Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.2, с. 3–17

УДК 519.853.62
ББК 22.18

О МНОГОСТАДИЙНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЕЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Евгения В. Гасникова
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9
Александр В. Гасников
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9
Институт проблем передачи информации РАН
127994, Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1
Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета
385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
Демьян В. Ярмошик
Меруза Б. Кубентаева
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9
Михаил И. Персиянов
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9

©2023 Е.В. Гасникова, А.В. Гасников, Д.В. Ярмошик, М.Б. Кубентаева, М.И. Персиянов, И.В. Подлипнова, Е.В. Котлярова, И.А. Склонин, Е.Д. Подобная, В.В. Матюхин

Институт проблем передачи информации РАН
127994, Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1
Ирина В. Подлипнова
Екатерина В. Котлярова
Илья А. Склонин
Елена Д. Подобная
Владислав В. Матюхин
Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9
e-mail: egasnikova@yandex.ru, gasnikov@yandex.ru,
yarmoshik.dv@phystech.edu, kubentay@gmail.com,
persiianov.mi@phystech.edu, podlipnova.iv@phystech.edu,
kotlyarova.ev@phystech.edu, sklonin.ilya@phystech.edu,
epodobnaya@gmail.com, matyukhin@phystech.edu

Многостадийное моделирование транспортных потоков начало активно развиваться с 70-х годов прошлого века. Были созданы пакеты транспортного моделирования, в основе которых имеется набор задач выпуклой оптимизации, последовательное решение которых (по циклу) приближает к искомому равновесному распределению. Альтернативный путь – попробовать найти такую общую задачу выпуклой оптимизации, решение которой давало бы искомое равновесие. В данной статье предпринята попытка найти достаточные условия, гарантирующие, что альтернативный путь будет успешен. В частности, в статье было показано, что в качестве одного из блоков многостадийной модели можно выбирать модель стабильной динамики (а не общепринятую модель Бэкмана) в сочетании с возможностью выбирать различные типы пользователей и транспортных средств.

Ключевые слова: транспортное равновесие, четырехстадийная модель, выпуклая оптимизация, модель стабильной динамики.

Поступила в редакцию: 04.05.23 *После доработки*: 05.06.23 *Принята к публикации*: 15.06.23

1. Введение

В данной работе описывается вариационный (экстремальный) принцип, сводящий при определенных условиях поиск равновесия в многостадийной модели распределения транспортных потоков по сети к задаче выпуклой оптимизации. Под распределением потоков, прежде всего, понимается: 1) расчёт матрицы корреспонденций и 2) распределение потоков по путям при заданных корреспонденциях. Таким образом, речь идет о двухуровневой модели распределения. Многостадийные модели транспортных потоков являются одним из основных объектов изучения при долгосрочном транспортном планировании [27, 5, 14]. С помощью таких моделей можно просчитывать долгосрочные последствия: введения в эксплуатацию различных инфраструктурных объектов, изменения дорожной сети и т.п. В отличие от подхода [9] здесь мы погружаем в двухстадийную модель полноценную четырехстадийную модель, которая, среди прочего, учитывает расщепление перемещений на личном и общественном транспорте, а также может учитывать множество других транспортных средств и сетей дорог. Обсуждаются различные слои спроса.

Следуя [3], в статье выписывается выпукло-вогнутая седловая задача, к которой сводится поиск равновесия в такой двухстадийной модели. Далее эта задача упрощается (путем перехода к двойственному представлению), и совсем кратко описывается численный способ решения возникающей в итоге (двойственной) задачи. Отличительными особенностями данной работы являются: простой способ получения итоговой задачи оптимизации (седловой задачи) и способ ее решения. В предлагаемых ранее подходах либо не рассматривалась возможность предельного перехода от модели Бэкмана к модели стабильной динамики (Нестеров–деПальма) [19, 15], либо рассматривался только один слой спроса и одна транспортная сеть [3].

2. Основные определения и обозначения

Для простоты будем рассматривать замкнутую транспортную систему, описываемую графом $\Gamma = \langle V, E \rangle$, где V – множество вершин ($|V| = n$), а E – множество ребер ($|E| = m$). Будем обозначать ребра графа через $e \in E$. Для стандартной транспортной системы можно ожидать, что $m \simeq 3n$. Для больших мегаполисов (таких как Москва)

$n \simeq 10^5$. Транспортный граф Γ считается известным.

