Математическая Теория Игр и её Приложения, т.15, в.3, с. 3–20

УДК 517.97
ББК 22.18

ИГРА «ПОЛИЦЕЙСКИЕ И ГРАБИТЕЛЬ» НА БЕСКОНЕЧНОЙ ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Абдулла А. Азамов
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9
Фатхул А. Кувватов
Хасан У. Туйлиев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 4
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, fatxulloh0444@gmail.com,
hasantuyliyev@gmail.com

Рассматривается два варианта игры «Полицейские и грабитель» на бесконечной шахматной доске, т.е. на графе, образующем правильное разбиение плоскости на квадраты. Даются эвристические и точные определения понятий «начальное состояние выигрышно для преследователя» и «начальное состояние выигрышно для убегающего». Затем устанавливаются критерии того, когда заданное начальное состояние выигрышно для преследователя и выигрышно для убегающего.

Ключевые слова: игра на графах, целочисленная решетка, «полицейские и грабители», задача качества, задача преследования, задача убегания, стратегия, ситуция равновесия.

Поступила в редакцию: 27.01.23 *После доработки*: 15.03.23 *Принята к публикации*: 30.03.23

©2023 А.А. Азамов, Ф.А. Кувватов, Х.У. Туйлиев

1. Предварительные сведения

Рассматривается игра между командой «полицейских», которая выступает как игрок, в дальнейшем именуемый преследователем, и «грабителем», выступающим в качестве второго игрока, называемого убегающим. Точки движутся по узлам целочисленной сетки $\mathbb{Z}^2$, которая здесь интерпретируется как бесконечная шахматная доска. Партия в игре начинается из заданных начальных положений точек.

Обсуждается два варианта игры. В первом варианте ход убегающего состоит в передвижении «грабителя» на соседний по вертикали или по горизонтали узел решетки $\mathbb{Z}^2$. Ход преследователя состоит в передвижении каждого «полицейского» на соседний узел в том же смысле. Разумеется, как убегающий, так и преследователь может оставлять точку на месте (это правило влияет на исход игры). Описанный вариант назовем игрой A. Во втором варианте точки можно передвигать и по диагоналям, как шахматного Короля. Этот вариант назовем игрой B. Партия продолжится до тех пор, пока хотя бы один из «полицейских не накроет грабителя». В этом случае партия заканчивается в пользу преследователя. В противном случае, т.е. когда партия продолжится бесконечно, считается, что партию выиграл убегающий.

Партия начинается ходом убегающего и заканчивается ходом преследователя. Для сравнения отметим, что обычно при рассмотрении игр типа «Полицейские и грабители», начиная с игры Р. Айзекса «Полицейский автомобиль» [6], партия начинается ходом преследователя и последний ход остается за ним (в том случае, когда он выигрывает) [20].

2. Формулировка задач и результатов

Теперь перейдем к описанию математической модели изучаемой игры. Положение «полицейских» будем обозначать $x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[m]}$ и положим $X = (x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[m]})$. Таким образом, $X \in (\mathbb{Z}^2)^m$. Положение «грабителя» обозначается $y \in \mathbb{Z}^2$. В дальнейшем пара X, y называется состоянием (аналогично с фазовым состоянием динамических систем).

Партия в игре начинается из начального состояния $x^{[1]}(0) = x_0^{[1]}$, $x^{[2]}(0) = x_0^{[2]}, \ldots, x^{[m]}(0) = x_0^{[m]}$ (короче $X(0) = X_0$) и $y(0) = y_0$. Пусть

$X = (x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[m]})$ и y – текущее положение «полицейских» и «грабителя» соответственно. На своем ходе убегающий может передвигать «грабителя» в одну из точек $(y_1 + 1, y_2), (y_1 - 1, y_2), (y_1, y_2 + 1), (y_1, y_2 - 1)$ или оставлять на месте. Аналогично определяются ходы каждого из «полицейских». (Всюду верхние индексы в квадратных скобках означают номер «полицейского» и пробегают множество $\{1, 2, \ldots, m\}$, а нижние индексы координаты точки.)

Положим

$$W_A = \{z \in \mathbb{Z}^2 | \ \|z\| \leq 1\}, \text{ где } \|z\| = |z_1| + |z_2|$$

так называемая «городская норма» для игры A,

$$W_B = W_A \cup (1,1), (1,-1), (-1,1), (1,-1)$$

для игры B.

Когда для рассуждений безразлично, о какой игре идет речь, индекс буквы W опускается. Таким образом, ход убегающего состоит в выборе вектора $v \in W$, а ход преследователя – в выборе набора $U = (u^{[1]}, u^{[2]}, \ldots, u^{[m]}) \in W^m$. В результате пара ходов U, v переводит состояние X, y в новое состояние $X + U, y + v$. В дальнейшем пару ходов U, v будем называть шагом.

В итоге получается последовательность состояний

$$X(n) = (x^{[1]}(n), x^{[2]}(n), \ldots, x^{[m]}(n)), y(n),$$

называемая траекторией, и последовательность шагов

$$U(n) = (u_1(n), u_2(n), \ldots, u_m(n)), v(n), (n \in \mathbb{N}).$$

Для этих последовательностей имеют место уравнения

$$x^{[k]}(n+1) = x^{[k]}(n) + u^{[k]}(n), \ k = 1, 2, \ldots, m,$$
$$y(n+1) = y(n) + v(n). \tag{2.1}$$

Традиционно, соотношения (2.1) полагаются в основу для определения понятий «выигрывает преследователь» и «выигрывает убегающий», а именно, если $x_k(n) = y(n)$ для некоторых k и n, то имеет место первый исход, если же $x_k(n) \neq y(n)$ для всех k, то – второй исход. Такое определение не отражает позиционность игры, и потому может играть только разъяснительную роль.

