Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.1, с. 47–114

УДК 514.74
ББК 22.151

α^*-МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВОЙСТВА*

Владимир Н. Ушаков
Олег А. Кувшинов
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: ushak@imm.uran.ru, okuvshinov@inbox.ru

Введено понятие α^*-множества в конечномерном евклидовом пространстве, являющееся обобщением понятия α-множества и выпуклого множества в конечномерном евклидовом пространстве. Это понятие возникло в связи с изучением невыпуклых множеств достижимости некоторых нелинейных управляемых систем в конечномерном евклидовом пространстве. В работе изучается понятие α^*-множества в применении к некоторым множествам в конечномерном евклидовом пространстве и, в частности, к фрактальным множествам в пространстве $\mathbb{R}^2$. Рассматриваются вопросы, относящиеся к тематике α^*-отделимости невыпуклых множеств в конечномерных евклидовых пространствах. Рассматриваются примеры невыпуклых множеств Φ в $\mathbb{R}^2$, для которых вычисляется степень невыпуклости α^*_Φ.

Ключевые слова: выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка множества в $\mathbb{R}^n$, α-множество в $\mathbb{R}^n$, α^*-множество в $\mathbb{R}^n$, α^*-гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, α^*-отделимость.

Поступила в редакцию: 02.02.2026 *После доработки*: 01.03.2026 *Принята к публикации*: 23.03.2026

©2026 В.Н. Ушаков, О.А. Кувшинов

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–11–00269, https://rscf.ru/project/25-11-00269/

1. Введение

В работе вводится понятие α^*-множества в конечномерном евклидовом пространстве — обобщение понятия α-множества, введенного в начале 2000-х годов в [3–5]. Понятие α-множества применялось при изучении некоторых задач управления, в которых в центре исследования были множества достижимости управляемых динамических систем в конечномерных евклидовых пространствах. Во многих нелинейных управляемых системах множества достижимости невыпуклы. При этом в некоторых из этих систем множества достижимости по виду мало отличаются от выпуклых множеств, для других систем отличие множеств достижимости (по виду) весьма существенно. Диапазон степени отличия множеств достижимости управляемых систем весьма широк, что вызывает естественную потребность в наведении определенной классификации этих множеств по степени их отличия от выпуклых множеств.

Понятие α-множества в $\mathbb{R}^n$ возникло в связи с этим на базе вопросов и задач, связанных с изучением геометрической и топологической структуры множеств достижимости управляемых систем. Оно может оказаться востребованным не только при изучении множеств в $\mathbb{R}^n$, связанных непосредственно с задачами теории управления, но и при изучении более широкого круга задач, например, задач теории дифференциальных игр и задач, посвященных изучению динамики фрактальных множеств. В связи с этим применение понятия α-множеств к изучению более широкого круга математических задач стимулировало потребность в корректировке этого понятия, которая была бы адекватна более широкому кругу задач, чем задачи управления динамическими системами.

В работе представлена коррекция понятия α-множеств в $\mathbb{R}^n$ и относящихся к этому понятию утверждений. Приводятся примеры, иллюстрирующие понятие α^*-множеств в $\mathbb{R}^n$, рассматриваются вопросы и задачи, связанные с ним, анализируется соотношение между понятиями α- и α^*-множеств.

2. Основные определения и понятия α^*-множеств

В этом параграфе приведем основные определения и понятия, относящиеся к α^*-множествам в пространстве $\mathbb{R}^n$, а также некоторые

основные свойства α^*-множеств в $\mathbb{R}^n$. Эти понятия и свойства базируются на понятии сферического сегмента в $\mathbb{R}^n$.

Пусть A — замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и точка $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{A}$.

Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку в A.

Полагаем $\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\}$ — множество всех проекций $p(z^*)$ точки z^* на A.

Пусть $S = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим $S_A(z^*) = \{s = \|p\,(z^*) - z^*\|^{-1}\,(p\,(z^*) - z^*) : p\,(z^*) \in \in \Omega_A\,(z^*)\} \subset S$.

Приведем определение сферического сегмента на сфере S в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем вектор $l \in S$, и угол $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Поставим в соответствие этим $l \in S$ и $\vartheta \in [0, 2\pi]$ сферический сег--мент $S_l^\vartheta = \{s \in S : \langle l, s\rangle \geqslant \cos\frac{\vartheta}{2}\}$.

Здесь $\langle l, s\rangle$ — скалярное произведение векторов l и s.

Это определение включает и множества S_l^0, $S_l^{2\pi}$ — вырожденный сегмент на сфере S — точку и саму сферу S — наибольший (по включению) сегмент на S.

По определению сегмента S_l^ϑ, угол $\frac{\vartheta}{2}$ есть наибольший из углов, который составляют векторы $s \in S_l^\vartheta$ с $l \in S$.

Вернемся к множеству A и точке $z^* \in \mathbb{R}\backslash\mathrm{A}$. Рассмотрим всевозможные S_l^ϑ, $l \in S$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющие $S_A(z^*) \subset S_l^\vartheta$.

Среди этих сегментов S_l^ϑ выделим сегмент $S_{l^0}^{\vartheta^0}$, $\vartheta^0 = \vartheta^0(z^*)$, $l^0 = = l^0(z^*)$ с минимальным углом ϑ^0. В силу компактности множества $S_A(z^*)$ в $\mathbb{R}^n$ такой угол $\vartheta^0 = \vartheta^0(z^*)$ существует и при этом для некоторых множеств A и точек $z^* \in \mathbb{R}^n\backslash\mathrm{A}$ вектор $l^0 = l^0(z^*)$ не единственен.

Полагаем $\alpha_A^*(z^*) = \vartheta^0(z^*)$, а также

$$\alpha^* = \alpha_A^* = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{A}} \alpha_A^*(z^*) \in [0, 2\pi].$$

Определение 2.1. *Множество A назовем α^*-множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Приведем некоторые свойства сегментов S_l^ϑ, которые будут использованы в ближайших утверждениях.

Рассмотрим сначала сегмент S_l^ϑ, $l \in S$, $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Выделим в нем вектор s_*, где $l \,\widehat{}\, s_* = \dfrac{\vartheta}{2}$ и такой s^*, что $s_* \,\widehat{}\, s^* = \vartheta$ (см. рис. 1).

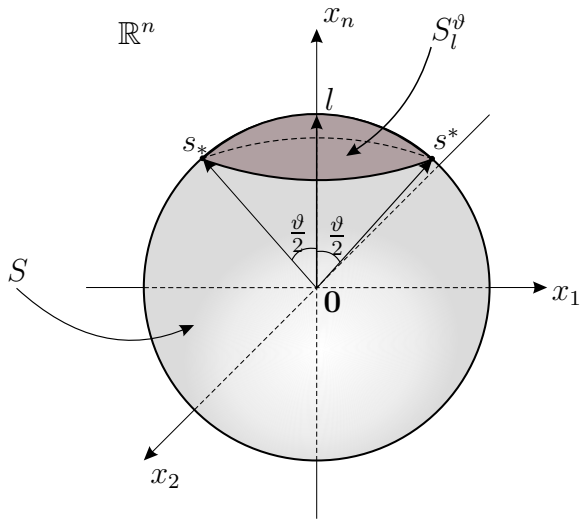

Рисунок 1.

В удобных для нас случаях будем трактовать упоминаемые здесь s_*, s^*, l, как точки на сфере S. Точки s_*, s^*, l принадлежат некоторой двумерной плоскости $\Pi^{(2)} \subset \mathbb{R}^n$, проходящей через $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Точки s_* и s^* есть крайние точки дуги $\mathscr{L} = S_\vartheta^l \bigcap \Pi^{(2)}$, удовлетворяющие $s_* \,\widehat{}\, l = s^* \,\widehat{}\, l = \dfrac{\vartheta}{2}$ (см. рис. 2).

Выберем настолько малое $\varepsilon > 0$, что $\vartheta + æ(\varepsilon) < 2\pi$; здесь $æ(\varepsilon) = 2\sigma(\varepsilon)$, где $\sigma(\varepsilon) = 2 \arcsin \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Наряду с сегментом S_l^ϑ рассмотрим содержащий его сегмент $S_l^{\vartheta+æ(\varepsilon)}$ и дугу $\mathscr{L}^+ \subset S_l^{\vartheta+\varkappa(\varepsilon)} \bigcap \Pi^{(2)}$, являющуюся продолжением дуги $\mathscr{L}$ (см. рис. 3).

Крайние точки дуги $\mathscr{L}^+$ обозначим через s_*^+ и s^{*^+} (см. рис. 3). Обозначим через $\mathcal{L}$ фрагмент дуги $\mathscr{L}^+$, соединяющий точки s^* и s^{*+}, имеющий длину $\sigma(\varepsilon)$ (в радианах) (см. рис. 4).

Теперь, наряду с сегментами S_l^ϑ и $S_l^{\vartheta+æ(\varepsilon)}$ рассмотрим множество

$$(S_l^\vartheta)_\varepsilon = \{s \in S : \rho(s, S_l^\vartheta) \leqslant \varepsilon\},$$

где обозначено $S_\varepsilon^* = \{s \in S : \rho(s, S^*) \leqslant \varepsilon\}$, $S^* \subset S$ — ε-окрестность множества S^* на сфере S.

Сферический сегмент $(S_l^\vartheta)_\varepsilon$ определяется равенством

$$(S_l^\vartheta)_\varepsilon = S_l^{\vartheta+æ(\varepsilon)}, æ(\varepsilon) \downarrow 0 \text{ при } \varepsilon \downarrow 0. \tag{2.1}$$

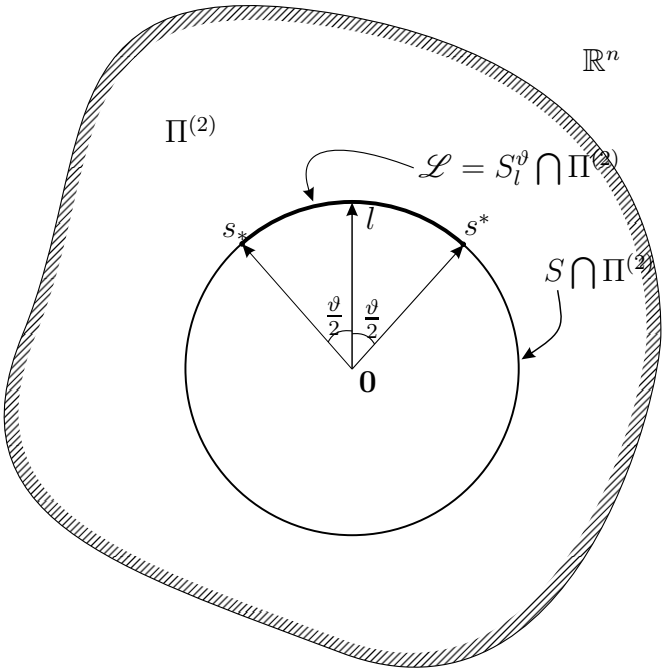

Рисунок 2.