Будем считать, что имеются разные слои спроса, которые мы будем индексировать буквой r. Например, слой спроса, отвечающий передвижениям «дом-работа» или «дом-учеба». Внутри каждого слоя спроса допустимы разные типы пользователей $t \in M(r)$ ($M(r)$ – множество типов пользователей, отвечающих слою спроса r), например, имеющие личный транспорт, которые могут выбирать между личным и общественным транспортом и класс пользователей, которые не имеют личный транспорт. Тип транспорта будем обозначать индексом k. Множество типов транспортных средств, доступных пользователям типа k будем обозначать $Z(t)$. Множество всех типов транспортных средств K можно разбить на классы транспортных средств $\{K_b\}$, использующих (внутри класса) одну и ту же транспортную сеть b ($b \in B$). Под транспортной сетью понимается набор маршрутов P^b (составленных из ребер Γ), доступных для перемещения по данной сети. Например, можно выделить обычную сеть дорог для личного транспорта, которой пользуются легковые автомобили и частично общественный транспорт. Можно выделить велодорожки (особенно популярно в Германии, Бельгии и Голландии), которыми могут пользоваться не только велосипедисты, но, например, и самокатные средства.

Часть вершин $O \subseteq V$ (*origin*) являются источниками корреспонденций, а часть – стоками корреспонденций $D \subseteq V$ (*destination*). Если говорить более точно, то вводится множество пар (источник, сток) корреспонденций $OD \subseteq V \bigotimes V$. Сами корреспонденции будем обозначать через d_{ij}^{rt}, где $(i,j) \in OD$. Как правило $|OD| \ll n^2$ [3]. Не ограничивая общности, будем далее считать, что $\sum\limits_{r,t \in M(r);(i,j)\in OD} d_{ij}^{rt} = 1$. Множество пар OD считается известным. Корреспонденции – не известны! Однако известны (заданы) характеристики источников и стоков корреспонденций, соответственно, l_i^r и w_j. То есть известны величины [1] $\{l_i^r\}_{i\in O}$, $\{w_j\}_{j\in D}$:

$$\sum_{t\in M(r)} \sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij}^{rt} = l_i^r, \quad \sum_{r} \sum_{t\in M(r)} \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij}^{rt} = w_j. \qquad (2.1)$$

Заметим, что $\sum\limits_r \sum\limits_{i\in O} l_i^r = \sum\limits_{j\in D} w_j = 1$. Условие (2.1) будем также для краткости записывать в виде $d \in (l, w)$.

Обозначим через (зависимость $b(k)$ определяет тип сети по типу транспортного средства: $b = b(k)$ тогда и только тогда, когда $k \in K_b$)

$$\tau_e^k(f_{e,b(k)}, f_e^k) = \tau_e(f_{e,b(k)}) + \tilde{\tau}_e^k(f_e^k)$$

функцию затрат (например, временных) на проезд по ребру (участку дороги) e на типе транспортных средств k на сети $b(k)$, если суммарный поток на этом участке сети $f_{e,b(k)}$, а поток транспортных средств типа k равен f_e^k ($f_{e,b(k)} = \sum\limits_{k \in K_b} f_e^k$). Функции $\tau_e(f_{e,b(k)})$ и $\tilde{\tau}_e^k(f_e^k)$ считаются заданными, например, таким образом: [2, 28]

$$\tau_e(f) = \bar{t}_e \left(1 + \zeta \left(\frac{f}{\bar{f}_e}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{2.2}$$

где $\bar{t}_e$ – время прохождения ребра e, когда участок свободный (определяется разрешенной скоростью на данном участке), а $\bar{f}_e$ – пропускная способность ребра e (определяется полосностью: [пропускная способность] $\leq$ [число полос] * [2000 авт/час] и характеристиками перекрестков). Считается, что эти характеристики известны [31]. Параметр $\mu = 0.25$ – BPR-функции [28], но допускается и $\mu \to 0+$ – модель стабильной динамики [26, 3, 10]. Параметр $\zeta > 0$ также считается заданным. Относительно $\tilde{\tau}_e^k(f)$ часто считают, что $\tilde{\tau}_e^k(f) \equiv c_e^k$ [13]. Например, если транспортное средства k весит больше 3.5 тонн, то по некоторым ребрам e проезд может быть запрещен и тогда можно полагать $c_e^k = \infty$.

