Математическая Теория Игр и её Приложения, т.16, в.3, с. 27–57

УДК 519.83, 519.86
ББК 22.18

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ-КООПЕРАЦИИ В ОЛИГОПОЛИИ КУРНО С УЧЁТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ

Полина Д. Демчук
Алексей В. Королёв
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5
Геннадий А. Угольницкий
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича Южного федерального университета
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: polina.demchuk9@gmail.com, avkorolev@etu.ru,
gaugolnickiy@sfedu.ru

Описана базовая модель олигополии Курно с учётом конкуренции-кооперации и загрязнения окружающей среды как дифференциальная игра в нормальной форме и проведён её численный анализ для независимого и кооперативного поведения на примере, используемом и в дальнейшем. Построены игры в форме характеристической функции фон Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна, вычислен

©2024 П.Д. Демчук, А.В. Королев, Г.А. Угольницкий

вектор Шепли. Проанализированы иерархические игры с информационными регламентами прямой и обратной игр Штакельберга, проведен сравнительный анализ выигрышей для всех способов организации. Все решения получены для случая трёх игроков.

Ключевые слова: анализ сравнительной эффективности, конкуренция-кооперация, динамическая устойчивость, дифференциальные игры, олигополия Курно.

Поступила в редакцию: 26.04.24 *После доработки*: 23.07.24 *Принята к публикации*: 16.09.24

1. Введение

Чрезвычайно важный аспект согласования интересов активных агентов составляет сравнительная эффективность способов их организации. Можно выделить три основных способа организации: конкуренцию, кооперацию и иерархию. При конкуренции активные агенты принимают решения одновременно и независимо, что приводит к играм в нормальной форме. При кооперации все агенты объединяются в большую коалицию и совместно максимизируют суммарную функцию выигрыша по всем управляющим переменным. Тем самым теоретико-игровая модель сводится к обычной оптимизационной задаче (в динамической постановке – к задаче оптимального управления). Далее возникает вопрос о распределении полученного кооперативного выигрыша между отдельными агентами, на который отвечает теория игр в форме характеристической функции (кооперативных игр). Наконец, отношения субординации между агентами моделируются иерархическими играми либо играми в развёрнутой форме, описывающими последовательное принятие решений при асимметричной информации.

По определению кооперации очевидно, что для общества в целом (всего множества агентов или их большой коалиции) этот способ организации самый выгодный, поскольку обеспечивает достижение глобального максимума общественного благосостояния. Проблема состоит в том, что для отдельных агентов это уже совсем не обязательно так. Обычно для относительно слабых агентов кооперация тоже благоприятна. А вот для агентов с большими возможностями зачастую

оказывается более выгодным сохранять независимость, а ещё лучше – захватить власть (лидерство) и на этой основе воспользоваться преимуществом первого хода ведущего игрока (иерархическим превосходством). Данные соображения во многом объясняют, почему в повседневной практике политической и экономической жизни такие, казалось бы, естественные для социальных агентов формы взаимодействия, как кооперация и сотрудничество, вынужденно уступают место конфликтам и конфронтации вплоть до военных действий и попыток взаимного истребления.

Проблема (не)эффективности равновесий хорошо известна в литературе [6]. Однако, она рассматривается в основном с точки зрения общества в целом. Как уже сказано, в этом случае кооперация очевидно доминирует, и остаётся только количественно оценить потери общественного благосостояния, возникающие при менее эффективных способах организации. Так, широко известен показатель цены анархии, определяющий общественный ущерб от эгоистического поведения по сравнению с кооперативным. Есть и другие индексы, например, цена информации и цена кооперации [7]. В ряде работ сравниваются и индивидуальные выигрыши, например, в равновесиях Нэша и Штакельберга, но этот подход менее распространён. Поэтому в настоящей статье проводится сравнение не только общественных, но и индивидуальных выигрышей при различных способах организации.

Другим важным аспектом согласования интересов активных агентов служит соотношение между конкуренцией и кооперацией. Оба мотива играют важную роль в человеческом поведении. Соответствующие модели рассматриваются в экономике общественных благ, где каждый агент делит свой ресурс между частной деятельностью и производством общественного блага [20]. Аналогичный подход развивается в авторских моделях сочетания общественных и частных интересов (СОЧИ-моделях) [13, 14]. Отметим, что здесь под кооперацией понимается вклад агентов в общественное производство.

В монографии [8] было введено понятие coopetition (конкуренции-кооперации). Его идея состоит в том, что практически в любом экономическом взаимодействии присутствуют элементы и конкуренции, и кооперации (в указанном выше смысле). Например, две фирмы на

рынке однородного товара могут конкурировать за клиентов, но объединять свои усилия в маркетинге, охране окружающей среды или НИОКР.

Связь между понятием конкуренции-кооперации и теорией игр установлена в [23]. Д. Карфи с соавторами опубликовали большое число работ по теоретико-игровым моделям конкуренции-кооперации [9, 10]. Очень интересный анализ кооперации в играх в нормальной форме представлен в [17]. Можно назвать также работы [11, 16].

Третий важный аспект согласования интересов – это динамическая устойчивость соглашений между активными агентами (решений динамической игры) [3]. Динамическая устойчивость означает, что на всём протяжении действия договора никому из участников не выгодно отклоняться от него. Очевидно, что отсутствие этого свойства ведёт к практической бесполезности договора.

Авторский подход к теоретико-игровому моделированию указанных аспектов проблемы согласования интересов представлен в работах [1, 2, 4, 5], [12]-[14], [18, 19, 24, 25]. В статье [4] проведён сравнительный анализ устойчивой эксплуатации возобновляемых ресурсов при различных информационных регламентах. Развитие этого подхода осуществлено в [5, 25]. Статические теоретико-игровые модели эффективности взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учётом линейной структуры, «зелёного» эффекта и заботы о справедливости анализируются в [1]. Статические кооперативно-игровые модели олигополии Курно изучены в [18]. В статье [12] сравнительный анализ эффективности проведён для моделей распределения ресурсов в маркетинговых сетях. Динамические модели олигополии Курно без учёта конкуренции-кооперации исследованы в [2, 19]. Статические модели конкуренции-кооперации в олигополии Курно изучены в [24].

Настоящая статья развивает описанный подход на примере дифференциально-игровой модели конкуренции-кооперации в олигополии Курно с учётом загрязнения окружающей среды. Вклад работы заключается в следующем:

- предложена дифференциально-игровая модель олигополии Курно с учётом конкуренции-кооперации и загрязнения окружающей среды;
- построены кооперативно-игровые версии этой модели с помощью

характеристических функций Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна;
- исследованы иерархические версии данной модели для информационных регламентов прямой и обратной игры Штакельберга;
- численно найдены решения всех указанных игр для случая трёх игроков и проведён анализ сравнительной эффективности соответствующих способов организации;
- введено понятие стратегий полного согласия в иерархических играх.

2. Базовая модель как дифференциальная игра в нормальной форме

Базовая модель представляет собой динамическую версию олигополии Курно [21] со следующими особенностями. Во-первых, каждая фирма-олигополист делит свой ресурс между выпуском однородного товара (конкуренция как в стандартной олигополии Курно) и производством некоторого общественного блага (кооперация). Фактически считаем, что фирма равномерно распределяет во времени свой начальный ресурс

$$R_i = \sum_{t=1}^{T} r_i(t) = Tr_i, \quad i \in N,$$

а потом на каждом шаге делит его между конкуренцией и кооперацией. Таким образом, в модель вводится эффект конкуренции-кооперации. Во-вторых, учитывается загрязнение окружающей среды: количество загрязняющих веществ есть переменная состояния, для которой выписывается линейное уравнение динамики. Предполагается, что загрязнение растёт прямо пропорционально объёму выпуска и убывает обратно пропорционально величине загрязнения благодаря самоочищению. Соответственно, функционал выигрыша каждой фирмы включает три слагаемых: конкурентный доход от продажи товара, кооперативный доход от участия в пользовании общественным благом и ущерб от загрязнения.