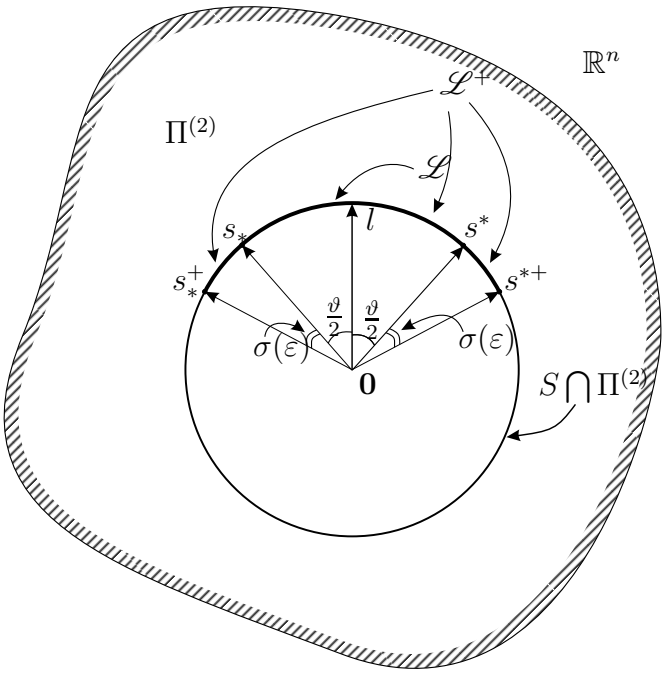

Рисунок 3.

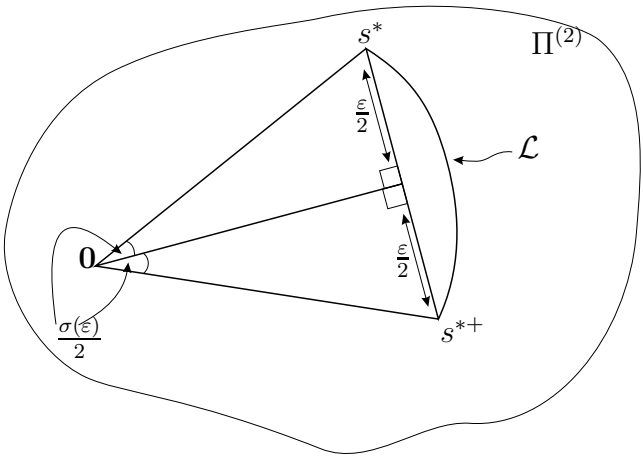

Рисунок 4.

Замечание 2.1. В приведенных рассуждениях имеются в виду сегменты S_l^{ϑ}, $\vartheta < 2\pi$ и $S_l^{\vartheta+æ(\varepsilon)}$, $\vartheta + æ(\varepsilon) < 2\pi$. Это означает, что сегменты не совпадают со сферой S. Однако для последующих утверждений это допущение не принципиально.

Сосредоточимся снова на множестве A в $\mathbb{R}^n$ и приведем некоторые свойства функции $\alpha_A^*(z^*)$ на $\mathbb{R}^n \backslash A$.

Свойство 1. Функция $\alpha_A^*(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией.

Действительно, рассмотрим компакт $A = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \in [1, 2]\}$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $z^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\} = S_A(z^*) = S \subset \mathbb{R}^n$ и, значит, $\alpha_A^*(z^*) = 2\pi$. При этом $\alpha_A^*(z^*) = 0$ для точек z^*, $\|z^*\| \in (0, 1)$.

Свойство 2. Функция $\alpha_A^*(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{A}$ полунепрерывна сверху.

Действительно, пусть выбраны произвольная точка $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ и последовательность $\{z^{(k)}\}$, $z^{(k)} \neq z^*$, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к Z^*.

Многозначное отображение $z \mapsto \Omega_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \backslash A$ полунепрерывно сверху по включению и, следовательно, отображение $z \mapsto S_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \backslash A$ полунепрерывно сверху по включению.

Выберем некоторые точки $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ и малое $\varepsilon > 0$ (выбор числа ε уточним ниже).

Найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $z \in \mathbb{B}(z^*; \delta) = \{\overline{z} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{z} - z^*\| \leqslant \delta\}$ имеет место $S_A(z) \subset S_A(z^*)_\varepsilon$.

Для z^* выделим сегмент $S_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$, который, согласно определению,

удовлетворяет включению

$$S_A(z^*) \subset S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)},$$

где $\vartheta^0(z^*)$ — минимальный среди таких углов ϑ, для которых $S_A(z^*) \subset \subset S^{\vartheta}_l$.

Справедливо включение $S_A(z^*)_\varepsilon \subset (S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)})_\varepsilon$.

Для угла $\vartheta^0(z^*)$ рассмотрим две нетривиальные возможности: 1. $\vartheta^0(z^*) \in (0, 2\pi)$; 2. $\vartheta^0(z^*) = 2\pi$.

Допустим, реализовалась возможность 1 и при этом число $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, что $\vartheta^0(z^*) + æ(\varepsilon) < 2\pi$.

Тогда, принимая во внимание равенство (2.1), имеем

$$(S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)})_\varepsilon = S^{\vartheta^0(z^*)+æ(\varepsilon)}_{l^0(z^*)}, \quad æ(\varepsilon) = 4 \arcsin \frac{\varepsilon}{2} \downarrow 0,\ \varepsilon \downarrow 0.$$

Значит, для точки $z \in \mathbb{B}(z^*; \delta)$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ выполняется $S_A(z) \subset \subset S_A(z^*)_\varepsilon \subset (S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)})_\varepsilon \subset S^{\vartheta^0(z^*)+æ(\varepsilon)}_{l^0(z^*)}$. Иными словами $S_A(z)$ содержится в некотором сферическом сегменте, а именно, — в $S^{\vartheta^0(z^*)+æ(\varepsilon)}_{l^0(z^*)}$.

Отсюда следует, что минимальный по углу ϑ сегмент $S^{\vartheta^0(z)}_{l^0(z)}$, содержащий $S_A(z)$ таков, что $\vartheta^0(z) \leqslant \vartheta^0(z^*) + æ(\varepsilon)$. Это неравенство означает, что функция $\alpha^*_A(z^*) = \vartheta^0(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ полунепрерывна сверху.

Заметим, что sup в равенстве $\alpha^* = \alpha^*_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha^*_A(z^*)$ достигается не для всякого замкнутого множества A в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.1. Пусть $A = K_1 \bigcup K_2$, где K_1 и K_2 — замкнутые круги в $\mathbb{R}^2$ единичного радиуса с центрами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно (см. рис. 5). Из рис. 5 видим, что для точек $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$, принадлежащих вертикальной оси x_2 в $\mathbb{R}^2$, угол $\alpha^*_A(z^*)$ есть угол между векторами, направленными из z^* в центры $(-1, 0)$, $(1, 0)$ кругов K_1, K_2. Для точек $z \in \mathbb{R}^2 \backslash A$, не принадлежащих x_2, угол $\alpha^*_A(z) = 0$. Таким образом, для точек $z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ выполняется $\alpha^*_A(z^*) < \pi$ для точек $z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A$, принадлежащих оси x_2 и стремящихся к $\mathbf{0}$, имеем $\lim\limits_{z^* \downarrow \mathbf{0}} \alpha^*_A(z^*) = \pi$. В итоге $\sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A} \alpha^*(z^*) = \pi$, в то время как $\max\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A} \alpha^*(z^*)$ не существует.

Приведем пример множества A в $\mathbb{R}^2$, для которого $\max\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A} \alpha^*_A(z^*)$ достигается.

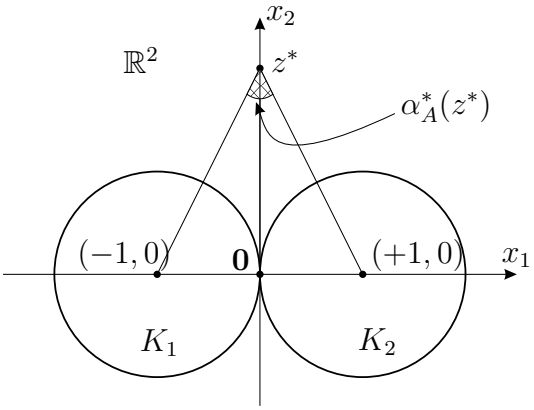

Рисунок 5.

Пример 2.2. Пусть $A = K_1 \bigcup K_2$, где K_1 и K_2 квадраты в $\mathbb{R}^2$, указанные на рис. 6, соприкасающиеся в точке $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Из рис. 6 видим, что для точек $z^* = (z_1^*, z_2^*) \in \mathbb{R}^2 \backslash A$, принадлежащих прямой $\Lambda = \{z = (z_1, z_2) : z_1 = z_2\}$, имеет место $\alpha_A^*(z^*) \in (0, \frac{\pi}{2}]$. При этом выполняется $\alpha_A^*(z^*) < \frac{\pi}{2}$ для точек $z^* = (z_1^*, z_2^*)$, $|z_1^*| = |z_2^*| > 1$ и $\alpha_A^*(z^*) = \frac{\pi}{2}$ для точек z^*, $|z_1^*| = |z_2^*| \leqslant 1$.

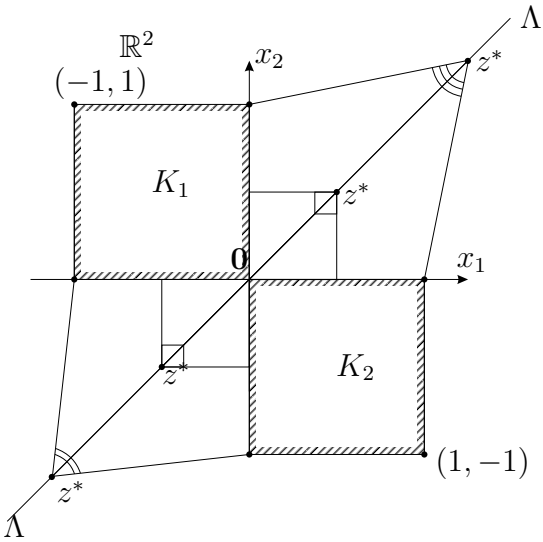

Рисунок 6.

Поскольку для точек $z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A$, не принадлежащих прямой Λ, множества $\Omega_A(z^*)$ и, стало быть, множества $S_A(z^*)$ состоят из един-

ственной точки, то $\alpha_A^*(z^*) = 0$. В итоге имеем $\alpha^* = \alpha_A^* = \max\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A} \alpha^*(z^*) = \dfrac{\pi}{2}$.

Для значительного числа множеств A в $\mathbb{R}^n$ (в частности, — в $\mathbb{R}^2$) $\sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A^*(z^*)$ достигается на $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Если для замкнутого множества A в $\mathbb{R}^n$ выполняется $\alpha^* = \alpha_A^* = 0$, то для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ имеет место $\alpha_A^*(z^*) = \vartheta^0(z^*) = 0$, то есть $\Omega_A(z^*)$ состоит из единственной точки $p(z^*) \in A$. В этом случае, как известно, множество A есть замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$.

