Математическая Теория Игр и её Приложения, т.17, в.2, с. 56–74

УДК 519.83+330.46
ББК 22.185

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СТИМУЛАМИ И СТРУКТУРОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ИГРАХ НА СЕТЯХ С ЛИНЕЙНЫМ НАИЛУЧШИМ ОТВЕТОМ

Илья В. Петров
Институт проблем управления РАН
117997, г. Москва, Профсоюзная, 65
e-mail: ivpetrov@ipu.ru

В работе рассматривается теоретико-игровая модель взаимодействия агентов на сети с линейным наилучшим ответом игроков. Данная модель позволяет исследовать влияние структуры взаимодействий между агентами на их стратегическое поведение. Особое внимание уделяется вопросам управления: выбору оптимальных стратегий центра, направленных на максимизацию его целевой функции. Анализируются два ключевых подхода к управлению – через индивидуальные стимулы агентов и через изменение структуры связей между ними. Предложена концепция репрезентативного агента, позволяющая упростить анализ равновесия и задач управления в игре на сети. Рассматриваются как задача выбора центром различных методов управления, так и задачи противоборства между центрами с противоположными целями. Приводятся аналитические условия, при которых управление структурой взаимодействия оказывается более эффективным, чем управление индивидуальными стимулами. Численные эксперименты подтверждают полученные теоретические результаты и демонстрируют их применимость для различных типов сетевых структур.

©2025 И.В. Петров

Ключевые слова: игры на сетях, задачи управления, задача стимулирования.

Поступила в редакцию: 10.02.25 *После доработки*: 22.03.25 *Принята к публикации*: 19.06.25

1. Введение

Отправной точкой в развитии математических моделей взаимосвязи исходов агентов между собой является концепция «эндогенных социальных эффектов» (англ. endogenous social effects) [10]. В исследованиях в области микроэкономики и эконометрики влияние такого взаимодействия на индивидуальное поведение принято называть «эффектами окружения» (англ. peer effects). Для идентификации таких эффектов была предложена модель «linear-in-mean» – эконометрическая модель, характеризующая *линейную* зависимость поведения агента от *среднего* поведения своего окружения. С появлением и развитием концепций сетей возникла возможность учитывать индивидуальные связи между агентами – «сетевые эффекты», что позволило уточнить существующие модели, а также разрешить ряд технических особенностей их идентификации [7].

Особую популярность получили теоретико-игровые модели, в которых наилучший ответ игрока зависит от действий его соседей линейно. Игры с линейным наилучшим ответом можно рассматривать как генеративные модели эффектов окружения/сетевых эффектов [8]. Если в центре внимания авторов эконометрических моделей находится задача идентификации этих эффектов и выявления причинно-следственных связей на основе реальных данных, то игры на сетях предоставляют теоретическую основу для объяснения того, как формируются эффекты окружения, моделируя стратегическое поведение агентов. В теоретико-игровых моделях фокус внимания направлен на роль структуры взаимодействия: как она влияет на равновесие в игре; к чему, с точки зрения агрегированных характеристик, приводят локальные эффекты взаимодействия узлов; какие узлы и связи играют ключевую роль.

В последние годы появилось множество работ, посвященных различным стратегиям управления в играх на сетях [3], однако вопрос о том, какая из стратегий может быть выбрана в той или иной ситуации, все так же является актуальным. Центральным вопросом данной работы является следующий: имея в распоряжении модель

и идентифицированные параметры, какую из стратегий управления нужно выбрать центру, чтобы достичь наилучшего результата? Безусловно, в общем случае ответ на этот вопрос крайне сложен, однако в некоторых ситуациях он может быть достаточно очевидным. Ниже рассмотрен, возможно, наиболее простой случай: игра с линейным наилучшим ответом с однотипными игроками. Несмотря на некоторую тривиальность случая, приведенный пример показывает, насколько важным может быть применение релевантных стратегий управления для получения наилучших результатов.

