Математическая Теория Игр и её Приложения, т.13, в.3, с. 75–121

УДК 519.833.2+519.853.6
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ СХЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ВОГНУТЫХ ИГРАХ

Андрей В. Чернов
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Рассматриваются конечномерные вогнутые игры – бескоалиционные игры многих лиц с функционалами выигрышей, вогнутыми по «своим» переменным. Для таких игр исследуется проблема разработки итерационных агоритмов поиска равновесий по Нэшу с гарантированной сходимостью без требований гладкости, а также выпуклости (слабой выпуклости, квазивыпуклости и т.п.) по «чужим» переменным функционалов выигрышей. При этом доказывается утверждение, аналогичное теореме о сходимости M-фейеровского итерационного процесса для случая, когда оператор не выводит из конечномерного компакта, а близость к целевому множеству измеряется с помощью непрерывной функции произвольного вида. Далее на его основе обобщается и развивается подход к решению вогнутых игр, предложенный автором ранее и представляющий (в некотором смысле) нечто среднее между релаксационным алгоритмом и методом конфигураций Хука–Дживса (но с учетом специфики минимизируемой функции невязки). Приводятся результаты численных экспериментов и их обсуждение.

Ключевые слова: конечномерная вогнутая игра со многими участниками, равновесие по Нэшу, итерационный алгоритм поиска.

Поступила в редакцию: 07.12.20 *После доработки*: 26.04.21 *Принята к публикации*: 01.09.21

1. Введение

В работе [17] был представлен подход, позволяющий свести проблему поиска равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, к проблеме поиска равновесия по Нэшу в конечномерных бескоалиционных играх многих лиц с непрерывными функционалами выигрышей игроков, вогнутыми по «своим» переменным. Что касается практического решения таких игр, то, как указано в [18], основная проблема здесь в том, что функции выигрышей в редуцированной игре выступают в роли своего рода «черного ящика»: мы имеем возможность вычислять их значения, но не обладаем явными аналитическими формулами, которые их определяют (имеются лишь формулы, содержащие решение краевой задачи, связанной с системой дифференциальных уравнений, зависящей от управляемых параметров). При некоторых дополнительных требованиях относительно входных параметров задачи можно, вообще говоря, гарантировать дифференцируемость указанных функций. Однако процедура вычисления градиентов будет сложной, трудоемкой и многоэтапной, в результате чего будет происходить быстрое накопление погрешности при их вычислении. Все это делает проблематичным использование алгоритмов первого и более высоких порядков.

Вогнутые игры вообще часто появляются как удобная математическая формализация тех или иных практических постановок – см., например, раздел 8. Кроме того, они возникают также как подыгры или как один из возможных форматов описания при исследовании игр более сложного вида, возникающих из прикладных и инженерных потребностей, см., например, [23, Remark 2], [25, § A.2], [20, § 3.2].

Соответственно, возникает необходимость их численного решения. Поэтому алгоритмы численного решения вогнутых игр привлекают внимание достаточно широкого круга специалистов.

В [18] были предложены два итерационных метода нулевого порядка для поиска равновесия по Нэшу в вогнутых играх. Первый подход, являющийся достаточно очевидным, основывался на использовании метода Хука–Дживса для минимизации функции невязки (дополненной штрафом за выход из допустимого множества) и приводился в качестве «эталона для сравнения» в смысле эффективности численного решения для возможных альтернативных методов. Второй подход можно (с некоторой натяжкой) рассматривать как нечто среднее между релаксационным алгоритмом и методом конфигураций Хука–Дживса (но с учетом специфики минимизируемой функции невязки). Центральный результат [18] состоял в обосновании его сходимости, хотя и лишь для случая, когда множества стратегий игроков одномерны, но при достаточно слабых требованиях, предъявляемых к функционалам выигрышей. В [18] приводились также результаты численных экспериментов, подтверждавшие существенно более высокую эффективность второго подхода по сравнению с первым. Отметим, наконец, что в [18] был представлен подробный обзор методов численного решения вогнутых игр, известных на текущий момент. По этому поводу см. также [21]. По результатам этого обзора в [18] был сделан вывод: если не считать так называемых практических алгоритмов (сходимость которых теоретически не доказывается), а также релаксационных алгоритмов (в рамках которых, как уже упоминалось, предполагается выпукло-вогнутость функции Никайдо–Исода, то есть выпуклость целевой функции в соответствующих задачах минимизации, ослабляемая иногда до слабой выпуклости, квазивыпуклости и т.д.) используются, в основном, методы первого или более высокого порядка (опирающиеся, в частности, на формулы и неравенства, содержащие градиенты функций выигрыша). Между тем, для задач с функциями выигрыша типа «черный ящик» градиенты могут быть недоступны в принципе.

Как уже было сказано, первый подход из предложенных в [18] не учитывает специфику функции невязки, вследствие чего требуется, как правило, достаточно большое количество итераций и вычислений функции, и более того, соответствующие итерации могут «застревать» в окрестности стационарных точек. Кроме того, насколько известно автору, сходимость метода Хука–Дживса устанавливается лишь для его аналога (при одномерной минимизации вдоль направлений поиска) к, вообще говоря, стационарной точке и при условии дифференцируемости целевой функции, см. [1, § 8.4, с.289]. Что касается второго подхода, он применим лишь для случая одномерных множеств стратегий игроков, а кроме того, при его обосновании используются некоторые предположения гладкости функционалов выигрышей (а также не слишком существенное требование строгой вогнутости функционалов по «своим» переменным). Имеет смысл отметить также, что описание соответствующего алгоритма выглядит несколько громоздко и предполагает подбор целого ряда параметров, подвергаемых процедуре дробления в ходе его реализации. Исходной мотивацией написания данной статьи было желание автора усовершенствовать и обобщить сам этот алгоритм, а также упростить его обоснование (которое тоже было достаточно громоздким и нетривиальным). Первоначально автор пытался как-то приспособить для этой цели известный метод фейеровских операторов (который как раз позволяет во многих случаях строить обоснование итерационных алгоритмов при самых минимальных требованиях к решаемой задаче, см., например, [8,2,10,12,26], в том числе для решения матричных игр, см. [11]). Однако эта попытка оказалась неудачной. Вообще говоря, метод фейеровских операторов успешно применяется к решению систем неравенств с выпуклыми левыми частями (фейеровость оператора $T(x)$ перехода от текущей точки x к следующей выводится из известного свойства нерастяжения проекций на выпуклое множество M; M – множество решений системы, а также множество неподвижных точек оператора проектирования $T(x)$), в том числе бесконечных систем – см. [9]. Однако в нашем случае выпуклость левых частей по совокупности переменных отсутствует. В итоге пришлось доказать утверждение, аналогичное теореме о сходимости M-фейеровского итерационного процесса для случая, когда оператор не выводит из конечномерного компакта, а близость к целевому множеству измеряется с помощью непрерывной неотрицательной функции произвольного вида. Поясним подробнее, о чем идет речь.

Пусть H – линейное нормированное пространство, $T : H \to H$ – оператор с множеством неподвижных точек M. Этот оператор называется M-фейровским, если

$$\big\|T(x) - z\big\| < \|x - z\| \quad \forall\, x \in H, \quad x \notin M, \quad \forall\, z \in M.$$

Если пространство H гильбертово, а оператор T M-фейеровский и вполне непрерывный, то последовательность $x^k = T^k(x^0)$ при любом $x^0 \in H$ сходится к некоторой точке из M, см. [26, Ch.I, theorem 6.2]. Таким образом, каждая точка последовательности должна быть ближе к некоторой точке множества M, чем предыдущая. Автор задался следующими тремя вопросами. 1. Почему должно обеспечиваться сокращение расстояния именно до фиксированной точки $z \in M$, а не просто до множества M ? 2. Обязательно ли мерить близость к множеству M стандартным образом? Например, если рассматривается система уравнений (неравенств), то проще вычислить невязку этой системы, причем функцию невязки можно определять, вообще говоря, различными способами. 3. Насколько необходима вполне непрерывность (непрерывность) оператора T в конечномерном случае?

В результате оказалось, что в случае, когда оператор T не выводит из некоторого конечномерного компакта $X \supset M$, а принадлежность точки из X множеству M равносильна обнулению некоторой непрерывной неотрицательной функции $\psi(x)$, то удается получить следующие ответы на поставленные три вопроса. 1,2: достаточно обеспечить убывание функции $\psi(.)$. 3: достаточно непрерывности функций $\psi(x)$ и $\psi\big(T(x)\big)$. Интересно, что полученное таким путем утверждение (как потом выяснилось) довольно близко к теореме 7.2.3 из [1, c.244]. При этом функция $\psi(.)$ по терминологии [1, c.244] называется *функцией спуска.* Основное отличие – в том, что там вместо непрерывности суперпозиции $\psi\big(T(x)\big)$ постулируется замкнутость оператора $T(x)$ (при том, что этот оператор может быть многозначным), и кроме того, предполагается, что целевое множество M не пусто. Стоит отметить также, что доказательство нашего утверждения и утверждений [26, Ch.I, theorem 6.2] и [1, c.244] проводятся по схожей схеме.

На основе нашего, упомянутого выше, утверждения о сходимости, мы далее предлагаем некоторый общий подход, обеспечивающий численное решение вогнутых игр при самых минимальных требованиях. В частности, обобщаем и развиваем «второй подход» из [18] (см. выше). Кроме того, мы приводим результаты соответствующих численных экспериментов и их обсуждение.

2. Теоремы о сходимости

Теорема 2.1. *Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, $M \subset Z$, $\Psi : Z \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, $T : Z \to Z$, и выполняются следующие условия. 1) Функции $\Psi(x)$, $\Psi\big(T(x)\big)$ непрерывны на Z. 2) $\Psi\big(T(x)\big) < \Psi(x)$ для всех $x \in Z \setminus M$. Рассмотрим последовательность $x^k = T^k(x^0)$ при произвольном выборе $x^0 \in Z$. Будем предполагать, что последовательность $\{x^k\}$ содержится в некотором компакте $K \subset Z$. Тогда справедливо одно из двух:*
I. $x^{\overline{k}} \in M$ при некотором $\overline{k} \in \mathbb{N}$; II. Найдется $x' \in M$ такой, что $\Psi(x^k) \to \overline{\psi} = \Psi(x')$ при $k \to \infty$, где $\overline{\psi}$ зависит от x^0, и более того, для любой сходящейся подпоследовательности x^{k_m} и соответствующего предела $\widetilde{x} = \lim\limits_{m\to\infty} x^{k_m}$ имеем: $\widetilde{x} \in M$ (сходящаяся подпоследовательность существует в силу компактности множества K).