Справедливо и обратное утверждение: «Если A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\alpha_A^*(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ и, значит, $\alpha^* = \alpha_A^* = 0$».

Таким образом, замкнутое выпуклое множество A в $\mathbb{R}^n$ и 0-множества A в $\mathbb{R}^n$ — эквивалентные понятия.

Допустим теперь, что для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено условие

$$z^* \notin co\Omega_A(z^*). \tag{2.2}$$

Тогда найдется гиперплоскость $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle = \gamma\}$ в $\mathbb{R}^n$, $s \in S$, $\gamma \in \mathbb{R}^1$, строго разделяющая множества $\{z^*\}$ и $\Omega_A(z^*)$. Отсюда следует, что некоторая гиперплоскость Γ^* в $\mathbb{R}^n$ строго разделяет множества $\{\mathbf{0}\}$ и $S_A(z^*)$ и, значит, найдется сферический сегмент S_l^ϑ, $l \in S$, $\vartheta < \pi$, удовлетворяющий $S_A(z^*) \subset S_l^\vartheta$. Отсюда вытекает, что сферический сегмент $S_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ с минимальным углом $\vartheta^0(z^*)$, содержащий множество $S_A(z^*)$ удовлетворяет неравенству

$$\alpha_A^*(z^*) = \vartheta^0(z^*) \leqslant \vartheta < \pi. \tag{2.3}$$

Справедливо также утверждение: «Если для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется (2.3), то выполняется (2.2)».

Вместе с тем установлена эквивалентность соотношений (2.2) и (2.3).

Определение 2.2. *Замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ назовем регулярным множеством в $\mathbb{R}^n$, если для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется* (2.3).

Значит, если A — нерегулярное множество в $\mathbb{R}^n$, то для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ имеет место $\alpha_A^*(z^*) \geqslant \pi$ и, следовательно, $\alpha^* = \alpha_A^* =$

$$= \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A^*(z^*) \geqslant \pi.$$

Равенство $\alpha^* = \alpha_A^* = \pi$ в этом неравенстве является пограничным в том смысле, что удовлетворяющие ему множества A в $\mathbb{R}^n$ могут быть как нерегулярными, так и регулярными множествами в $\mathbb{R}^n$.

В математической теории управления значительное место занимают задачи, тематика которых относится к множествам достижимости управляемых систем или дифференциальных включений. В некоторых из этих задач управляемые системы нелинейны, а отвечающие им и соответствующим дифференциальным включениям множества достижимости имеют довольно сложную геометрическую структуру: они невыпуклы, неодносвязны и тенденции изменения структуры этих множеств на немалых промежутках времени зачастую тяжело выявить. Тем не менее в ряде задач управления изучение геометрической структуры множеств достижимости и тенденций изменения этой структуры во времени оказывается весьма полезным. Например, оно может оказаться полезным при оценке отклонения (в хаусдорфовой метрике) последующих во времени множеств достижимости управляемых систем или дифференциальных включений от уже реализовавшихся множеств достижимости. Задачи, подобные этой задаче, связанной с упомянутой оценкой, могут возникать и в других ситуациях, не имеющих отношения к теории управления, но связанных с изучением многозначных отображений $t \mapsto X(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T \subset \mathbb{R}^1$, где множество T может иметь как непрерывную, так и дискретную структуру.

Здесь рассмотрим ситуацию, в которой множества $X(t)$, $t \in T$, считаем компактами в $\mathbb{R}^n$, развивающимися во времени t, начиная с некоторого момента $t_0 \in T$, развитие которых также определено и начальным множеством $X(t_0) = X_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Одна из актуальных задач, относящихся к множествам $X(t)$, $t \in T$, заключается в получении оценки сверху величины

$$h\left(X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right) = \max_{\overline{x} \in X(t+\delta)} \rho\left(\overline{x}, X\left(t\right)\right),$$

$$\text{где } \rho\left(\overline{x}, X\left(t\right)\right) = \min_{x \in X(t)} \|\overline{x} - x\|$$

хаусдорфово отклонение $X(t+\delta)$, $\delta > 0$ от $X(t)$.

При получении этой оценки наиболее удобны для нас ситуации, сложившиеся для множеств $X(t)$, $X(t+\delta)$, t и $t+\delta$ из T, в которых хаусдорфово отклонение $h\left(X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right)$ учитывает только границу $\partial X(t+\delta)$ множества $X(t)$. То есть наиболее удобны для нас ситуации, в которых

$$h\left(X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right) = h\left(\partial X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right),$$

что упрощает процедуру вычисления величины $h\left(X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right)$. Такие ситуации довольно распространены, но встречаются не всегда.

Действительно, приведем простой пример такого отображения $t \mapsto X(t) \subset \mathbb{R}^2$, $t \in T$. Для простоты считаем, что множество $X(t)$, отвечающее некоторому фиксированному $t \in T$, есть замкнутое кольцо в $\mathbb{R}^2$ с центром — точкой z^0, а $X(t+\delta)$ — замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$, содержащий $X(t)$ и внутри которого имеются два круглых отверстия (две «дыры») (см. рис. 7), симметричные относительно точки z^0.

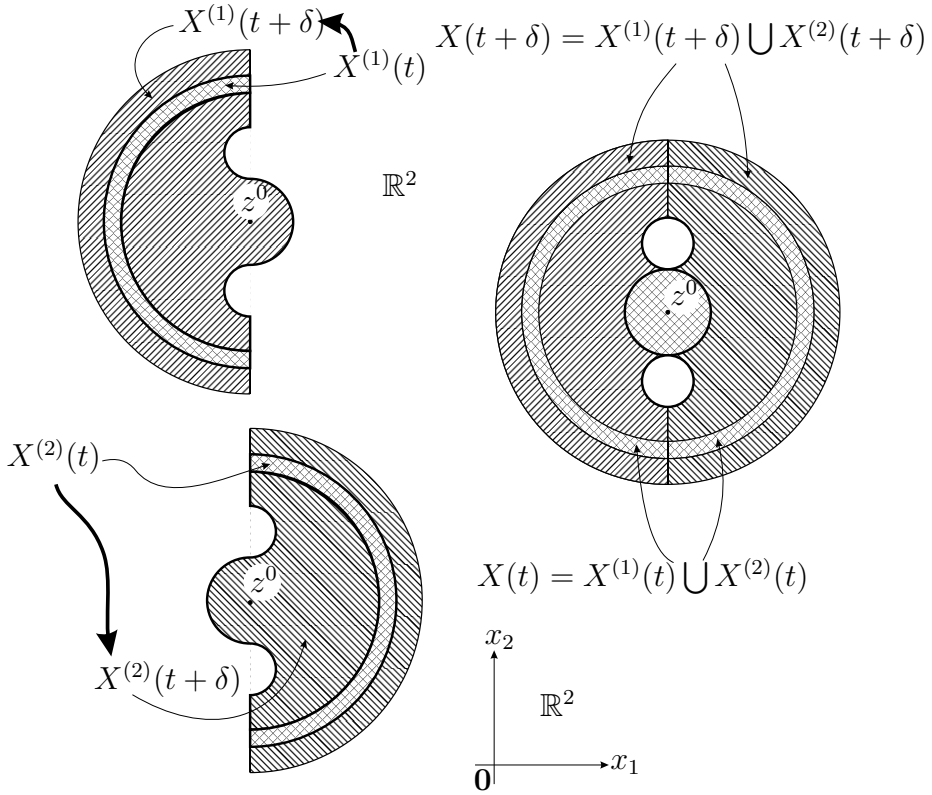

Рисунок 7.

Опишем подробнее, как устроены отображения $t \mapsto X(t)$ и $t+\delta \mapsto$ $\mapsto X(t+\delta)$.

Полагаем $X(t) = X^{(1)}(t) \bigcup X^{(2)}(t)$, где $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ — замкнутые полукольца в $\mathbb{R}^2$, симметричные друг другу относительно вертикальной оси Λ в $\mathbb{R}^2$, содержащей точку z^0, (см. рис. 7); $X(t+\delta) =$ $= X^{(1)}(t+\delta) \bigcup X^{(2)}(t+\delta)$ — замкнутые фигуры в плоскости $\mathbb{R}^2$, симметричные друг другу относительно этой оси и содержащие полукольца $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$ соответственно.

Полагаем также, что многозначное отображение $t \mapsto X(t)$, $t \in T$, таково, что в выбранные моменты t, $t+\delta$ множества $X(t)$ и $X(t+\delta)$ стеснены следующими условиями: множества $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$ отображаются в множества $X^{(1)}(t+\delta)$ и $X^{(2)}(t+\delta)$ соответственно (см. рис. 7), так что кольцо $X(t)$ отображается в замкнутый круг $X(t+\delta)$, содержащий $X(t)$ и имеющий внутри себя два круглых отверстия, расположенных вдоль оси Λ. К отверстиям примыкают два вертикальных отрезка, лежащих на оси Λ, а также круг, заключенный между отверстиями (см. рис. 7). Эти три множества составляют множество $X^{(1)}(t+\delta) \bigcap X^{(2)}(t+\delta)$.

Для множеств $X^{(i)}(t)$, $X^{(i)}(t+\delta)$, $i = 1, 2$ и $X(t+\delta)$ нетрудно вычислить $\alpha^*_{X^{(i)}(t)}$, $\alpha^*_{X^{(i)}(t+\delta)}$, $i = 1, 2$ и $\alpha^*_{X(t+\delta)}$.

Справедливы равенства

$$\alpha^*_{X^{(i)}(t)} = \alpha^*_{X^{(i)}(t+\delta)} = \pi, \ i = 1, 2 \ \text{ и } \ \alpha^*_{X(t+\delta)} = 2\pi.$$

Принимая во внимание, что z^0 — центр круга (с отверстиями) $X(t+\delta)$, получаем

$$h\left(X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right) = \rho(z^0, X(t)) > h\left(\partial X\left(t+\delta\right), X\left(t\right)\right).$$

При этом заметим, что множества $X^{(i)}(t)$ и $X^{(i)}(t+\delta)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют равенству

$$h\left(X^{(i)}\left(t+\delta\right), X^{(i)}\left(t\right)\right) = h\left(\partial X^{(i)}\left(t+\delta\right), X^{(i)}\left(t\right)\right), \ i = 1, 2.$$

Этот пример — один из немногих примеров, дающих основание заключить, что не для всякого компакта A в $\mathbb{R}^n$, где $\alpha^*_A > \pi$, можно вычислить хаусдорфово отклонение $h(B, A)$ другого компакта B в $\mathbb{R}^n$ от A, учитывая только границу ∂B компакта B.

С другой стороны, из анализа некоторых примеров складывается представление о том, что если компакт A — регулярное множество в $\mathbb{R}^n$ и компакт B в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет $A \subset B$, $A \neq B$, то $h(B, A) = h(\partial B, A)$.