При независимом поведении (конкуренции) фирм модель представляет собой дифференциальную игру в нормальной форме. Каждая фирма (игрок) решает следующую задачу оптимального управления:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\{[D - c_i - \bar{x}(t)]x_i(t) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_i(t)\}dt \to \max, \quad (2.1)$$

$$0 \le x_i(t) \le r_i \le \frac{D}{n}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t),$$

$$\dot{z}_i = \nu x_i(t) - \mu z_i(t), \quad z_i(0) = z_{i0}, \quad t \in [0, T],$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

$$n\left(c_i + \frac{\lambda}{\mu + \rho}\right) < D, \quad i \in N = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < c_1 < c_2, \cdots < c_n < \frac{D}{n}.$$

Здесь $z_i(t)$ – количество загрязняющих веществ в окружающей среде в году t, накопленное в результате деятельности i-й фирмы; y_i – штраф за ущерб окружающей среде; p – коэффициент штрафа за загрязнение; $\lambda = p \cdot \nu$ – технический коэффициент; $x_i(t)$ – объём выпуска товара i-й фирмой в году t (переменная управления); D – параметр спроса; c_i – удельные затраты i-й фирмы; ν – коэффициент перевода объёма выпуска в загрязнение; μ – коэффициент самоочищения окружающей среды; r_i – ежегодный ресурс i-й фирмы; b_i, γ_i – коэффициенты эффективности кооперативных усилий i-й фирмы $(0 < \gamma_i < 1)$; ρ – коэффициент дисконтирования.

Замечание 1. В разделах 2, 3 и в начале раздела 4 для решения оптимизационных задач мы применяем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, а в остальной части раздела 4 – принцип максимума Понтрягина. Поскольку технология применения метода Гамильтона-Якоби-Беллмана у нас везде одна и таже, изложим её сначала в виде алгоритма, чтобы потом ссылаться на него для сокращения записи, уточняя детали конкретных моделей.

В каждой модели из указанных разделов оптимизационная задача имеет вид

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} f(t, x, y)dt \to \max,$$

$$\dot{y} = \lambda x(t) - \mu y(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T],$$

где x – управляющая переменная (векторная), y – переменная состояния. Каждый раз мы вводим функцию Беллмана

$$V(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} f(s,x,y)ds$$

и записываем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмна:

$$\rho V - \frac{\partial V}{\partial t} = \max_{\substack{x(s),\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}(\lambda x - \mu y) + f(s,x,y) \right\}, \tag{2.3}$$

при этом функцию Беллмана во всех ситуациях в данной статье мы считаем линейной по y: $V(y,t) = \alpha(t)y + \beta(t)$.

Подставляя выражение для $V(y,t)$ в (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получаем дифференциальное уравнение для $\alpha(t)$, которое в моделях данной статьи имеет вид:

$$\dot{\alpha} - (\rho + \mu)\alpha = 1$$

с граничным условием $\alpha(T) = 0$.

Решая данное уравнение методом Эйлера, находим

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho+\mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1\right), \quad t \in [0,T].$$

Оптимизируя по $x(s)$ выражение в фигурных скобках в (2.3), получаем условие

$$\alpha\lambda + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) = 0,$$

или, с учетом вида функции $\alpha(t)$, уравнение

$$\frac{\lambda}{\rho+\mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1\right) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) = 0,$$

вид которого, так же как и число таких уравнений, и их взаимозависимость, зависят от конкретной модели.

Возвращаясь к задаче (2.1)–(2.2), выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial y_i}(\lambda x_i - \mu y_i) + \right.$$

$$\left. +(D - c_i - \bar{x}(s))x_i(s) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j[r_j - x_j(s)]^{\gamma_j} - y_i(s) \right\}.$$

Оптимизируя по $x_i(s)$, видим, что

$$\alpha\lambda + D - c_i - \bar{x} - x_i - \frac{\gamma_i b_i}{n}(r_i - x_i)^{\gamma_i - 1} = 0, \tag{2.4}$$

причем

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + \mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1\right), \quad t \in [0, T].$$

Полное аналитическое исследование предложенной модели затруднено, поэтому проведём численный анализ на следующем сквозном примере. Всюду далее без ограничения общности будем считать, что имеется три фирмы: наиболее эффективная, средняя по эффективности и наименее эффективная.

Пример. Пусть $D = 25$, $n = 3$, $c_1 = 6$, $c_2 = 7$, $c_3 = 8$, $r_1 = 8$, $r_2 = 7$, $r_3 = 6$, $\gamma_1 = 0.7$, $\gamma_2 = 0.6$, $\gamma_3 = 0.5$, $b_1 = 12$, $b_2 = 11$, $b_3 = 10$, $\rho = 0.5$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.5$, $y_{i0} = 0$, $T = 6$.

Система уравнений (2.4), $i = 1, 2, 3$, $t \in [0, 6]$, принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{(t-6)} - 1\right) + 25 - 6 - 2x_1 - x_2 - x_3 - \frac{15 \cdot 0.7}{3}(8 - x_1)^{0.7-1} = 0, \\ \frac{1}{2}\left(e^{(t-6)} - 1\right) + 25 - 7 - x_1 - 2x_2 - x_3 - \frac{14 \cdot 0.6}{3}(7 - x_2)^{0.6-1} = 0, \\ \frac{1}{2}\left(e^{(t-6)} - 1\right) + 25 - 8 - x_1 - x_2 - 2x_3 - \frac{13 \cdot 0.5}{3}(6 - x_3)^{0.5-1} = 0. \end{cases}$$

Находим значения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ на промежутке $[0, 6]$, решая численно систему уравнений (2.5) для разных t от 0 до 6, а затем определяем значения $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, численно интегрируя дифференциальное уравнение (2.2) на том же промежутке с подходящим шагом. После этого находим по формуле (2.1) значения трёх интегралов: $J_1 = 100.12$, $J_2 = 85.95$, $J_3 = 72.68$. Тогда суммарный выигрыш фирм при независимом поведении равен $J = 258.75$.

Теперь рассмотрим кооперативное поведение игроков. Все фирмы вместе решают задачу оптимального управления

$$J_c(x) = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{\sum_{i=1}^n [D - c_i - \bar{x}(t)]x_i(t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n b_i[r_i - x_i(t)]^{\gamma_i} - y(t)\right\} dt \to \max, \tag{2.5}$$

$$0 \le x_i(t) \le r_i \le \frac{D}{n}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

$$\dot{y} = \lambda\bar{x}(t) - \mu y(t),\ y(0) = y_0,\ t \in [0,T],\ \sum_{i\in N} y_i = y,\ \sum_{i\in N} y_{i0} = y_0\,, \quad (2.6)$$

$$n\left(c_i + \frac{\lambda}{\mu+\rho}\right) < D, \quad i \in N = 1,2,\ldots,n, \quad 0 < c_1 < c_2, \cdots < c_n < \frac{D}{n}.$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V_c}{\partial y}\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu y\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}(D - c_i - \bar{x}(t))x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(r_i - x_i)^{\gamma_i} - y \right\}.$$

По аналогии с независимым поведением игроков, получаем общий кооперативный выигрыш, а также выигрыши отдельных игроков при кооперации при равномерном распределении общего выигрыша:

$$J = 314.10, \quad J_i = \frac{J}{3} = 104.70, \quad i = 1,2,3.$$

3. Игры в форме характеристической функции

Для детального анализа распределения полученного кооперативного выигрыша между отдельными игроками естественно использовать игры в форме характеристической функции. Будем рассматривать классическую функцию фон Неймана-Моргенштерна [22], а также более новые функции Петросяна-Заккура [26] и Громовой-Петросяна [15]. В качестве решения используем вектор Шепли, который всегда существует и единственен.

Характеристическая функция Неймана-Моргенштерна строится на основе антагонистической игры между коалицией K и антикоалицией $N\backslash K$. Найдем значение функции Неймана-Моргенштерна для коалиции двух игроков $K = \{i,j\}$. Стратегия третьего игрока в этом случае: $x_k = r_k$.