Соотношения (2.1) являются очень частным случаем динамических игр, описываемых уравнением

$$z(n+1) = f(z(n), u, v), \tag{2.2}$$

где $z \in Z$, $u \in P$, $v \in Q$, при этом Z, P, Q – произвольные множества, $f : Z \times P \times Q \to Z$ – произвольное отображение. Игры вида (2.2), по аналогии с дифференциальными играми в смысле Р. Айзекса [6] и Л.С. Понтрягина [13], называются дискретными играми, имея в виду дискретность времени. Пространство игры при этом может быть любым множеством. В случае (2.1) $Z = (\mathbb{Z}^2)^m \times \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^{(2m+2)}$.

Описание динамических игр в форме (2.2), по-видимому, впервые встречается в статье [12] (формула (1.5)). Изучение теории линейных дискретных игр $z(n+1) = Az(n) + u - v$, где $X = \mathbb{R}^d$, $A - (n \times n)$-матрица, начата А.А. Чикрием [17]. Общая теория дискретных игр изложена в работе [1], содержащей обзор литературы по играм в форме (2.2). Ниже приведем соответствующие определения, приспособленные к рассматриваемым здесь играм, так как [1] имеет ограниченное распространение.

Согласно концепции Дж. фон Неймана [11], точная постановка игры состоит в приведение ее к нормальной форме. Для этого следует определить пару классов допустимых стратегий игроков. В случае дискретных игр нормальная форма фон Неймана строится для каждого начального состояния X_0, y_0.

Определение 2.1. *Отображение* $\boldsymbol{v} : \mathbb{Z}^{(2m+2)} \to W$ *называется стратегией убегающего.*

Определение 2.2. *Отображение* $\boldsymbol{U} : (\mathbb{Z}^2)^{(m+1)} \times W \to W^m$ *называется стратегией преследователя.*

В этих определениях отражено правило игры, согласно которому ходы с нечетными номерами принадлежат убегающему, а ходы с четными номерами – преследователю.

При заданном начальном состоянии X_0, y_0 каждая пара стратегий $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}$ определяет партию, которую мы отождествляем с траекторией, являющейся решением задачи Коши

$$y(n+1) = y(n) + \boldsymbol{v}[X(n), y(n)],$$

$$X(n+1) = X(n) + \boldsymbol{U}\left\{X(n), y(n),\, \boldsymbol{v}[X(n), y(n)]\right\},$$

$$X(0) = X_0, \quad y(0) = y_0.$$

Таким образом, партия происходит следующим образом. На первом ходе убегающий выбирает $v(0) \stackrel{def}{=} \boldsymbol{v}[X_0, y_0]$, тем самым переходя из y_0 в положение $y(1) = y_0 + v(0)$. После этого преследователь должен сделать ответный ход, исходя из информации о позиции X_0 и y_1. Несколько удобнее пользоваться равносильным классом стратегий преследователя, базирующихся на текущей информации о состоянии и ходе убегающего. Это отражено в определении 2.2. Согласно стратегии $\boldsymbol{U}$, преследователь выбирает вектор $U(0) \stackrel{def}{=} \boldsymbol{U}[X_0, y(0), v(0)]$, тем самым переводя «полицейских» в положение $X(1) = X_0 + U(0)$. После этого ходы повторяются.

Траекторию, выходящую из начального состояния X_0, y_0 и порожденную парой стратегий $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}$, будем обозначать $X_{X_0,y_0}(\cdot; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$, $y_{X_0,y_0}(\cdot; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$. Пусть для краткости $\tilde{X}(n) = X_{X_0,y_0}(n; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$, $\tilde{y}(n) = y_{X_0,y_0}(n; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$.

Исход партии определяется следующим образом:

$$K(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} 1, \text{если } \tilde{x}^{[k]}(n) = \tilde{y}(n) \text{ для некоторых } k, n; \\ 0, \text{если } \tilde{x}^{[k]}(n) \neq \tilde{y}(n) \text{ для всех } k, n. \end{cases}$$

Тем самым для фиксированного начального состояния (X_0, y_0) определена нормальная форма с классами стратегий $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}$ и функцией платы K.

Теперь мы можем уточнить основные понятия, нередко используемые в теории динамических игр на интуитивном уровне.

Определение 2.3. *Начальное состояние (X_0, y_0) называется выигрышным для преследователя, если существует стратегия преследователя $\hat{\boldsymbol{U}}$ такая, что для любой стратегии убегающего $\boldsymbol{v}$ имеет место $K(\hat{\boldsymbol{U}}, \boldsymbol{v}) = 1$.*

Определение 2.4. *Начальное состояние (X_0, y_0) называется выигрышным для убегающего, если существует стратегия убегающего $\hat{\boldsymbol{v}}$ такая, что для любой стратегии преследователя $\boldsymbol{U}$ имеет место $K(U, \hat{\boldsymbol{v}}) = 0$.*

Основная задача настоящей работы формулируется следующим образом: найти совокупность Z^+ (соответственно Z^-) всех начальных состояний (X_0, y_0), выигрышных для преследователя (для убегающего). Такая задача Р. Айзесом названа *задачей качества*. Несравненно сложной является задача степени, когда требуются найти ситуацию равновесия в нормальной форме с теми же классами стратегий, но с функцией платы

$$L(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}) = \min_k \min\{n \in \mathbb{N} | \, \tilde{x}^{[k]}(n) = \tilde{y}(n)\}.$$

В настоящей работе рассматривается только задача качества.