Сформулируем и докажем более общее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть A — регулярное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого замкнутого множества B в $\mathbb{R}^n$, $A \subset B$, $A \neq B$, для которого $\sup\limits_{b \in B} \rho(b)$ достигается на B, все точки $b \in B$, максимально удаленные от A, удовлетворяют $b \in \partial B$.*

Здесь обозначено $\rho(z) = \min\limits_{a \in A} \|z - a\|^2$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть множества A, B удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и b — максимально удаленная точка множества B от A.

Полагаем $\varepsilon = \rho(b)^{\frac{1}{2}} \in (0, \infty)$ и A_ε — замкнутая ε-окрестность множества A в $\mathbb{R}^n$. Имеем $b \in A_\varepsilon = \{w \in \mathbb{R}^n : \rho(w)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon\}$.

Предположим противное тому, что утверждается в теореме 2.1: $b \notin \partial B$ и, значит, $b \in intB$. Тогда $\mathbb{B}(b; \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - b\| \leqslant \delta\} \subset B \subset A_\varepsilon$ при некотором $\delta \in (0, \infty)$.

Значит, для любой точки $z \in \mathbb{B}(b; \delta)$ выполняется $\rho(z)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что для любых $s \in S = \{\overline{s} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{s}\| = 1\}$ и $\lambda_k \in (0, \delta)$ имеет место $\rho(b + \lambda_k)^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon$ и, значит, $\rho(b + \lambda_k s) - \rho(b) \leqslant 0$.

Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет $\lambda_k \in (0, \delta)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$.

Справедливо неравенство

$$\frac{\rho(b + \lambda_k s) - \rho(b)}{\lambda_k} \leqslant 0,\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) вытекает, что производная $\rho'(b; s) = \dfrac{d}{ds}\rho(z)_{z=b}$ по направлению s в точке b удовлетворяет неравенству

$$\rho'(b; s) = \frac{d}{ds} \min_{a \in A} \|z - a\|^2{}_{z=b} = \min_{p(b) \in \Omega_A(b)} \|z - p(b)\|^2_{z=b} =$$

$$= 2 \min_{p(b) \in \Omega_A(b)} \langle b - p(b), s \rangle = \lim_{\lambda_k \downarrow 0} \frac{p(b + \lambda_k s) - p(b)}{\lambda_k} \leqslant 0 \tag{2.5}$$

при $\forall s \in S$.

Так как $b \notin A$, то из условия регулярности множества A следует

$$\alpha_A^*(b) = \vartheta^0(b) < \pi. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) означает, что сферический сегмент $S_{l^0(b)}^{\vartheta^0(b)}$, $l^0(b) \in \in S$ содержит множество $S_A(b)$ и, значит,

$$\langle p(b) - b, l^0(b) \rangle > 0,\ p(b) \in \Omega_A(b). \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что для вектора $s^0 = -l^0(b) \in S$ выполняется неравенство

$$\min_{p(b) \in \Omega_A(b)} \langle b - p(b), s^0 \rangle > 0. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) противоречит неравенству (2.5) и, значит, предположение о том, что $b \notin \partial B$, неверно. □

Теорема 2.2. *Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\alpha_{A_\varepsilon}^* \leqslant \alpha_A^*$.*

Доказательство. Пусть $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A_\varepsilon$ и $w^* = p^\varepsilon(z^*)$ — проекция точки z^* на A_ε.

Полагаем $\delta = \|z^* - w^*\| > 0$ и $\mathbb{B}(z^*; \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| \leqslant \delta\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в z^* радиуса δ.

Справедливо соотношение

$$int A_\varepsilon \bigcap \mathbb{B}(z^*, \delta) = \varnothing. \tag{2.9}$$

Наряду с точкой $w^* \in \mathbb{R}^n \backslash int A_\varepsilon$ рассмотрим точку $y^* = p(w^*)$ — проекцию точки w^* на A. Имея в виду $\|y^* - w^*\| = \varepsilon$, введем шар $\mathbb{B}(y^*; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - y^*\| \leqslant \varepsilon\}$, который удовлетворяет включению

$$\mathbb{B}(y^*; \varepsilon) \subset A_\varepsilon. \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует включение $int\mathbb{B}(y^*; \varepsilon) \subset int A_\varepsilon$, учитывая которое и (2.9), получаем

$$\mathbb{B}(z^*; \delta) \bigcap int\mathbb{B}(y^*; \varepsilon) = \varnothing. \tag{2.11}$$

Также выполняется включение

$$w^* \in \partial\mathbb{B}(z^*; \delta) \bigcap \partial\mathbb{B}(y^*; \varepsilon). \tag{2.12}$$

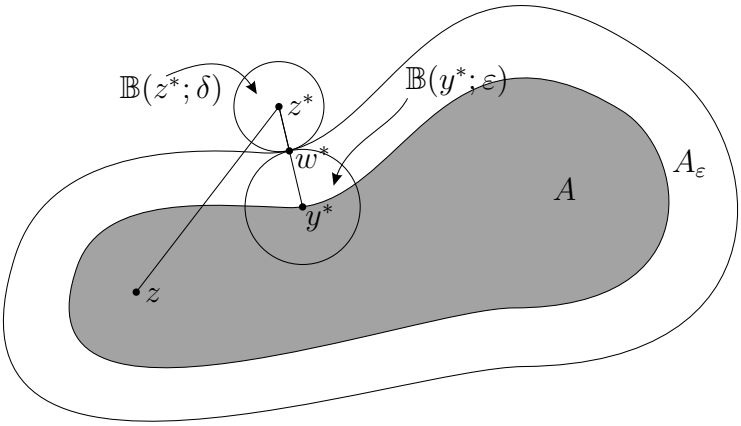

Рисунок 8.

Соотношения (2.11) и (2.12) означают, что шары $\mathbb{B}(z^*;\delta)$ и $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon)$ касаются друг друга в точке w^* (см. рис. 8).

Из соприкасающихся шаров $\mathbb{B}(z^*;\delta)$ и $\mathbb{B}(y^*;\varepsilon)$ в точке w^* следует, что отрезки z^*w^* и w^*y^* принадлежат одной прямой в $\mathbb{R}^n$. Значит, расстояние между z^* и y^* удовлетворяет равенству $\|z^*-y^*\|=\varepsilon+\delta$. Кроме того, расстояние $\|z^*-z\|$, $z\in A$ удовлетворяет неравенству $\|z^*-z\|\geqslant\varepsilon+\delta$. Значит,

$$\|z^*-y^*\|=\rho(z^*,A)=\min_{z\in A}\|z^*-z\|,$$

что означает $y^*=p(z^*)$.

Отсюда следует $w^*-z^*=p^\varepsilon(z^*)-z^*=æ(p(z^*)-z^*)$, где $æ\in(0,\infty)$, откуда получаем, что единичный вектор $s=\|p^\varepsilon(z^*)-z^*\|^{-1}(p^\varepsilon(z^*)-$ $-z^*)$ является в то же время и единичным вектором $\|p(z^*)-z^*\|^{-1}\times$ $\times(p(z^*)-z^*)$.

Значит, $S_{A_\varepsilon}(z^*)\subset S_A(z^*)$, откуда следует $\alpha^*_{A_\varepsilon}\leqslant\alpha^*_A$. □

Теперь рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ замкнутое множество U, гомеоморфное шару $\mathbb{B}(\mathbf{0};1)=\{b\in\mathbb{R}^n:\|b\|\leqslant 1\}$.

Определение 2.3. *Замкнутое множество U будем называть лакуной в $\mathbb{R}^n$.*

Нас интересует замкнутое множество $\Phi=\mathbb{R}^n\backslash intU$ и, в основном, число α^*_Φ.

Теорема 2.3. *Справедливо $\alpha^*_\Phi\geqslant\pi$.*

Доказательство. Предположим противное: $\alpha^*_\Phi < \pi$.

Пусть $z^* \in U$ — максимально удаленная в U точка от $\partial\Phi$ — границы множества Φ: $\rho(z^0, \partial\Phi) = \max\limits_{z^* \in U} \rho(z^*, \partial\Phi)$ (см. рис. 9).

Обозначив $R = \rho(z^*, \partial\Phi)$, рассмотрим замкнутый шар $\mathbb{B}(z^0; R) \subset \subset U^* = clU$. По определению шара $\mathbb{B}(z^0; R)$, справедливо $\mathbb{B}(z^0; R) \bigcap \bigcap \partial\Phi = \partial\mathbb{B}(z^0; R) \bigcap \partial\Phi \neq \varnothing$ (см. рис. 9).

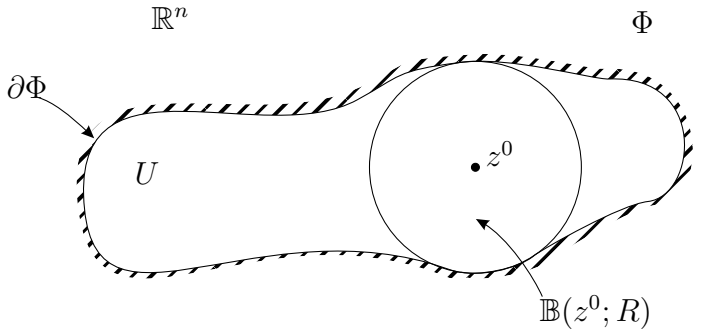

Рисунок 9.

Наше предположение заключается в том, что $\alpha^*_\Phi(z^0) \geqslant \pi$. Покажем это.

Предположим противное: $\alpha^*_\Phi(z^0) < \pi$. Это означает, что существуют такие вектор $l^0(z^0) \in S$ и угол $\vartheta^0(z^0) < \pi$, что $\Omega_\Phi(z^0) \subset \Omega^0 = \Omega^{\vartheta^0(z^0)}_{l^0(z^0)}$; здесь обозначено $\Omega^{\vartheta^0(z^0)}_{l^0(z^0)} = \{p \in \partial\mathbb{B}(z^0; R) : \|p - z^0\|^{(-1)} \cdot \|p - -z^0\| \in S^{\vartheta^0(z^0)}_{l^0(z^0)}\}$ (см. рис. 10).

Таким образом, включения $\Omega_\Phi(z^0) \subset \Omega^0$ и $S_\Phi(z^0) \subset S^{\vartheta^0(z^0)}_{l^0(z^0)}$ эквивалентны.

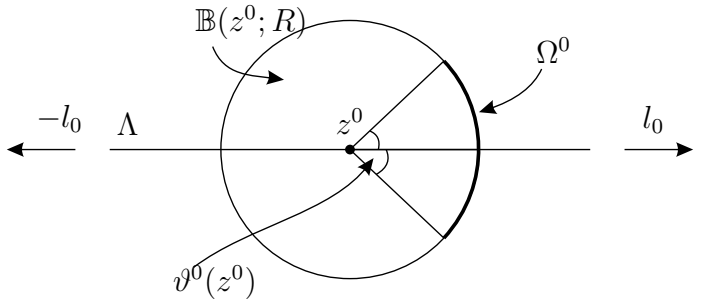

Рисунок 10.