2. Модель

Рассмотрим модель из класса игр с линейным наилучшим ответом – так называемую «линейно-квадратичную» игру на сети (англ. linear-quadratic network game) [6]. Интерес исследователей к изучению данной игры мотивирован линейной по действиям соседей в сети функцией наилучшего ответа игрока, что упрощает подход к анализу игровой ситуации, но в то же время демонстрирует важные сетевые эффекты, наблюдаемые при взаимодействии реальных экономических агентов. Множество агентов $N = \{1, \dots, n\}$ на сети, заданной матрицей смежности $G = \{g_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$, $g_{ii} = 0$, взаимодействуют стратегически, т.е. пытаются получить наибольшую выгоду, учитывая действия других игроков: выигрыш игрока v_i в данной модели включает выгоду от собственного действия $x_i \geq 0$ и действий соседей, а также квадратичные издержки от принятого решения [6]:

$$v_i = x_i(b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j) - \frac{x_i^2}{2}. \tag{2.1}$$

Элементы вектора $b = \{b_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i > 0$, характеризуют предельный выигрыш игроков, независящий от действий соседей. Параметр $\beta > 0$ отражает характер зависимости от действий соседей: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements): увеличение своего действия игроком j положительно влияет на выигрыш связанного с ним игрока i. Из условий первого порядка $\partial v / \partial x_i = 0$ возникает система наилучших ответов игроков:

$$BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j \tag{2.2}$$

или в матричном виде $(I - \beta G)x = b$. Если условие существования равновесия $\beta\lambda_{max}(G) < 1$, где λ_{max} – наибольшее собственное значение графа G, выполнено, то существует единственное равновесие Нэша в игре:

$$x^* = (I - \beta G)^{-1} b. \tag{2.3}$$

В задаче управления центр стремится максимизировать собственную целевую функцию. Последовательность ходов следующая: центр ходит первым и выбирает управление, а затем агенты одновременно выбирают действия. Задача управления заключается в максимизации функции центра при некоторых бюджетных ограничениях, которые в случае управления индивидуальными стимулами агентов обычно выбираются пропорционально количеству агентов в сети. В данной работе для сравнения различных стратегий управления рассматривается безразмерная величина бюджета. Следуя [9], центр стремится максимизировать функцию

$$W = \sum_i x_i \longrightarrow \max, \tag{2.4}$$

тогда управление индивидуальными стимулами каждого игрока:

$$b \to \widehat{b}, \tag{2.5}$$

в то время как структурное управление может быть охарактеризовано как:

$$G \to \widehat{G}. \tag{2.6}$$

3. Задачи управления и репрезентативный агент

Чтобы перейти к случаю репрезентативного агента, воспользуемся представлением исходной матрицы смежности в виде комбинации нескольких взаимосвязанных блоков, состоящих из структурно идентичных агентов. Такая постановка приводит к случаю симметричной стохастической блочной модели (англ. symmetric stochastic block model, symmetric SBM): данная модель и её расширения часто используются в задачах кластеризации графов, выявлении сообществ и моделирования сетей, наблюдаемых в реальном мире. SBM является расширением модели случайного графа Эрдёша-Реньи [4] на случай произвольного числа кластеров k, каждый из которых в

отдельности является моделью случайного графа. Матрица связей между кластерами имеет блочно-диагональной вид. На диагонали находятся вероятности связи $p_j \in [0,1]$, соответствующие моделям случайного графа Эрдеша-Реньи, а межкластерные связи возникают с одинаковой для каждого кластера вероятностью $q \in [0,1]$:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r_k \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где $r_j \in [0,1]$ – размер блока, $\sum\limits_{j=1}^{k} r_j = 1$ (при моделировании n выбирается таким, чтобы величины nr_j были целочисленными). Такая постановка – один из частных случаев стохастической блочной модели: в ней матрица P умножается на диагональную матрицу размеров кластеров R, формируя эффективную матрицу взаимодействия PR. Вектор предельных выигрышей $\bar{b}$ состоит из элементов $\bar{b}_j$ и характеризует предельный выигрыш кластера $j \in \{1,\ldots,k\}$. Как показано в [5], равновесие в такой игре

$$\bar{x}^* = (I - \beta PR)^{-1}\bar{b}, \tag{3.2}$$

где $\bar{x}^* = (\bar{x_1}^*,\ldots,\bar{x_k}^*)$, а условия существования равновесия теперь выглядят как

$$\beta\lambda_{max}(PR) < 1.$$

Пример описанной сети и равновесие в игре на ней изображены на рис. 1. Пусть $n = 500$ агентам, разделенных на четыре кластера размера $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.1$, $r_3 = 0.4$ и $r_4 = 0.2$. Для простоты предположим, что предельный выигрыш агентов в каждом кластере одинаковый и составляет $\bar{b}_j = 1$ для всех кластеров $j \in \{1,\ldots,k\}$. Агенты в каждом кластере связаны эквивалентно, $p_j = p = 0.2$, вероятность связи между кластерами $q = 0.003$, а $\beta = 0.5$. Алгоритм следующий: на основании указанных параметров сети генерируется одна реализация стохастической блочной модели, представляющая из себя детерминированный граф с симметричной матрицей смежности; на основе полученного графа и параметров игры по формуле (2.3) рассчитываются равновесные ответы игроков. На рис. 1 слева представлена одна реализация графа согласно описанной модели, а справа отмечены