Доказательство. Если последовательность x^k содержит точку множества M, то сразу же получаем утверждение I. Поэтому далее будем предполагать, что $x^k \notin M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае для $t_k = \Psi(x^k)$, $k \in \mathbb{N}$, в силу условия 2), выполняется оценка

$$0 \le t_{k+1} < t_k.$$

Отсюда ясно, что последовательность t_k является ограниченной и строго убывающей. Поэтому существует $t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$. В силу компактности множества $K \supset \{x^k\}$ последовательность $\{x^k\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $x^{k_j} \to x' \in K \subset Z$. По условию 1),

$$\Psi(x^{k_j}) \to \Psi(x'), \quad \Psi\big(T(x^{k_j})\big) \to \Psi\big(T(x')\big) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Покажем, что $x' \in M$. Предположим, что $x' \notin M$. Тогда получаем:

$$\Psi(x') = \lim_{j\to\infty} \Psi(x^{k_j}) = \lim_{j\to\infty} t_{k_j} = t_0 = \lim_{j\to\infty} t_{k_j+1} = \lim_{j\to\infty} \Psi(x^{k_j+1}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \Psi\bigl(T(x^{k_j})\bigr) = \Psi\bigl(T(x')\bigr) < \Psi(x'),$$

в силу условия 2). В итоге получаем противоречие: $\Psi(x') < \Psi(x')$. Стало быть, наше предположение неверно, то есть $x' \in M$, откуда, кстати, следует, что $M \neq \emptyset$. Обозначим $\overline{\psi} = \Psi(x')$. По построению, $t_{k_j} = \Psi(x_{k_j}) \to \overline{\psi}$. Но, как уже было показано, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$. Отсюда ясно, что $t_0 = \overline{\psi}$. Иначе говоря, $\Psi(x^k) \to \overline{\psi}$ при $k \to \infty$. Рассмотрим произвольную сходящуюся подпоследовательность $x^{k_m} \to \widetilde{x} \in K$. Аналогично тому, как это было сделано выше, с точностью до замены $j \to m$, $x' \to \widetilde{x}$, получаем, что $\widetilde{x} \in M$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.1. Идея доказательства теоремы 2.1 во многом аналогична [26, Ch.I, theorem 6.2]. Но, как уже было сказано во введении, имеются и существенные отличия: вместо $\|x - y\|$ при $x \notin M$, $y \in M$, мы берем $\Psi(x)$; вместо непрерывности оператора $T(x)$ на всем пространстве мы требуем непрерывности функций $\Psi(x)$, $\Psi\bigl(T(x)\bigr)$ на множестве Z; наконец, M у нас, вообще говоря, не обязано быть множеством всех неподвижных точек оператора $T(x)$. Кроме того, в случае замены условия непрерывности суперпозиции $\Psi\bigl(T(x)\bigr)$ условием замкнутости оператора $T(x)$ на $Z \setminus M$, а также при априорно известной информации о том, что $M \neq \emptyset$, теорему 2.1 можно получить как следствие теоремы 7.3.4 из [1, с.249], если положить в ней $C \equiv I$ (тождественный оператор), $B(x) = \bigl\{T(x)\bigr\}$, либо как следствие ее более частного аналога (при $C \equiv I$) – теоремы 7.2.3 из [1, с.244].

В качестве непосредственного следствия теоремы 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $M \subset X$, $\psi : X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, $T : X \to X$, и выполняются следующие условия. 1) Функции $\psi(x)$, $\psi\bigl(T(x)\bigr)$ непрерывны на X. 2) $\psi\bigl(T(x)\bigr) < \psi(x)$ для всех $x \in X \setminus M$. Рассмотрим последовательность $x^k = T^k(x^0)$ при произвольном выборе $x^0 \in X$. Тогда справедливо одно из двух:*
I. $x^{\overline{k}} \in M$ при некотором $\overline{k} \in \mathbb{N}$; II. Найдется $x' \in M$ такой, что $\psi(x^k) \to \overline{\psi} = \psi(x')$ при $k \to \infty$, где $\overline{\psi}$ зависит от x^0, и более того, для любой сходящейся подпоследовательности x^{k_m} и соответствующего предела $\widetilde{x} = \lim\limits_{m\to\infty} x^{k_m}$ имеем: $\widetilde{x} \in M$ (сходящаяся подпоследо-

вательность существует в силу компактности множества X).

Замечание 2.2. Если $\Psi(x) = \psi(x) + \gamma\Phi(x)$ – штрафная функция с достаточно большим штрафом $\gamma\Phi(x)$ за выход $x \in Z$ из множества $X \subset Z$, то ясно, что при $x^0 \in X$ условие строгого убывания последовательности $\Psi(x^k)$ при $x^k \in Z \setminus M$ будет выполнено лишь в том случае, когда все точки последовательности $\{x^k\}$ находятся «не слишком далеко» от множества X. То есть, при достаточной обширности множества Z, которая тем меньше, чем больше значение штрафного параметра $\gamma > 0$, существует компакт $X \subset K \subset Z$ такой, что $\{x^k\} \subset K$. Это соображение позволяет облегчить выполнение условий теоремы 2.1 для штрафной функции, рассматриваемой, в частности, на всем пространстве $Z = \mathbb{R}^n$. Под множеством M можно, в частности, понимать множество точек локального минимума функции $\Psi(x)$ в теореме 2.1 или функции $\psi(x)$ в теореме 2.2. В таком случае, если точка $x \notin M$, то из нее заведомо можно сделать шаг в сторону убывания функции. Инструкции для этого шага как раз и должны описываться оператором $T(x)$. Вместе с тем, ничто не мешает понимать под множеством M и множество точек глобального минимума функции спуска – $\Psi(x)$ или $\psi(x)$ – но в этом случае затрудняется построение «алгоритмического» оператора $T(x)$. В общем случае M – это просто множество тех точек x, для которых преобразование $T(x)$ не приводит к уменьшению значения функции спуска. Отметим, наконец, что теорема 2.1 легко обобщается на случай, когда в роли $\mathbb{R}^n$ выступает произвольное линейное нормированное пространство (или даже линейное топологическое).

3. Определение функции невязки в вогнутой игре

Итак, пусть заданы выпуклые компакты конечномерных евклидовых пространств X_j, $j = \overline{1,\nu}$, а также непрерывные функции $J_j(x)$, $(x_i, i = \overline{1,\nu}) \in X$, $X = \prod_{i=1}^{\nu} X_i$, вогнутые каждая по «своей» переменной $x_j \in X_j$, $j = \overline{1,\nu}$. Стандартным образом[1] (см., например, [5, приложение 2]) с помощью теоремы Какутани [13, теорема XVI.5.1, с.638], устанавливается существование вектора $x = \overline{x} \in X$ такого,

[1]На самом деле здесь вместо вогнутости достаточно квазивогнутости, см., например, [4, глава III, § 11, теорема 11.2, с.127].

что[2]:

$$J_j(\overline{x}) \geq J_j(\overline{x}||\overline{x}_j \to x_j), \quad \forall j = \overline{1,\nu}, \quad x \in X. \tag{3.1}$$

Это как раз и означает, что ситуация $\overline{x}$ является равновесием по Нэшу в игре, в которой j-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш J_j, $j = \overline{1,\nu}$.

Далее запись «$x_i, i \neq j$» в аргументе функции будет означать вектор $(x_1, \ldots, x_\nu)$, из которого удалена компонента x_j. Аналогичным образом, запись «$x_i, i = \overline{1,\nu}$» в аргументе функции будет обозначать вектор $(x_1, \ldots, x_\nu)$. Например, для $\nu = 3$:

$$F_1(x_i, i \neq 1) = F_1(x_2, x_3), \quad J_1(x_i, i = \overline{1,3}) = J_1(x_1, x_2, x_3).$$

Определим функции

$$F_j(x_i, i \neq j) = \max_{x_j \in X_j} J_j(x_i, i = \overline{1,\nu}), \quad j = \overline{1,\nu}.$$

Согласно данному определению, должны выполняться неравенства:

$$F_j(x_i, i \neq j) - J_j(x_i, i = \overline{1,\nu}) \geq 0,\ j = \overline{1,\nu}, \tag{3.2}$$

для всех $x = (x_i, i = \overline{1,\nu}) \in X$.

Точка $x = \overline{x} \in X$ тогда и только тогда является ситуацией равновесия по Нэшу в данной игре, когда выполняются равенства

$$F_j(\overline{x}_i, i \neq j) - J_j(\overline{x}_i, i = \overline{1,\nu}) = 0,\ j = \overline{1,\nu}. \tag{3.3}$$

Таким образом, задача отыскания ситуации равновесия по Нэшу сводится к задаче решения системы нелинейных уравнений (можно понимать ее как систему неравенств «$\leq$»)

$$F_j(x_i, i \neq j) - J_j(x_i, i = \overline{1,\nu}) = 0,\ j = \overline{1,\nu}, \tag{3.4}$$

на множестве X. С учетом соотношения (3.2), эта задача, в свою очередь, сводится к задаче минимизации

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \Big\{ F_j(t_i|i \neq j) - J_j(t) \Big\} \to \min_{t=(t_i, i=\overline{1,\nu}) \in X}. \tag{3.5}$$

---

[2]Здесь запись $\overline{x}||\overline{x}_j \to x_j$ означает вектор $\overline{x}$, у которого j-я компонента заменяется на x_j.

Именно функцию $\psi(t)$ мы называем функцией невязки в данной игре (очевидно, существуют и другие способы ее определения). В общем случае функцию невязки можно понимать как всякую неотрицательную непрерывную функцию на множестве X, принимающую нулевые значения на множестве $M \subset X$ всех решений системы (3.4), и строго положительные значения на множестве $X \setminus M$.

Как показано в [18, теорема 3.3], всякая точка, в которой функция невязки оценивается некоторым малым числом $\varepsilon > 0$, будет положением ε-равновесия.

4. Алгоритмы векторного спуска к множеству M

Здесь мы предложим и обоснуем алгоритмы спуска вдоль заданной системы

$$\left\{\ell_s(x),\ s = \overline{1,\kappa}\right\} \tag{4.1}$$

векторов, зависящих от $x \in X$, к множеству $M \subset X$, основанные на теореме 2.2. Эту систему будем называть *системой направлений поиска* в случае, когда она удовлетворяет условиям одной из теорем сходимости – см. далее теоремы 4.1 – 4.3. Конкретные способы построения системы направлений поиска и выбора множества M в задаче минимизации функции невязки для вогнутой игры, сформулированной в разделе 3, см. далее в этом разделе (в частности, алгоритм квазинаискорейшего спуска), а также в разделах 5, 6.

Для доказательства упомянутых теорем сходимости нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *Если функция $W(x,y)$ непрерывна на прямом произведении $Z = X \times Y$, где $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – компакты, то функция*

$$F(y) = \max_{x \in X} W(x,y)$$

непрерывна на Y. Если $W(z) = W(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица на Z, то функция $F(y)$ также удовлетворяет условию Липшица на Y с той же константой. Если $W(x,y)$ выпукла по $y \in Y$ для каждого $x \in X$, то $F(y)$ выпукла на Y.

Доказательство см. в [7, теорема 2.10.1].

Теорема 4.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклый компакт,* $M \subset X$, $\psi : X \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция. Предположим, что для любого* $x \in X$ *определена система* (4.1) *векторов, непрерывно зависящих от* $x \in X$ *и таких, что 1)* $x + \ell_s(x) \in X$ *для всех* $s = \overline{1,\kappa}$, $x \in X$*; 2) для всех* $x \in X \setminus M$ *существуют номер* $s \in \overline{1,\kappa}$ *и точка* $z \in [x; x+\ell_s(x)]$, *при которых* $\psi(z) < \psi(x)$*. Положим* $T(x) = x + t(x)\ell_{s(x)}(x)$, *где*

$$s(x) \in \operatorname{Arg} \min_{s\in\overline{1,\kappa}} q_s(x), \quad t(x) \in \operatorname{Arg} \min_{t\in[0;1]} \psi\bigl(x + t\ell_{s(x)}(x)\bigr), \tag{4.2}$$

$$q_s(x) = \min_{t\in[0;1]} \psi\bigl(x + t\ell_s(x)\bigr), \tag{4.3}$$

и рассмотрим последовательность $x^k = T^k(x^0)$ *при произвольном выборе* $x^0 \in X$*. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.2.*

Доказательство. В силу условия 1) имеем: $T : X \to X$. По условию 2), $\psi\bigl(T(x)\bigr) < \psi(x)$ для всех $x \in X \setminus M$. Таким образом, чтобы воспользоваться теоремой 2.2, нам остается лишь убедиться в непрерывности суперпозиции $\psi(T(x))$, $x \in X$.