Введем в рассмотрение направление $\Lambda(z^0) = \{z^\delta = z^0 - \delta l^0 : \delta > 0\}$ в $\mathbb{R}^n$ (см. рис. 10).

Рассмотрим шар $\mathbb{B}(z^\delta; R)$, где $\delta > 0$ — настолько малое число, что $\mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \mathbb{B}(z^0; R) \neq \varnothing$, и, более того, $int(\mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \mathbb{B}(z^0; R)) \neq \varnothing$ (см. рис. 11).

Обозначим через $Z^\delta = \mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \mathbb{B}(z^0; R)$. По построению шара $\mathbb{B}(z^\delta; R)$, имеем $Z^\delta \bigcap \Omega^0 = \varnothing$ и, тем более, $Z^\delta \bigcap \Omega_\Phi(z^0) = \varnothing$.

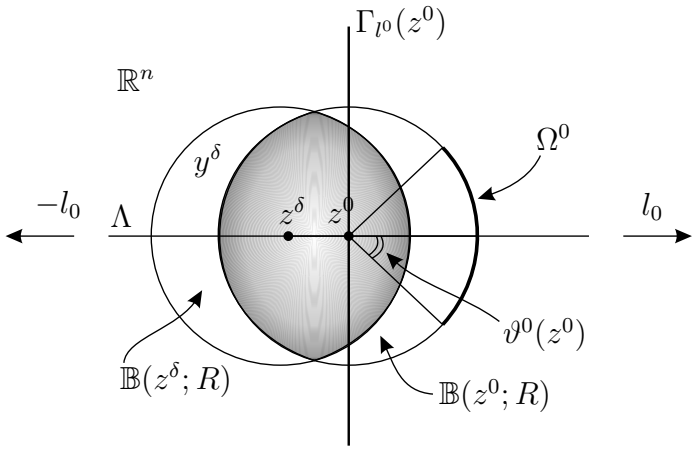

Рисунок 11.

Относительно шаров $\mathbb{B}(z^\delta; R)$, отвечающих достаточно малым $\delta > 0$ (то есть таким $\delta > 0$, что $intZ^\delta \neq \varnothing$), представляются две возможности:

1. При всех $\delta > 0$ справедливо $\mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \Phi \neq \varnothing$;

2. Существует такое $\delta > 0$, что $\mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \Phi = \varnothing$.

Допустим, реализовалась возможность 1; тогда при любом $\delta > 0$ найдется точка $y^\delta = p(z^\delta) \in \mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \partial\Phi$ — ближайшая в Φ к z^δ.

Очевидно, что $y^\delta \notin Z^\delta$, поскольку $Z^\delta \bigcap \Omega^0 = \varnothing$. Следовательно, y^δ содержится в $\mathbb{B}(z^\delta; R) \backslash Z^\delta$. Однако множество $\mathbb{B}(z^\delta; R) \backslash Z^\delta$ располагается «ниже» гиперплоскости $\Gamma_{l^0}(z^0)$, содержащей точку z^0 и нормальной к вектору l^0. Следовательно, точка y^δ располагается «ниже» гиперплоскости $\Gamma_{l^0}(z^0)$ относительно направления вектора l^0 (см. рис. 11).

Теперь возьмем произвольную последовательность $\{\delta_k\}, \delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ и отвечающую ей последовательность $\{z^{(k)}\}$ точек $z^{(k)} = z^{\delta_k}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую, стало быть, соотношению $\lim\limits_{k\to\infty} z^{(k)} = z^0$. Отвечающие точкам $z^{(k)}$ точки $y^{(k)} = p(z^{(k)})$, ближайшие в $\partial\Phi$ (а также в Φ), удовлетворяют включениям $y^{(k)} \in \mathbb{B}(z^{(k)}; R) \backslash Z^{\delta_k}$,

$k \in \overline{1,\mathbb{N}}$ и располагаются «ниже» гиперплоскости $\Gamma_{l^0}(z^0)$ относительно направления вектора l^0.

Из ограниченной (по построению) последовательности $\{y^{(k)}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что это сама $\{y^{(k)}\}$.

Поскольку многозначное отображение $z \mapsto \Omega_\Phi(z)$, $z \in U = \mathbb{R}^n \backslash \Phi$ полунепрерывно сверху по включению и при $z^{(k)} \to z^0$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} p(z^{(k)}) = y^0$, то из $y^{(k)} \in \Omega_\Phi(z^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$ следует $y^0 \in \Omega_\Phi(z^0)$.

Последнее включение противоречит тому, что y^0 лежит «ниже» гиперплоскости $\Gamma_{l^0}(z^0)$ относительно направления l^0. Это означает, что возможность 1 реализоваться не может.

Значит, реализуется возможность 2.

Пусть малое $\delta > 0$ таково, что $\mathbb{B}(z^\delta; R) \bigcap \Phi = \varnothing$. Тогда при некотором достаточно малом æ > 0 имеем $\mathbb{B}(z^\delta; R + æ) \bigcap \Phi = \varnothing$, откуда следует $\rho(z^\delta, \Phi) > R + æ$. Это противоречит определению точки z^0.

Установлено, что предположение $\alpha^*_\Phi < \pi$ приводит к противоречию. □

Выше мы рассмотрели в общем виде замкнутое множество $\Phi = \mathbb{R}^n \backslash intU$, где U — лакуна в $\mathbb{R}^n$.

В теореме 2.3 утверждается, что $\alpha^*_\Phi \geqslant \pi$, и это неравенство было доказано.

В связи с этим неравенством возникает вопрос о достаточных условиях, при которых $\alpha^*_\Phi = \pi$, и о достаточных условиях, при которых $\alpha^*_\Phi > \pi$. Ясно, что речь идет о достаточных условиях на лакуну U.

Мы рассматриваем этот непростой вопрос сначала в случае, когда лакуна U есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$.

В связи с этим введем скалярные функции $h(l) = \max\limits_{u\in U} \langle l, u\rangle$ и $\rho(l) = \min\limits_{u\in U} \langle l, u\rangle$, $l \in S$ (см. рис 12).

Рассмотрим функцию $\varphi(l) = h(l) - \rho(l)$, представляющую собой ширину полосы Π_l, изображенной на рис. 12.

Очевидно, что если $\min\limits_{l\in S} \varphi(l)$ достигается на единственном векторе $l^0 \in S$, то $\alpha^*_\Phi = \pi$. Если $\min\limits_{l\in S} \varphi(l)$ достигается не на единственном l из S, то $\alpha^*_\Phi > \pi$.

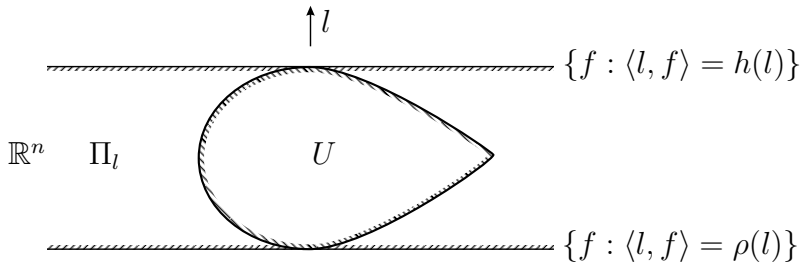

Рисунок 12.

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда лакуна U в $\mathbb{R}^2$ не является выпуклым множеством. А именно, пусть U представляет собой объединение двух кругов $\mathbb{B}(z^{(1)}; R^*)$, $\mathbb{B}(z^{(2)}; R^*)$ и горизонтально замкнутого прямоугольника Π^* ширины $2r^*$ (по вертикали), где $2r^* < R$ (см. рис. 13). Прямоугольник Π^* пересекается с кругами $\mathbb{B}(z^{(1)}; R^*)$ и $\mathbb{B}(z^{(2)}; R^*)$, не выходя за их пределы.

Π обозначим тот фрагмент прямоугольника Π^*, которой ограничен ломаной $ABCD$ (см. рис. 13).

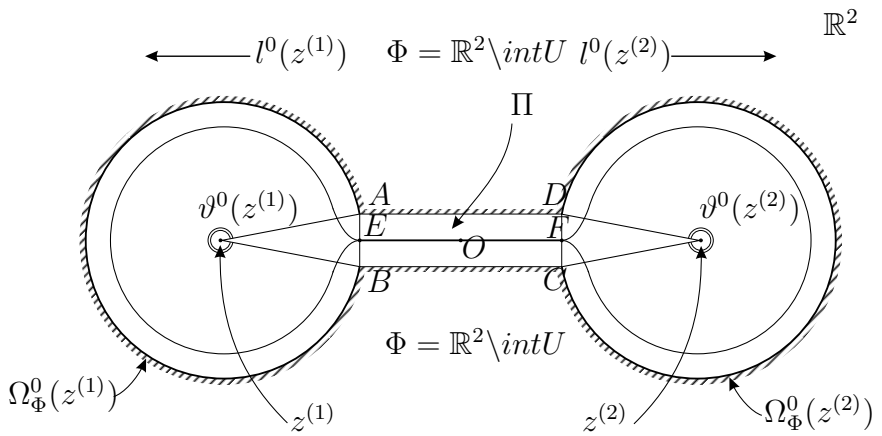

Рисунок 13.

Введем в рассмотрение множества $Z^\varepsilon = U \dot{-} \mathbb{B}(\mathbf{0}; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{R}^2$ с целью упрощения числа α^*_Φ; здесь $U \dot{-} \mathbb{B}(\mathbf{0}; \varepsilon)$ — симметрическая разность множеств U и $\mathbb{B}(\mathbf{0}; \varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$ — достаточно малы: $\varepsilon \in (0, r^*]$.

При $\varepsilon^* = r^*$ множество Z^{ε^*} есть объединение отрезка EF и двух каплеобразных множеств, симметричных друг другу относительно вертикальной прямой, проходящей через середину O отрезка EF (см.

рис. 13). Очевидно, что

$$\alpha^*_\Phi = \max_{z^* \in intU} \alpha^*_\Phi(z^*) = \max_{z^* \in Z^{\varepsilon^*}} \alpha^*_\Phi(z^*).$$

Из рис. 13, принимая во внимание геометрию множества Z^{ε^*}, заключаем, что $\max\limits_{z^* \in Z^{\varepsilon^*}} \alpha^*_\Phi(z^*)$ достигается в точках $z^* = z^{(1)}$ и $z^* = z^{(2)}$ — центрах соответствующих кругов $\mathbb{B}(z^{(1)}; R^*)$ и $\mathbb{B}(z^{(2)}; R^*)$, и при этом имеет место соотношение

$$\alpha^*_\Phi = \alpha^*_\Phi(z^*) = \vartheta^0(z^*), \quad \text{где } z^* = z^{(1)},\ z^* = z^{(2)}.$$

Тем самым установлено в рассматриваемом простом примере, где $\Phi = \mathbb{R}^2 \backslash intU$ и U — невыпуклое множество в $\mathbb{R}^2$, справедливо $\alpha^*_\Phi > \pi$. В этом примере α^*_Φ даже достаточно близко к 2π.