Задача рассматриваемой коалиции выглядит следующим образом

$$J_{ij} = \int_0^T e^{-\rho t}\{[D - \bar{x}(t)][x_i(t) + x_j(t)] - [c_i x_i(t) + c_j x_j(t)] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3} b_l[r_l - x_l(t)]^{\gamma_l} - y_i(t) - y_j(t)\}dt \to \max, \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \lambda x_i(t) + \lambda x_j(t) - \mu y(t), \quad y = y_i + y_j, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_{ij}^{NM} - \frac{\partial V_{ij}^{NM}}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ x_j(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha(\lambda(x_i + x_j) - \mu y) +$$

$$+ (D - \bar{x})(x_i + x_j) - (c_i x_i + c_j x_j) + \frac{2}{3} \sum_{l=1}^{3} b_l (r_l - x_l)^{\gamma_l} - y \Bigg\}. \tag{3.3}$$

Оптимизируя выражение в фигурных скобках в (3.3), получаем

$$\begin{cases} \alpha\lambda + D - c_i - r_k - 2(x_i + x_j) - \frac{2}{3} b_i \gamma_i (r_i - x_i)^{\gamma_i - 1} = 0, \\ \alpha\lambda + D - c_j - r_k - 2(x_i + x_j) - \frac{2}{3} b_j \gamma_j (r_j - x_j)^{\gamma_j - 1} = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

где точно так же, как и ранее:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + \mu} \left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1 \right), \quad t \in [0, T].$$

Обозначим $z_i = r_i - x_i$ и из системы уравнений (3.4) найдем

$$c_i + \frac{2}{3} b_i \gamma_i z_i^{\gamma_i - 1} = c_j + \frac{2}{3} b_j \gamma_j z_j^{\gamma_j - 1},$$

$$z_j = \left(\frac{3(c_i - c_j)}{2 b_j \gamma_j} + \frac{b_i \gamma_i}{b_j \gamma_j} z_i^{\gamma_i - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma_j - 1}}. \tag{3.5}$$

Преобразуем первое уравнение в (3.4):

$$\alpha\lambda + D - c_i - 2r_i - 2r_j - r_k + 2(z_i + z_j) - \frac{2}{3} b_i \gamma_i z_i^{\gamma_i - 1} = 0$$

и подставим в него (3.5). Получим:

$$2 \left(z_i + \frac{3(c_i - c_j)}{2 b_j \gamma_j} + \frac{b_i \gamma_i}{b_j \gamma_j} z_i^{\gamma_i - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma_j - 1}} - \frac{2}{3} b_i \gamma_i z_i^{\gamma_i - 1} - c_i =$$

$$= 2R - r_k - D - \lambda\alpha, \tag{3.6}$$

$$R = r_1 + r_2 + r_3.$$

Решая уравнение (3.6), находим значение z_i и соответственно x_i на промежутке $[0, T]$. Зная z_i, находим значения z_j из (3.5), и затем x_j,

а $x_k = r_k$. Решая дифференциальное уравнение (3.2), находим $y(t)$. Подставив значения x_i, x_j, x_k, y в (3.1), получаем выигрыш коалиции $K = \{i, j\}$. Проводим эти вычисления для каждой из трёх пар $\{i, j\}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

В результате получаем:

$$V_{12}^{NM} = 155.02, \quad V_{13}^{NM} = 131.46, \quad V_{23}^{NM} = 103.48.$$

Найдём значение функции Неймана-Моргенштерна для коалиции из одного игрока $K = \{i\}$. Стратегии двух других игроков в этом случае: $x_j = r_j$, $x_k = r_k$.

Задача рассматриваемой коалиции выглядит как:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\{[D - c_i - \bar{x}(t)]x_i(t) + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{n} b_l[r_l - x_l]^{\gamma_l} - y_i\}dt \to max, \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_i^{NM} - \frac{\partial V_i^{NM}}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha(\lambda x_i - \mu y_i) +$$

$$+ (D - c_i - \bar{x})x_i + \frac{1}{3}b_i[r_i - x_i(t)]^{\gamma_i} - y_i\Big\}. \quad (3.9)$$

Максимизируя выражение в фигурных скобках в (3.9), получаем

$$\alpha\lambda + D - c_i - 2x_i - r_j - r_k - \frac{1}{3}b_i\gamma_i(r_i - x_i)^{\gamma_i - 1} = 0,$$

или

$$2x_i + \frac{1}{3}b_i\gamma_i(r_i - x_i)^{\gamma_i - 1} = \frac{\lambda}{\rho + \mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1\right) + D - c_i - r_j - r_k. \quad (3.10)$$

Решая уравнение (3.10), находим значение x_i на промежутке $[0, T]$. Решая дифференциальное уравнение (3.8), находим $y(t)$ на том же промежутке. Подставив значения x_i, y_i в (3.7), получаем выигрыш коалиции $K = \{i\}$. Проводим эти вычисления для каждой коалиции из одного игрока $i \in \{1, 2, 3\}$. Получаем:

$$V_1^{NM} = 36.58, \quad V_2^{NM} = 19.77, \quad V_3^{NM} = 16.25.$$

Итак, значения характеристической функции фон Неймана-Моргенштерна:

$$V_{123}^{NM} = 314.10,$$
$$V_{12}^{NM} = 155.02, \quad V_{13}^{NM} = 131.46, \quad V_{23}^{NM} = 103.48,$$
$$V_{1}^{NM} = 36.58, \quad V_{2}^{NM} = 19.77, \quad V_{3}^{NM} = 16.25.$$

Вычислим компоненты вектора Шепли для данной характеристической функции:

$$\Phi_1(V^{NM}) = 124.14, \quad \Phi_2(V^{NM}) = 101.75, \quad \Phi_3(V^{NM}) = 88.21.$$

В подходе Петросяна–Заккура характеристическая функция строится в два этапа. Сначала находится равновесие Нэша, затем игроки из коалиции K максимизируют свой суммарный выигрыш, а игроки из множества $N\backslash K$ продолжают следовать своим равновесным по Нэшу стратегиям.

Найдём значение функции Петросяна–Заккура для коалиции двух игроков $K = \{i, j\}$. Стратегия третьего игрока в этом случае: $x_k = x_k^{NE}$.

Задача рассматриваемой коалиции выглядит как:

$$J_{ij} = \int_0^T e^{-\rho t} \Big\{ (D - c_i - x_i - x_j - x_k^{NE}) x_i + (D - c_j - x_i - x_j - x_k^{NE}) x_j + \\ + \frac{2}{3} b_i (r_i - x_i)^{\gamma_i} + \frac{2}{3} b_j (r_j - x_j)^{\gamma_j} + \frac{2}{3} b_k (r_k - x_k^{NE})^{\gamma_k} - y_i - y_j \Big\} dt, \quad (3.11)$$

$$\dot{y} = \lambda x_i(t) + \lambda x_j(t) - \mu y(t), \quad y = y_i + y_j, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

Аналогично предыдущему введём линейную функцию Беллмана и получим значения характеристической функции:

$$V_{12}^{PZ} = 181.72, \quad V_{13}^{PZ} = 159.71, \quad V_{23}^{PZ} = 132.90.$$

Найдём значение функции Петросяна–Заккура для коалиции из одного игрока $K = \{i\}$. Стратегии двух других игроков в этом случае: $x_j = x_j^{NE}$, $x_k = x_k^{NE}$.