В связи с введенными выше понятиями возникает проблема об альтернативе, остающаяся чаще всего вне внимания в работах, посвященных динамическим играм с бесконечным фазовым пространством Z. Из определения непосредственно следует, что $Z^+ \cap Z^- = \varnothing$, однако, вопреки ожиданию, автоматически не вытекает свойство $Z^+ \cup Z^- = (\mathbb{Z}^2)^{m+1}$. Чтобы убедиться в этом, перепишем определения 2.3 и 2.4 на языке логических символов:

$$(\mathbf{X}_0, y_0) \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \exists \hat{\boldsymbol{U}} \forall \boldsymbol{v} \exists k \exists n : x^{[k]}(n) = y(n);$$

$$(\mathbf{X}_0, y_0) \in Z^- \Leftrightarrow \exists \hat{\boldsymbol{v}} \forall \boldsymbol{U} \forall k \forall n : x^{[k]}(n) \neq y(n).$$

Очевидно,

$$\neg(\mathbf{X}_0, y_0) \in Z^+ \Leftrightarrow \forall \hat{\boldsymbol{U}} \exists \boldsymbol{v} \exists k \exists n : x^{[k]}(n) \neq y(n),$$

что является следствием соотношения $(\mathbf{X}_0, y_0) \in Z^-$, но неравносильно ему. Вопрос о том, верно ли равенство $Z^+ \cup Z^- = (\mathbb{Z}^2)^{m+1}$, называется проблемой об альтернативе. Разумеется, решение задачи качества повлечет и решение этой проблемы.

Целью настоящей работы является нахождение множеств Z^+ и Z^- для вариантов A и B игры «Полицейские и грабитель» на решетке $\mathbb{Z}^2$.

3. Об истории изучения игр преследования-убегания с дискретным временем

Насколько нам известно, первые примеры игр преследования–убегания на бесконечных правильных решетках упомянуты Р. Айзексом в книге [6], как дискретные аналоги дифференциальных игр:

«Полицейский автомобиль» на решетке $\mathbb{Z}^2$ (Пример 3.4.1) и «Шофёр-убийца» на треугольной решетке (Пример 3.4.2). С тех пор опубликовано огромное количество работ и можно сказать, что к настоящему времени внутри теории динамических игр сформировалось несколько самостоятельных направлений.

Рассматриваемые в настоящей работе игры A и B относятся к классу дискретных аналогов игр преследования-убегания с простыми движениями (игра с «линией жизни», преимущество преследователя в скорости – [33]; одна убегающая точка против нескольких преследующих, равные ограничения на скорости – [14]; преимущество убегающего в скорости – [16]; произвольные ограничения на скорости – [2]; по нескольку преследующих и убегающих точек – [7]; с бесконечным числом преследователей – [24]; с убегающим, движущимся по кривой, – [18]; игра на геометрических графах – [4, 5]; на римановых многообразиях – [10]; в работе [22] рассмотрена игра многократной поимки).

Игры преследования-убегания на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно отнести к классу игр преследования-убегания на бесконечных графах ([20], глава 7). Изучение игр «Полицейские и грабители» на конечных графах начато в работах [34] и [32]. Достаточно полный обзор результатов можно найти в книге [20] и работах [30, 21].

Отметим несколько статей, содержание которых более тесно связано с настоящей работой. В статье [25] приведено достаточное условие для возможности убегания на конечных графах. В работах [29, 31] даны оценки числа ходов, достаточных для завершения преследования в играх на конечных графах определенных типов. В работе [23] получена верхняя оценка для числа преследователей, достаточного для их выигрыша в игре «Полицейские и грабители» на графах Кэли [8].

В большинстве работ, посвященных играм типа преследования-убегания, в том числе разным вариантам игры «Полицейские и грабители», постановки задач и решение излагаются без строгой формализации из-за их элементарного характера. Разумеется, к играм на конечных графах применимы теории H.W. Kuhn [27] и К. Берже [19] (см. также [28], глава 4). В работе [26] предложен еще один подход к этой проблеме, к сожалению, без сравнения с раннее известными

формализациями.

Мы предпочитаем формализацию, основанную на представлении динамики игры в форме (2.2), как наиболее удобную для введения понятий «стратегия преследователя», «стратегия убегающего», «начальное состояние, выигрышное для преследователя (убегающего)».

Несколько слов о проблеме альтернативы. Она впервые сформулирована Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным для дифференциальных игр $\dot{z} = f(z, u, v)$ на конечном отрезке времени [9], в которых стратегии одного игрока сравниваются с программными управлениями другого. Несмотря на кажущуюся очевидность, установить ее справедливость далеко непросто. В книге [15] изложено доказательство альтернативы для линейных дифференциальных игр на конечном отрезке времени. Об альтернативе на бесконечном интервале времени для игр сближения-уклонения, включающих как частный случай игры преследования-убегания, см. [3]. В отличие от дифференциальных, в дискретных играх альтернатива выводится намного проще [1]. Так, из теорем 4.9 и 4.10 [1] вытекает, что в сформулированных выше двух вариантах игры «Полицейские и грабитель» альтернатива имеет место в усиленной форме – существует ситуация равновесия $\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{v}}$, общая для всех начальных состояний. Ниже этот факт будет доказан непосредственно.