В этом примере с множеством Φ, в котором лакуна U имеет достаточно простую геометрическую структуру, составленную из кругов и прямоугольника, мы легко вычислили α^*_Φ.

Более сложными примерами являются те, в которых $\Phi = \mathbb{R}^2 \backslash intU$, где лакуна U имеет более сложную геометрию, — например, вместо шаров $\mathbb{B}(z^{(1)}; R^*)$, $\mathbb{B}(z^{(2)}; R^*)$ налицо замкнутые выпуклые множества $\mathbb{B}^{(1)}$, $\mathbb{B}^{(2)}$, гомеоморфные шарам, а вместо прямоугольника Π, — криволинейная полоска Π ширины $2r^*$ (см. рис. 14).

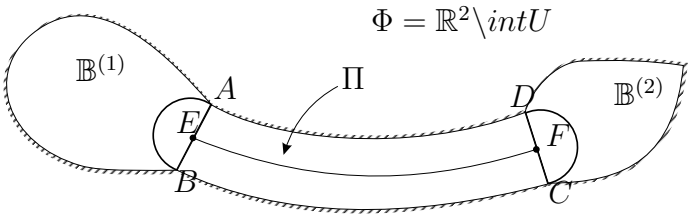

Рисунок 14.

Для простоты считаем, по аналогии с предыдущим примером, что полоска Π есть фрагмент полоски Π^* с закругленными краями (см. рис. 14), которая шире полоски Π на два полукруга в $\mathbb{R}^2$, примыкающих к отрезкам AB и CD и содержащихся соответственно в $\mathbb{B}^{(1)}$ и $\mathbb{B}^{(2)}$.

Справедливы равенства

$$\alpha^*_\Phi(z^*) = \alpha^*_{\mathbb{R}^2 \backslash int\mathbb{B}^{(1)}}(z^*) \text{ для точек } z^* \in int\mathbb{B}^{(1)},$$

$$\alpha^*_{\Phi}(z^*) = \alpha^*_{\mathbb{R}^2 \setminus int\mathbb{B}^{(2)}}(z^*) \text{ для точек } z^* \in int\mathbb{B}^{(2)},$$

что очевидно из рис. 15.

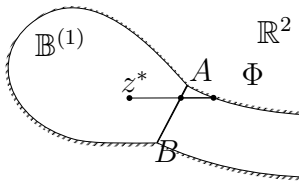

Рисунок 15.

Рис. 15 показывает, что ближайшие точки в множестве Φ к точке $z^* \in int\mathbb{B}^{(1)}$ следует искать в множестве ближайших точек, содержащихся в $\mathbb{R}^2 \setminus int\mathbb{B}^{(1)}$. Аналогичное утверждение справедливо и для точек $z^* \in int\mathbb{B}^{(2)}$.

Очевидно, что

$$\alpha^*_{\Phi} = \max\Big(\max_{z^* \in int\mathbb{B}^{(1)}} \alpha^*_{\Phi}(z^*), \max_{z^* \in int\mathbb{B}^{(2)}} \alpha^*_{\Phi}(z^*), \max_{z^* \in \Pi} \alpha^*_{\Phi}(z^*)\Big) =$$

$$= \max\Big(\max_{z^* \in int\mathbb{B}^{(1)}} \alpha^*_{\mathbb{R}^2 \setminus int\mathbb{B}^{(1)}}, \max_{z^* \in int\mathbb{B}^{(2)}} \alpha^*_{R^2 \setminus int\mathbb{B}^{(2)}}, \max_{z^* \in \Pi} \alpha^*_{\Phi}(z^*)\Big).$$

Справедливо равенство $\max\limits_{z^* \in int\Pi} \alpha^*_{\Phi}(z^*) = \pi$.

Для вычисления двух других максимумов, входящих в представление для α^*_{Φ}, мы можем воспользоваться техникой вычисления, предложенной ранее для множеств $\Phi = \mathbb{R}^n \setminus intU$, где U — выпуклая лакуна в $\mathbb{R}^n$. Для этого нам необходимо знать аналитическое описание границ $\partial\mathbb{B}^{(1)}$ и $\partial\mathbb{B}^{(2)}$ множеств $\mathbb{B}^{(1)}$ и $\mathbb{B}^{(2)}$ в $\mathbb{R}^2$.

Допустим, что, воспользовавшись этой техникой вычисления, мы получили $\max\limits_{z^* \in int\mathbb{B}^{(i)}} \alpha^*_{\Phi} = \pi$ при $i = 1, 2$. Тогда $\alpha^*_{\Phi} = \pi$.

В итоге мы показали, что для некоторых множеств вида $\Phi = \mathbb{R}^n \setminus U$, где U — выпуклые лакуны в $\mathbb{R}^n$, можно при определенных условиях на геометрию лакун (возможности аналитического описания границы ∂U) вычислять величину α^*_{Φ} и тем самым отделять ситуации, когда $\alpha^*_{\Phi} = \pi$, от ситуаций, когда $\alpha^*_{\Phi} > \pi$.

Очевидно, что эта технология вычислений степени невыпуклости α^*_{Φ} может быть применена и к некоторым замкнутым множествам Φ в $\mathbb{R}^n$, не обязательно указанного выше вида.

Из теоремы 2.3 следует, что для любого гомеоморфного образа $\varphi(S^{n-1}) = \partial B^1 \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ имеет место $\alpha^*_{\varphi(S^{n-1})} \geqslant \pi$.

В связи с этим возникает вопрос: «Пусть $\varphi(S^{n-1})$ — гомеоморфный образ сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^{n+1}$. Каковы достаточные условия на $\varphi(S^{n-1})$, при которых $\alpha^*_{\varphi(S^{n-1})} \geqslant \pi$?»

Для выяснения ответа на этот вопрос рассмотрим несколько примеров гомеоморфизмов $\varphi(S^1)$ сферы S^1 в пространстве $\mathbb{R}^3$. Они дадут нам некоторое основание сделать предположение относительно гомеоморфизма $\varphi(S^{n-1})$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Пример 2.3. Рассмотрим полый квадрат $ABCD$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ (то есть контур двумерного квадрата со сторонами длины 1) (см. рис. 16) и переведем его из плоскости $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$, перегнув

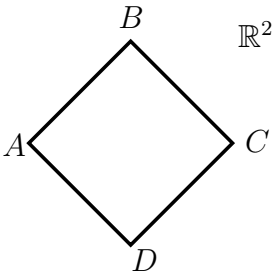

Рисунок 16.

вдоль (мнимой) прямой AC так, чтобы угол между плоскостями в $\mathbb{R}^3$, содержащими ломаные ABC и CDA, был $\dfrac{\pi}{2}$ (см. рис. 17)

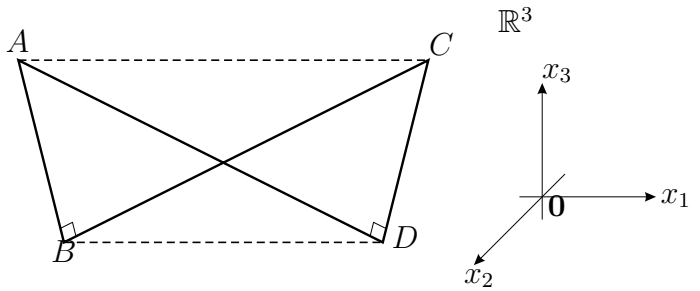

Рисунок 17.

Проекция ломаной $\mathcal{L} = ABCD$ из $\mathbb{R}^3$ на плоскость $\mathbb{R}^2$ переменных x_2, x_3 со стороны оси x_1 изображена на рис. 18.

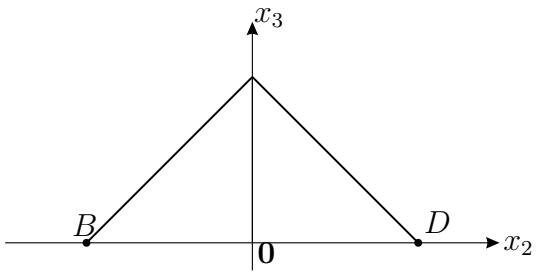

Рисунок 18.

Полагаем $z^0 = \dfrac{1}{2}(A+C)$ — середину отрезка $[A, C]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 18) и проведем вертикальную прямую Λ в $\mathbb{R}^3$ (параллельную оси x_3) через z^0.

Очевидно, что $\alpha^*_{\mathcal{L}} = \max\limits_{z^* \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}} \alpha^*_{\mathcal{L}}(z^*)$ достигается на одной из точек прямой Λ.

Изучим поведение скалярной функции $\alpha^*_{\mathcal{L}}(z^*)$ на $\mathcal{L}$. Начнем изучение с точек z^*, лежащих высоко над $\mathcal{L}$. А именно, пусть точка z^* такова, что углы, образованные отрезком z^*A с отрезками AB и AD и отрезком z^*C с отрезками CB и CD — тупые. Тогда узлы A и C ломаной $\mathcal{L}$ есть ближайшие к z^* точки на $\mathcal{L}$ (см. рис. 19)

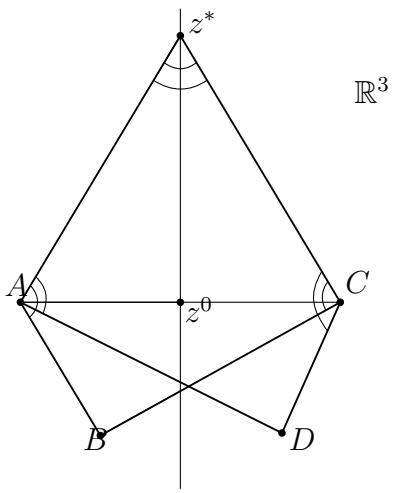

Рисунок 19.

При этом считаем точку z^* лежащей на Λ настолько высоко, что угол Az^*C — острый.

С непрерывным уменьшением высоты точки z^* угол $\widehat{Az^*C}$ непрерывно возрастает.

При таком уменьшении возникает точка $\overline{z^*}$ на Λ, что углы, образованные отрезком $\overline{z^*}A$ с отрезками AB и CD и отрезком $\overline{z^*}C$ с отрезками CB и CD, стали $\dfrac{\pi}{2}$. При этом угол $A\overline{z^*}C$ все еще остается меньше, чем π (см. рис. 20).

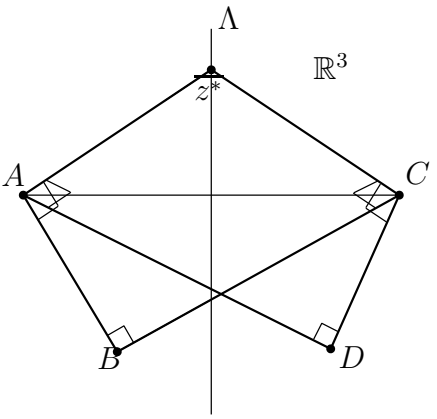

Рисунок 20.