Задача рассматриваемой коалиции выглядит следующим образом:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \{ [D - c_i - \bar{x}] x_i + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{3} b_l [r_l - x_l]^{\gamma_l} - y_i \} dt \to \max, \quad (3.13)$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.14}$$

Аналогично предыдущему введём линейную функцию Беллмана и получим значения характеристической функции

$$V_{123}^{PZ} = 314.10,$$
$$V_{12}^{PZ} = 181.72, \quad V_{13}^{NM} = 159.71, \quad V_{23}^{NM} = 132.90,$$
$$V_{1}^{PZ} = 77.07, \quad V_{2}^{PZ} = 58.33, \quad V_{3}^{PZ} = 42.22.$$

Компоненты вектора Шепли в данной игре имеют вид

$$\Phi_1(V^{PZ}) = 126.24, \quad \Phi_2(V^{PZ}) = 103.46, \quad \Phi_3(V^{PZ}) = 84.40.$$

В подходе Громовой–Петросяна также используется двухэтапная процедура. На первом этапе находится набор стратегий всех игроков, максимизирующий выигрыш большой коалиции. На втором этапе игроки, входящие в коалицию K, применяют полученные на первом этапе оптимальные стратегии, а игроки из множества $N \backslash K$ образуют антикоалицию и минимизируют выигрыш коалиции K.

В результате получаем значения характеристической функции Громовой-Петросяна:

$$V_{123}^{GP} = 314.10,$$
$$V_{12}^{GP} = 154.86, \quad V_{13}^{GP} = 130.80, \quad V_{23}^{GP} = 94.72,$$
$$V_{1}^{GP} = 40.25, \quad V_{2}^{GP} = 20.31, \quad V_{3}^{GP} = 5.73.$$

Компоненты вектора Шепли для данной игры имеют вид

$$\Phi_1(V^{PG}) = 129.81, \quad \Phi_2(V^{PG}) = 101.80, \quad \Phi_3(V^{PG}) = 82.48.$$

4. Иерархические модели

Здесь одна из фирм становится лидером (ведущей), остальные две – последователями (ведомыми). Сначала рассмотрим информационный регламент прямой игры Штакельберга. Модель выглядит следующим образом: i-я фирма решает задачу (2.1)-(2.2). При этом первая фирма (самая эффективная) является лидером, а все остальные фирмы (менее эффективные, чем первая) – ведомыми. Другими словами, все фирмы, кроме первой, рассматривают стратегию первой

фирмы как заданную и оптимизируют свой выигрыш как функцию от стратегии первой фирмы. Первая фирма это знает, подставляет оптимальные ответы фирм-последователей как функции от ее стратегии в свою целевую функцию и оптимизирует свой выигрыш, выбирая свою стратегию. Затем вычисляются стратегии остальных фирм при известной стратегии первой фирмы.

Задача первой фирмы (лидера) имеет вид

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\{[D - c_1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)]x_1 + \\ + \frac{1}{3}b_1[r_1 - x_1]^{\gamma_1} + \frac{1}{3}b_2[r_2 - x_2]^{\gamma_2} + \frac{1}{3}b_3[r_3 - x_3]^{\gamma_3} - y_1(t)\}dt, \tag{4.1}$$

$$0 \le x_i(t) \le r_i \le \frac{D}{n}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t),$$

$$\dot{y}_1 = \lambda x_1(t) - \mu y_1(t), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad t \in [0, T]. \tag{4.2}$$

Каждая из фирм-последователей $i = 2, 3$ решает задачу

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\{[D - c_i - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)]x_1 + \\ + \frac{1}{3}b_1[r_1 - x_1]^{\gamma_1} + \frac{1}{3}b_2[r_2 - x_2]^{\gamma_2} + \frac{1}{3}b_3[r_3 - x_3]^{\gamma_3} - y_i(t)\}dt, \tag{4.3}$$

$$0 \le x_i(t) \le r_i \le \frac{D}{n}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t),$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0, T]. \tag{4.4}$$

Выпишем уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для фирм-последователей:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha(\lambda x_i - \mu y_i) + \\ + (D - c_i - \bar{x})x_i + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_i(t)\Bigg\}, \tag{4.5}$$

Максимизируя по $x_i(s)$ выражение, стоящее в фигурных скобках в (4.5), получаем

$$\alpha\lambda + D - c_i - (x_1 + x_2 + x_3) - x_i - \frac{\gamma_i b_i}{3}(r_i - x_i)^{\gamma_i - 1} = 0. \tag{4.6}$$

Выразить аналитически x_2 и x_3 через x_1 не удаётся, но можно выразить их производные по x_1 как производные неявной функции. Записав (4.6) для $i = 2, 3$ в виде системы уравнений, имеем

$$\begin{cases} f_2 = \lambda\alpha - x_1 - 2x_2 - x_3 + D - c_2 - \frac{b_2\gamma_2}{3}(r_2 - x_2)^{\gamma_2 - 1} = 0, \\ f_3 = \lambda\alpha - x_1 - x_2 - 2x_3 + D - c_3 - \frac{b_3\gamma_3}{3}(r_3 - x_3)^{\gamma_3 - 1} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Тогда, обозначим

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + \frac{\gamma_2(\gamma_2-1)b_2(r_2-x_2)^{\gamma_2-2}}{3} & -1 \\ -1 & -2 + \frac{\gamma_3(\gamma_3-1)b_3(r_3-x_3)^{\gamma_3-2}}{3} \end{pmatrix},$$

определитель матрицы A равен

$$\Delta = 3 - \frac{2}{3}\left[\gamma_2(\gamma_2 - 1)b_2(r_2 - x_2)^{\gamma_2-2} + \gamma_3(\gamma_3 - 1)b_3(r_3 - x_3)^{\gamma_3-2}\right] + \\ + \frac{\gamma_2(\gamma_2 - 1)\gamma_3(\gamma_3 - 1)b_2b_3(r_2 - x_2)^{\gamma_2-2}(r_3 - x_3)^{\gamma_3-2}}{9}, \tag{4.8}$$

значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{\gamma_3(\gamma_3-1)b_3(r_3-x_3)^{\gamma_3-2}}{3} & 1 \\ 1 & -2 + \frac{\gamma_2(\gamma_2-1)b_2(r_2-x_2)^{\gamma_2-2}}{3} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_2}{dx_1} \\ \frac{dx_3}{dx_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \frac{\gamma_3(\gamma_3-1)b_3(r_3-x_3)^{\gamma_3-2}}{3} - 1 \\ \frac{\gamma_2(\gamma_2-1)b_2(r_2-x_2)^{\gamma_2-2}}{3} - 1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для первой фирмы (лидера):

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s), \\ t \le s \le T}} \{\alpha(\lambda x_1(t) - \mu y_1(t)) + (D - c_1 - \bar{x}(t))x_1(t) + \\ + \frac{1}{3}[b_1(r_1 - x_1(t))^{\gamma_1} + b_2(r_2 - x_2(t))^{\gamma_2} + b_3(r_3 - x_3(t))^{\gamma_3}] - y_1(t)\}. \tag{4.10}$$

Оптимизируя по $x_1(s)$ выражение, стоящее в фигурных скобках в (4.10), получаем

$$\alpha\lambda + D - c_1 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_1\frac{dx_2}{dx_1} - x_1\frac{dx_3}{dx_1} - \\ - \frac{\gamma_1 b_1}{3}(r_1 - x_1)^{\gamma_1 - 1} - \frac{\gamma_2 b_2}{3}(r_2 - x_2)^{\gamma_2 - 1} - \frac{\gamma_3 b_3}{3}(r_3 - x_3)^{\gamma_3 - 1} = 0. \tag{4.11}$$

Объединяя условие (4.11) на x_1 и условия (4.7) на x_2 и x_3, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\lambda+D-c_1-2x_1-x_2-x_3-x_1\frac{dx_2}{dx_1}-x_1\frac{dx_3}{dx_1}-\frac{\gamma_1 b_1}{3}(r_1-x_1)^{\gamma_1-1}- \\ -\frac{\gamma_2 b_2}{3}(r_2-x_2)^{\gamma_2-1}\frac{dx_2}{dx_1}-\frac{\gamma_3 b_3}{3}(r_3-x_3)^{\gamma_3-1}\frac{dx_3}{dx_1}=0, \\ \alpha\lambda+D-c_2-x_1-2x_2-x_3-\frac{\gamma_2 b_2}{3}(r_2-x_2)^{\gamma_2-1}=0, \\ \alpha\lambda+D-c_3-x_1-x_2-2x_3-\frac{\gamma_3 b_3}{3}(r_3-x_3)^{\gamma_3-1}=0, \end{cases} \tag{4.12}$$

где

$$\alpha(t)=\frac{1}{\rho+\mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)}-1\right), \quad \frac{dx_2}{dx_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1}$$

определяются формулой (4.9), а Δ определяется выражением (4.8).