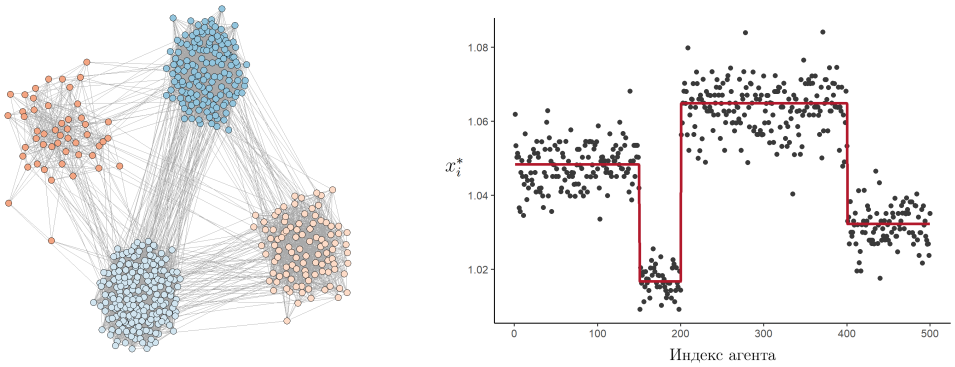

Рисунок 1. Пример структуры взаимодействия четырех кластеров (слева) и равновесных ответов игроков (справа).

равновесные ответы игроков x_j^*. Красной линией отмечены значения $\bar{x}^*$, рассчитанные на основе (3.2) для взаимодействия кластеров.

Сравнив (2.3) и (3.2) можно привести следующую интерпретацию: если в исходной сети существует n агентов, разделенных на k кластеров, внутри которых агенты структурно идентичны (связаны одинаково) и имеют одно и то же значение предельного выигрыша b_i, то выражение (2.3) описывает равновесные ответы каждого игрока по отдельности, а (3.2) – равновесные ответы каждой отдельной группы, или k репрезентативных агентов, каждый из которых представляет один из кластеров.

Таким образом, можно сформулировать концепцию репрезентативного агента в сети, что в дальнейшем позволит упростить анализ и решение задач управления. Для начала рассмотрим случай $k = 1$. Матрицы P, R, I и векторы $\bar{b}$, $\bar{x}$ становятся одноэлементными со скалярными элементами p, 1, 1 и b, $\bar{x}$, соответственно. Такая постановка полностью соответствует модели случайного графа Эрдеша-Реньи $G(n, p)$ с числом агентов n и вероятностью связи между вершинами p. Функция наилучших ответов игроков принимает вид

$$\overline{BR} = b + \beta p \overline{x},$$

равновесие

$$\overline{x}^* = \frac{b}{1 - \beta p},$$

а условие существования и единственности равновесия:

$$\beta p < 1.$$

Пример такой игры представлен на рис. 2. Алгоритм численного эксперимента аналогичен предыдущему примеру, но теперь вместо четырех кластеров сеть состоит из одного: пусть $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ и $b = 1$. Тогда равновесие в игре репрезентативного агента $\bar{x}^*$ равняется $1/(1-0.5*0.5) = 1.3(3)$ (красная линия), однако для отдельно взятой реализации графа равновесные ответы игроков могут отличаться от этого значения. При этом видно, что с ростом n равновесные ответы игроков все менее отличаются от равновесия в игре с репрезентативным агентом.

Подход к анализу игрового равновесия среди групп однородных агентов является достаточно распространенным, например, при исследовании игр с различными типами вершин [2]. Целью, с которой описанный подход выбран в данной работе, является сравнение эффективности различных задач управления. Для того, чтобы проанализировать эффективность структурного управления относительно эффективности управления индивидуальными стимулами агентов, ниже рассмотрено два случая:

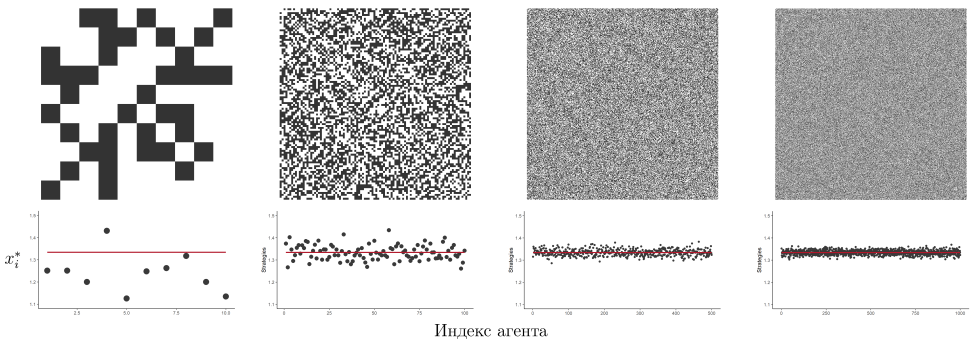

Рисунок 2. Пример матриц смежности графа $G(n, p)$ для $p = 0.5$, $n = 10$, 100, 500 и 1000 (сверху), и равновесных ответов игроков в играх на соответствующих графах (снизу).

1. центр имеет возможность управлять и стимулами, и структурой взаимодействия: задача состоит в том, чтобы выбрать оптимальную стратегию в зависимости от параметров игры;

2. задача противоборства [1]: игра двух центров, один из которых стремится нейтрализовать результаты вмешательства другого центра. В этом случае различные управления переводят игру в исходное состояние равновесия.

3.1. Управление структурой взаимодействия: сравнение с задачей стимулирования

Пусть имеется один центр, который принимает решение о выборе политики вмешательства: обе стратегии направлены на увеличение функции общественного благосостояния: целевые трансферты (задача стимулирования)

$$b \to b + \delta,$$

и перестройка сети (структурные интервенции)

$$p \to p + \delta.$$

Введём следующие обозначения, отражающие стратегию репрезентативного агента в равновесии $\bar{x}^*$ для различных методов управления:

$$\bar{x}^* = \frac{b}{1 - \beta p}, \tag{3.3}$$

$$\bar{x}_T^* = \frac{b + \delta}{1 - \beta p}, \tag{3.4}$$

$$\bar{x}_S^* = \frac{b}{1 - \beta(p + \delta)}. \tag{3.5}$$

Иными словами, ниже под управлением индивидуальными стимулами $\bar{x}_T^*$ подразумевается увеличение предельного выигрыша b агента на величину бюджета δ, что интерпретируется как воздействие, стимулирующее агентов. Аналогично, под управлением структурой взаимодействия $\bar{x}_S^*$ подразумевается изменение вероятности возникновения связи p между вершинами на ту же величину.

Следующее утверждение демонстрирует взаимосвязь между влиянием на стимулы агентов и влиянием на структуру связей в простейшей ситуации, когда вся система из n агентов может быть охарактеризована одним репрезентативным агентом:

Утверждение 3.1. *Если равновесие существует и единственно, т.е.* $\beta(p+\delta) < 1$*, то следующие утверждения верны:*

1. *Эффективность индивидуального управления не зависит от величины сетевого эффекта* β *и пропорциональна бюджету:*

$$\frac{\overline{x}_T}{\overline{x}} = 1 + \frac{\delta}{b}; \tag{3.6}$$

2. *Эффективность структурного управления возрастает с увеличением сетевого эффекта* β*:*

$$\frac{\overline{x}_S}{\overline{x}} = \frac{1-\beta p}{1-\beta\left(\delta+p\right)}; \tag{3.7}$$

3. *Величина сетевого эффекта* β^**, выше которой эффективность структурного управления превышает эффективность индивидуального управления, определяется из*

$$\beta^* = \frac{1}{\delta+p+b}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Утверждения 1-2 получаются при непосредственном вычислении отношения равновесных ответов (3.3) в разных случаях. Чтобы получить 3, сравним равновесные ответы при индивидуальном и структурном управлении и, вычтя одно из другого и приравняв к нулю, получим выражение для β^*. □

Графически связь между β^* и параметрами модели показана на рис. 3. Основное наблюдение состоит в том, что выражение (3.8) позволяет установить взаимосвязь между тремя величинами, представляющими наибольший интерес в данной задаче – бюджетом δ, индивидуальными стимулами игроков b и структурой взаимодействия p.