Продолжая двигать точку z^* по Λ от точки $\overline{z^*}$ вниз, получаем, что ближайшие к $\overline{z^*}$ точки на Λ лежат внутри отрезков AB, AD, CB, CD. Таким образом, для этих новых точек z^* ближайших к ним точек на $\mathcal{L}$ — четыре. Обозначим их символами $Q^{(i)}(z^*)$, $i = \overline{1,4}$ соответственно (см. рис. 20). При этом для точек z^* определенного уровня высоты все углы $\widehat{Q^{(i)}(z^*)z^*Q^{(j)}(z^*)}$ $(i,j = \overline{1,4},\ i \neq j)$ меньше, чем π. Значит, эти точки z^* лежат на Λ в $\mathbb{R}^3$ выше, чем точки $Q^{(i)}(z^*)$, $i = \overline{1,4}$. Наконец в ходе непрерывного понижения высоты точки z^*, очевидно, найдется точка $\overset{+}{z^*}$, что ее высота сравняется с высотой точек $Q^{(i)}(\overset{+}{z^*})$ в $\mathbb{R}^3$.

Если для всех $z^* \in \Lambda$, лежащих над точкой $\overset{+}{z^*}$, выполнялось $\alpha_{\mathcal{L}}(z^*) < \pi$, то для $\overset{+}{z^*}$ выполняется $\alpha^*_{\mathcal{L}}(\overset{+}{z^*}) = \pi$ (см. рис. 21).

На рис. 21 изображены справа положения точек $Q^{(i)}(\overset{+}{z^*})$, $i = \overline{1,4}$ в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости x_1, x_2.

Далее, рассматривая все точки z^* на Λ, лежащие ниже точки $\overset{+}{z^*}$ и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным

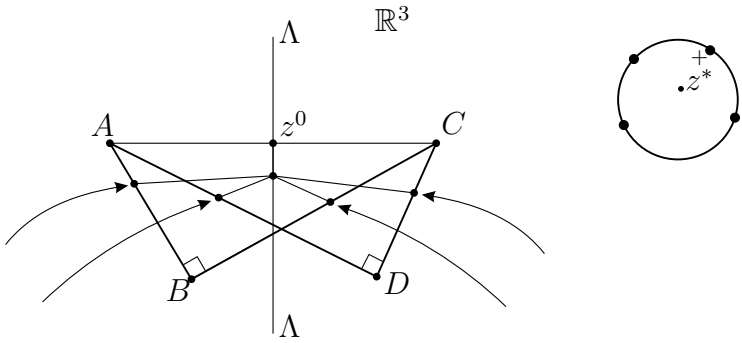

Рисунок 21.

для точек $z^* \in \Lambda$, лежащих выше точки $\overset{+}{z^*}$, заключаем, что для них $\alpha^*_{\mathcal{L}}(z^*) < \pi$.

В итоге изучения функции $\alpha^*_{\mathcal{L}}(z^*)$, $z^* \in \Lambda$ получили, что в рассматриваемом примере 2.3 выполняется $\alpha^*_{\mathcal{L}} = \max\limits_{z^* \in \Lambda} \alpha^*_{\mathcal{L}}(z^*) = \pi$.

Пример 2.4. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ вертикальный цилиндр $H = \{h = (x, y, z) : |x| \leqslant 1, y \leqslant 1, z \in (-\infty, \infty)\}$ и на его границе ∂H замкнутую негладкую кривую L, состоящую из четырех сегментов $L^{(i)}$, $i = \overline{1,4}$, каждый из которых — кусок параболы:

$$L^{(1)} = \{h = (x, y, z) : x = 1, |y| \leqslant 1, z = y^2\},$$

$$L^{(2)} = \{h = (x, y, z) : |x| \leqslant 1, y = 1, z = x^2\},$$

$$L^{(3)} = \{h = (x, y, z) : x = -1, |y| \leqslant 1, z = y^2\},$$

$$L^{(4)} = \{h = (x, y, z) : |x| \leqslant 1, y = -1, z = x^2\},$$

(см. рис. 22).

Очевидно, интересующая нас величина α^*_L достигается на вертикальной оси z системы координат x, y, z, которую для удобства обозначим символом Λ.

Поскольку грани цилиндра H расположены в $\mathbb{R}^3$ по отношению к оси Λ абсолютно одинаково, то рассуждения, относящиеся к вычислению величины α^*_L, будем сначала проводить на одной из этих граней и принадлежащей ее кривой $L^{(i)}$, например, — кривой $L^{(2)}$, а затем распространять результаты этих рассуждений на кривую L.

Итак, прежде всего проводим рассуждения, относящиеся к кривой $L^{(2)}$.

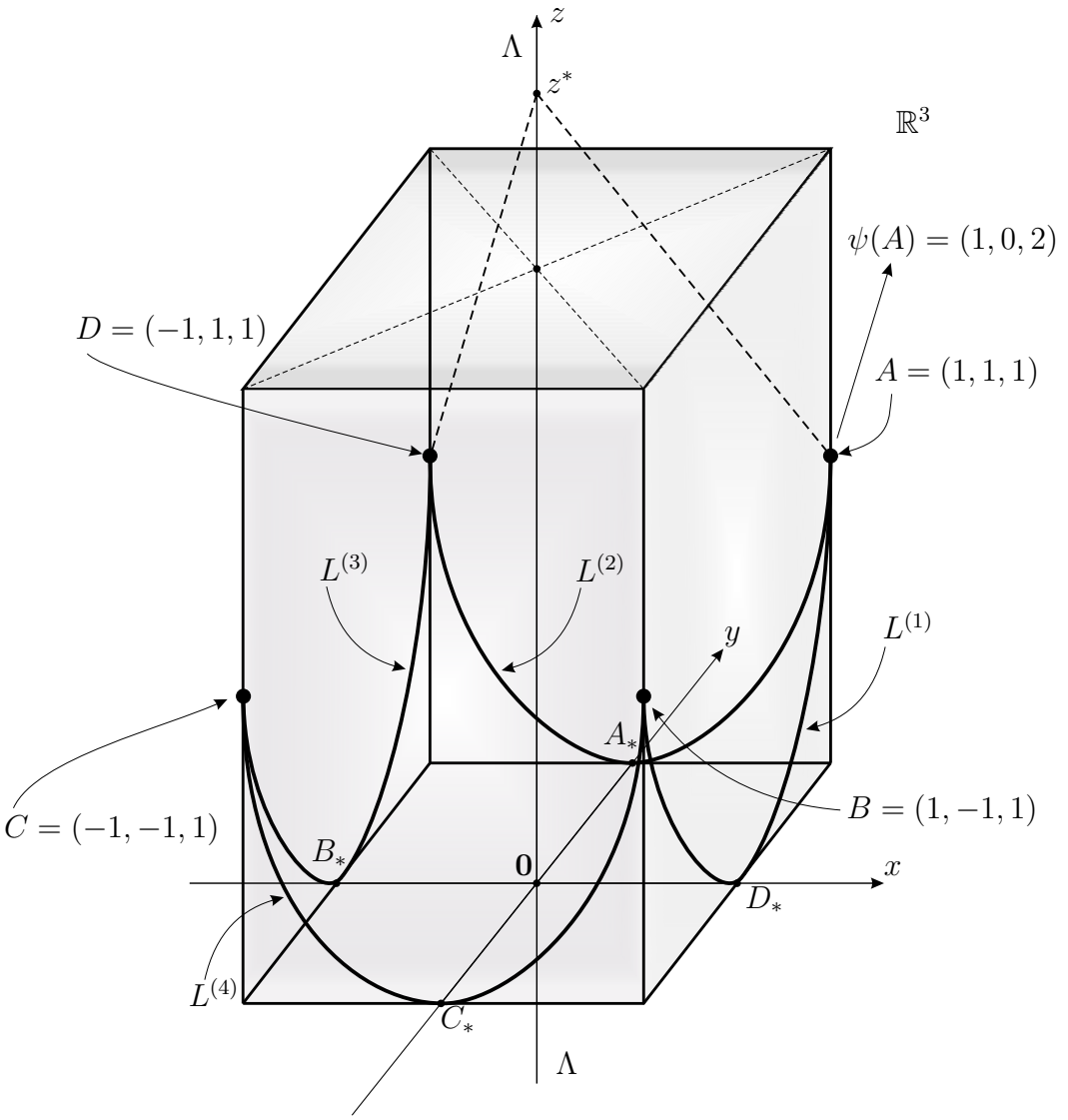

Рисунок 22.

Для достаточно высоких точек z^* на оси Λ ближайшими на $L^{(2)}$ будут крайние точки $A = (1, 1, 1)$ и $D = (-1, 1, 1)$.

Упомянутые точки $z^* = (0, 0, z)$ обладают свойством: угол $\widehat{A}$ между вектором $\overrightarrow{z^*A}$ и вектором $\psi(A) = (1, 0, 2)$ — касательным к $L^{(2)}$ в точке A, меньше, чем $\dfrac{\pi}{2}$ (см. рис. 22).

В точке z^0, подпирающей на оси Λ снизу эту совокупность достаточно высоких точек z^*, угол $\widehat{A}$ будет уже равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Точку z^0 определим из уравнения

$$\langle \overrightarrow{z^0A}, \psi(A)\rangle = \langle (0,0,z) - (1,1,1), (1,0,2)\rangle =$$

$$= \langle (-1,-1,z-1), (1,0,2)\rangle = -1 + 2(z-1) = 2z - 3 = 0.$$

Получаем $z^0 = (0, 0, \dfrac{3}{2})$.

Учитывая приведенные выше геометрические соображения, заключаем, что для точек z^*, лежащих на Λ выше точки z^0 (то есть $z > \dfrac{3}{2}$) выполняется неравенство

$$\alpha^*_L(z^*) < \alpha^*_L(z^0) \approx 141^\circ.$$

Далее изучаем функцию квадрата расстояния между точками $z^* = (0, 0, z)$, $z \leqslant \dfrac{3}{2}$ и $h^* = (x, 1, x^2) \in L^{(2)}$ как функцию от x на $[-1, +1]$ при различных фиксированных z^*, $z \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Эта функция имеет вид

$$\rho(z^*, h^*)^2 = \|(x, 1, x^2) - (0, 0, z)\|^2 = \|(x, 1, x^2 - z)\| =$$

$$= x^4 - 2zx^2 + z^2 + x^2 + 1 = x^4 + (1 - 2z)x^2 + (z^2 + 1), \quad |x| \leqslant 1$$

при $z^* = (0, 0, z)$, $z \leqslant \dfrac{3}{2}$.

В точке $z^0 = (0, 0, \dfrac{3}{2})$ функция $\rho(z^0, h^*)^2$ имеет вид

$$\rho(z^0, h^*)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + \frac{9}{4} = (x^2 - 1)^2 + \frac{9}{4}.$$

Из этой формулы мы видим, что

$$\min_{h^* \in L^{(2)}} \rho(z^0, h^*) = \rho(z^0, A) = \rho(z^0, D) = \frac{3}{2},$$

что подтверждает предыдущие рассуждения.