В соответствии с леммой 4.1, для каждого $s \in \overline{1,\kappa}$ функция

$$q_s(x) = \min_{t\in[0;1]} \psi\bigl(x + t\ell_s(x)\bigr)$$

непрерывна на множестве X. Обозначим

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^\kappa : \ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,\kappa}, \ \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Очевидно, что линейная функция достигает минимального значения на выпуклом многограннике в одной из его вершин. Отсюда ясно, что

$$q(x) = \min_{s\in\overline{1,\kappa}} q_s(x) = \min_{\lambda\in\Lambda} \sum_{s=1}^{\kappa} \lambda_s q_s(x).$$

А уже из этого представления и леммы 4.1 получаем, что функция $q(x)$ непрерывна на множестве X. Пусть $s(x)$ и $t(x)$ выбраны, как указано в формулировке теоремы. Для определенности можно считать, что (в соответствующих формулах) $s(x)$ – это наименьший из тех номеров $s \in \overline{1,\kappa}$, на которых достигается минимум; $t(x)$ – наименьшая точка из тех $t \in [0;1]$, на которых достигается минимум (такая точка существует в силу непрерывности функции ψ). Положим $T(x) = x + t(x)\ell_{s(x)}(x)$. По построению, суперпозиция функций $\psi\bigl(T(x)\bigr) = q(x)$ непрерывна на X. Теорема доказана. $\square$

Если для каждой точки $x \in X$, не являющейся точкой локального минимума (или стационарной точкой) функции $\psi(x)$, по крайней мере одно из направлений системы направлений поиска есть направление спуска функции $\psi(x)$, то множество M можно понимать как множество точек локального минимума (соответственно, стационарных точек) функции $\psi(x)$. В этом случае метод спуска к множеству M будет методом минимизации функции $\psi(x)$. Однако множество M может пониматься и в более слабом смысле – например, как объединение окрестностей стационарных точек (см. [18]). А это позволяет ослабить требования, предъявляемые к выбору системы направлений поиска.

Следующее утверждение доказывается совершенно аналогично теореме 4.1 (по сути дела, это ее переформулировка).

Теорема 4.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $\psi : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Предположим, что для любого $x \in X$ определена система* (4.1) *векторов, непрерывно зависящих от $x \in X$ и таких, что $x + \ell_s(x) \in X$ для всех $s = \overline{1,\kappa}$, $x \in X$. Положим $T(x) = x + t(x)\ell_{s(x)}(x)$ согласно формулам* (4.2), (4.3), *а также*

$$M = \bigl\{x \in X : \ \psi\bigl(T(x)\bigr) \geq \psi(x)\bigr\},$$

и рассмотрим последовательность $x^k = T^k(x^0)$ при произвольном выборе $x^0 \in X$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.2.

Но, разумеется, при такой формулировке не понятно, в чем ценность сходимости к множеству M. Далее мы проведем некоторые построения, которые позволят конкретизировать условия к выбору системы направлений таким образом, чтобы придать этой сходимости вполне определенную ценность.

Следующее утверждение хорошо известно как аппроксимационная теорема Вейерштрасса.

Лемма 4.2. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x)$, непрерывной на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$, существует многочлен $P(x)$ такой, что $\|f - P\|_{\mathbf{C}(X)} < \varepsilon$.*

Лемма 4.3. *Пусть $\psi_\varepsilon(x)$ – гладкая аппроксимация непрерывной функции $\psi(x)$ на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ с точностью $\varepsilon > 0$, $\overline{x}_\varepsilon \in X$ – точка глобального минимума функции $\psi_\varepsilon(x)$ на X, $\overline{\psi} = \min\limits_{x \in X} \psi(x)$. Тогда*

$$\overline{\psi} \leq \psi(\overline{x}_\varepsilon) \leq \overline{\psi} + 2\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in X$ – точка глобального минимума функции $\psi(x)$ на X, то есть $\overline{\psi} = \psi(\overline{x})$. По условию, для всех $x \in X$ имеем:

$$\psi_\varepsilon(\overline{x}_\varepsilon) \leq \psi_\varepsilon(x) - \psi(x) + \psi(x) \leq \varepsilon + \psi(x).$$

Следовательно,

$$\psi(\overline{x}_\varepsilon) = \psi_\varepsilon(\overline{x}_\varepsilon) + \psi(\overline{x}_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(\overline{x}_\varepsilon) \leq 2\varepsilon + \psi(x).$$

Остается взять $x = \overline{x}$. Лемма доказана. □

Таким образом, задачу об отыскании глобального минимума непрерывной функции на компакте можно приблизить соответствующей задачей для ее гладкой аппроксимации.

Рассмотрим теперь множество M из формулировки теоремы 4.2. Фактически, это множество всех $x \in X$, для которых ни один из векторов системы (4.1) не является направлением спуска в точке x. С практической точки зрения, оно не должно слишком отличаться от множества, определяемого аналогичным образом для ее гладкой аппроксимации с малой погрешностью $\varepsilon > 0$. Рассмотрим эту мысль более подробно. Заметим, что $M = M^0 \cup M^+$, где

$$M^0 = \big\{x \in X: \ \psi\big(T(x)\big) - \psi(x) = 0\big\},$$
$$M^+ = \big\{x \in X: \ \psi\big(T(x)\big) - \psi(x) > 0\big\}.$$

Для непрерывной функции довольно естественной является ситуация, когда гиперповерхности уровня представляют собой множества размерности, меньшей, чем количество переменных. Поэтому, учитывая непрерывность функций $\psi\big(T(x)\big)$, $\psi(x)$, естественно предположить, что множество M^0 имеет размерность, меньшую размерности множества X, а в таком случае $M^0 \subset \overline{M^+}$. В свою очередь, при произвольно заданном $\varepsilon_0 > 0$ множество M^+ представляется в виде

$$M^+ = \bigcup_{\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)} M(\varepsilon), \quad M(\varepsilon) = \big\{x \in X: \ \psi\big(T(x)\big) - \psi(x) \geq \varepsilon\big\}.$$

В этом смысле при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ множество $M(\varepsilon)$ можно понимать как внутреннюю аппроксимацию множества M^+. При этом справедливо представление

$$M(\varepsilon) = \bigcap_{s\in\overline{1,\kappa}} \bigcap_{t\in[0;1]} M(\varepsilon)[s,t],$$

$$M(\varepsilon)[s,t] = \Big\{x \in X:\ \psi\big(x + t\ell_s(x)\big) - \psi(x) \geq \varepsilon\Big\}.$$

И очевидно, что для произвольной гладкой ε-аппроксимации $\psi_\varepsilon(x)$ непрерывной функции $\psi(x)$ имеем:

$$M(2\varepsilon)[s,t] \subset \Big\{x \in X:\ \psi_\varepsilon\big(x + t\ell_s(x)\big) - \psi_\varepsilon(x) \geq 0\Big\}.$$

Для удобства ссылок систему (4.1) по совокупности всех $x \in X$ будем обозначать $\mathcal{L}$. Соответственно, для произвольной гладкой функции $\varphi(x)$ обозначим $M_{\varphi,\mathcal{L}}$ множество всех $x \in X$ таких, что ни один из векторов системы (4.1) не является направлением спуска функции $\varphi(x)$. В силу проведенных выше рассуждений,

$$M(2\varepsilon) \subset M_{\psi_\varepsilon,\mathcal{L}}.$$

В соответствии с этим, систему $\mathcal{L}$ будем называть *приемлемой системой направлений поиска*, если для каждой точки $x \in X$ все направления системы (4.1) являются возможными для множества X в этой точке, и при этом для любой гладкой функции $\varphi(x)$, определенной на X, множество $M_{\varphi,\mathcal{L}}$ содержится в множестве стационарных точек функции $\varphi(x)$. Для последнего, очевидно, достаточно, чтобы в любой нестационарной точке гладкой функции $\varphi(x)$ по крайней мере один из векторов системы (4.1) был направлением спуска для этой функции в данной точке.

Таким образом, имея приемлемую систему поиска $\mathcal{L}$ и пользуясь итерационным алгоритмом теоремы 4.2, попадаем в окрестность множества стационарных точек сколь угодно точной гладкой аппроксимации непрерывной функции $\psi(x)$.

Далее укажем пути построения приемлемой системы направлений поиска.

Пусть $K(x, X)$ – множество возможных направлений к множеству X в точке $x \in X$. Систему (4.1), содержащуюся в $K(x, X)$, будем называть *полной системой поиска* в точке $x \in X$, если для каждого ненулевого вектора $p \in \mathbb{R}^n$, которому отвечает некоторый вектор $q \in K(x, X)$, $(p, q) > 0$, найдется индекс $j \in \overline{1, \kappa}$ такой, что $(p, \ell_j) > 0$.

Пример 4.1. Пусть $X = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Несложные геометрические построения позволяют легко убедиться, что в качестве полной системы поиска в точке $x \in X$ можно взять векторы

$$\ell_s(x) = \mathcal{P}(x + e_s) - x, \quad i = \overline{1, 4},$$

где e_i – векторы стандартного базиса, а также противоположные к ним векторы, $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на множество X. Заметим, кроме того, что оператор $\mathcal{P}$ непрерывен в силу выпуклости множества X, а значит, все векторы системы непрерывно зависят от $x \in X$. В случае, когда X – координатный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$, можно провести аналогичные рассмотрения.

Следующее утверждение показывает, что всякая полная система поиска, взятая по совокупности $x \in X$, является приемлемой системой поиска.

Лемма 4.4. *Пусть M_φ – множество стационарных точек гладкой функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$, (4.1) – полная система поиска в нестационарной точке $x \in X \setminus M_\varphi$. Тогда существует индекс $j \in \overline{1, \kappa}$ такой, что*

$$\varphi(x + t\ell_j(x)) - \varphi(x) < 0$$

для всех достаточно малых $t \in (0; 1]$.

Доказательство. Поскольку $x \in X \setminus M_\varphi$, то найдется $y \in X$ такой, что

$$(\nabla\varphi(x), y - x) < 0.$$

Положим $p = -\nabla\varphi(x)$, $q = y - x$. Тогда $q \in K(x, X)$, $(p, q) > 0$, и по определению полной системы поиска найдется индекс $j \in \overline{1, \kappa}$ такой, что $(p, \ell_j(x)) > 0$, то есть

$$(\nabla\varphi(x), \ell_j(x)) < 0.$$

В таком случае,

$$\varphi(x + t\ell_j(x)) - \varphi(x) = t\left((\nabla\varphi(x), \ell_j(x)) + \frac{o(t)}{t}\right) < 0$$

для всех достаточно малых $t \in (0;1]$. Лемма доказана. □

Множество M и систему направлений (4.1) можно выбирать, вообще говоря, и из некоторых эвристических соображений. Например, если система содержит вектор, который можно рассматривать как аппроксимацию условного антиградиента некоторой гладкой аппроксимации $\psi_\varepsilon(x)$ функции $\psi(x)$, то естественно ожидать, что отсутствие убывания целевой функции вдоль этого вектора в текущей точке означает с большой вероятностью, что некоторая малая окрестность точки локального минимума $\psi(x)$ или хотя бы $\psi_\varepsilon(x)$ уже достигнута. На сходной идее основан предлагаемый ниже метод квазинаискорейшего спуска.

Отметим, что метод спуска к множеству M, основанный на теоремах 4.1, 4.2, будет, вероятно, слишком затратным в смысле количества вычислений функции в ходе его реализации. Поэтому требуется его как-то «облегчить». Здесь уместно вспомнить, что для безусловной минимизации дифференцируемых функций многих переменных вместо метода наискорейшего спуска можно успешно использовать метод дробления шага. Известно, что даже метод с фиксированным шагом при удачном выборе величины шага может демонстрировать большую эффективность по сравнению с методом наискорейшего спуска, см., например, [16, § 3.1, с.65].

Рассмотрим аналог с фиксированным шагом или дроблением шага для метода спуска к множеству M, основанного на теореме 4.1,

Теорема 4.3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $\psi : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\alpha \in (0;1]$. Предположим, что для любого $x \in X$ определена система векторов $\{\ell_s(x),\ s = \overline{1,\kappa}\}$, непрерывно зависящих от $x \in X$ и таких, что $x + \ell_s(x) \in X$ для всех $s = \overline{1,\kappa}$, $x \in X$. Положим $T(x) = x + \alpha\,\ell_{s(x)}(x)$, где*

$$s(x) \in \operatorname{Arg}\min_{s\in\overline{1,\kappa}} q_s(x), \quad q_s(x) = \psi\big(x + \alpha\ell_s(x)\big), \quad s = \overline{1,\kappa};$$

$$M = \big\{x \in X : \ q_s(x) \ge \psi(x),\ s = \overline{1,\kappa}\big\},$$

и рассмотрим последовательность $x^k = T^k(x^0)$ при произвольном выборе $x^0 \in X$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.2.