Решая систему уравнений (4.12) численно при $t\in[0,T]$, находим $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, а затем и $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ из дифференциальных уравнений (4.2) и (4.4). После этого находим интегралы J_1, J_2, J_3 по формулам (4.1) и (4.3):

$$J_1^{St}=112.05, \quad J_2^{St}=60.07, \quad J_3^{St}=49.90.$$

В этом случае суммарный выигрыш фирм равен $J=222.02$.

Если обязанности лидера берёт на себя вторая фирма (менее эффективная, чем первая), то выигрыши распределяются как:

$$J_1^{St}=78.38, \quad J_2^{St}=96.13, \quad J_3^{St}=56.14.$$

В этом случае суммарный выигрыш фирм равен $J=230.65$, т.е. немного больше, чем когда обязанности лидера берёт на себя самая эффективная фирма.

Наконец, если обязанности лидера возьмёт на себя самая неэффективная (третья) фирма, то выигрыши распределятся как:

$$J_1^{St}=83.44, \quad J_2^{St}=71.48, \quad J_3^{St}=80.98.$$

В этом случае суммарный выигрыш фирм равен $J=235.89$, т.е. ещё больше, чем когда обязанности лидера берет на себя самая эффективная фирма, и больше, чем когда обязанности лидера берет на себя средняя по эффективности (вторая) фирма. Но при любом лидерстве суммарный выигрыш в случае иерархии меньше выигрыша

при независимом поведении фирм и значительно меньше выигрыша при кооперации.

Теперь рассмотрим информационный регламент обратной игры Штакельберга. Предположим сначала, что наиболее эффективная (первая) фирма является лидером. Она сообщает другим фирмам свою стратегию как функцию от наборов стратегий последователей.

Ясно, что в модели конкуренции-кооперации наибольший выигрыш фирма-ведущий может получить, если все последователи выберут стратегии не инвестировать вовсе в выпуск своей продукции, а участвовать лишь в производстве общественного блага: $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 0$. Такую ситуацию будем называть полным согласием, а соответствующие ей стратегии фирм – стратегиями полного согласия. В этом случае первая фирма решает оптимизационную задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_1 - x_1(t)]x_1(t) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j]^{\gamma_j} - y_1(t) \right\} dt \to \max, \tag{4.13}$$

$$\dot{y}_1 = \lambda x_1(t) - \mu y_1(t), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad t \in [0, T]. \tag{4.14}$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s), \\ t \le s \le T}} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial y} (\lambda x_1(t) - \mu y_1(t)) + (D - c_1 - x_1(t))x_1(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} b_j (r_1 - x_j(t))^{\gamma_j} - y_1(t) \right\}.$$

Оптимизируя по $x_1(s)$ выражение, стоящее в фигурных скобках, видим, что

$$\alpha\lambda + D - c_1 - 2x_1 - \frac{\gamma_1 b_1}{3} (r_1 - x_1)^{\gamma_1 - 1} = 0, \quad t \in [0, 6]. \tag{4.15}$$

Решая численно уравнение (4.15), находим значение x_1 на промежутке $[0, 6]$, а затем определяем значения $y_1(t)$, численно интегрируя дифференциальное уравнение (4.14) на том же промежутке с подходящим шагом. После этого находим по формуле (4.13) значение интеграла: $J_1^{acc} = 203.61$.

Выигрыши второго и третьего игроков в данном случае равны

$$J_2 = J_3 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ \frac{1}{3} b_1 (r_1 - x_1)^{\gamma_1} + \frac{1}{3} b_2 r_2^{\gamma_2} + \frac{1}{3} b_3 r_3^{\gamma_3} \right\} dt. \quad (4.16)$$

Зная значения x_1 на промежутке $[0, 6]$, находим значения интегралов по формуле (4.16):

$$J_2^{acc} = 47.15, \quad J_3^{acc} = 47.15.$$

Суммарный выигрыш фирм в этом случае равен $J_{acc} = 297.91$.

Определим стратегии наказания. Ясно, что в модели конкуренции-кооперации худшее, что может сделать ведущая фирма для наказания ведомых за их несогласное поведение – это инвестировать все имеющиеся у неё средства только в выпуск продукции и не участвовать вовсе в производстве общественного блага. Исполнение такой стратегии невыгодно самой ведущей фирме, но позволяет мотивировать экономически рациональных последователей вести себя так, как нужно ведущей. Такую ситуацию будем называть наказанием, а применяемую стратегию ведущей фирмы – стратегией наказания: $x_1(t) \equiv r_1$.

В ситуации наказания ведомые максимизируют свои выигрыши, т.е. каждый из них решает следующую оптимизационную задачу:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_i - \bar{x}] x_i + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{3} b_l [r_l - x_l]^{\gamma_l} - y_i \right\} dt \to \max, \quad (4.17)$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.18)$$

Выпишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \le s \le T}} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial t} (\lambda x_i - \mu y_i) + \right.$$

$$\left. + (D - c_i - \bar{x}) x_i + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(s)]^{\gamma_j} - y_i(s) \right\}, \quad (4.19)$$

Точно так же, как и ранее, проводим вычисления и находим по формуле (4.17) значения интегралов:

$$J_2^{pen} = 53.29, \quad J_3^{pen} = 43.67.$$

Из дифференциального уравнения

$$\dot{y}_1 = \lambda r_1 - \mu y_1(t), \quad y_1(0) = y_{10}$$

находим $y_1(t)$, а затем, зная $x_2(t)$ и $x_3(t)$, $x_1(t) \equiv r_1$ и $y_1(t)$ на промежутке [0,6], из выражения

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_1 - \bar{x}(t)] r_1 + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_1(t) \right\} dt$$

найдём $J_1^{pen} = 110.38$. Суммарный выигрыш фирм в этом случае равен $J_S = 207.35$.

Наконец, определимся со стратегиями поощрения. В нашем примере, когда роль ведущей играет самая эффективная (первая) фирма, выигрыш наименее эффективной (третьей) фирмы в ситуации полного согласия с ведущей больше, чем её выигрыш в ситуации наказания. В то же время выигрыш средней по эффективности (второй) фирмы в ситуации наказания всё же больше, чем в случае полного согласия с ведущей. Поэтому фирма-ведущий должна найти и предложить ведомым такие стратегии, которые были бы для обеих ведомых фирм лучше, чем ситуация наказания, и в то же время приносили бы ведущей фирме наибольший выигрыш на множестве таких стратегий. Такую ситуацию и соответствующие ей стратегии будем называть ситуацией поощрения.

Замечание 2. Подчеркнём, что ситуация, которая названа ситуацией полного согласия, ни в коей мере не является ситуацией поощрения. Ситуация полного согласия – это просто некий разведочный эксперимент, с помощью которого фирма-ведущий узнает, какие из фирм-последователей настолько неэффективны, что в ситуации поощрения им можно будет предложить не инвестировать вовсе в собственное производство, а участвовать только в общественных работах, а каким фирмам-последователям нужно предложить выигрыши, немного большие, чем у них были бы в ситуации наказания.

Ведущий в данном случае должен решить следующую задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_1 - \bar{x}(t)] x_1(t) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_1(t) \right\} dt \to \max, \tag{4.20}$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2,3, \tag{4.21}$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{[D - c_2 - \bar{x}(t)]x_2(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_2(t)\right\}dt \geq J_2^{pen}, \tag{4.22}$$

$$J_3 = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{[D - c_3 - \bar{x}(t)]x_3(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_3(t)\right\}dt \geq J_3^{pen}. \tag{4.23}$$

После этого он должен предложить последователям выбирать найденные при решении данной задачи стратегии $x_2(t)$ и $x_3(t)$, $t \in [0,6]$ или терпеть ситуацию наказания.