3.2. Задача противоборства

Ниже рассмотрена задача противоборства двух центров, преследующих противоположные цели. Оба центра одновременно получают информацию о равновесных ответах игроков. Один из центров,

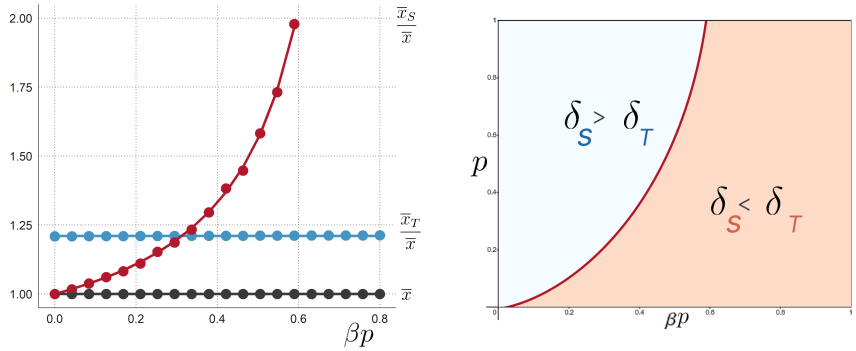

Рисунок 3. Слева – пример, демонстрирующий зависимость эффективности управления стимулами и структурой взаимодействия для различных значений сетевого эффекта β. Справа – значение сетевого эффекта β^*, вычисленного по формуле (3.8) при $b = 1$ для различных бюджетов δ и вероятности связи p. Значение сетевого эффекта β умножено на p для ограничения множества допустимых значений на отрезке $[0, 1]$.

обладая некоторым бюджетом, стремится изменить функцию W посредством изменения целевых трансфертов $b \to \hat{b}$, а второй центр стремится воспрепятствовать этому посредством изменения структуры связей $G \to \hat{G}$.

В отличие от предыдущего случая, теперь каждая из стратегий управления имеет свой собственный бюджет: δ_T для управления индивидуальными стимулами игроков

$$b \to b \pm \delta_T,$$

и δ_S для управления структурой взаимодействия

$$p \to p \mp \delta_S,$$

и задача состоит в том, чтобы определить величину затрат центра 2, управляющего структурой, для нейтрализации воздействия центра 1 на индивидуальные стимулы игроков. Равновесная стратегия репрезентативного агента будет иметь следующий вид:

$$\overline{x}^*_{\ddagger} = \frac{b \pm \delta_T}{1 - \beta(p \mp \delta_S)}. \tag{3.9}$$

Интерес представляют условия на p и β, при которых затраты на изменение сети превышают затраты на изменение стимулов агентов, оказывающих тот же эффект на стратегию репрезентативного агента в равновесии $\overline{x}^*$. Для этих целей сформулировано

Утверждение 3.2. *Если равновесие существует и единственно, т.е.* $\beta(p+\delta) < 1$, *то*

1. *Затраты на управление структурой и управление стимулами игроков связаны соотношением:*

$$\delta_S = \delta_T \frac{(1-\beta p)}{b\beta}; \tag{3.10}$$

2. *Величина сетевого эффекта* β^* *без вмешательства центров*

$$\beta^* = \frac{1}{p+b}, \tag{3.11}$$

и при $\beta = \beta^*$ *затраты обоих центров равны* $\delta_T = \delta_S$, *при* $\beta > \beta^*$ *затраты на изменение структуры ниже, чем затраты на изменение стимулов игроков* $\delta_T > \delta_S$.

Доказательство. Чтобы доказать это, нужно сравнить стратегии репрезентативного агента в равновесии без управления, $\overline{x}^*$ (3.3), и при наличии управления стимулами и структурой одновременно $\overline{x}_{\ddagger}$ (3.9). Вычитая одно из другого и приравнивая к нулю получаем выражение (3.10) и следствие (3.11). □

Выражение (3.10) позволяет получить новую вероятность создания связи в сети, которая необходима для компенсации влияния изменений стимулов игроков. На рис. 3 (справа) показана фазовая диаграмма для случая $b = 1$, на которой сравниваются затраты на различные методы управления в зависимости от параметров игры. Красная линия соответствует случаю, при котором затраты обоих центров равны, $\delta_T = \delta_S$. Численный пример игры двух центров будет рассмотрен ниже.

Очевидно, что в случае произвольной структуры взаимодействия аналитическое выражение для β^* может принимать достаточно сложный вид. Рассмотрим общий случай симметричной стохастической

блочной модели (3.1):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r_k \end{bmatrix}.$$

Пусть центр, помимо возможности изменения стимулов игроков, обладает возможностями для изменения связей внутри кластеров:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} p_1 + \delta_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 + \delta_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k + \delta_k \end{bmatrix}, \qquad \hat{b} = \begin{bmatrix} b_1 + \delta_1 \\ b_2 + \delta_2 \\ \vdots \\ b_k + \delta_k \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Тогда в общем случае β^* – решение уравнения

$$\frac{\|x^*(\beta, \hat{P}, b)\|}{\|x^*(\beta, P, \hat{b})\|} = 1, \tag{3.13}$$