Доказательство. В силу условий теоремы, $T : X \to X$. И по определению множества M, $\psi\big(T(x)\big) < \psi(x)$ для всех $x \in X \setminus M$. Аналогично доказательству теоремы 4.1 получаем, что суперпозиция функций $\psi\big(T(x)\big)$ непрерывна на X. Стало быть, применима теорема 2.2. Теорема доказана. $\square$

Если для каждой точки $x \in X$, не являющейся точкой локального минимума (или стационарной точкой) функции $\psi(x)$, по крайней мере одно из направлений системы направлений поиска есть направление спуска функции $\psi(x)$, то, производя дробление параметра α, будем сужать множество M до множества точек локального минимума (соответственно, стационарных точек).

Отметим, наконец, что представленные две схемы алгоритма являются довольно общими. Конкретизируя тем или иным образом способ выбора системы направлений поиска, можно строить более конкретные варианты. Но в любом случае, если речь идет о минимизации функции невязки в вогнутой игре, имеет смысл включать в эту систему вектор $\ell(x) = y(x) - x$, где $y_j(x) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{t \in X_j} J_j(x \| x_j \to t)$, $j = \overline{1, \nu}$, поскольку в случае функционалов выигрышей, выпуклых по «чужим» переменным (хотя бы в окрестности точки x) это направление известно как достаточно эффективное. В случае, когда функционалы выигрышей строго вогнуты по «своим» переменным, функция $y(x)$ определяется однозначно и является непрерывной, см., например, [3, Часть II, глава 6, § 6.1, теорема 6.2, с.210]). Следовательно, условие непрерывности направления $\ell(x)$ будет выполнено. Требование строгого характера вогнутости не является слишком ограничительным, поскольку всегда можно произвести регуляризацию функционалов выигрышей следующим образом:

$$\widetilde{J}_j(x) = J_j(x) - \varepsilon \|x_j\|^2.$$

Если $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, то положение равновесия в игре от замены функционалов $J_j(x)$ на $\widetilde{J}_j(x)$ изменится сколь угодно мало. Сколь угодно мало меняется также и функция невязки, см. [18, лемма 4.5].

В самом общем случае систему направлений поиска можно набирать следующим образом: берем базисный вектор e_s, затем находим точку $z_s(x)$ как проекцию точки $x+e_s$ на множество X и принимаем $\ell_s(x) = z_s(x) - x$. Этот подход аналогичен известному методу координатного спуска (применяемому, в отличие от нашей ситуации, для решения задач безусловной оптимизации).

Описанные выше два метода можно назвать методами сканирования (соответственно, тотального и выборочного) по всем направлениям. Естественным образом возникает идея выбирать для сканирования на очередной итерации какое-то одно направление. Из общих эвристических соображений имеет смысл определить некоторый аппроксимативный аналог направления градиента (будем называть его псевдоградиентом), взять точку, получаемую смещением в противоположном к нему направлении из текущей точки x, спроектировать ее на множество X и таким образом получить для сканирования отрезок, соединяющий указанную проекцию и точку x. Рассмотрим этот подход более подробно. Пусть μ – размерность множества X, $\{\aleph_s(x), s = \overline{1,\mu}\}$ – система непрерывно зависящих от $x \in X$ векторов возможных для X направлений в точке x в том смысле, что $x + \aleph_s(x) \in X$, $s = \overline{1,\mu}$, и коллинеарных базисным векторам. Будем называть ее *репером* определяемого далее псевдоградиента. Предположим, что задан малый параметр $\beta > 0$ (можно заменить его набором параметров $\beta_s > 0$, $s = \overline{1,\mu}$). Определим вектор псевдоградиента следующим образом:

$$\widetilde{\nabla}\,\psi(x) = \frac{1}{\beta}\left\{\frac{\psi\big(x+\beta\aleph_s(x)\big)-\psi(x)}{\|\aleph_s(x)\|+\varepsilon},\ s=\overline{1,\mu}\right\},$$

где $\varepsilon > 0$ – очень малое число (необходимое для того только, чтобы избежать нуля в знаменателе). Очевидно, что $\widetilde{\nabla}\,\psi(x)$ непрерывно зависит от $x \in X$. Теперь для малого параметра $\sigma > 0$ определим вектор

$$\ell_1(x) = \mathcal{P}\big[x - \sigma\,\widetilde{\nabla}\,\psi(x)\big] - x,$$

где $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на множество X. Поскольку у любой точки существует в точности одна проекция на выпуклый компакт X, то оператор $\mathcal{P}$ будет непрерывным. Следовательно, непрерывным будет и оператор $\ell_1(x)$. Положим $T(x)$ – точку минимума функции $\psi(.)$ по отрезку $\big[x;\ell_1(x)\big]$. Тогда, аналогично тому, как это уже было сделано выше, получаем, что суперпозиция $\psi\bigl(T(x)\bigr)$ непрерывна на X. Однако, учитывая, что у нас все-таки не антиградиент, а его аппроксимативный аналог, вообще говоря, нет гарантии, что выбранное таким образом направление поиска будет направлением спуска целевой функции. В связи с этим, имеет смысл на всякий случай добавить к нему направления

$$\ell_2(x) = \mathcal{P}\bigl[x+\sigma\,\widetilde{\nabla}\,\psi(x)\bigr]-x,\ \ell_3(x) = y(x)-x,\ \ell_4(x) = \mathcal{P}\bigl[x-\sigma\,\ell_3(x)\bigr]-x.$$

Новые направления в текущей точке x можно не подвергать сканированию, если уже просканированное направление оказалось направлением спуска. Преимущество в том, что количество направлений системы поиска здесь ограничено числом 4: можно конкретизировать теорему 4.3, взяв $\kappa = 4$, а также векторы $\ell_s(x)$, $s = \overline{1,4}$, выбрав их, как указано выше.

Построенный описанным способом метод можно назвать методом квазинаискорейшего спуска. Как вариант, можно провести выборочное сканирование по всем четырем направлениям, а уже то направление, которое показало наилучший результат, подвергнуть тотальному сканированию.

Таким образом, представленные выше два алгоритма (выборочного сканирования по всем направлениям и квазинаискорейшего спуска) можно использовать для поиска точек локального минимума, вообще говоря, произвольной непрерывной функции $\psi(x)$. В соответствии с известным методом глобальной оптимизации – методом мультистарта, варьируя при необходимости начальное приближение $x_0 \in X$, в частности, выбирая его каждый раз случайно (методом Монте–Карло), приходим в конечном итоге к точке глобального минимума функции $\psi(x)$. Но здесь также можно использовать специфику функции $\psi(x)$ как функции невязки в вогнутой игре. А именно, переход к новой начальной точке имеет смысл производить по аналогии с тем, как это делается в релаксационном алгоритме. То есть, если оказалось, что $\psi\bigl(T(x)\bigr) \geq \psi(x)$, то новую начальную точку выбираем по правилу:

$$x_0 = x + \rho\,\bigl(y(x) - x\bigr),$$

где $\rho \in (0;1]$ – коэффициент релаксации. Разумеется, в точке x_0 значение функции может оказаться больше, чем в точке x. Но с большой вероятностью из точки x_0, действуя по алгоритму, описанному в теореме 2.2, попадаем в точку с меньшим значением функции, либо в точку, которая еще не выбиралась в качестве начальной, и т.д.. Таким образом, получаем специфическую реализацию метода мультистарта. В совокупности с этой реализацией построенные два метода можно рассматривать как своего рода гибрид метода конфигураций и релаксационного алгоритма (но вдобавок еще с элементами проектирования). Для нас важно, что здесь абсолютно никаких дополнительных требований к параметрам игры не предъявляется.

Далее, предваряя описание численных экспериментов, проведем дальнейшую конкретизацию для случая одномерных множеств X_j, $j=\overline{1,\nu}$. Это позволит нам провести сравнение соответствующих результатов с результатами численных экспериментов, представленными в [18].

5. Конкретизация общей схемы для случая одномерных стратегий игроков

Остановимся подробнее на случае одномерных множеств допустимых стратегий игроков. А именно, пусть заданы отрезки $X_j = [a_j; b_j] \subset \mathbb{R}$, $j=\overline{1,\nu}$, а также непрерывные функции $J_j(x_1,\dots,x_\nu)$, вогнутые каждая по «своей» переменной $x_j \in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, при $x=(x_1,\dots,x_\nu) \in X$, $X=\prod\limits_{i=1}^{\nu} X_i$. Рассмотрим игру, в которой j-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш $J_j(x)$, выбирая стратегию $x_j \in X_j$, при независимом выборе другими игроками своих стратегий $x_i \in X_i$, $i \neq j$; $j=\overline{1,\nu}$.

Построим систему векторов

$$\ell_j(x) = \big(x||x_j \to y_j(x)\big) - x,\ j=\overline{1,\nu},$$

$$\ell_{\nu+1}(x) = y(x) - x,\ \ell_{\nu+2}(x) = \mathcal{P}\big[-y(x) - x\big],$$

где $\mathcal{P}$ – оператор проектирования на множество X.

Как показано в [18], в рассматриваемом случае, при условии гладкости функций выигрыша и выборе в качестве множества M объединения малых окрестностей всех стационарных точек функции невязки, дополненной штрафом за выход из множества X, для всякого $x \notin M$ один из векторов указанной системы будет направлением спуска для этой штрафной функции (и более того, величина спуска ограничена снизу положительной константой). Поскольку штрафная функция совпадает с функцией $\psi(x)$ на множестве X, а вне X быстро убывает при переходе в любую точку множества X, естественно попытаться использовать эту же систему в качестве системы направлений поиска для самой функции $\psi(x)$.

Далее эту систему направлений поиска будем считать заданной. Таким образом, $\kappa = \nu + 2$, и можно рассмотреть реализацию описанного в разделе 4 метода выборочного сканирования по всем направлениям. Изначально задавались положительные значения параметров β, $\alpha = 0.1 \cdot \beta$, ε. Сканирование на каждой итерации производилось следующим образом. Сначала вычислялись значения $\psi_0 = \psi(x)$, $\psi_{\nu+1} = \psi(x+\ell_{\nu+1}(x))$. Если оказывалось, что $\psi_0 - \psi_{\nu+1} > \varepsilon$, сразу производился переход к следующей итерации с точкой $x + \ell_{\nu+1}(x)$ (этот прием «преждевременного перехода» не является обязательным, но по мысли автора, должен экономить вычисления функции[3]). Затем по всем $j = \overline{1,\nu}$ выбирался индекс j_* с минимальным значением $\psi_j = \psi(x + \ell_j(x))$. Если оказывалось, что $\psi_0 - \psi_{j_*} > \varepsilon$, сразу производился переход к следующей итерации с точкой $x + \ell_{j_*}(x)$. В противном случае для точки с наилучшим значением функции из вычисленных – пусть это будет x_* – вычислялось значение $\psi_* = \psi(x + \beta\,(x_* - x))$. Если оказывалось, что $\psi_0 - \psi_* > \varepsilon$, сразу производился переход к следующей итерации с точкой $x + \beta\,(x_* - x)$. В противном случае вычислялось значение $\psi_{\nu+2} = \psi(x[\nu+2])$, где $x[\nu+2] = \mathcal{P}[x + \alpha\ell_{\nu+2}(x)]$). Если оказывалось, что $\psi_0 - \psi_{\nu+2} > \varepsilon$, сразу производился переход к следующей итерации с точкой $x[\nu + 2]$. В противном случае при условии, что значение функции все-таки удалось уменьшить, производился переход к следующей итерации с наилучшей проверенной точкой и с дроблением параметров (делением на 10), а при невыполнении этого условия, производился выбор новой начальной точки в соответствии с процедурой релаксационного алгоритма.

Интересно сравнить описанный метод выборочного сканирования с методом квазинаискорейшего спуска. Здесь в качестве репера псев-

---

[3] Далее мы приводим результаты численных экспериментов при $\varepsilon = 10^{-6}$; при $\varepsilon = 10$ количество вычислений функции просто возрастает в среднем в полтора раза.