Применяя принцип максимума Понтрягина, который в случае линейной по фазовым переменным задачи (4.20)–(4.23) доставляет не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности процесса $(y(t), x(t))$, выпишем эти совпадающие условия:

а) сопряжённое уравнение (Эйлера–Лагранжа)

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}_3(t) \end{pmatrix} = \mu I_3 \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} + e^{-pt} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ -\hat{\lambda}_2 \\ -\hat{\lambda}_3 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

где $p_i(t)$ – сопряжённые (двойственные) переменные, $\hat{\lambda}_i$ – множители Лагранжа, $i = 1,2,3$, I_3 – единичная матрица порядка 3×3;

б) условия трансверсальности

$$p_i(T) = 0, \quad i = 1,2,3;$$

в) условие максимума

$$G(t,x) = \lambda p_1 x_1 + \lambda p_2 x_2 + \lambda p_3 x_3 + \tag{4.25}$$
$$+ \sum_{k=1}^{3} \hat{\lambda}_k e^{-\rho t}\left[(D - c_k - \bar{x})x_k + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j (r_j - x_j)^{\gamma_j}\right] \to \max_{\substack{x_i(t),\ i=1,2,3 \\ 0 \leq t \leq T}};$$

г) условие согласования знаков ($i = 2,3$)

$$e^{-\rho t}\left\{[D - c_i - \bar{x}(t)]x_i(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_i(t)\right\} \leq 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda}_i \geq 0,$$

$$e^{-\rho t}\left\{[D - c_i - \bar{x}(t)]x_i(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_i(t)\right\} \geq 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda}_i \leq 0,$$

д) условия дополняющей нежёсткости ($i = 2, 3$)

$$\hat{\lambda}_i \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_i - \bar{x}(t)] x_i(t) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_i(t) \right\} dt = 0. \quad (4.26)$$

Из условий дополняющей нежёсткости (4.26) следует, что если оба неравенства (4.22), (4.23) выполняются как строгие неравенства, то $\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 = 0$, значит, и $p_2(t) = p_3(t) \equiv 0$ из (4.24), и тогда из принципа максимума (4.25) следует, что в равновесии

$$x_2(t) = x_3(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Но этот случай соответствует уже рассмотренной ранее ситуации полного согласия, в которой выигрыш первой фирмы был меньше, чем в ситуации наказания. Мы пришли к противоречию. Значит, хотя бы одно из ограничений (4.22)–(4.23) в равновесии выполняется как равенство. Естественно предположить, что ограничение (4.22) выполняется как равенство, а ограничение (4.23) для самой слабой фирмы выполняется как строгое неравенство, поскольку даже в ситуации, когда обе фирмы-последовательницы выбирали стратегию полного согласия с фирмой-лидером, выигрыш самой слабой фирмы был больше, чем ее же выигрыш в ситуации общего наказания.

В этом случае имеем $\hat{\lambda}_3 = 0$, следовательно, $x_3(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$, и оптимизационная задача принимает вид:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_1 - \bar{x}(t)] x_1(t) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_1(t) \right\} dt \to \max, \quad (4.27)$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.28)$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - c_2 - \bar{x}(t)] x_2(t) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} b_j [r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_2(t) \right\} dt = J_2^{pen}. \quad (4.29)$$

Из системы дифференциальных уравнений (4.24) получаем:

$$\dot{p}_1 - \mu p_1 = e^{-\rho t}, \quad p_1(T) = 0 \quad (4.30)$$

(положили $\hat{\lambda}_1 = 1$, воспользовавшись линейностью и тем, что $\hat{\lambda}_1 \neq 0$). Решая (4.30), находим:

$$p_1(t) = -\frac{1}{\rho + \mu} e^{-\rho t} + \frac{1}{\rho + \mu} e^{-(\rho+\mu)T} e^{\mu t} = \frac{1}{\rho + \mu} e^{-\rho t} \left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1 \right).$$

Из системы (4.24) также получаем:

$$\dot{p}_2 - \mu p_2 = -\hat{\lambda}_2 e^{-\rho t}, \quad p_2(T) = 0. \tag{4.31}$$

Решая (4.31), получаем:

$$p_2(t) = \frac{\hat{\lambda}_2}{\rho+\mu} e^{-\rho t} - \frac{\hat{\lambda}_2}{\rho+\mu} e^{-(\rho+\mu)T} e^{\mu t} = \frac{\hat{\lambda}_2}{\rho+\mu} e^{-\rho t} \left(1 - e^{(\rho+\mu)(t-T)}\right).$$

Рассматривая задачу (4.25) при $\hat{\lambda}_1 = 1$, $\hat{\lambda}_3 = 0$, $p_3(t) \equiv 0$ и, следовательно, $x_3(t) \equiv 0$, имеем для $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} G(t,x) &= e^{-\rho t} \frac{\lambda}{\rho+\mu} \left(e^{(\rho+\mu)(t-T)} - 1\right)(x_1 - \hat{\lambda}_2 x_2) + \\ &+ e^{-\rho t} \left[(D - c_1 - \bar{x})x_1 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j (r_j - x_j)^{\gamma_j}\right] + \\ &+ \hat{\lambda}_2 e^{-\rho t} \left[(D - c_2 - \bar{x})x_2 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j (r_j - x_j)^{\gamma_j}\right] \to \max_{\substack{x_i(t),\, i=1,2 \\ 0 \le t \le T}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

при условии (4.29). Решая данную задачу численно, получаем следующую серию подзадач.

На первом (нулевом) шаге ($t = 0$) решаем (4.32) при условии:

$$(D - c_2 - x_1^0 - x_2^0)x_2^0 + \frac{1}{3}\left[b_1(r_1 - x_1^0)\gamma_1 + b_2(r_2 - x_2^0)^{\gamma_2} + b_3 r_3^{\gamma_3}\right] - y_2^0 = (J_2^{pen})^0,$$

где $y_2^0 = y_{20} = 0$, а $(J_2^{pen})^0$ – найденное при вычислении J_2^{pen} мгновенное значение выигрыша второго игрока в момент времени $t = 0$, когда первый игрок является ведущим и осуществляет стратегию наказания.

На i-м шаге $\left(i = 1, \ldots, \frac{T}{h} - 1\right)$ задача имеет вид (4.32) при ограничении

$$(D - c_2 - x_1^i - x_2^i)x_2^i + \frac{1}{3}\left[b_1(r_1 - x_1^i)\gamma_1 + b_2(r_2 - x_2^i)^{\gamma_2} + b_3 r_3^{\gamma_3}\right] - y_2^i = (J_2^{pen})^i, \tag{4.33}$$

где

$$t = ih, \quad y_2^i = y_2^{i-1} + \left(\lambda x_2^{i-1} - \mu y_2^{i-1}\right) h, \tag{4.34}$$

$(J_2^{pen})^i$ – найденное при вычислении J_2^{pen} мгновенное значение выигрыша второго игрока в момент времени $t = ih$, когда первый игрок является ведущим и осуществляет стратегию наказания.