4. Формулировка основных результатов

Пусть $Z + c = (z + c \mid z \in Z)$ сдвиг множества Z на вектор c. По набору $Z_0 = (z_0^{[1]}, z_0^{[2]}, \ldots, z_0^{[m]})$ определим множество $\{Z_0\} = \left\{z_0^{[1]}, z_0^{[2]}, \ldots, z_0^{[m]}\right\}$. Таким образом, $\{Z_0\} \subset \mathbb{Z}^2$ в отличие от Z_0, являющегося элементом множества $(\mathbb{Z}^2)^m$.

Далее, введем в рассмотрение следующие подмножества $\mathbb{Z}^2$ ($z = (x, y)$):

$$Q_1 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \geq |z_2|\}\backslash(0,0),\ Q_2 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_2 \geq |z_1|\}\backslash(0,0),$$

$$Q_3 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \leq -|z_2|\}\backslash(0,0),\ Q_4 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_2 \leq -|z_1|\}\backslash(0,0),$$

$$H_1 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \geq 0\}\backslash(0,0),\ H_2 = \{\, z \in \mathbb{Z} | -z_1 \leq z_2\}\backslash(0,0),$$

$$H_3 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, 0 \leq z_2\}\backslash(0,0),\ H_4 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \leq z_2\}\backslash(0,0),$$

$$H_5 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \leq 0\}\backslash(0,0),\ H_6 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_2 \leq -z_1\}\backslash(0,0),$$

$$H_7 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, 0 \geq z_2\} \backslash (0,0),\ H_8 = \{\, z \in \mathbb{Z} |\, z_1 \geq z_2\} \backslash (0,0).$$

Теорема 4.1. *В игре A начальное состояние (X_0, y_0) выигрышно для убегающего, если и только если $m \leq 2$ или $(Q_j + y_0) \cap \{X_0\} = \varnothing$ для некоторого $j = 1, 2, 3, 4$.*

Теорема 4.2. *В игре A начальное состояние (X_0, y_0) выигрышно для преследователя, если и только если $m > 2$ и $(Q_j + y_0) \cap \{X_0\} \neq \varnothing$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.*

Теорема 4.3. *В игре B начальное состояние (X_0, y_0) выигрышно для убегающего, если $m = 1$ или $(H_j + y_0) \cap \{X_0\} = \varnothing$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, 8$.*

Теорема 4.4. *В игре B начальное состояние (X_0, y_0) выигрышно для преследователя, если $m \geq 2$ и $(H_j + y_0) \cap \{X_0\} \neq \varnothing$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, 8$.*

Доказательства этих утверждений конструктивны – будут построены конкретные стратегии, гарантирующие соответствующие свойства.

Прежде чем приступить к доказательствам, осуществим редукцию игры, т.е. понизим размерность фазового пространства. С этой целью положим $z^{[k]} = x^{[k]} - y$, $Z = (z^{[1]}, z^{[2]}, \ldots, z^{[m]})$, $Z_0 = (z_0^{[1]}, z_0^{[2]}, \ldots, \ldots, z_0^{[m]})$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$z^{[k]}(n+1) = z^{[k]}(n) + u^{[k]} - v,\ \ z^{[k]}(0) = z_0^{[k]},\ \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

а условием окончания партии будет $z^{[k]}(n) = 0$ для некоторых k и n. Очевидным образом перепишутся и условия теорем 4.1-4.4. Например,

Теорема 4.5'. *В A-игре начальное состояние (X_0, y_0) выигрышно для убегающего, если и только если $m \leq 2$ или $Q_j \cap \{Z_0\} = \varnothing$ для некоторого $j = 1, 2, 3, 4$.*

5. Доказательство теоремы 4.1

Случай $m = 1$ для обоих вариантов тривиален, поэтому в дальнейшем будем считать $m \geq 2$. Также тривиальны начальные состояния Z_0, у которых $z_0^{[k]} = 0$ хотя бы для одного $k = 1, 2, \ldots, m$, в связи с чем полагается $z_0^{[k]} \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$.

Вначале рассмотрим ситуацию $Q_j \cap \{Z_0\} = \varnothing$ для некоторого $j = 1, 2, 3, 4$. Все наши конструкции будут инвариантны относительно поворотов решетки $\mathbb{Z}^2$ на углы 90°, 180° и 270°, поэтому достаточно проверить случай $j = 1$. Тогда условие $Q_1 \cap Z_0 = \varnothing$ запишется в виде: $x_{10}^{[k]} < |x_{20}^{[k]}|$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Предпишем убегающему положить $\hat{\boldsymbol{v}} = (1, 0)$, попросту говоря, бежать по биссектрисе квадранта Q_1. Ясно, что такая стратегия гарантирует выигрыш убегающему. Тем не менее, приведем аналитическое доказательство. Пусть преследователь применяет произвольную стратегию с составляющими $u^{[k]}(z, v)$. Тогда соответствующая траектория определяется из уравнения

$$z^{[k]}(n+1) = z^{[k]}(n) + u^{[k]}(z^{[k]}(n), \hat{v}) - \hat{v}, \;\; z_1^{[k]}(0) = z^{[k]}0.$$