Полезно также ввести t_e^k – (временные) затраты на прохождения ребра e на транспортном средстве типа k. Обозначение t ранее уже было использовано под тип пользователя, однако это не должно вызывать недоразумение, поскольку далее по смыслу будет понятно, какое t имеется в виду в том или ином случае. Согласно вышенаписанному

$$t_e^k = t_{e,b(k)} + \tilde{t}_e^k = \tau_e(f_{e,b(k)}) + \tilde{\tau}_e^k(f_e^k) = \tau_e^k(f_{e,b(k)}, f_e^k). \tag{2.3}$$

По этим затратам $t^k = \{t_e^k\}_{e \in E}$ можно определить затраты на перемещение из источника i в сток j по кратчайшему пути:

$$T_{ij}^k(t^k) = \min_{p \in P_{ij}^{b(k)}} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e^k, \tag{2.4}$$

где p – путь (без самопересечений – циклов) на графе (набор ребер), $P_{ij}^{b(k)}$ – множество всевозможных путей на графе транспортной сети $b(k)$, стартующих из источника i и заканчивающихся в стоке j, $\delta_{ep} = 1$, если ребро e принадлежит пути p и $\delta_{ep} = 0$ – иначе.

В ряде выкладок далее также будет полезен вектор $x^{rtk} = \{x_p^{rtk}\}_{p\in P^{b(k)}}$ – вектор распределения потоков по путям, где $P^b = \bigcup\limits_{(i,j)\in OD} P_{ij}^b$. Заметим, что

$$f_e^k = \sum_{r;\ t\in M(r);\ p\in P^b(k)} \delta_{ep} x_p^{rtk}. \tag{2.5}$$

Все дальнейшие обозначения будем вводить по мере надобности.

3. Энтропийная модель А.Дж. Вильсона расчёта матрицы корреспонденций

Под энтропийной моделью расчета матриц корреспонденций $d^{rt}(\bar{T})$ понимается определенный способ вычисления набора корреспонденций $\{d_{ij}^{rt}\}_{(i,j)\in OD}$ по известным матрицам средних затрат $\bar{T} = \{\bar{T}_{ij}^t\}_{(i,j)\in OD}$. Этот способ заключается в решении задачи энтропийно-линейного программирования, которую можно понимать, как энтропийно-регуляризованную транспортную задачу

$$\min_{d\in(l,w);d\geq 0}\left\{\sum_r \beta^r \sum_{t\in M(r);\ (i,j)\in OD} d_{ij}^{rt}\bar{T}_{ij}^t + \sum_{r;\ t\in M(r);\ (i,j)\in OD} d_{ij}^{rt}\ln d_{ij}^{rt}\right\}, \tag{3.1}$$

где параметры $\beta^r > 0$ считаются известными [1, 2, 5]. Относительно выбора этих параметров, см. [3, 5, 8]. В действительности, это, так называемые, структурные параметры, и от их подгонки существенно зависит качество модели. Если известны средние времена C^r в пути для разных слоев спроса r, то находить β^r можно из системы уравнений

$$\sum_{t\in M(r);\ (i,j)\in OD} d_{ij}^{rt}(\beta)\bar{T}_{ij}^{tk} \simeq C^r.$$

Пример. В качестве простого примера практической ситуации можно взять $r = \{1, 2\}$, где $r = 1$ – отвечает слою спроса «дом-работа», а $r = 2$ – отвечает слою спроса «дом-учеба». При этом

пассажиры типа $t = 1$ могут пользоваться личным ($k = 1$) и общественным транспортом ($k = 2$), $t = 2$ – только общественным, а $t = 3$ возникает только в слое спроса $r = 2$ и отвечает пассажирам, использующих предусмотренный спец. транспорт, например, школьный автобус ($k = 3$).