доградиента естественно было взять систему

$$\aleph_j(x) = \big(x||x_j \to y_j(x)\big) - x,\ j = \overline{1,\nu}.$$

По сравнению с описанием этого метода в предыдущем разделе мы не делали ничего нового, просто брали фиксированные значения $\sigma = 1$, $\beta = 0.001$, коэффициент релаксации подбирался опытным путем из набора $\{0.5, 0.9, 1\}$. Кроме того, к функции невязки было добавлено стабилизирующее слагаемое вида $10^{-15}\|x\|^2$ для противодействия «блужданиям» между различными положениями равновесия.

6. Случай гладких функционалов выигрышей

До сих пор множество M у нас задавалось не вполне явным образом (а именно, как множество всех точек, из которых невозможен спуск вдоль выбранной системы направлений поиска). Рассмотрим случай, когда удается провести строгое теоретическое обоснование, что в роли множества M выступает в точности множество стационарных точек целевой функции – функции невязки, дополненной штрафом за выход из допустимого множества. Соответственно, здесь мы будем опираться на теорему 2.1 и замечание 2.2.

Вообще, стоит отметить, что ситуация, когда обстоятельное теоретическое исследование алгоритма нулевого порядка удается провести лишь в предположении дифференцируемости целевой функции, достаточно характерна для теории оптимизации, см., например, [1, § 8.4].

Обращаясь к исследуемой вогнутой игре, рассмотрим модификацию функции Никайдо–Исода в стиле [18]:

$$\Phi(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu}\Big\{J_j(x||x_j \to y_j) - J_j(x)\Big\} = \sum_{j=1}^{\nu}\Phi_j(x,y_j),$$

где принято обозначение

$$\Phi_j(x,y_j) = J_j(x||x_j \to y_j) - J_j(x), \quad j = \overline{1,\nu}.$$

Заметим, что

$$\psi(x) = \max_{y\in X}\Phi(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu}\max_{y_j\in X_j}\Phi_j(x,y_j).$$

Пусть μ – размерность множества X. Следующее утверждение было установлено в [18, лемма 4.6] в качестве следствия теоремы Данскина–Демьянова, см. [6, теорема 1.5.3, с.42].

Лемма 6.1. *Пусть функции выигрышей $J_j(x)$ строго вогнуты каждая по «своей» переменной на X_j, $j = \overline{1,\nu}$, и непрерывно дифференцируемы на открытом множестве Z, содержащем множество X;*

$$Y(x) = \operatorname{Arg}\max_{y\in X} \Phi(x,y).$$

Тогда $Y(x) = \{y(x)\}$, причем вектор-функция $y(x)$ непрерывна на Z. Более того, для каждого $x \in Z$ и каждого направления $h \in \mathbb{R}^\mu$, $|h| = 1$, в точке $x \in Z$, существует производная

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial h} = \max_{y\in Y(x)} \big(\nabla_x\Phi(x,y),h\big) = \big(\nabla_x\Phi(x,y(x)),h\big), \tag{6.1}$$

причем вектор-функция $\nabla_x\Phi(x,y(x))$ непрерывна по $x \in Z$.

Далее будем считать, что условия леммы 6.1 выполнены. Тогда функция $\psi(x)$ определена на множестве Z. Обозначим

$$g(x) = \nabla_x\Phi(x,y(x)), \quad x \in Z.$$

Пусть для каждого $j = \overline{1,\nu}$ определены гладкие неотрицательные функции $\varphi_j(x_j)$, равные нулю на X_j и возрастающие при удалении x_j от X_j. Для каждого $\gamma > 0$ определим штрафную функцию

$$\psi_\gamma(x) = \psi(x) + \gamma\varphi(x), \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\nu}\varphi_j(x_j).$$

Положим $g_\gamma(x) = g(x) + \gamma\,\nabla\varphi(x)$. В соответствии с леммой 6.1, при $h = \ell/|\ell|$, для любых $x \in Z$, $\ell \in \mathbb{R}^\mu$, $\ell \neq 0$, существует производная

$$\frac{d}{dt}\,\psi_\gamma(x+t\ell) = \big(g_\gamma(x+t\ell),\ell\big).$$

Пусть M – множество стационарных точек функции $\psi_\gamma(x)$, то есть таких, что $g_\gamma(x) = 0$. Для числа $\varepsilon > 0$ систему ненулевых векторов h_i, $i = \overline{1,\kappa}$, в пространстве $\mathbb{R}^\mu$ будем называть *полной системой ε-спуска*, если для любого единичного вектора $h \in \mathbb{R}^\mu$ найдется индекс $j \in \overline{1,\kappa}$ такой, что $(h,h_j) \le -\varepsilon$. Ту же систему будем наывать *полной системой спуска*, если для любого ненулевого вектора $h \in \mathbb{R}^\mu$ найдется индекс $j \in \overline{1,\kappa}$ такой, что $(h,h_j) < 0$.

Лемма 6.2. *Пусть векторы h_i, $i = \overline{1,\kappa}$, образуют полную систему ε-спуска в пространстве $\mathbb{R}^\mu$. Тогда для любой точки $x \in Z \setminus M$ найдется индекс $j \in \overline{1,\kappa}$ такой, что*

$$\psi_\gamma(x + th_j) - \psi_\gamma(x) \le -\frac{t}{2}|g_\gamma(x)|\varepsilon$$

для всех достаточно малых $t \in (0;1]$.

Доказательство. Поскольку $x \in Z \setminus M$, то ясно, что $g_\gamma(x) \ne 0$. По определению полной системы ε-спуска, найдется индекс $j \in \overline{1,\kappa}$ такой, что

$$\big(g_\gamma(x), h_j\big) \le -|g_\gamma(x)|\varepsilon.$$

В соответствии с леммой 6.1 имеем:

$$\psi_\gamma(x + th_j) - \psi_\gamma(x) = t\big(g_\gamma(x), h_j\big) + o(t) \le$$

$$\le -t|g_\gamma(x)| \left\{\varepsilon + \frac{o(t)}{t}\right\} \le -\frac{t}{2}|g_\gamma(x)|\varepsilon$$

для всех достаточно малых $t \in (0;1]$. Лемма доказана. □

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 6.3. *Пусть векторы h_i, $i = \overline{1,\kappa}$, образуют полную систему спуска в пространстве $\mathbb{R}^\mu$. Тогда для любой точки $x \in Z \setminus M$ найдется индекс $j \in \overline{1,\kappa}$ такой, что*

$$\psi_\gamma(x + th_j) < \psi_\gamma(x)$$

для всех достаточно малых $t \in (0;1]$.

В соответствии с теоремами 4.1, 4.3, а также леммами 6.2, 6.3, для того, чтобы получить систему направлений поиска, обеспечивающую сходимость к множеству стационарных точек функции $\psi_\gamma(x)$, достаточно иметь полную систему спуска, непрерывно зависящую от x. Далее мы покажем, что полная система ε-спуска всегда может быть построена вполне определенным образом.

Лемма 6.4. *Пусть $\big\{e_j \;:\; j = \overline{1,\mu}\big\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^\mu$, p – произвольный вектор из положительного ортанта. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого* *вектора* $q \in \mathbb{R}^\mu$, $|q| = 1$, *заведомо выполняется одно из трех:* *1) существует индекс* $j \in \overline{1,\mu}$ *такой, что* $q_j = (q, e_j) \le -\varepsilon$; *2)* $(q,p) \le -\varepsilon$; *3)* $(q,-p) \le -\varepsilon$.

Доказательство. 1. Предположим, что $(q,p) = 0$. Заметим, что функция $f(q) = \min\limits_{j=\overline{1,\mu}} q_j$ непрерывна. Этот факт доказывается совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве [18, лемма 4.1] (вообще, мы здесь эксплуатируем, фактически, те же идеи, что и при доказательстве этой леммы). Согласно теореме Вейерштрасса, существует

$$\xi = \max\bigl\{f(q) :\ q \in Q\bigr\}, \quad Q = \bigl\{q \in \mathbb{R}^\mu :\ |q| = 1,\ (q,p) = 0\bigr\}.$$

Для произвольного $q \in Q$ все компоненты q_j, $j = \overline{1,\mu}$, положительными быть не могут, поскольку в противном случае

$$0 = (q,p) = \sum_{j=1}^{\mu} p_j q_j > 0.$$

А из того, что $|q| = 1$, понятно, что и нулевыми они все тоже быть не могут. Поэтому, каково бы ни было $q \in Q$, найдется хотя бы одна отрицательная компонента q_j. Отсюда сразу следует, что $f(q) < 0$ для всех $q \in Q$. Тогда по теореме Вейерштрасса, $\xi < 0$. Следовательно, для всякого $q \in Q$ найдется индекс $j \in \overline{1,\mu}$ такой, что $q_j \le \xi < 0$. Положим $\varepsilon_1 = -\xi > 0$.

2. Для произвольного $\sigma > 0$ определим множество

$$Q_\sigma = \bigl\{q \in \mathbb{R}^\mu :\ |q| = 1,\ |(q,p)| \le \sigma\bigr\}.$$

В силу пункта 1, найдется $\sigma > 0$ такое, что

$$\eta[\sigma] = \max\bigl\{f(q) :\ q \in Q_\sigma\bigr\} < 0.$$

Действительно, в противном случае найдутся последовательности $\sigma_k \searrow 0$, $q[k] \in S_1$ (здесь S_1 – единичная сфера в $\mathbb{R}^\mu$) такие, что

$$f(q[k]) \ge 0, \quad \bigl|(q[k],p)\bigr| \le \sigma_k \to 0.$$

Поскольку S_1 – компакт, то по теореме Больцано–Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $q[k_m] \to \overline{q} \in S_1$. При этом, по построению и в силу непрерывности функции $f(q)$ имеем: $(\overline{q},p) = 0$, то есть $\overline{q} \in Q_0 = Q$, $f(\overline{q}) \geq 0$. Но это противоречит результату пункта 1. Таким образом, существует $\sigma > 0$, при котором $\eta[\sigma] < 0$. Положим $\varepsilon_2 = -\eta[\sigma] > 0$. По построению, для всех $q \in Q_\sigma$ имеем: $f(q) \leq -\varepsilon_2$.

3. Предположим, что $q \in S_1 \setminus Q_\sigma$. Тогда возможно только одно из двух: а) $q \in Q_\sigma^-$; б) $q \in Q_\sigma^+$, где

$$Q_\sigma^- = \big\{q \in \mathbb{R}^\mu :\ |q| = 1,\ (q,p) \leq -\sigma\big\},$$

$$Q_\sigma^+ = \big\{q \in \mathbb{R}^\mu :\ |q| = 1,\ (q,-p) \leq -\sigma\big\}.$$

Таким образом, утверждение леммы выполнено при $\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \sigma\}$. Лемма доказана. □

Непосредственно из леммы 6.4 вытекает

Теорема 6.1. *Всякая система ненулевых векторов, сонаправленных с векторами стандартного базиса, дополненная ненулевым вектором p, направленным вдоль биссектрисы положительного ортанта, а также противоположным вектором $-p$, является при некотором $\varepsilon > 0$ полной системой ε-спуска.*

Замечание 6.1. Очевидно, что добавление к системе, описанной в теореме 6.1, вектора $d(x) = y(x) - x$ ее полноты никак не испортит. А, как уже было сказано выше, это имеет смысл сделать, поскольку направление $d(x)$ зачастую оказывается достаточно эффективным. Для того, чтобы соразмерять размер шага вдоль направлений поиска с близостью к достижению цели, векторы системы следует выбирать так, чтобы их длины были пропорциональны (или просто равны) длине вектора $d(x)$.

Вообще говоря, можно действовать и по-другому, а не обязательно в точности так, как описано в замечании 6.1. Ясно, что в случае $d(x) = 0$ текущая точка $x = y(x) \in X$ и является искомой точкой равновесия. Если же $d(x) \neq 0$, то по нему можно построить ортонормированный базис $e_j(x)$, $j = \overline{1,\mu}$, меняющийся непрерывно по x и такой, что вектор $d(x)$ направлен, скажем, по биссектрисе положительного ортанта (при $\mu > 2$ этот базис определяется неоднозначно). Тогда по лемме 6.4 система $e_j(x)$, $j = \overline{1,\mu}$, $d(x)$, $-d(x)$ будет системой направлений ε-спуска при некотором $\varepsilon > 0$. По сравнению с подходом, описанным в замечании 6.1, это снижает количество векторов системы направлений всего лишь на единицу, но определенным образом повышает степень алгоритмической сложности, поскольку на каждой итерации потребуется вычислять матрицу преобразования базиса.