Предположим $z^{[k]}(n) \bar{\in} Q_1$, т. е. $x_1^{[k]}(n) < |x_2^{[k]}(n)|$ (при $n = 0$ это предположение выполнено по условию теоремы). Заметим, что $u_1^{[k]}(z^{[k]}(n), \hat{v}) + |u_2^{[k]}(z^{[k]}(n), \hat{v})| \leq \left\|u^{[k]}(z^{[k]}(n), \hat{v})\right\| \leq 1$. Следовательно,

$$z_1^{[k]}(n) + u_1^{[k]}(z_k(n), \hat{v}) - 1 < |z_2^{[k]}(n)| - |u_2^{[k]}(z_k(n), \hat{v})| \leq |z_2^{[k]}(n) + u_2^{[k]}(z_k(n), \hat{v})|,$$

т.е. $z_1^{[k]}(n+1) < |z_2^{[k]}(n+1)|$. Таким образом, для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ при всех n окажется $z^{[k]}(n) \neq 0$.

Если $Q_j \cap Z_0 = \varnothing$, $j = 2, 3, 4$, то стратегию $\hat{v}$ следует выбрать равной $(0, 1)$, $(-1, 0)$ или $(0, -1)$ в соответствующем порядке.

Отдельного рассмотрения требует случай $m = 2$. Если $Q_j \cap \{Z_0\} = \varnothing$, то проведенные выше рассуждения сохраняют силу. Пусть $Q_j \cap \{Z_0\} \neq \varnothing$ для всех $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда все «полицейские» должны располагаться на одной из биссектрис $z^1 = \pm z^2$, притом на разных сторонах от точки $\mathbf{0}$ («грабителя»). Поэтому, если «грабитель» на каждом шаге выберет ненулевой вектор v, то он будет пойман. Если же $\boldsymbol{v}(X_0, y_0) = \mathbf{0}$, то по крайней мере одна из точек $z_1(1)$, $z_2(1)$ вынужденно сойдет с биссектрисы и для состояния $(X(1), y(1))$ окажется $\{Q_j + y(1)\} \cap X(1) = \varnothing$ при некотором $j = 1, 2, 3, 4$.

6. Доказательство теоремы 4.2

Построим стратегию преследователя $\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}, \hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}^{[m]})$, удовлетворяющую определению 2.1. Введем в рассмотрение функцию

$\boldsymbol{u}^* : \mathbb{R}^2 \times W \to W$, которую будем называть тактикой. Для $z = \mathbf{0}$ (на рис. 1 отмечено серым кружочком) значение $\boldsymbol{u}^*(z)$ не играет роли. Поэтому далее всюду $z \neq \mathbf{0}$. В начале рассмотрим ход убегающего $v = (1, 0)$ (на рис. отмечено жирной стрелкой). Если $z_1 < |z_2|$, то положим $\boldsymbol{u}^*(z, v) = v$ (светлые круги). Если $z = (1, 0)$, то $\boldsymbol{u}^*(z, v) = 0$ (светлый квадрат). Если же $z_1 \geq 2$, $z_2 = 0$, то $\boldsymbol{u}^*(z, v) = (-1, 0)$ (темные квадраты). В случае $z_1 \geq |z_2| \geq 1$ примем $\boldsymbol{u}^*(z, v) = (0, -\mathrm{sgn} z^2)$ (серые квадратики). Для $v = (0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ функция $\boldsymbol{u}^*(z, v)$ доопределяется с помощью симметрии поворота: если Π – поворот на 90°, 180° или 270°, то $\boldsymbol{u}^*(z, v) = \Pi^{-1}\boldsymbol{u}^*(\Pi z, \Pi v)$.

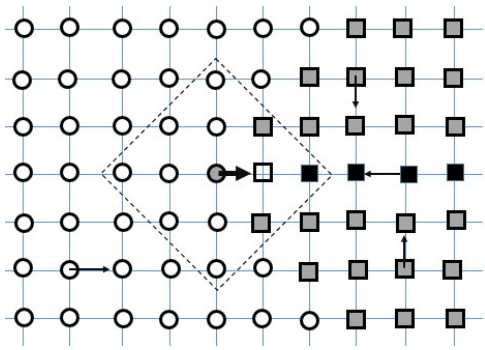


Рисунок 1. Тактика преследователя в игре A

Построенная функция обладает следующим свойством. Если $\|z\| \leq 2$, то $z + \boldsymbol{u}^*(z, v) - v = 0$. Пусть $z \in Q_j$ и $\|z\| \geq 3$. Тогда $z + \boldsymbol{u}^*(z, v) - v \in Q_j$. При этом, $\|z + \boldsymbol{u}^*(z, v) - (1, 0)\| = \|z\| - 2$ для $v \in Q_j \cap W \backslash 0$, $\|z + \boldsymbol{u}^*(z, v) - (1, 0)\| = \|z\| - 1$ для $v = \mathbf{0}$ и $z + \boldsymbol{u}^*(z, v) - (1, 0) = z$ для других значений v.