Получаем систему трех уравнений для i-го шага, $\left(i=1,\ldots,\frac{T}{h}-1\right)$ (индексы i в первых двух уравнениях опущены):

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=e^{-\rho t}\frac{\lambda}{\rho+\mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)}-1\right)+\hat{\lambda}_2 e^{-\rho t}\left[x_2+\frac{b_1\gamma_1}{3}(r_1-x_1)^{\gamma_1-1}\right]+$$
$$+e^{-\rho t}\left[D-c_1-2x_1-x_2-\frac{b_1\gamma_1}{3}(r_1-x_1)^{\gamma_1-1}\right]=0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}=-\hat{\lambda}_2 e^{-\rho t}\frac{\lambda}{\rho+\mu}\left(e^{(\rho+\mu)(t-T)}-1\right)-e^{-\rho t}\left[x_1+\frac{b_2\gamma_2}{3}(r_2-x_2)^{\gamma_2-1}\right]-$$
$$-\hat{\lambda}_2 e^{-\rho t}\left[D-c_2-x_1-2x_2-\frac{b_2\gamma_2}{3}(r_2-x_2)^{\gamma_2-1}\right]=0 \quad (4.36)$$

$$(D-c_2-x_1^i-x_2^i)x_2^i+\frac{1}{3}\left[b_1(r_1-x_1)^{\gamma_1}+b_2(r_2-x_2)^{\gamma_2}+b_3 r_3^{\gamma_3}\right]-y_2^i-(J_2^{pen})^i=0. \quad (4.37)$$

Сокращаем на множитель $e^{-\rho t}$ первые два уравнения и решаем систему (4.35)–(4.37) для каждого i численно, и численно же интегрируем выигрыши с дисконтированием, получая общий выигрыш каждой из двух первых фирм. Выигрыш третьей фирмы, которая не инвестирует и не загрязняет окружающую среду, а лишь участвует в производстве общественного блага, также находим численно, зная размеры инвестиций первых двух фирм.

Получаются следующие значения:

$$J_1^{AGR}=198.59-\varepsilon, \quad J_2^{AGR}=53.29+\varepsilon, \quad J_3^{AGR}=47.86.$$

Как и предполагалось, выигрыш третьей фирмы в рассматриваемой ситуации больше, чем в ситуации наказания, и даже немного больше, чем в ситуации полного согласия. Данную ситуацию будем называть ситуацией поощрения. Таким образом, равновесие в данной игре состоит в том, что ведущая фирма предлагает ведомым ситуацию поощрения, а если хотя бы одна из ведомых фирм не согласится, то ведущая фирма играет стратегию наказания.

Суммарный выигрыш фирм в данной ситуации поощрения равен

$$J^{AGR}=299.74.$$

Пусть теперь роль ведущего играет вторая фирма (средняя по эффективности), тогда выигрыши в ситуациях полного согласия и наказания будут равны соответственно:

$$J_1^{acc} = 56.16, \quad J_2^{acc} = 192.88, \quad J_3^{acc} = 55.16,$$
$$J_1^{pen} = 72.13, \quad J_2^{pen} = 94.26, \quad J_3^{pen} = 50.79.$$

Видно, что если выигрыш самого слабого игрока (третьей фирмы) в ситуации полного согласия выше, чем в ситуации наказания, то выигрыш самого сильного игрока (первой фирмы) в ситуации наказания выше, чем в ситуации согласия. Поэтому фирма-ведущий должна найти и предложить ведомым фирмам такие стратегии, которые были бы для обеих ведомых лучше, чем ситуация наказания, и в то же время приносили бы ведущей фирме наибольший выигрыш на множестве таких стратегий.

Ведущий в данном случае должен решить следующую задачу:

$$J_2 = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{[D - c_2 - \bar{x}(t)]x_2(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_2(t)\right\}dt \to \max,$$

$$\dot{y}_i = \lambda x_i(t) - \mu y_i(t), \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, 3,$$

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{[D - c_1 - \bar{x}(t)]x_1(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_1(t)\right\}dt \geq J_1^{pen},$$

$$J_3 = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{[D - c_3 - \bar{x}(t)]x_3(t) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j[r_j - x_j(t)]^{\gamma_j} - y_3(t)\right\}dt \geq J_3^{pen}.$$

После этого он должен предложить последователям выбирать найденные при решении данной задачи стратегии $x_1(t)$ и $x_3(t)$, $t \in [0, 6]$ или терпеть ситуацию наказания.

Далее аналогично получаем следующие результаты:

$$J_1^{AGR} = 72.13 + \varepsilon, \quad J_2^{AGR} = 179.72 - \varepsilon, \quad J_3^{AGR} = 53.73.$$

Как и предполагалось, выигрыш третьей фирмы в рассматриваемой ситуации поощрения больше, чем в ситуации наказания, хотя и меньше, чем в ситуации полного согласия.

Суммарный выигрыш фирм в ситуации поощрения равен

$$J^{AGR} = 305.59.$$

Наконец, пусть роль ведущего играет третья фирма (наименее эффективная), тогда выигрыши в ситуациях полного согласия и наказания будут равны соответственно:

$$J_1^{acc} = 59.86, \quad J_2^{acc} = 59.86, \quad J_3^{acc} = 180.26,$$
$$J_1^{pen} = 77.69, \quad J_2^{pen} = 66.12, \quad J_3^{pen} = 78.84.$$

В отличие от предыдущих случаев, выигрыши обеих фирм-последовательниц в ситуации наказания выше, чем в ситуации полного согласия.

Поскольку выигрыши обеих фирм-последовательниц в ситуации наказания выше, чем в ситуации полного согласия, можем предположить, что попытка решить задачу аналогично предыдущим случаям в данном случае не приведет к решению. Действительно, предлагая наиболее сильной (первой) фирме реализовать стратегию, при которой ее выигрыш был бы немного больше ее выигрыша в ситуации наказания, а более слабой (второй) фирме не инвестировать вовсе, получаем следующие результаты:

$$J_1^{AGR} = 77.69 + \varepsilon, \quad J_2^{AGR} = 58.50, \quad J_3^{AGR} = 168.20 - \varepsilon.$$

При этом выигрыш второй фирмы оказывается не только меньше ее выигрыша в ситуации наказания, но даже меньше ее выигрыша в ситуации полного согласия. Очевидно, вторая фирма не согласится на такой сценарий согласия и предпочтет ситуацию наказания.

Применяя принцип максимума Понтрягина, аналогично предыдущему общий выигрыш каждой из трех фирм:

$$J_1^{AGR} = 77.69 + \varepsilon, \quad J_2^{AGR} = 66.12 + \varepsilon, \quad J_3^{AGR} = 163.12 - 2\varepsilon.$$

Данную ситуацию мы назвали ситуацией поощрения. Таким образом, равновесие в данной игре состоит в том, что ведущая (третья) фирма предлагает ведомым ситуацию поощрения, а если хотя бы одна из ведомых фирм не согласится, то ведущая фирма применяет

Таблица 1: Выигрыши при различных способах организации

i	NE	ST			IST			C			
		L	F_1	F_2	L	F_1	F_2	$\overline{J}^C/3$	Φ_i^{NM}	Φ_i^{PZ}	Φ_i^{GP}
1	100.12	112.05	60.07	49.90	198.59-ε	53.29+ε	47.86	104.70	124.14	126.24	129.81
2	85.95	96.13 (2)	78.38 (1)	56.14 (3)	179.72-ε (2)	72.13+ε (1)	53.73 (3)	104.70	101.75	103.46	101.80
3	72.68	*80.98 (3)*	83.44 (1)	71.48 (2)	163.12-2ε (3)	77.69+ε (1)	66.12+ε (2)	104.70	88.21	84.40	82.48
N_1	258.75	222.02			299.74			314.10			
N_2	258.75	230.65			305.59			314.10			
N_3	258.75	235.89			306.92			314.10			

стратегию наказания. Суммарный выигрыш фирм в данной ситуации поощрения равен

$$J^{AGR} = 306.92.$$

Результаты сравнительного анализа представлены в табл.1. В скобках указаны номера фирм, соответственно лидер, первый и второй ведомые. $N_1 - N_3$ – суммарные выигрыши этих фирм.

5. Заключение

Подведем итоги сравнительного анализа. Как следует из численного примера, выигрыш при кооперации значительно превосходит суммарный выигрыш при независимом поведении и при иерархии, и немного больше, чем в иерархической игре с обратной связью по управлению. Суммарный выигрыш фирм при свободной конкуренции превосходит суммарный выигрыш при прямой иерархической игре, но уступает суммарному выигрышу в иерархической игре с обратной связью по управлению. При этом, чем менее эффективна фирма, которая выступает в качестве ведущей, тем больше суммарный выигрыш фирм при иерархии (как прямой, так и обратной).