Так или иначе, при наличии алгоритма построения полной системы ε-спуска или просто спуска в точке x, непрерывно зависящей от x, метод тотального сканирования по этой системе, в соответствии с теоремой 2.1 и замечанием 2.2, будет (в соответствующем смысле) сходиться к множеству M. То есть к множеству стационарных точек штрафной функции. Строго говоря, в лемме 6.1, на которую мы также здесь опираемся, речь идет об открытом множестве Z, а в теореме 2.1 – о замкнутом множестве Z. Но это несущественно, поскольку можно считать, что замкнутое Z_1 содержится в открытом Z. Более того, в качестве Z_1 можно взять тот компакт K, построение которого обсуждается в замечании 2.2.

Предположим теперь, что $\mu = \nu$, то есть все допустимые множества X_j, $j = \overline{1, \nu}$, одномерны. В случае, когда все компоненты вектора $d(x)$ ненулевые, можно взять его в качестве вектора p, а в качестве базисных векторов – векторы $e_j(x)$, у которых j-я компонента такая же, как у вектора $d(x)$, а все остальные равны нулю, $j = \overline{1, \nu}$. Проблема тут в том, что все компоненты вектора $d(x)$ ненулевыми быть не обязаны. Формально можно включить все точки x с наличием нулевых компонент у вектора $d(x)$ в множество M. Поскольку для поиска точки глобального минимума все равно приходится использовать мультистарт, то это в практическом плане не так уж существенно. Тем более, что вектор $y(x)$, а следовательно, и $d(x)$ при практической реализации вычисляется все равно приближенно. Кроме того, можно использовать следующее эвристическое соображение.

Для достаточно малого $\sigma > 0$ определим преобразование координат

$$\mathcal{R}_\sigma(t) = \begin{cases} t, & \text{при } |t| \geq \sigma, \\ \sigma, & \text{при } t \in [0; \sigma], \\ -\sigma, & \text{при } t \in [-\sigma; 0), \end{cases}$$

а также соответствующий векторный аналог, действующий на каждую компоненту.

Тогда в соответствии с леммой 6.4 векторы $\widetilde{d(x)} = \mathcal{R}_\sigma[d(x)]$, $-\widetilde{d(x)}$, в совокупности с векторами $\widetilde{e_j(x)}$, $j = \overline{1,\nu}$, определяемыми соответствующим образом по $\widetilde{d(x)}$, образуют при некотором $\varepsilon > 0$ полную систему ε-спуска. Проблема тут в том, что нарушается непрерывность этой системы по $x \in Z$. Вместе с тем, влияние этого нарушения непрерывности будет становиться сколь угодно малым при $\sigma \searrow 0$ и рано или поздно будет поглощено погрешностью вычислений. Во всяком случае, опыт показывает, что такой подход тоже вполне работает. Соответствующий метод выборочного сканирования по всем направлениям будет, фактически, упрощенной версией подхода II из [18]. Эта упрощенная версия в численных экспериментах показывает результаты, очень похожие на результаты для подхода II, представленные в [18].

7. Описание тестов

Тестирование на численных экспериментах проводилось для случая одномерных множеств допустимых стратегий игроков. А именно, пусть заданы отрезки $X_j = [a_j; b_j] \subset \mathbb{R}$, $j = \overline{1,\nu}$, а также непрерывные функции $J_j(x_1, \ldots, x_\nu)$, вогнутые каждая по «своей» переменной $x_j \in X_j$, $j = \overline{1,\nu}$, при $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in X$, $X = [a; b] = \prod\limits_{i=1}^{\nu} X_i$. Рассмотрим игру, в которой j-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш $J_j(x)$, выбирая стратегию $x_j \in X_j$, при независимом выборе другими игроками своих стратегий $x_i \in X_i$, $i \neq j$; $j = \overline{1,\nu}$.

Опишем, прежде всего, те же тесты, которые мы использовали в [18]. Мы берем различные вогнутые игры указанного выше вида при количестве игроков $\nu = 2, 3$. В качестве начальной точки мы всегда брали «верхнюю точку» конусного отрезка $X = [a; b]$, то есть точку b (если она сама не являлась искомым положением равновесия – тогда брали наоборот точку a).

Тест № 1. $\nu = 3$, $X_j = [0, 1]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -\sin(x_2 x_3)(x_1 - 0.3)^2, \quad J_2(x) = -\cos(x_1 - x_3)(x_2 - 0.5)^2,$$

$$J_3(x) = -\mathrm{arctg}\,(x_1 + x_2)(x_3 - 0.7)^2.$$

Здесь положение равновесия очевидно: $\overline{x} = (0.3, 0.5, 0.7)$. Именно оно и обнаруживается.

Тест № 2. $\nu = 3$, $X_j = [0,1]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -(x_1 - 0.3)^2 + (x_2 + x_3)x_1, \quad J_2(x) = -(x_2 - 3)^2 - x_1 x_3 x_2,$$

$$J_3(x) = -(x_3 + 3)^2 + x_3 \sin(x_1 x_2).$$

Оба алгоритма находят одну точку $\overline{x} = (0.8, 1, 0)$. Непосредственным образом проверяется, что это и есть равновесие по Нэшу в данной игре.

Тест № 3. $\nu = 2$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1,2}$,

$$J_1(x) = J_2(x) = -\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{9}(x_1 - x_2)^2.$$

Положение равновесия очевидно: $\overline{x} = (0, 0)$. Именно оно и обнаруживается.

Тест № 4. $\nu = 3$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -\big(x_1 - 10\sin(x_2 x_3)\big)^2 + (x_2 + x_3)x_1,$$

$$J_2(x) = -\big(x_2 - 5\cos x_1 \sin x_3\big)^2 - x_1 x_2 x_3,$$

$$J_3(x) = -\big(x_3 + 25\mathrm{arctg}\,(x_1 + x_2)\big)^2 + \sin(x_1 x_2)\, x_3.$$

Здесь уже существует множество положений равновесия и множество точек локального минимума функции $\psi(x)$, не являющихся положением равновесия. Оба алгоритма сошлись к одному из положений равновесия. Отметим, что первый подход из [18] сошелся просто к точке локального минимума.

Тест № 5. $\nu = 3$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -\big(x_1 - 10\sin(x_2 x_3)\big)^2 + (x_2 + x_3)x_1,$$

$$J_2(x) = -\big(x_2 - 5\cos x_1 \sin x_3\big)^2 + 7x_1 x_2 x_3,$$

$$J_3(x) = -\big(x_3 + 25\mathrm{arctg}\,(x_1 + x_2)\big)^2 + 5\sin(x_1 x_2)\, x_3.$$

Здесь ситуация примерно такая же, как с предыдущим тестом.

Поскольку множества стратегий игроков одномерны, при вычислении функций F_j, $j = \overline{1,\nu}$, использовался метод золотого сечения (который, как известно, работает достаточно быстро). Для реализации метода золотого сечения использовались собственные авторские программы. Все программы были написаны на языке MATLAB.

Таблица 1: Результаты работы алгоритма I
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	1	2	115	$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$	0
2	2	4	191	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 3.9209e-8 \end{pmatrix}$	0
3	4	12	573	$\begin{pmatrix} 8.9697e-6 \\ 8.9697e-6 \end{pmatrix}$	1.114e-10
4	5	19	1141	$\begin{pmatrix} 5.0637 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$	0
5	3	12	742	$\begin{pmatrix} 2.8657e-10 \\ 4.2985e-10 \\ 3.5822e-11 \end{pmatrix}$	3.2213e-16

Далее приведем результаты численных экспериментов – см. таблицы 1, 2, 3. Здесь «алгоритм I» – это метод выборочного сканирования по всем направлениям, «алгоритм II» – метод квазинаискорейшего спуска в сочетании с методом золотого сечения для одномерного поиска вдоль псевдоградиента, «алгоритм III» – метод выборочного сканирования по системе направлений, описываемой в замечании 6.1; алгоритмы I и II применяются для функции $\psi(.)$ на множестве X, алгоритм III – для штрафной функции $\psi_\gamma(.)$ при $\gamma = 10^{25}$ (кроме того, используется стабилизатор с коэффициентом 10^{-15}); `Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений функции невязки $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений каждого из функционалов выигрышей, $\overline{x}$ – найденная точка (приближение к положению равновесия); запись `e-8` обозначает умножение на 10^{-8}. Точность по функции задавалась на уровне 10^{-7} (то есть по достижении функцией $\psi(.)$ этого значения или меньшего вычисления прекращались).

Таблица 2: Результаты работы алгоритма II
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$,
`jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	3	112	4295	$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$	0
2	2	76	2927	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 3.9209e-8 \end{pmatrix}$	0
3	1	36	1629	$\begin{pmatrix} 1.228e-6 \\ 1.228e-6 \end{pmatrix}$	2.0878e-12
4	3	113	6499	$\begin{pmatrix} 5.0637 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$	0
5	1	37	2167	$\begin{pmatrix} 3.3219e-6 \\ 3.3219e-6 \\ 3.3219e-6 \end{pmatrix}$	2.8878e-8

Из сравнения таблиц 1, 2, 3 видим, что алгоритм I оказался существенно лучше по крайней мере по количеству вычислений функции по сравнению с алгоритмом II, и по всем позициям лучше по сравнению с подходами I и II из [18]. Алгоритм III оказался примерно сопоставим (хотя и несколько хуже) с алгоритмом I, тест 5 – не в счет, поскольку получена другая точка равновесия. Алгоритм II примерно сопоставим с подходом II из [18], хотя результаты у него и несколько хуже, но, тем не менее, лучше по сравнению с подходом I из [18].

Интересно также сравнить по результатам работы алгоритмы I–III с релаксационным алгоритмом, поскольку на практике он иногда применяется «наудачу» в том числе и при невыполнении необходимых теоретических предпосылок (и тем не менее, может показывать неплохие результаты, см. следующий раздел). Мы использовали вариант релаксационного алгоритма, который заключался в том, что новая точка на очередной итерации по текущей точке x выбиралась как точка минимума функции невязки по отрезку $[x; y(x)]$. Представ-

Таблица 3: Результаты работы алгоритма III
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	1	2	115	$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$	0
2	2	4	191	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 3.9209e-8 \end{pmatrix}$	0
3	12	34	1541	$\begin{pmatrix} -0.00023473 \\ -0.00023473 \end{pmatrix}$	7.6289e-8
4	8	40	2338	$\begin{pmatrix} 5.0637 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$	1.4833e-16
5	141	1016	57970	$\begin{pmatrix} -0.48894 \\ 9.7354 \\ -10 \end{pmatrix}$	3.9202e-8

ляется, что этот вариант релаксационного алгоритма более надежен в смысле сходимости, чем другие его варианты. Так, например, в [19] приводятся результаты применения одного из других вариантов релаксационного алгоритма к тесту №3, при использовании аналитического выражения для функции наилучшего ответа $y(x)$ (которое нетрудно найти непосредственно). При заданной точности 0.001 и оптимальном (в соответствии с формулой из [22]) способе выбора шага t_k потребовалось 108–157 вычислений аналога функции $\psi(x)$ (в зависимости от выбора начального приближения); при постоянном шаге количество вычислений оказалось 11977. Наш вариант релаксационного алгоритма сходится быстрее – см. таблицу 4. Вместе с тем, из таблицы видно, что в тестах 4 и 5 релаксационный алгоритм не сошелся – здесь на протяжении примерно 800 итераций текущая точка практически не менялась; выход из программы произошел вследствие достижения максимально допустимого количества итераций 1000.