Требуемая стратегия $\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}, \hat{\boldsymbol{u}}^{[2]}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}^{[m]})$ базируется на тактике $\boldsymbol{u}^*(z, v)$. При этом достаточно определить $\hat{\boldsymbol{U}}(Z, v)$ только для $Z = (z^{[1]}, z^{[2]}, \ldots, z^{[m]})$, нетривиальных в смысле $z^{[k]} \neq \mathbf{0}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Чтобы осуществить такое построение, разобьем пространство $(\mathbb{Z}^{2m} \backslash \{\mathbf{0}\}) \times W$ на части, в соответствии с конфигурациями положения преследователей.

1-ая конфигурация A_1 состоит из наборов (Z, v), таких, что ни одна из точек z_k не лежит на биссектрисах $z_1 \pm z_2 = 0$ координатных квадрантов (далее просто биссектрисы). При такой конфигурации

полагаем $\hat{\boldsymbol{u}}^{[k]}(Z,v) = \boldsymbol{u}^*(z^{[k]},v)$.

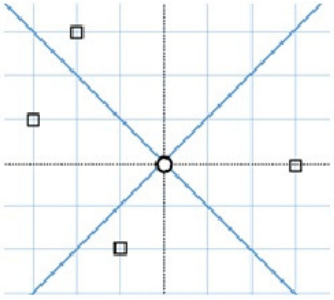


Рисунок 2a.
1-ая конфигурация

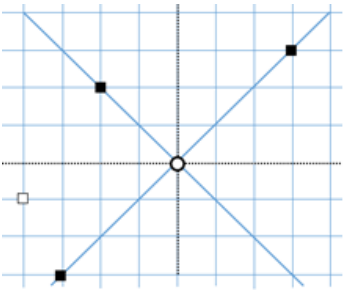


Рисунок 2b.
2-ая конфигурация

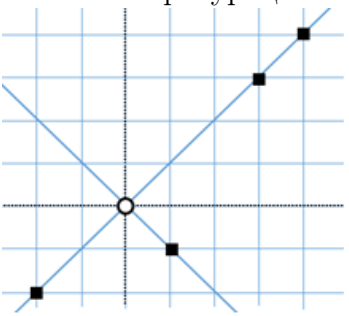


Рисунок 2c.
3-ая конфигурация

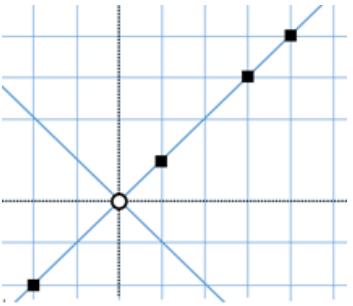


Рисунок 2d.
4-ая конфигурация

2-ая конфигурация A_2 состоит из наборов (Z,v) таких, что несколько из точек $z^{[k]}$ находятся на биссектрисах, но есть и такие точки, которые не лежат на биссектрисах. Пусть K – совокупность номеров точек $z^{[k]}$ первого рода. В этом случае для $k \in K$ полагаем $\hat{\boldsymbol{u}}^{[k]}(Z,0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}^{[k]}(Z,v) = (-v_2,-v_1)$ для $v \neq \mathbf{0}$, а для $l \in \{1,2,...,m\}\backslash K$, как в первой части, $\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}(Z,v) = \boldsymbol{u}^*(z^{[1]},v)$.

3-ая конфигурация A_3 состоит из наборов (Z,v) таких, что все точки $z^{[k]}$ находятся на биссектрисах, но не на одной и той же биссектрисе. Тогда хотя бы одна из биссектрис содержит не менее двух точек z_k. Пусть для определенности $z_1,\ldots,z_l$ лежат на биссектрисе $z_1 - z_2 = 0$, а остальные – на $z_1 + z_2 = 0$ и при этом $l \geq m - l$. Отметим, что $l \geq 2$. Тогда $\boldsymbol{u}^{[k]}(Z,0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}^{[k]}(Z,v) = (-v_2,-v_1)$ для $v \neq \mathbf{0}$, $k = 1,2,...,l$ и $\boldsymbol{u}^{[k]}(Z,v) = \boldsymbol{u}^*(z^{[k]},v)$ для остальных значений k.

4-ая конфигурация A_4 состоит из таких точек (Z,v), что все z^k лежат на одной и той же биссектрисе, скажем, $z_1 - z_2 = 0$. Из усло-

вия $m \geq 3$ вытекает, что на одном из лучей, получаемых от этой биссектрисы удалением точки 0, лежат не менее двух из точек z_k. Пусть для определенности это точки z^k, $k = 1, 2, ..., l$, $l \geq 2$. Тогда полагаем $\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}(Z, \mathbf{0}) = (-sgnz_1^1, \mathbf{0})$, $\hat{\boldsymbol{u}}^{[1]}(Z, v) = (-v_2, -v_1)$ для $v \neq \mathbf{0}$ $\hat{\boldsymbol{u}}^{[k]}(Z, v) = \boldsymbol{u}^*(z^{[k]}, v)$ для $k = 2, 3, ..., m$.

Очевидно, каждая точка (Z, v) с нетривиальным Z принадлежит одной и только одной из описанных конфигураций.

Поясним причину того, почему так сложно определяется стратегия $\hat{\boldsymbol{U}}(Z, v)$. На рис. 2*a*–2*d* проиллюстрированы примеры конфигураций для $m = 4$ (с точностью порядка нумерации точек и биссектрис). Отметим, что для преследователя важно на всех шагах соблюдать условие $Q_j \cap \{Z\} \neq \varnothing$, имеющее место в начале партии. При выполнении этого условия каждый квадрант будет находиться под контролем хотя бы одного «полицейского».

