентов» в зависимости от уровня иерархии (предположение игрока a_1 о предположении игрока a_2 ... о стратегии игрока a_n). В такой ситуации, если не удастся обосновать существование в игре достаточно малого максимального целесообразного ранга рефлексии, решения на основе эпистемических моделей окажутся под сомнением просто в силу того, что реальные игроки за карточным столом очевидно не могут в уме оперировать слишком сложными иерархиями вер.

Со своей же стороны автор надеется на то, что «Тессеракт» в дальнейшем может послужить в качестве иллюстрации для «теории заговоров» [3] – нового расширения игр в нормальной форме, позволяющего рассуждать о равновесных наборах стратегий в условиях, когда некоторые группы игроков имеют возможность необязывающе согласовывать свои действия втайне от остальных, причём в некоторых случаях равновесных не только в смысле Нэша, но и в более узком, учитывающем коллективную рациональность в группах заговорщиков. Хотя к моменту написания этой статьи ещё фактически не проводились хоть сколько-то масштабные испытания «Тессеракта» на живых участниках, интуиция подсказывает, что по мере роста опыта игроков важное значение начнёт принимать именно умение действовать совместно, в зависимости от расклада, с тем или иным оппонентом, оставаясь при этом непредсказуемым для остальных.

A. Использованные карточные термины

- *Лицо* – сторона карты с обозначением её достоинства и масти. В колоде обычно нет карт с одинаковым лицом.

- *Рубашка* – сторона карты без идентифицирующих элементов. В колоде все карты имеют одинаковые рубашки.

- *Рука* – набор карт, находящихся в распоряжении игрока и известный ему, но не его оппонентам. Формируется в процессе *раздачи* и постепенно уменьшается вплоть до опустения в течение её розыгрыша. При совершении хода из своей *руки* игрок выбирает карты для *игры* и *сброса*.

- *Раздача* – процесс перемешивания колоды и случайного формирования *рук* игроков. Совокупность розданных *рук* до начала первого хода называется *раскладом*. Розыгрыш *раздачи* или *расклада* обозначает последующую серию ходов вплоть до опустения *рук* всех игроков.

- *Сыгранные* карты – те, что в результате хода переместились из руки игрока на стол *лицом* вверх. Известны всем игрокам.

- *Сброшенные* карты – те, что в результате хода переместились из руки игрока на стол *рубашкой* вверх. Известны только сбрасывавшему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения.* СПб: Издательство «Лань», 2016.
2. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексивные игры.* М.: СИНТЕГ, 2003.
3. Савченко М.А. *Нормативная теория заговоров* // МТИиП. 2020. Т. 12, вып. 1. С. 33–59.
4. Ferguson T.S., Ferguson C. *On the Borel and von Neumann Poker Models* // Game Theory and Applications. 2003. Vol. 9. P. 17–32.
5. Ferguson T.S., Ferguson C. *The Endgame in Poker* // Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling. 2007. P. 79–106.
6. Ferguson T.S., Ferguson C., Gawargy C. *U(0,1) Two-Person Poker Models* // Game Theory and Applications. 2007. Vol. 12. P. 17–37.
7. Nash J.F., Shapley L.S., Bohnenblust H.F. *A Simple Three-Person Poker Game* // Contributions to the Theory of Games. 1950. Vol. 1. P. 105–116.
8. Neumann J. von *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* // Mathematische Annalen. 1928. Vol. 100. P. 295–320.

«TESSERACT», THE CARD GAME

Maxim A. Savchenko, MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Cand.Sc. (pdunan@gmail.com).

Abstract: Article describes new card game for 4 players, that requires from its participants decisions, made in presence of information asymmetry arising from secret component of players' every move. Significance for outcome of information asymmetry is demonstrated, and overview of potential lines of research in game analysis is given.

Keywords: card games, imperfect information, hierarchies of beliefs, correlated strategies.