К сожалению, если β_r не равны между собой, то не получается эволюционно проинтерпретировать модель расчета матрицы корреспонденций, как некоторое равновесие микросистемы в стиле [2, 3, 4, 5, 20]. Как мы увидим в дальнейшем, в этом случае также не получается свести поиск равновесия в многостадийной модели к задаче оптимизации.

4. Модели равновесного распределения транспортных потоков по путям

Матрица корреспонденций $\{d_{ij}^{rt}\}_{(i,j)\in OD}$ порождает (вообще говоря, неоднозначно) вектор распределения потоков по путям x^{rt}. Неоднозначность заключается в том, что балансовые ограничения, которые возникают на $x^{rt} \in X^{rt}(d)$:

$$x^{rtk} \geq 0 : \quad \forall (i,j) \in OD \to \sum_{k\in M(r)} \sum_{p\in P_{ij}^{b(k)}} x_p^{rtk} = d_{ij}^{rt},$$

как правило, не определяют вектор x^{rt} однозначно. Кроме того, размерность векторов x^{rtk} может быть очень большой (число путей может быть очень большим), поэтому удобно будет сформулировать модель равновесного распределения потоков по путям в двойственной форме, подобно [5]. Но сначала выпишем прямую задачу поиска равновесия в модели равновесного распределения потоков по путям, которая получается исходя из потенциальности соответствующей игры загрузки. В такой популяционной «игре» тип игроков определяется типом корреспонденции (i, j), которой они принадлежат, слоем спроса r и типом игрока t, а стратегией игрока является выбор транспортного средства $k \in Z(t)$ и маршрута $p \in P_{ij}^{b(k)}$ [30, 5, 12].

Введем функцию (опуская возможные различные индексы и волны)

$$\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z)dz$$

и сопряженную к ней функцию по Фенхелю–Рокафеллару:

$$\sigma_e^*(t_e) = \max_{f_e \geq 0} \{t_e f_e - \sigma_e(f_e)\}.$$

Это определение делается для того, чтобы «обратить» формулу $t_e = \tau_e(f_e)$. А именно, $t_e = \tau_e(f_e)$ тогда и только тогда, когда $f_e = d\sigma_e^*(t_e)/dt_e$.

Введем функционал

$$\Psi(f) = \sum_{b \in B;\ e \in E} \sigma_e(f_{e,b}) + \sum_{k \in K;\ e \in E} \tilde{\sigma}_e^k(\tilde{f}_e^k).$$

Несложно проверить, что этот функционал будет потенциалом в описанной выше популяционной игре. Действительно, учитывая (2.3), (2.5), получаем свойство потенциальности

$$\frac{\partial \Psi(f(x))}{\partial x_p^{rtk}} = \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e^k(f(x)),$$

поскольку правая часть, как раз есть затраты на пути p.

Принцип Нэша–Вардропа (что каждый игрок выбирает наилучшую для себя стратегию / маршрут при заданных стратегиях остальных игроков) в данном случае можно записать как задачу оптимизации

$$\min_{x^{rt} \in X^{rt}(d), r, t \in M(r)} \Psi(f(x)). \tag{4.1}$$

Более того, эта задача будет выпуклой, если функции $\tau_e(f_e)$ не убывают, что является естественным предположением, см., например, (2.2). Поэтому, вместо решения исходной задачи, можно перейти к решению двойственной, используя обозначение (2.4).

Теорема 4.1. *Двойственная задача для задачи* (4.1) *будет иметь вид*

$$\max_{t = \left\{t_{b(k)}, \tilde{t}^k\right\}_{k \in K} \geq 0} \left\{ \sum_{r;\ t \in M(r);\ (i,j) \in OD} d_{ij}^{rt} \bar{T}_{ij}^t - \sum_{b \in B;\ e \in E} \sigma_e^*(t_{e,b(k)}) - \sum_{k \in K;\ e \in E} \tilde{\sigma}_e^{*,k}(\tilde{t}_e^k) \right\}, \tag{4.2}$$