На рис. 2*a* показан пример расположения точек, принадлежащих 1-ой конфигурации. При таком положении каждый из «полицейских» может двигаться в соответствии со своей тактикой, не опасаясь, что какой-то квадрант окажется вне контроля.

Если точка z^k лежит на биссектрисе, то этот «полицейский» контролирует сразу два квадранта. В такой ситуации следование тактике $\boldsymbol{u}^*(z_k, v)$ может привести к проигрышу преследователя. Дело в том, что если «грабитель» выберет ход $v = 0$, то ответный ход «полицейского», предписываемый тактикой $u^*(z_k, v)$, выведет точку z_k из биссектрисы и в результате один из квадрантов может оказаться вне контроля. По этой причине при построении стратегии $\hat{\boldsymbol{U}}(Z, v)$ тактика подправляется. В зависимости от конфигурации точек, расположенных на биссектрисах, приходится осуществлять поправку поразному. В частности, наиболее критический случай – это когда все точки z_k располагаются на одной биссектрисе (рис. 2*d*). Если «грабитель» выберет ход $v = \mathbf{0}$, а «полицейские» следуют тактике, то все они покидают биссектрису и партия заканчивается в пользу убегающего. Поэтому один из «полицейских», оставляя контролировать четыре квадранта другим (не менее двум) «сослуживцам», будет приближаться к «грабителю», что заставит последнего в конце концов сделать нетривиальные ходы, приближая окончание партии в пользу преследователя.

В принципе можно объединять все построения, независимо от конфигурации, но это затеняло бы сущность действия стратегий.

Чтобы завершить доказательство, заметим, что если выполнено условие $Q_j \cap \{Z_0\} \neq \varnothing$, $j = 1, 2, 3, 4$, и при этом преследователь применяет построенную стратегию $\hat{\boldsymbol{U}}(Z, v)$, а убегающий – произвольную стратегию $\boldsymbol{v}(Z)$, то, во-первых, условие $Q_j \cap \{Z(n)\} \neq \varnothing$, $j = 1, 2, 3, 4$, сохраняется при всех n, пока партия не закончится, во-вторых, на каждом шаге по крайней мере один из «полицейских», независимо от хода «грабителя», будет приближаться к последнему, так что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \left\| z^{[k]}(n+1) \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \left\| z^{[k]}(n) \right\| - 1.$$

Поэтому существует n, не превосходящее $\sum\limits_{k=1}^{m} \left\| z_0^{[k]} \right\|$, такое, что $z_k(n) = 0$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, m$. Что и требовалось доказать.

Примечание. Величина $\sum\limits_{k=1}^{m} \left\| z^{[k]}(n) \right\|$ играет роль функции Ляпунова. Она дает оценку $\sum\limits_{k=1}^{m} \left\| z_0^{[k]} \right\|$ для числа шагов, достаточных для окончания партии в пользу преследователя. На самом деле всегда можно выделить 3 или 4 «полицейских», для которых условие $Q_j \cap \{Z_0\} \neq \varnothing$, $j = 1, 2, 3, 4$, сохраняется и на этой основе вывести верхнюю оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \|z_{k0}\| + 1$$

для числа шагов, необходимых для завершение преследования, при необходимости переобозначив нумерацию «полицейских». Остается открытой задача построения функции Беллмана и нахождения оптимального числа шагов (задача степени в терминологии Р. Айзекса).

7. Доказательство теорем 4.3 и 4.4

Теорема 4.3 почти очевидна, так как если $(H_j + y_0) \cap \{_0\} = \varnothing$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, 8$, то все «полицейские» окажутся на одной полуплоскости и «грабителю» достаточно двигаться в направлении внешней нормали. Если же $(H_j + y_0) \cap \{_0\} \neq \varnothing$ для всех $j = 1, 2, \ldots, 8$,

то сложности для решения задачи преследования, связанные с расположением точек z_k на биссектрисах, здесь отсутствуют благодаря тому, что есть возможность ходить по диагонали. В этом случае в качестве функции Ляпунова следует принять сумму

$$\sum_{k=1}^{m} \|z_k(n)\|$$

с нормой $\|z\| = max\,\{|z_1|, |z_2|\}$.

8. Заключительные замечания

В рассмотренных в настоящей работе играх, как уже было отмечено, партия начинается с ходом убегающего и заканчивается ходом преследователя. В традиционной постановке игры «Полицейские и грабитель» партия начинается и заканчивается ходом преследователя. Этот вариант легко привести к рассмотренному. А именно, начальное состояние X_0, y_0 выигрышно для преследователя, если существует такое U, что состояние $X_0 + U, y_0$ удовлетворяет условию теоремы 4.2 (соответственно теоремы 4.4), а остальные начальные состояния выигрышны для убегающего.

Теоремы 4.1–4.4 допускают обобщения на многомерные игры «Полицейские и грабитель», когда точки двигаются по узлам решетки $\mathbb{Z}^d, d > 2$.

Авторы выражают признательность Г. Ибрагимову за полезное обсуждение, А.О. Бегалиеву и А.Х. Абдуллаеву за помощь в подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А.А. *Основания теории дискретных игр*. Ташкент: Институт математики им. В.И. Романовского. 2011.