Доля наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша немного больше, чем ее выигрыш при независимом поведении, и немного меньше, чем ее выигрыш в иерархической игре, когда она является ведущей. При этом ее выигрыш при независимом поведении, как и доля при кооперации, почти вдвое меньше ее выигрыша в иерархической игре с обратной связью по управлению, когда она является ведущей. Что касается кооперативных игр в форме характеристической функции фон Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна,

то компонента вектора Шепли для самой эффективной фирмы всегда больше, чем ее выигрыш при свободной конкуренции, в иерархической игре, когда она является ведущей, и при кооперации в случае равномерного распределения дохода между игроками. При этом компонента вектора Шепли для самой эффективной фирмы значительно меньше ее выигрыша в иерархической игре с обратной связью по управлению, когда она является ведущей.

Что касается менее эффективной фирмы, то ее выигрыш при кооперации больше ее выигрыша при независимом поведении и при иерархии (как прямой, так и обратной), где она является ведомой, а также больше ее выигрыша при прямой иерархии, когда она является ведущей, но значительно меньше ее выигрыша при обратной иерархии, когда она является ведущей. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна немного меньше ее выигрыша при кооперации и больше ее выигрыша при свободной конкуренции, при этом компонента вектора Шепли значительно превосходит выигрыш данной фирмы при иерархии (прямой и обратной), когда она является ведомой, и незначительно превосходит ее выигрыш в прямой иерархической игре, когда она является ведущей, однако почти на 80 процентов уступает ее выигрышу при обратной иерархии в роли ведущей. Выигрыш такой фирмы при независимом поведении больше ее выигрыша в иерархической игре (прямой и обратной), где она является ведомой, и меньше ее выигрыша в прямой иерархической игре, если она является ведущей, а также более чем в два раза меньше ее выигрыша в иерархической игре с обратной связью по управлению в роли ведущей.

Выигрыш наименее эффективной фирмы при кооперации значительно превосходит ее выигрыш при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии (прямой и обратной), в которой она является ведомой, немного меньше ее выигрыша в прямой иерархической игре в качестве ведущей, и более чем в два раза меньше ее выигрыша в обратной иерархической игре, когда она является ведущей. Выигрыш наименее эффективной фирмы при кооперации также примерно вдвое превосходит ее выигрыш в

прямой и обратной иерархической игре, где данная фирма является ведомой, примерно на 25 процентов больше ее выигрыша в прямой иерархической игре, где она является ведущей, и примерно на 60 процентов меньше ее выигрыша в иерархической игре с обратной связью по управлению, где она является ведущей. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана-Моргенштерна, Петросяна-Заккура и Громовой-Петросяна меньше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации в случае равномерного распределения выигрышей. При этом компоненты вектора Шепли для данной фирмы (немного) больше ее выигрыша в прямой иерархической игре в качестве ведущей, примерно вдвое больше ее выигрышей в прямой и обратной иерархической игре в качестве ведомой и примерно вдвое меньше ее выигрыша в обратной иерархической игре в качестве ведущей.

Принципиальная задача на будущее: сформулировать некие гипотезы об общих закономерностях сравнительной эффективности способов организации и доказать их для максимально широкого класса модельных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Теоретико-игровой анализ взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учетом линейной структуры, «зеленого» эффекта и заботы о справедливости* // МТИиП. 2023. Т. 15, вып. 1. С. 3–47.

2. Королев А.В., Котова М.А., Угольницкий Г.А. *Сравнение эффективности методов организации и управления в динамических моделях олигополии Курно* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 1. С. 82–105.

3. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленингр. ун-та. Сер.1. 1977. № 4(19). С. 46–52.

4. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Сравнительный анализ устойчивой эксплуатации возобновляемых ресурсов при различных информационных регламентах* // МТИиП. 2022. Т. 14, вып. 1. С. 102–125.

5. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учётом экологических условий* // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 150–168.

6. *Algorithmic Game Theory.* Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. - Cambridge University Press, 2007.

7. Basar T., Zhu Q. *Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games* // Dynamic Games and Applications. 2011. V. 1(1). P. 50–73.

8. Branderburger A.M., Nalebuff B.J. *Coopetition.* NY: Currency Doubleday, 1996.

9. Carfi D., Donato A. *Coopetitive Games for Sustainability of Global Feeding and Climate Change: Recent Developments* // J. of Env. Management and Tourism. 2018. V. 9, no. 1(25). P. 200–215.

10. Carfi D., Donato A. *Environmental Management through Coopetitive Urban Waste Recycling in Eco-Industrial Parks* // Mathematics. 2021 V. 9. P. 2520.

11. Cygler J., Sroka W., Solesvik M., Debkowska K. *Benefits and drawbacks of coopetition: The roles of scope and durability in coopetitive relationships* // Sustainability. 2018. V. 10 (2688). P. 1–24.

12. Galieva N.M., Korolev A.V., Ougolnitsky G.A. *Dynamic Resource Allocation Networks in Marketing: Comparing the Effectiveness of Control Methods* // Dynamic Games and Applications. 2023.

13. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *Static Models of Coordination of Social and Private Interests in Resource Allocation* // Automation and Remote Control. 2018. V. 79, no. 7. P. 1319–1341.

14. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *Social and Private Interests Coordination Engines in Resource Allocation: System Compatibility, Corruption, and Regional Development* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2020. V. 16. P. 119–150.

15. Gromova E.V., Petrosyan L.A. *On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games* // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. P. 1680–1692.

16. Heiets I., Oleshko T., Leshchinsky O. *Game - Theoretic Principles of Decision Management Modeling Under the Coopetition* // Int. Game Theory Review. 2021. V. 23(1). P. 2050010.

17. Kalai A., Kalai E. *Cooperation in strategic games revisited* // CMS-EMS Center for Math. Studies in Economics and Management Science. 2011. Discussion Paper № 1512.

18. Korolev A.V., Ougolnitsky G.A. *Cooperative game-theoretic models of the Cournot oligopoly* // International Game Theory Review. 2023. V. 25(2). P. 2350004.

19. Korolev A.V., Ougolnitsky G.A. *Differential game theoretic models of Cournot oligopoly with environmental impact and network structure* // IGTR. 2024 (in press).

20. Long N.V. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. World Scientific, 2010.

21. Maskin, E., Tirole, J. *A Theory of Dynamic Oligopoly, III. Cournot Competition* // Eur. Econ. Rev. 1987. V. 31. P. 947–968.

22. Neumann J. von, Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.

23. Okura M., Carfi D. *Coopetition and Game Theory* // J. of Applied Economic Sciences. 2014. Vol.9, iss. 3(29). P. 458–469.

24. Ougolnitsky G., Korolev A. *Game-Theoretic Models of Coopetition in Cournot Oligopoly* // Stats. 2023. V. 6(2). P. 576–595.

25. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. *Differential Game-Theoretic Models of Cournot Oligopoly with Consideration of the Green Effect* // Games. 2023. V. 14(1). P. 14.

26. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // J. of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.

DYNAMIC MODELS OF COMPETITION AND COOPERATION IN COURNOT OLIGOPOLY TAKING INTO ACCOUNT THE ENVIRONMENTAL IMPACT

Polina D. Demchuk, St. Petersburg State Electrotechnical University (polina.demchuk9@gmail.com),
Alexey V. Korolev, St. Petersburg State Electrotechnical University, Cand.Sc., docent (avkorolev@etu.ru),
Gennady A. Ugolnitsky, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Dr.Sc., professor (gaugolnickiy@sfedu.ru).

Abstract: The basic model of the Cournot oligopoly taking into account competition-cooperation and environmental pollution as a differential game in a normal form is described. The numerical analysis for independent and cooperative behavior is carried out for an example used in the future. Games in the form of the characteristic function of von Neumann-Morgenstern, Petrosyan-Zaccour and Gromova-Petrosyan are constructed, and the Shapley values are calculated. Hierarchical games with information regulations for direct and reverse Stackelberg games are analyzed, payoffs' comparative analysis for all methods of organization is provided. All the results are presented for the dynamic game with three players.

Keywords: comparative efficiency analysis, competition-cooperation, dynamic stability, differential games, Cournot oligopoly.