где

$$\bar{T}_{ij}^t = \min \left\{ \left\{ T_{ij}^k(t_{b(k)} + \tilde{t}^k) \right\}_{k \in Z(t)} \right\}. \tag{4.3}$$

Причем, (формула Демьянова–Данскина)

$$f_e^k = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_e^k} \left\{ \sum_{r;\ t\in M(r);\ (i,j)\in OD} d_{ij}^{rt} \min \left\{ \left\{ T_{ij}^k(t_{b(k)} + \tilde{t}^k) \right\}_{k\in Z(t)} \right\} \right\}_{t=t_*},$$

где t_* – решение задачи (4.2)*. Более строго, это равенство следует писать в субдифференциальной форме (детали см., например, [5]).*

Вместо равновесия Нэша–Вардропа можно рассматривать стохастические равновесия, в основе которых лежит выбор игроками не наилучшей стратегии, а рандомизированный выбор стратегии согласно логит-распределению. В таком случае min можно заменить на его сглаженную версию softmin [5]. Аналогичный шаг можно сделать и в определении $T_{ij}^k(t^k)$ (2.4).

Отметим также, что если $\tilde{\tau}_e^k(f) \equiv c_e^k$, то можно считать $\tilde{t}_e^k = c_e^k$ и исключить соответствующую переменную из двойственной задачи.

Важным наблюдением является возможность предельного перехода (предел «стабильной динамики») $\mu \to 0+$ и (2.2) в задачах (4.1) и (4.2). Такой предельный переход впервые был предложен для более частной модели в работе [3]. Более современное изложение можно найти в работе [9].

5. Двухстадийная модель

Стандартный способ поиска равновесий в многостадийных транспортных моделях предполагает последовательную прогонку (отрешивание) двух блоков (двух задач) (3.1) и (4.1). Из решения (3.1) находим зависимость $d(T)$, а из решения (4.1) находим зависимость $T(t(f(x(d))))$. Неподвижная точка такой прогонки и будет искомым равновесием. На практике именно такая процедура обычно и реализуется [27, 5, 14]. В частности, насколько нам известно, в России все основные расчеты в самых разных организация (Генпланах, Департаментах транспорта и т.п.) проводились на основе пакетов транспортного моделирования, в основу которых была положена именно такая прогонка. Однако, чтобы такая процедура сходилась на практике часто необходимо достаточно удачно выбрать точку старта. Более надежный численный способ поиска равновесия в двухстадийной модели заключается в том, чтобы посмотреть на задачи (3.1) и

(4.2), и попытаться объединить эти две задачи оптимизации в одну седловую задачу, учитывая их структуры (здесь для краткости соответствующие композитные члены в функционалах задач (3.1) и (4.2) были обозначены g и h, а общая часть (зависящая от переменных d и t) обозначена через $G = \hat{G}$):

$$\min_{d\in(l,w)} G(d,\bar{T}(t)) + g(d),$$

$$\max_{t\geq 0} \hat{G}(d,\bar{T}(t)) - h(t).$$

Если $G = \hat{G}$ (для этого нужно, чтобы все $\beta_r = 1$, на самом деле, не обязательно, чтобы именно 1, но важно, чтобы были равны между собой), то совместное решение этих двух задач можно найти из решения седловой (выпукло-вогнутой) задачи

$$\min_{d\in(l,w)} \max_{t\geq 0} G(d,\bar{T}(t)) + g(d) - h(t),$$

которую, в свою очередь, можно переписать как (теорема фон Неймана–Сиона–Какутани)

$$\max_{t\geq 0} \min_{d\in(l,w)} G(d,\bar{T}(t)) + g(d) - h(t).$$

И уже для последней седловой задачи можно построить двойственную по части переменных d. В результате получается задача (вогнутой) оптимизации с двумя блоками переменных: t и блок двойственных переменных для d (множители Лагранжа к ограничениям $d \in (l,w)$). Мы не будем здесь приводить детали, отметим лишь, что все описанные выкладки будут близки к соответствующим выкладкам работы [5], в которой рассматривался частный случай описанной модели.