Таблица 4: Результаты работы релаксационного алгоритма (`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	1	34	1331	$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}$	7.6928e-14
2	2	68	2623	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 3.921e-8 \end{pmatrix}$	1.086e-12
3	1	34	1541	$\begin{pmatrix} 4.6561e-7 \\ 4.6561e-7 \end{pmatrix}$	3.0009e-13
4	1000	34000	1938058	$\begin{pmatrix} 4.2627 \\ 9.8363 \\ -9.9483 \end{pmatrix}$	6.2596
5	1000	34000	1938058	$\begin{pmatrix} -1.6038 \\ 9.959 \\ -9.7646 \end{pmatrix}$	13.3017

8. Некоторые прикладные постановки

Далее приведем постановки некоторых прикладных задач, формализуемые в виде игры § 7 (или, что то же самое, § 5), использованные нами для дальнейшего тестирования описанных выше алгоритмов I–III.

1. **Управление мощностью излучения в устройствах сотовой связи**.

Следуя [24], рассмотрим проблему управления мощностью сигнала связи в сотовых системах с множественным доступом на основе разделения кода (CDMA - code division multiple access). Для простоты возьмем модель из одной ячейки, хотя в литературе обсуждаются также модели со многими ячейками и даже бесконечным количеством ячеек. Игроками в данной модели будут сотовые телефоны. Обычно предполагается, что количество игроков фиксировано и известно. Действием каждого игрока является выбор уровня мощности излучаемого сигнала в некоторых пределах, скажем, $[0;1]$ (иногда рассматривают бесконечный полуинтервал $[0;\infty)$). Важным параметром здесь является отношение сигнала к уровню интерференции (взаимного влияния) и шума – SINR (signal to interference and noise ratio). Функция выигрыша J_j, $j=\overline{1,\nu}$, каждого из игроков, как правило, обладает следующими свойствами.

1) J_j должна быть функцией уровня мощности передающего сигнала и SINR. В свою очередь, j-я SINR – это функция уровня мощности передающего сигнала j-го игрока и уровней мощности всех остальных игроков в ячейке.

2) Когда j-й игрок увеличивает уровень мощности своего сигнала, это увеличивает его SINR, но уменьшает SINRs всех остальных игроков («кто кричит громче всех, заглушает остальных»).

3) При фиксированном SINR игроки стремятся понизить уровень мощности с целью отсрочить время разрядки батареи как можно дольше.

4) При фиксированном уровне мощности игроки стремятся повысить SINR (чтобы их было «лучше слышно»). Иначе говоря, игроки желают, чтобы их сигнал имел больше шансов быть принятым принимающим устройством, то есть был более слышен среди шума, помех и сигналов других игроков.

Конкретные выражения J_j зависят от модели телефона, места расположения игрока, удаленности принимающего устройства, уровня шума в данной местности и многих других параметров. Важно отметить следующее. Не зная положения равновесия в данной игре и пытаясь действовать наудачу, игроки по факту действуют очень неэффективно. А именно, каждый игрок увеличивает мощность, чтобы увеличить свой SINR («каждый кричит как можно громче, стараясь перекричать остальных»), а в итоге быстро расходуют заряд батареи («теряют голос») и затрудняют прием сигнала остальных игроков («заглушают друг друга»), и получается, что никого не слышно. К тому времени, когда равновесие достигается естественным путем, оказывается, что все игроки уже излучают на мощности, гораздо большей, чем требуется, поскольку они могли бы снизить все мощности согласованно, и для всех это было бы лучше.

Как уже было сказано выше, описанная постановка проблемы взята из [24]. Далее мы формализуем и конкретизируем эту модель. Обозначим x_j – мощность сигнала j-го игрока, $\varphi_j(x_i, i=\overline{1,\nu})$ – функцию SINR j-го игрока. Заданные выше четыре свойства переписываются следующим образом.

1) $J_j = J_j(x_j, \varphi_j(x_i, i=\overline{1,\nu})) = J_j(x_1,\ldots,x_\nu)$.

2) $\varphi_j(x_i, i=\overline{1,\nu})$ возрастает по x_j и убывает по x_i, $i \neq j$.

3) $J_j(x_j, \varphi_j)$ убывает по x_j.

4) $J_j(x_j, \varphi_j)$ возрастает по φ_j.

Для проведения численного эксперимента мы возьмем конкретные функции, удовлетворяющие указанным четырем требованиям, и поставим следующую задачу.

Рассматривается одна ячейка сотовой связи, ν – количество сотовых телефонов в ячейке, $x_j \in [0;1]$ – мощность сигнала j-го телефона, $\varphi_j(x_i, i=\overline{1,\nu})$ – функция SINR j-го телефона, $J_j(x_j,\varphi_j)$ – интегрированная оценка эффективности работы j-го телефона по качеству приема сигнала и скорости разрядки батареи. Требуется найти наиболее оптимальные для совокупности всех телефонов значения x_j, $j=\overline{1,\nu}$, при следующих данных:
$\nu = 3$, $\varphi_1 = \ln(1+x_1)\cdot\big(\cos(x_2+x_3)+0.6\cos x_3\big)$, $J_1 = \varphi_1 + \cos x_1$,
$\varphi_2 = \sqrt{x_2}/\big(0.7 + x_1x_3 + 0.7x_1\big)$, $J_2 = \varphi_2 + \left(1 - \dfrac{1}{2-x_2}\right)$,
$\varphi_3 = \operatorname{arctg} x_3 \cdot \big(10 - (x_1+x_2)^5\big)$, $J_3 = \varphi_3 + (3 - e^{x_3})$.

2. **Задача о разведке и добыче полезных ископаемых**, см. [14, глава 8, задача 8.5, с.115].

Две корпорации производят разведку полезных ископаемых на n месторождениях. Фонды средств, выделяемых на разведку по совокупности всех месторождений, у первой и второй корпорации составляют соответственно a и b у.е. Прибыль, которую можно получить от добычи полезных ископаемых на i-м месторождении, равна $c_i > 0$ и распределяется между корпорациями пропорционально суммам, затраченным ими на разведку на данном месторождении. При этом предполагается, что если обе суммы равны нулю, то и прибыли, полученные корпорациями на данном месторождении, тоже равны нулю. Выигрышем каждой корпорации является суммарная прибыль по всем месторождениям. Требуется найти наиболее компромиссное распределение сумм, выделяемых корпорациями на разведку по каждому месторождению, в смысле их суммарных прибылей по всем месторождениям. Данные: $a = 50$, $b = 1$, $n = 2$, $c_1 = 100$, $c_2 = 110$.

Формализуем эту задачу. Положим:

$$X = \Big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} x_i = a\Big\}, \quad Y = \Big\{y \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} y_i = b\Big\}$$

– множества стратегий (при $n = 2$ их нетрудно сделать одномерными),

$$J_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y), \quad J_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y, x),$$

$$\varphi_i(x, y) = \left\{ \frac{c_i x_i}{x_i + y_i}, \text{ если } x_i + y_i > 0; \ 0, \text{ если } x_i + y_i = 0 \right\}.$$

Во избежание нуля в знаменателе можно взять

$$\varphi_i(x, y) = \frac{c_i x_i}{x_i + y_i + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число.

3. **Задача о рынке сбыта одного товара**. Рассмотрим модификацию [14, задача 8.9, с.117].

Имеется ν предприятий, выпускающих бесконечно делимый товар одного вида (например, молоко). Себестоимость единицы товара для j-го предприятия равна $c_j > 0$. Если K – общее количество товара на рынке, то рыночная цена единицы товара определяется по (известной из экономической теории) формуле: $p = a - Kb$, где $a, b > 0$. Максимально возможная производственная мощность j-го предприятия равна $d_j > 0$. Весь произведенный товар продается по рыночной цене p. Цель каждого предприятия состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от продажи товара. Требуется найти наиболее компромиссное распределение рынка между предприятиями (то есть наиболее оптимальные для них объемы производства). Данные:

$\nu = 3$, $c_1 = 10$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$, $d_1 = 20$, $d_2 = 50$, $d_3 = 70$, $a = 200$, $b = 2$.

Формализуем эту задачу. Пусть x_j – количество товара, которое планирует произвести j-е предприятие. Тогда $X_j = [0; d_j]$ – множество стратегий j-го игрока,

$$J_j(x) = \left(a - b\sum_{i=1}^{\nu} x_i - c_j\right) x_j$$

– функция выигрыша j-го предприятия, $j = \overline{1, \nu}$.

4. **Задача об организации работы очистных сооружений**. Рассмотрим модификацию [14, задача 8.8, с.116].

Имеется ν промышленных предприятий, которые используют по одной условной единице количества воды из природного водоема. Каждое предприятие располагает двумя очистными сооружениями для отработанной воды – с биологической очисткой и без нее – и независимо от других предприятий выбирает долю количества воды, которую оно собирается сбрасывать без биологической очистки. Согласно местным законам, в случае, когда по результатам экологического мониторинга обнаружено, что общее количество воды, сброшенной в водоем без биологической очистки, равно s, j-е предприятие платит штраф $\varphi_j(s)$. Стоимость биологической очистки единицы количества воды для j-го предприятия равна $a_j > 0$. Требуется найти наиболее компромиссное распределение количеств воды, отправляемых предприятиями на биологическую очистку. Данные:
$\nu = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\varphi_1(s) = s^2$, $\varphi_2(s) = s^3$, $\varphi_3(s) = e^s - 1$.

Формализуем эту задачу. Пусть x_j – доля количества отработанной воды, которую j-е предприятие собирается сбрасывать без биологической очистки. Тогда $X_j = [0; 1]$ – множество стратегий, а функция выигрыша

$$J_j(x) = -(1 - x_j)a_j - \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right), \quad j = \overline{1, \nu}.$$

5. **Задача о совместном финансировании**.

Пусть ν компаний собираются участвовать в совместном финансировании двух бизнес-проектов, доходности по которым определяются функциями $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$. Предполагается, что j-я компания располагает доступными средствами в размере $d_j > 0$. Доходность для

j-й компании от вложений в каждый из двух проектов определяется пропорционально ее доли участия в его финансировании. Каждая из компаний планирует израсходовать все доступные средства на участие в этих двух проектах. Требуется найти наиболее компромиссное распределение средств, инвестируемых компаниями в проекты. Данные:
$\nu = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $\varphi_1(a) = \sqrt{a}$, $\varphi_2(a) = \ln(1 + a)$.

Формализуем эту задачу. Пусть $x_j \in [0; d_j]$ – количество средств, которое j-я компания планирует вложить в первый проект. Естественно считать, что доходность j-й компании от вложений в каждый из двух проектов определяется в соответствии с ее долей участия в его финансировании. Поэтому функция выигрыша будет

$$J_j(x) = \frac{\varphi_1\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i\right) x_j}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i} + \frac{\varphi_2\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} y_i\right) y_j}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} y_i},$$

где $y_j = d_j - x_j$, $j = \overline{1, \nu}$.

6. **Задача об организации рекламной кампании на однопродуктовом рынке**. Рассмотрим модификацию [15, упр.1.5, с.54].

На однопродуктовом рынке конкурируют ν фирм. Емкость рынка равна Q. Прибыль j-й фирмы от реализации единицы продукта равна p_j. Известно, что доля каждой фирмы на рынке зависит от суммы, которую эта фирма тратит на рекламу, и пропорциональна соответствующей доле в общих расходах всех фирм на рекламу. При этом j-я фирма готова нести расходы на рекламу в пределах $[c_j; d_j]$. Требуется найти наиболее компромиссное распределение расходов фирм на рекламу. Данные:
$\nu = 3$, $Q = 1000$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.12$, $p_3 = 0.13$, $c_1 = 0$, $c_2 = 10$, $c_3 = 20$, $d_1 = 30$, $d_2 = 40$, $d_3 = 50$.

Формализуем эту задачу. Чистая прибыль j-й фирмы равна

$$J_j(x) = p_j \frac{Q x_j}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i} - x_j,$$

где $x_j \in [c_j; d_j]$ – расходы на рекламу, $j = \overline{1, \nu}$.

7. **Задача о распределении интернет-трафика между провайдерами**.

Пусть ν интернет-провайдеров делят независимо друг от друга общий канал выхода в интернет. Согласно заключенным договорам, j-й провайдер обязан использовать объем трафика в пределах $[c_j; d_j]$, причем потребителям он продает этот трафик по цене $a_j > 0$. Оплата за пользование каналом производится пропорционально доле провайдера в совокупно использованном трафике по тарифному плану $Q(s)$. Целью каждого провайдера является максимизация разности между суммой, полученной от потребителей, и оплатой за пользование каналом. Требуется найти наиболее компромиссное распределение долей трафика между провайдерами. Данные:
$\nu = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 5$, $Q(s) = 0.07\big(\exp R(s) - 1\big)$, $R(s) = 0.01 \operatorname{sh} s$.