где $\|x\| = \sum_j^k x_j$, относительно β при ограничениях $\beta\lambda_{max}(\hat{P}R) < 1$, которое весьма сложно для анализа. Однако, продолжив рассмотрение структуры типа случайного графа, можно получить некоторые качественные оценки эффективности управления структурой взаимодействия. Рассмотрим управление структурой каждого кластера по отдельности, получив набор β_j^* – критериев эффективности управления структурой взаимодействия для каждого отдельно взятого кластера. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.3. *Наибольшее β_j^* является верхней оценкой критерия эффективности управления структурой взаимодействия $\beta^*(P)$ для всего графа P, выше которой эффективность структурного управления превышает эффективность управления стимулами агентов:*

$$\beta^*(P) < \max\{\beta_j^*(p_j)\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $q = 0$, когда структура графа P представляет собой набор невзаимосвязанных класте-

ров, каждый из которых представляет собой случайный граф размера nr_j (где n – число узлов/агентов в исходном графе G) с вероятностью связи p_j. Хотя случай кажется вырожденным, в некоторых ситуациях он описывает реальные графы: графы конкуренции и сотрудничества компаний, социальные эффекты стремления создания связей с похожими узлами и др. Можно показать, что результаты (3.8), полученные выше, имеют место для каждого отдельно взятого кластера матрицы P, взвешенные на размер кластера r_j:

$$\beta_j^*(p_j) = \frac{1}{r_j(\delta + b_j + p_j)}.$$

Тогда наибольшее β_j^*, соответствующее менее связанному кластеру, будет выступать верхней оценкой критерия эффективности управления структурой взаимодействия для всего графа P при $q = 0$,

$$\beta^*(P) < \max\{\beta_j^*\}.$$

Легко показать, что внедиагональные элементы q, отличные от нуля, снижают $\beta^*(P)$ (увеличивают эффективность управления структурой взаимодействия). Рассмотрим матрицы

$$P' = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{bmatrix},$$

тогда исходная матрица $P = P' + Q$. По построению набор $\{p_j\}_{j=1}^k$ является набором собственных значений матрицы P', а $\max\{\beta_j^*\}$ соответствует наименьшему p_j и, соответственно, наименьшему собственному значению λ_{min} матрицы P'. Для такой постановки в [11] (теорема 7.5.6) показано, что

$$\lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\min}(P') + \lambda_{\min}(Q),$$

что в случае исследуемой структуры графа P (3.1) подтверждает оценку (3.14). □

Таким образом, полученная в (3.14) оценка для $\beta^*(G)$ является оценкой сверху: в произвольном графе высокая эффективность управления структурой взаимодействия для менее связанного кластера будет гарантировать эффективность управления структурой взаимодействия для всего графа.

4. Примеры

Численный пример игры двух центров с демонстрацией структуры взаимодействия представлен на рис. 4. Пусть $n = 30$, $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$. Равновесие при исходных значениях параметров $\bar{x}^* = 1.25$ (в эксперименте ≈ 1.23). Пусть первый центр стимулирует игроков на величину $\delta_T = 0.1$, при этом возникает новое равновесие $\bar{x}^* = 1.375$ (в эксперименте ≈ 1.36). Согласно (3.11), в данном примере $\beta^* = \beta$, что означает, что центр, управляющий структурой, затратит на управление ресурсы $\delta_S = \delta_T$, т.е. изменит вероятность создания связи $p = 0.25 - 0.1 = 0.15$, чтобы путем изменения структуры взаимодействия вернуть равновесные стратегии игроков к значению при исходных параметрах $\bar{x}^* = 1.25$ (в эксперименте ≈ 1.24).

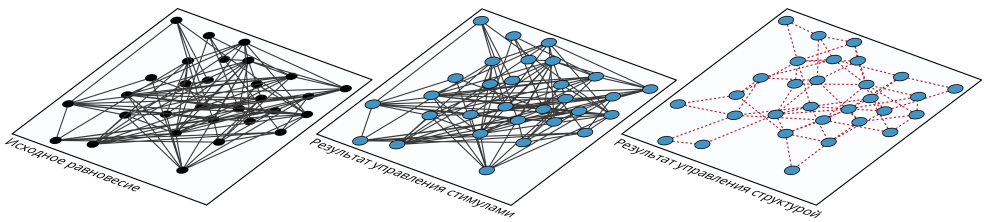

Рисунок 4. Численный пример решения задачи двух центров на графе $G(n, p)$ для $n = 30$, $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$.

Переходя к произвольному числу агентов n предположим, что значения всех параметров из предыдущего примера остаются неизменными, при этом меняется только число агентов n. На рис. 5 представлена диаграмма размаха для результатов численного моделирования результатов игры двух центров для сетей с различным числом агентов n.