По-видимому, впервые такой способ (для более простой модели) был обнаружен в работе [19] (более современное изложение см. в [15]) и независимо переоткрыт в большей общности и с эволюционной интерпретацией в работе [3] (более современное изложение см. в [5]).

В настоящей работе также были произведены различные численные эксперименты для графа г. Москвы и области до бетонного кольца (данные предоставили коллеги из Российского университета

транспорта) с числом ребер $m \simeq 10^5$. Использованный для решения полученной двойственной задачи прямо-двойственный универсальный ускоренный метод Нестерова (в версии из статьи [7]) в сочетании с методом Синхорна–Брэгмана–Шелейховского [29] (метод балансировки) для внутренней задачи (по двойственным к $d \in (l, w)$) переменным) показал себя наилучшим образом, и уменьшил зазор двойственности на 6 порядков за 2 часа работы на современном многоядерном ноутбуке [11].

В заключение заметим, что из-за структуры итоговой двойственной задачи, возможно, ускоренные универсальные блочно-покомпонентные методы [6] проявят себя еще лучше, чем просто ускоренный универсальный метод в сочетании с методом балансировки. В будущем планируется проверить эту гипотезу.

Благодарности

Исследование в части теореии было проведено в рамках выполнения государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No 0714-2020-0005) совместно с Российским университетом транспорта, любезно предоставившим авторскому коллективу данные для расчетов. В частности, персональная благодарность Алексею Вячеславовичу Шурупову, Владимиру Ивановичу Швецову и Леониду Михайловичу Барышеву, а также Владимиру Викторовичу Мазалову за ценный совет, который помог лучше оформить результат (4.1).

Практическая часть исследований была выполнена при поддержке ежегодного дохода ФЦК МФТИ (целевого капитала № 5 на развитие направлений искусственного интеллекта и машинного обучения в МФТИ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильсон А.Дж. *Энтропийные методы моделирования сложных систем.* М.: Наука, 1978.

2. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков.* Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013.

3. Гасников А.В. и др. *О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков* // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, №. 6. С. 34–70.

4. Гасников А.В. и др. *Эволюционные выводы энтропийной модели расчета матрицы корреспонденций* // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 4. С. 111–124.

5. Гасников А.В., Гасникова Е.В. *Модели равновесного распределения потоков в больших сетях*. М.: МФТИ, 2020.

6. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Усманова И.Н. *О нетривиальности быстрых (ускоренных) рандомизированных методов* // Труды Московского физико-технического института. 2016. Т. 8, №. 2 (30). С. 67–100.

7. Гасников А.В., Нестеров Ю.Е. *Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, №. 1. С. 51–68.

8. Иванова А.С. и др. *Калибровка параметров модели расчета матрицы корреспонденций для г. Москвы* // COMPUTER. 2020. Т. 12, №. 5. С. 961–978.

9. Котлярова Е.В. и др. *Поиск равновесий в двухстадийных моделях распределения транспортных потоков по сети* // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, №. 2. С. 365–379.

10. Котлярова Е.В. и др. *Обоснование связи модели Бэкмана с вырождающимися функциями затрат с моделью стабильной динамики* // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14:2. С. 335–342.

11. Кубентаева М.Б. https://github.com/MeruzaKub/TransportNet.

12. Мазалов В.В., Чиркова Ю.В. *Сетевые игры*. Лань, 2022.

13. Швецов В.И. *Математическое моделирование транспортных потоков* // Автоматика и телемеханика. 2003. №. 11. С. 3–46.

14. Boyles S.D., Lownes N.E., Unnikrishnan A. *Transportation network analysis. Volume I: Static and Dynamic Traffic Assignment*, 2020.

15. De Cea J., Fernandez J.E., Dekock V. and Soto A. *Solving network equilibrium problems on multimodal urban transportation networks with multiple user classes* // Transport Reviews. 2005. V. 25(3). P. 293–317.

16. Dvurechensky P. et al. *Primal-dual method for searching equilibrium in hierarchical congestion population games* // arXiv:1606.08988. 2016.

17. Dvurechensky P., Gasnikov A., Kroshnin A. *Computational optimal transport: Complexity by accelerated gradient descent is better than by Sinkhorn's algorithm* // arXiv:1802.04367. 2018.