2. Азамов А.А. *О задаче качества для игр простого преследования с ограничением*. Сердика (Боългарско матем. списание). 1986. Т. 12, № 1. С. 38–43.

3. Азамов А.А. *Об альтернативе для дифференциальных игр преследования-убегания на бесконенчнеом интервале времени* // Прикл. мат. и мех. 1986. Т. 50, № 4. С. 561–566.

4. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. *Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников* // МТИиП, часть I: 2015. Т. 7, вып. 3. С. 3–15; часть II: 2016. Т. 8, вып. 3. С. 3–13; часть III: 2019. Т. 11, вып. 4. С. 5–23.

5. Азамов А.А., Ибайдуллаев Т. *A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes*. I. // МТИиП. 2020. Т. 13, вып. 4. С. 7–23.

6. Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Наука, 1967.

7. Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимдойствие групп управляемых объектов*. Ижевск. 2009.

8. Гроссман И., Магнус В. *Группы и их графы*. М.: Мир. 1971.

9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционныем дифференциальные игры*. М.: Наука. 1974.

10. Кучкаров А.Ш. *Задача простого преследования-убегания в шаре риманового многообраия* // Матем. заметки. 2009. Т. 85. С. 204-213.

11. Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука. 1970.

12. Петросян Л.А. *Еще одно обобщение теоремы Куна*. В сб. «Позиционные игры». М.: Наука. 1967. С. 230–245.

13. Понтрягин Л.С. *К теории дифференциальных игр* // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 4. С. 738–741.

14. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. № 3.

15. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задаче управления*. М.: Наука. 1981.

16. Черноуско Ф.Л. *Одна задача уклонения от многих преследователей* // Прикл. матем. и мех. 1976. Т. 40, вып. 1. С. 14–24.

17. Чикрий А.А. *О линейных играх качества* // Кибернетика. 1971. № 5. С. 90–99.

18. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh. *Generalized "Lion and Man" game of R. Rado. Coll.* "Contributions to Game Theory and Management". SPbU. 2009. V. 2. P. 8–20.

19. Berge C. *Theorie generale des jeux a N persons*. Paris: Gauthier-Villars. 1957.

20. Bonato A., Nowakowskii R.J. *The game of cops and robbers on graphs*. Student Mathematical Library, 61. Providence RI, AMS. 2011.

21. Bonato A. *An invitation to pursuit-evasion games anf graph theory*. Providence RI: AMS. 2022.

22. Bopardikar Sh.D., Suri S. *K-capture in multiagent pursuit evasion or the lion and the hyenas* // Theoretical Computer Sci. 2014. V. 522. P. 13–23.

23. Bradshaw P., Hosseini S.A., Turcotte J. *Cops and robbers on directed and undirected abelian Cayley graphs* // European J. Combin. 2021. V. 97. Paper No. 103383.

24. Ibragimov G.I. *Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader* // Differential equations. V. 41. No 5. 2005. P. 627–635.

25. Ibragimov G., Luckraz S. *On a characterization of evasion strategies for pursuer-evasion games on graphs* // J. Opt. Theory and Appl. V. 175. No 2. P. 590–596.

26. Konstantinidis G., Kehagias A. *Simultaneously moving cops and robbers* // Theor. Comp. Sci. 2016. V. 645. No. 1. P. 48–59.

27. Kuhn H.W. *Extensive games and the problem of information*. Coll "Contributions to the Theory of Games". V. 2. Princeton. 1953.

28. Kummer B. *Spiele auf graphen.* Basel: Springer. 1980.

29. Luccio F., Pagli L. *Capture on grids and tori with different numbers of cops.* In: International conference on parallel computing technologies 2019. P. 431–444.

30. Luckraz Sh. *A survey on the relationship between the game of cops and robbers and other game representations* // Dyn. Games and Appl. 2019. V. 9. No. 2. P. 506–520.

31. Megrabian A. *The capture time of grids* // Discrete Mathematics. 2011. V. 311. P. 102–105.

32. Nowakowski R.J., Winkler P.M. *Vertex-to-vertex pursuit in a graph* // Discrete Math. 1983. V. 43. No. 2-3. P. 235–239.

33. Petrosyan L.A. *Differential games of pursuit.* World Scientific Publisher. 1993.

34. Quilliot A.*Jeux et pointes fixes sur les graphes, these de 3eme cycle.* Univ. de Paris VI. 1978.

POLICE AND ROBBER GAME ON INFINITE CHESSBOARD

Abdulla A. Azamov, Institute of Mathematics, Uzbekistan Akademy of Science (abdulla.azamov@gmail.com),
Fatxull A. Kuvatov, National University of Uzbekistan (fatxulloh0444@gmail.com),
Hasan U. Tuyliyev, National University of Uzbekistan (hasantuyliyev@gmail.com)

Abstract: It is considered two variants of the game "Policeman and a robber" on an infinite chessboard that is a graph giving a regular partition of the plane into squares. Heuristic and precise definitions of the concepts "the initial state is winning for the pursuer" and "the initial state is winning for the evader" are formulated. Then, criteria for determining if a given initial state is winning for the pursuer or for the evader is given.

Keywords: game on graphs, integere net, "Cops&Robber" game, qualitative problem, pursuit problem, evading problem, strategy, alternative.