По оси x представлено число агентов n; по оси y представлено среднее значение равновесных стратегий игроков $\bar{x}^*$. При проведении численного эксперимента использовалась следующая процедура. На первом шаге выбирается число агентов n; далее, для указанного n генерируется экземпляр случайного графа $G(n, p)$ при $p = 0.15$; эта процедура повторяется n^2 раз. Красной пунктирной линией отмечено равновесие в игре с репрезентативным агентом, $\bar{x}^* = 1.25$.

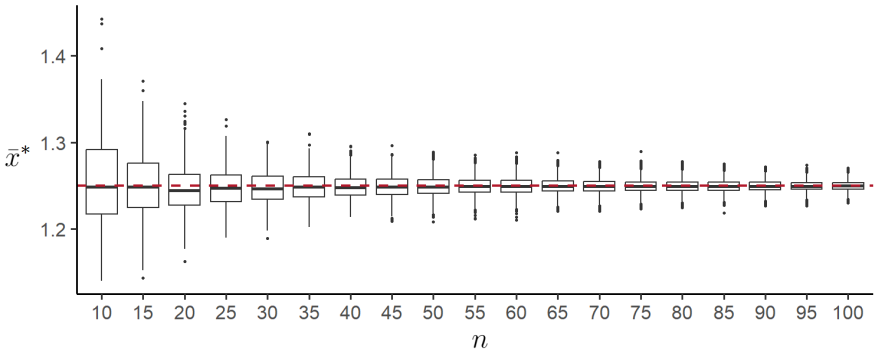

Рисунок 5. Численный пример решения задачи двух центров на графе $G(n,p)$ при $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$ и различным числом агентов n.

Рассмотрим пример задачи управления структурой взаимодействия для случая нескольких кластеров. Пусть

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.5 & q \\ q & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \qquad (4.1)$$

Благодаря проведенному выше анализу появляется возможность рассмотреть три стратегии управления одновременно:

1. $f_T(x^*) = x_1^* + x_2^*$ – сумма действий игроков в равновесии, при котором центр осуществляет управление индивидуальными стимулами b игроков:

$$b_1 = 1 + 0.5, \quad b_2 = 1 + 0.5;$$

2. $f_S(x^*) = x_1^* + x_2^*$ – сумма действий игроков в равновесии, при котором центр осуществляет управление структурой взаимодействия, т.е. элементами p_1 и p_2:

$$p_1 = 0.5 + 0.5, \quad p_2 = 0.2 + 0.5;$$

3. $f_{mix}(x^*) = x_1^* + x_2^*$ – сумма действий игроков в равновесии, при котором центр использует смешанный механизм управления:

$$p_1 = 0.5 + 0.5, \quad b_2 = 1 + 0.5.$$

Значение β^*, выше которого эффективность структурного управления превышает эффективность управления индивидуальными стимулами для двух кластеров равняется $\beta_1^*(p_1) = 1$ и $\beta_2^*(p_2) = 1.17$, соответственно, что означает, что управление структурой первого кластера будет эффективнее при меньших значениях β.

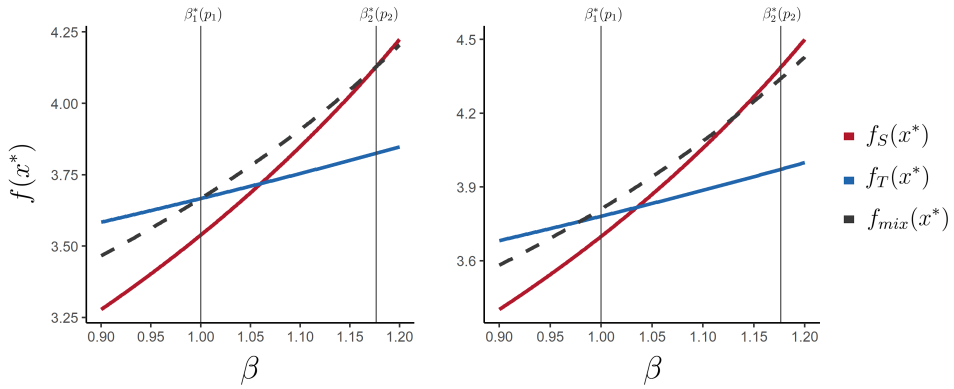

Рисунок 6. Численный пример решения задачи управления структурой взаимодействия для случая (4.1) при $q = 0$ (слева) и $q = 0.05$ (справа)

Случай $q = 0$ представлен на рис. 6 (слева). В зависимости от значений параметра β возникает несколько областей, внутри которых эффективны различные методы управления:

1. $\beta < \beta_1^*(p_1)$ – управление индивидуальными стимулами b эффективнее других методов;

2. $\beta_1^*(p_1) < \beta < \beta_2^*(p_2)$ – эффективнее смешанный механизм управления: центру выгодно управлять структурой более связанного кластера, при этом решая задачу стимулирования для менее связанного кластера;

3. $\beta > \beta_2^*(p_2)$ – управление структурой взаимодействия позволяет достичь наибольшего эффекта.