18. Dvurechensky P. et al. *A stable alternative to Sinkhorn's algorithm for regularized optimal transport* // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Springer, Cham, 2020. P. 406-423.

19. Evans S.P. *Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment* // Transportation Research. 1976. V. 10(1). P. 37-–57.

20. Gasnikova E. et al. *An evolutionary view on equilibrium models of transport flows* // Mathematics. 2023. V. 11, no. 4. P. 858.

21. Kamzolov D., Dvurechensky P., Gasnikov A. *Universal intermediate gradient method for convex problems with inexact oracle* // Optimization Methods and Software. 2020. P. 1–28.

22. Kroshnin A. et al. *On the complexity of approximating Wasserstein barycenters // International conference on machine learning* // PMLR. 2019. P. 3530–3540.

23. Kubentayeva M., Gasnikov A. *Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for Stable Dynamics model and Beckmann model* // arXiv:2008.02418. 2020.

24. Nesterov Y. *Universal gradient methods for convex optimization problems* // Mathematical Programming. 2015. V. 152, no. 1-2. P. 381–404.

25. Nesterov Y. et al. *Primal–dual accelerated gradient methods with small-dimensional relaxation oracle* // Optimization Methods and Software. 2020. P. 1–38.

26. Nesterov Y., De Palma A. *Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives* // Networks and spatial economics. 2003. V. 3, no. 3. P. 371–395.

27. Ortuzar J.D., Willumsen L.G. *Modelling transport*. John Wiley and Sons, 2002.

28. Patriksson M. *The traffic assignment problem: models and methods*. Courier Dover Publications, 2015.

29. Peyre G., Cuturi M. *Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science* // Foundations and Trends in Machine Learning. 2019. V. 11, no. 5-6. P. 355–607.

30. Sandholm W. *Population games and evolutionary dynamics*. MIT press, 2010.

31. Stabler B., Bar-Gera H., Sall E. *Transportation Networks for Research Core Team. Transportation Networks for Research*. https://github.com/bstabler/TransportationNetworks.

ABOUT MULTISTAGE TRANSPORTATION MODEL AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR ITS POTENTIALITY

Evgeniya V. Gasnikova, Moscow Institute of Physics and Technology, Cand.Sc. (egasnikova@yandex.ru),
Alexander V. Gasnikov, Moscow Institute of Physics and Technology, Institute for Information Transmission Problems of RAS, Caucasus Mathematical Center, Dr.Sc. (gasnikov@yandex.ru),

Demyan V. Yarmoshik, Moscow Institute of Physics and Technology (yarmoshik.dv@phystech.edu),
Meruza B. Kubentaeva, Moscow Institute of Physics and Technology (kubentay@gmail.com),
Mikhail B. Persiianov, Moscow Institute of Physics and Technology, Institute for Information Transmission Problems of RAS (persiianov.mi@phystech.edu),
Irina V. Podlipnova, Moscow Institute of Physics and Technology (podlipnova.iv@phystech.edu),
Ekaterina V. Kotlyarova, Moscow Institute of Physics and Technology (kotlyarova.ev@phystech.edu),
Ilya A. Sklonin, Moscow Institute of Physics and Technology (sklonin.ilya@phystech.edu),
Elena D. Podobnaya, Moscow Institute of Physics and Technology (epodobnaya@gmail.com),
Vladislav V. Matyukhin, Moscow Institute of Physics and Technology (matyukhin@phystech.edu).

Abstract: Multistage modeling of traffic flows began to actively develop since the 70s of the last century. Transportation modeling packages were created, which are based on a set of convex optimization problems, whose sequential solution (with appropriate feedback mechanism) converges to the desired equilibrium distribution. An alternative way is to try to find such a general convex optimization problem, the solution of which would give the desired equilibrium. In this paper, we attempt to find sufficient conditions to guarantee that the alternative path will be successful. In particular, the paper has shown that one of the blocks of a multistage model can use a stable dynamics model (rather than the generally accepted Beckmann model), combined with the possibility to choose different types of users and vehicles.

Keywords: network equilibrium model, combined model, four-stage approach, convex optimization, stable dymanics model.