Формализуем эту задачу. Выигрыш j-го провайдера будет

$$J_j(x) = a_j x_j - \frac{Q\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i\right) x_j}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i}, \quad j = \overline{1,\nu}.$$

8. **Задача об организации мероприятий по сокращению вредных выбросов в атмосферу**.

Пусть каждое из ν предприятий, расположенных в данной местности, может проводить или не проводить мероприятия по сокращению вредных выбросов в атмосферу. Пусть d_j – общий объем вредных газов, вырабатываемых как побочный продукт производства на j-м предприятии, $x_j \in [0; d_j]$ – та их часть, которая подвергается утилизации и очистке, a_j – стоимость очистки на единицу объема; $Q(s)$ – штраф, налагаемый на каждое предприятие за обнаружение по результатам экологического мониторинга общего объема вредных выбросов в размере s. Требуется найти наиболее компромиссное распределение объемов x_j, $j = \overline{1,\nu}$. Данные:
$\nu = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 5$, $Q(s) = 0.01(e^s - 1)$.

Формализуем эту задачу. Выигрыш j-го предприятия будет

$$J_j(x) = -a_j x_j - Q\left(\sum_{i=1}^{\nu} (d_i - x_i)\right), \quad j = \overline{1,\nu}.$$

Таблица 5: Задачи, результаты алгоритма I
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	26	58	2243	$\begin{pmatrix} 0.14809 \\ 0.7265 \\ 1 \end{pmatrix}$	2.9455e-8
2	27	136	6303	$\begin{pmatrix} 23.8092 \\ 0.476337 \end{pmatrix}$	9.5564e-8
3	22	49	2351	$\begin{pmatrix} 20 \\ 25.0001 \\ 19.9997 \end{pmatrix}$	9.1913e-8
4	2	7	305	$\begin{pmatrix} 3.9209e-8 \\ 3.9209e-8 \\ 1 \end{pmatrix}$	0
5	21	50	2041	$\begin{pmatrix} 0.65061 \\ 1.2027 \\ 1.7548 \end{pmatrix}$	7.2643e-8
6	13	36	1666	$\begin{pmatrix} 17.7913 \\ 27.6358 \\ 31.4212 \end{pmatrix}$	2.6364e-8
7	157	869	34801	$\begin{pmatrix} 0.9195 \\ 2.1529 \\ 3.3889 \end{pmatrix}$	7.5556e-8
8	2	7	329	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3.70170 \\ 4.628e-8 \end{pmatrix}$	0

Таблица 6: Задачи, результаты алгоритма II
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	29	1097	41725	$\begin{pmatrix} 0.14816 \\ 0.72655 \\ 1 \end{pmatrix}$	6.7794e-008
2	1	36	1703	$\begin{pmatrix} 23.8095 \\ 0.47619 \end{pmatrix}$	5.3291e-15
3	17	644	30316	$\begin{pmatrix} 20 \\ 24.9998 \\ 20.0003 \end{pmatrix}$	6.761e-8
4	12	454	17291	$\begin{pmatrix} 3.9235e-8 \\ 4.9385e-8 \\ 1 \end{pmatrix}$	1.5542e-8
5	26	967	38721	$\begin{pmatrix} 0.64884 \\ 1.2030 \\ 1.7558 \end{pmatrix}$	9.4516e-8
6	80	2977	134011	$\begin{pmatrix} 17.7902 \\ 27.6348 \\ 31.4220 \end{pmatrix}$	4.9345e-8
7	178	6633	265361	$\begin{pmatrix} 0.91986 \\ 2.1548 \\ 3.3866 \end{pmatrix}$	8.4652e-8
8	10	378	15540	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3.7017 \\ 4.628e-8 \end{pmatrix}$	0

Таблица 7: Задачи, результаты алгоритма III
(`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	43	184	7031	$\begin{pmatrix} 0.14854 \\ 0.72556 \\ 1 \end{pmatrix}$	5.9509e-8
2	235	1067	49129	$\begin{pmatrix} 23.8104 \\ 0.476257 \end{pmatrix}$	8.6759e-8
3	24	65	3103	$\begin{pmatrix} 20 \\ 25.0001 \\ 20.0001 \end{pmatrix}$	-2.4924e-6
4	23	143	5473	$\begin{pmatrix} 3.9209e-8 \\ 3.9209e-8 \\ 1 \end{pmatrix}$	0
5	34	145	5841	$\begin{pmatrix} 0.64946 \\ 1.2024 \\ 1.7554 \end{pmatrix}$	9.8492e-8
6	13	38	1756	$\begin{pmatrix} 17.7935 \\ 27.6357 \\ 31.4211 \end{pmatrix}$	8.4446e-8
7	143	605	24241	$\begin{pmatrix} 0.91987 \\ 2.1549 \\ 3.3866 \end{pmatrix}$	9.7459e-8
8	47	292	12014	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3.7017 \\ 4.628e-8 \end{pmatrix}$	0

Таблица 8: Задачи, результаты релаксационного алгоритма (`Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений $\psi(x)$, `jEvals` – максимум по количеству вычислений выигрышей)

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	1000	34000	1292039	$\begin{pmatrix} 0.6799 \\ 0.79257 \\ 0.6799 \end{pmatrix}$	0.089998
2	197	6698	308155	$\begin{pmatrix} 23.8104 \\ 0.47611 \end{pmatrix}$	9.5344e-8
3	17	578	27214	$\begin{pmatrix} 20 \\ 24.9998 \\ 20.0001 \end{pmatrix}$	2.8464e-8
4	1000	34000	1292039	$\begin{pmatrix} 1.1661e-7 \\ 0.26495 \\ 0.64899 \end{pmatrix}$	0.072331
5	8	272	10921	$\begin{pmatrix} 0.64875 \\ 1.2031 \\ 1.756 \end{pmatrix}$	8.0064e-8
6	7	238	10756	$\begin{pmatrix} 17.7902 \\ 27.6368 \\ 31.4218 \end{pmatrix}$	8.4895e-8
7	1000	34000	1360041	$\begin{pmatrix} 1.1481 \\ 2.154 \\ 3.1563 \end{pmatrix}$	0.0049162
8	1000	34000	1394042	$\begin{pmatrix} 1.6754 \\ 2.2339 \\ 2.7924 \end{pmatrix}$	0.52325

Результаты численных экспериментов см.[4] в таблицах 5, 6, 7. Как видно из них, алгоритм I вновь оказался более эффективным по сравнению с алгоритмом II (за исключением лишь задачи 2). Алгоритм III можно поставить примерно между ними. Для сравнения, в таблице 8 приведены результаты работы релаксационного алгоритма. Отсюда видно, что в отличие от предлагаемых нами алгоритмов I–III, релаксационный алгоритм сходился далеко не всегда, а примерно лишь в половине случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базара М., Шетти К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.* М.: Мир, 1982. 583 с.

2. Васин В.В., Еремин И.И. *Операторы и итерационные процессы фейровского типа. Теория и приложения.* М., Ижевск: РХД, 2005. 200 с.

3. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций.* М.: ИЦ «Академия», 2008. 464 с.

4. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики.* М.: МАКС Пресс, 2005. 272 с.

5. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985. 272 с.

6. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* М.: Наука, 1982. 432 с.

7. Евтушенко Ю.Г. *Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование.* М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2013. 144 с.

[4] При использовании алгоритма I параметр ε выбирался равным 10^{-6} везде, кроме задачи 2; для задачи 2 мы взяли $\varepsilon = 10$. Если же и здесь взять $\varepsilon = 10^{-6}$, то сходимость тоже наблюдается, но более медленная: `Iters=515`, `oEvals=1220`, `jEvals=56167`.

8. Еремин И.И., Мазуров В.Д. *Нестационарные процессы математического программирования.* М.: Наука, 1979. 288 с.

9. Еремин И.И., Пацко С.В. *Фейеровские процессы для бесконечных систем выпуклых неравенств* // Труды ИММ УрО РАН. 2002. Т. 8. № 1. С. 106–115.

10. Еремин И.И. *Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации.* Челябинск: ИЦ ЮУрГУ, 2009. 199 с.

11. Еремин И.И. *Отображения сжатия* // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 106–115.

12. Еремин И.И., Попов Л.Д. *Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов* // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 44–65.

13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984. 752 с.

14. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* М.: Высшая школа, 1986. 287 с.

15. Писарук Н.Н. *Введение в теорию игр.* Минск: БГУ, 2015. 256 с.

16. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* М.: Наука, 1983. 384 с.

17. Чернов А.В. *О существовании равновесия по Нэшу в дифференциальной игре, связанной с эллиптическими уравнениями: монотонный случай* // Матем. теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. Вып. 3. С. 48–78.

18. Чернов А.В. *О некоторых подходах к поиску равновесия по Нэшу в вогнутых играх* // Матем. теория игр и ее приложения. 2017. Т. 9. Вып. 2. С. 62–104.

19. Чиркина Д.Н. *Обзор метода релаксации для поиска точек равновесия по Нэшу в непрерывных некооперативных играх многих лиц* / Материалы XVI Международной молодежной конф. «Наукоемкие технологии и интеллектуальные системы – 2014». Секция 1: «Интеллектуальные системы». М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014. С. 37–40.

20. Contreras J., Krawczyk J.B., Zuccollo J. *Playing Pollution Games with Thermal Electricity Generators* // Environmental Modeling and Assessment. 2018. Vol. 23. No. 4. P. 639–651.

21. Facchinei F., Kanzow C. *Generalized Nash equilibrium problems* // Ann. Oper. Res. 2010. Vol. 175. P. 177–211.

22. Krawczyk J.B., Uryasev S. *Relaxation Algorithms to Find Nash Equilibria with Economic Applications* // Environmental Modeling and Assessment. 2000. No. 5. P. 63–73.

23. Lei Wang, Cui Liu, Hongwei Gao, Chong Lin. *Strongly strategic support of cooperative solutions for games over event trees* // Operations Research Letters. 2020. Vol. 48. P. 61–66.

24. MacKenzie A.B., DaSilva L.A.. *Game Theory for Wireless Engineers.* Virginia Polytechnic Institute and State University: Morgan&Claypool publishers, 2006. ix+76 p.

25. Meng T., Schiff N.R., Godfrey P.B., Schapira M. *PCC Proteus: Scavenger Transport And Beyond* / In Annual conference of the ACM Special Interest Group on Data Communication on the applications, technologies, architectures, and protocols for computer communication (SIGCOMM'20), August 10-14, 2020, Virtual Event, USA. ACM, New York, NY, USA. P. 615–631.

26. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and Iterative Processes of Fejér Type. Theory and Applications.* Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2009. xiv+155 p.

ON SOME GENERAL SCHEME OF CONSTRUCTING ITERATIVE METHODS FOR SEARCHING THE NASH EQUILIBRIUM IN CONCAVE GAMES

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University; Nizhnii Novgorod State Technical University; Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The subject of the paper is finite-dimensional concave games id est noncooperative n-person games with objective functionals concave with respect to 'their own' variables. For such games we investigate the problem of designing iterative algorithms for searching the Nash equilibrium with convergence guaranteed without requirements concerning objective functionals such as smoothness and as convexity in 'strange' variables or another similar hypotheses (in the sense of weak convexity, quasiconvexity and so on). In fact, we prove some assertion analogous to the theorem on convergence of M-Fejér iterative process for the case when an operator acts in a finite-dimensional compact and nearness to an objective set is measured with the help of arbitrary continuous function. Then, on the base of this assertion we generalize and develope the approach suggested by the author formerly to searching the Nash equilibrium in concave games. The last one can be regarded as "a cross between" the relaxation algorithm and the Hooke–Jeeves method of configurations (but taking into account a specific character of the the residual function being minimized). Moreover, we present results of numerical experiments with their discussion.

Keywords: finite-dimensional concave game, Nash equilibrium, searching iterative algorithm.