Случай $q = 0.05$ представлен на рис. 6 (справа). Видно, что стратегии центра, перечисленные выше, остаются справедливыми для меньших значений β, что согласуется с утверждением 3.3.

5. Заключение

В работе проанализированы возможности управления стратегическим поведением агентов в играх на сетях с линейным наилучшим ответом. Проведено сравнение двух подходов к управлению: стимулирование индивидуальных агентов и изменение структуры их взаимодействия в ситуации, когда сеть описывается репрезентативным агентом или группой таких агентов. Показано, что эффективность структурного управления возрастает при увеличении силы сетевого эффекта. Очевидно, что различия между управлением в случае детерминированной сети и в случае репрезентативного агента такие же, как между однородным вмешательством и сетевой эвристикой, предложенной в [9]. Авторы показали, что учет в задаче стимулирования топологии сети приводит к значительному увеличению целевых функций центра (как агрегированных усилий игроков, так и агрегированных выигрышей): центр стимулирует агентов пропорционально их вкладу в стратегическое взаимодействие. Однако, рассмотрение случая репрезентативного агента позволило значительно упростить анализ равновесия и задач управления. Приведены аналитические результаты, определяющие условия, при которых для центра управление структурой взаимодействия становится более предпочтительным. Численные эксперименты подтвердили теоретические выводы, показав, что в ряде случаев создание новых связей между агентами может быть более эффективной стратегией, чем стимулирование агентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства.* М.: МЦНМО, 2018.

2. Матвеенко В.Д., Королев А.В. *Типология сетей и равновесия в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний* // Математическая теория игр и её приложения. 2017. Т. 9, № 3. С. 64–92.

3. Петров И.В. *Игры на сетях с линейным наилучшим ответом:*

модели и методы управления. Препринт http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.35048.38401. 2025.

4. Райгородский А. М. *Модели случайных графов и их применения* // Труды Московского физико-технического института. 2010. Т. 2, №. 4. С. 130–140.

5. Avella-Medina M., Parise F., Schaub M., Segarra S. *Centrality measures for graphons: Accounting for uncertainty in networks* // IEEE Transactions on Network Science and Engineering. 2018. V. 7, no. 1. P. 520–537.

6. Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y. *Who's who in networks. Wanted: The key player* // Econometrica. 2006. V. 74, no. 5. P. 1403–1417.

7. Bramoulle Y., Djebbari H., Fortin B. *Identification of peer effects through social networks* // Journal of econometrics. 2009. V. 150, no. 1. P. 41–55.

8. Bramoulle Y., Kranton R. *Games Played on Networks* // Oxford Handbook on the Economics of Networks. 2016. Chap. 5.

9. Galeotti A., Golub B., Goyal S. *Targeting interventions in networks* // Econometrica. 2020. V. 88, no. 6. P. 2445–2471.

10. Manski C. F. *Identification of endogenous social effects: The reflection problem* // The review of economic studies. 1993. V. 60, no. 3. P. 531–542.

11. Meyer C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2023.

COMPARATIVE ANALYSIS OF INCENTIVE-BASED AND STRUCTURAL CONTROL IN GAMES ON NETWORKS WITH LINEAR BEST-RESPONSE

Ilya V. Petrov, Institute of Control Sciences of RAS (ivpetrov@ipu.ru).

Abstract: This paper examines network games with linear best responses, which allow for the analysis of how interaction structures influence agents' strategic behavior. Special attention is given to intervention issues in such models, particularly in selecting optimal intervention strategies aimed at maximizing the central planner's objective function. Two main control policies are analyzed: individual agent incentives and modifications of the interaction structure. The concept of a representative agent is introduced to simplify equilibrium analysis and control problems in network games. Both aggregate outcome maximization problems and adversarial scenarios between competing central planners are considered. Analytical conditions are derived to determine when controlling the interaction structure is more effective than influencing individual incentives. Numerical experiments confirm the theoretical results and demonstrate their applicability to different types of network structures.

Keywords: games on networks, network interventions, peer effects.