Обозначив через $B = (1, -1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$, получаем также, что

$$\rho(z^0, B) = \rho(z^0, C) = \rho(z^0, A) = \rho(z^0, D) = \\ = \min_{h^* \in L} \rho(z^0, h^*) = \frac{3}{2}.$$

Так как $\rho(z^0, A) < \rho(z^0, h^*)$ при $h^* = (x, 1, x^2)$, $|x| < 1$, то крайние точки A и D кривой $L^{(2)}$ — единственные ближайшие к z^0 точки в $L^{(2)}$.

Выпишем также формулы для величин $\rho(z^*, A)$ и $\rho(z^*, D)$ расстояний от точек $z^* = (0, 0, z)$, $z < \dfrac{3}{2}$.

Справедливы равенства

$\rho(z^*, A)^2 = \|(0, 0, z) - (1, 1, 1)\|^2 = \|(1, 1, 1 - z)\|^2 = (z - 1)^2 + 2;$

$\rho(z^*, D)^2 = \rho(z^*, A)^2 = (z - 1)^2 + 2$ и, значит,

$\rho(z^*, A) = \rho(z^*, D) = \sqrt{(z - 1)^2 + 2}$ при $z^* = (0, 0, z)$, $z < \dfrac{3}{2}$.

Далее изучаем при $z^* = (0, 0, z)$, $z < \dfrac{3}{2}$ функцию $\rho(z^*, h^*)^2$ как функцию от x на $(-1, +1)$.

Для выявления точек $h^* = (x, 1, x^2)$, $|x| < 1$, на которых может достигаться $\min\limits_{|x| \leqslant 1} \rho(z^*, h^*)^2$ при $z < \dfrac{3}{2}$, продифференцируем при $z < \dfrac{3}{2}$ функцию $\rho(z^*, h^*)^2 = \rho\left(z^*, (x, 1, x^2)\right)^2$ на $(-1, +1)$:

$$\frac{d\rho(z^*, h^*)^2}{dx} = 4x^3 + 2(1 - 2z)x = 2x(x^2 + 1 - 2z),$$

$$x \in (-1, +1).$$

При $z < \dfrac{3}{2}$ точками, подозрительными на экстремум функции $\rho(z_*, h_*)^2$ на $(-1, +1)$, будут $h^* = (x_*, 1, x_*^2)$, $|x_*| < 1$, удовлетворяющие

$$x_*(2x_*^2 - 2z + 1) = 0$$

и, стало быть, a. $x_* = 0$; b. $2x_*^2 - 2z + 1 = 0$, откуда при $\dfrac{1}{2} \leqslant z < \dfrac{3}{2}$ получаем $x_* = \pm\sqrt{\dfrac{2z - 1}{2}}$.

Из варианта a получаем точку $h_0^* = (0, 1, 0)$. Эта точка $A_* = h_0^*$ — наиболее низкая на $L^{(2)}$ и одна из четырех наиболее низких точек на L.

Из варианта b получаем при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$ точки $h_1^* = (\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, 1, \frac{2z-1}{2})$ и $h_2^* = (-\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, 1, \frac{2z-1}{2})$ на $L^{(2)}$, которые при $z = \frac{1}{2}$ сливаются в точку A_*.

При этом при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$ выполняются

$\rho(z^*, A_*)^2 = \rho(z^*, h_0^*)^2 = \|(0,0,z) - (0,1,0)\|^2 = z^2 + 1;$

$\rho(z^*, h_1^*)^2 = \rho(z^*, h_2^*)^2 = \|(0,0,z) - (\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, 1, \frac{2z-1}{2})\|^2 =$

$$= \| \left(-\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, -1, (z - \frac{2z-1}{2}) \right) \|^2 = \frac{2z-1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = z + \frac{3}{4}.$$

При $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$ сравним величины $\rho(z^*, A_*)$ и $\rho(z^*, h_1^*)$, для чего сравним $\rho(z^*, A_*)^2$ и $\rho(z^*, h_1^*)^2$.

При этом из равенства

$$(z^2 + 1) - (z + \frac{3}{4}) = (z - \frac{1}{2})^2$$

при $z = \frac{1}{2}$ следует $\rho(z^*, A_*) = \rho(z^*, h_1^*) = \frac{\sqrt{5}}{2}$; при $\frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}$ следует $\rho(z^*, h_1^*) < \rho(z^*, h_0^*)$.

Вместе с тем мы сравнили при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$ подозрительные на экстремум (на min) значения функции на интервале $(-1, +1)$, то есть на внутренних точках h^* кривой $L^{(2)}$: при $z = \frac{1}{2}$ меньшее значение функции $\rho(z^*, h^*)$ на $(-1, +1)$ достигается в A_*, а при $\frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}$ оно достигается в точках h_1^* и h_2^*.

Теперь эти наименьшие значения сравним со значениями функции $\rho(z^*, h^*)$ в крайних точках кривой $L^{(2)}$, то есть со значениями $\rho(z^*, A) = \rho(z^*, D) = \sqrt{(z-1)^2 + 2}$ при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$.

Для этого сравним при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$

$$(z-1)^2 + 2 \text{ и } z + \frac{3}{4}.$$

Справедливо соотношение

$(z-1)^2 + 2 - z - \frac{3}{4} = z^2 - 2\frac{3}{2}z + \frac{9}{4} + 1 + 2 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = (z - \frac{3}{2})^2 \geqslant 0$

и, значит, $\rho(z^*, h_1) \leqslant \rho(z^*, A)$ при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$.

Вместе с тем установлено при $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$

$$\rho(z^*, h_1^*) = \rho(z^*, h_2^*) = \min_{h^* \in L^{(2)}} \rho(z^*, h^*).$$

Точкам $z^* = (0, 0, z)$, $\frac{1}{2} \leqslant z < \frac{3}{2}$ сопоставим треугольники $y^* z^* A$, в которых для нас интересны острые углы $\gamma(z^*) = y^* \widehat{z^*} A$ (см. рис. 23).

В треугольнике $y^* z^* A$ с прямым углом $\widehat{y^*}$ длины стороны равны

$|z^* y^*| = \frac{1}{2}$, $|y^* A| = \|(0, 0, \frac{2z-1}{2}) - (\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, 1, \frac{2z-1}{2})\| =$

$= \|(-\sqrt{\frac{2z-1}{2}}, -1, 0)\| = \sqrt{\frac{2z-1}{2} + 1} = \sqrt{z + \frac{1}{2}}$, $|z^* A| = \sqrt{z + \frac{3}{4}}$.

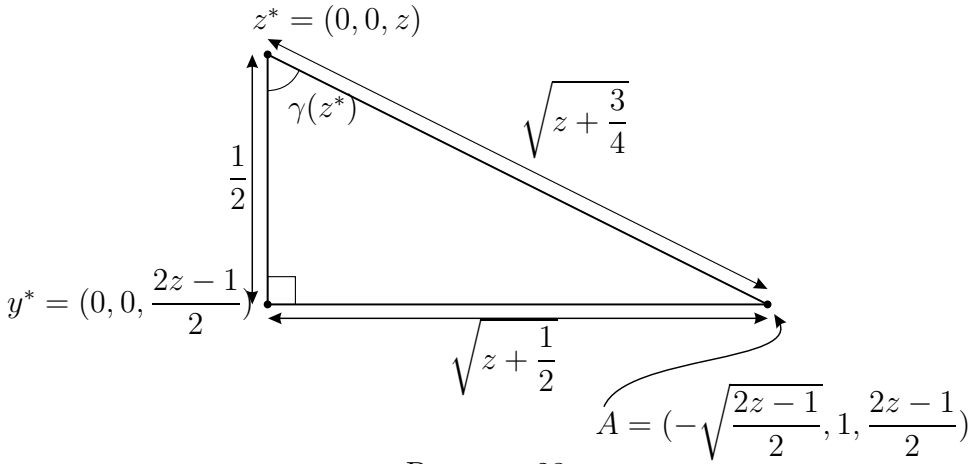

Рисунок 23.

Отсюда получаем $\sin \gamma(z^*) = \dfrac{\sqrt{z + \frac{1}{2}}}{\sqrt{z + \frac{3}{4}}} = \sqrt{\dfrac{4z+2}{4z+3}}$, $z \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, значит, $\gamma(z^*) = \arcsin \gamma(z^*)$, $z \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

По этой же формуле можно вычислить и угол $\gamma(z^0)$, $z^0 \in (0, 0, \frac{3}{2})$.

Из формулы для $\gamma(z^*)$ видим, что с убыванием z в промежутке $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ величина $\dfrac{4z+2}{4z+3} = 1 - \dfrac{1}{4z+3}$ убывает и, стало быть, угол $\gamma(z^*)$ убывает.

Выясним, насколько сильно убывает $\sin\gamma(z^*)$ на $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ с убыванием z. Для этого выделим крайние точки промежутка $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

На стр. 76 представлено значение $\sin\gamma(z^0) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. В точке $z^* = (0, 0, \frac{1}{2})$ справедливо $\sin\gamma(z^*) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (см. рис. 23).

Так как $\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, то $\sin\gamma(z^*) < \sin\gamma(z^0)$, при этом $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx \approx \dfrac{2}{3}$.

Далее рассмотрим множество точек $z^* = (0, 0, z)$, $z \leqslant \dfrac{1}{2}$, лежащих на Λ под множеством точек $z^* = (0, 0, z)$, $\dfrac{1}{2} \leqslant z < \infty$. Для них выпишем формулу для величины $\min\limits_{h^* \in L^{(2)}} \rho(z^*, h^*)^2$.

Из равенства

$$\rho(z^*, h^*)^2 = \|(x, 1, x^2) - (0, 0, z)\|^2 = \|(x, 1, x^2 - z)\|^2 = \\ = x^4 + (1 - 2z)x^2 + z^2 + 1, \quad |x| \leqslant 1$$

следует, что в каждой рассматриваемой точке z^* функция $\rho(z^*, h^*)^2$ достигает $\min\limits_{h^* \in L^{(2)}} \rho(z^*, h^*)^2 = z^2 + 1$ в точке $A_* = (0, 1, 0)$.

Отсюда следует, что при $z^* = (0, 0, z)$, $z \leqslant \dfrac{1}{2}$ $\min\limits_{h^* \in L} \rho(z^*, h^*) = \sqrt{z^2 + 1}$ достигается в четырех самых нижних точках $A_* = (0, 1, 0)$, $B_* = (-1, 0, 0)$, $C_* = (0, -1, 0)$, $D_* = (1, 0, 0)$ кривой L.

В связи с тем, что для множества точек $z^* = (0, 0, z)$, $z \leqslant \dfrac{1}{2}$ изменились ближайшие точки на L, изменяется и схема вычисления угла $\gamma(z^*)$ оси Λ с направлением из точек z^* на ближайшие к ним точки на кривой L (см. рис. 24).

Точкам $z^* = (0, 0, z)$, $z \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ мы сопоставляем треугольники $y^* z^* A_*$, в которых нас интересуют не тупые углы $y^* \widehat{z^*} A_*$ (включаем и вырожденные треугольники) с целью вычисления величины $\alpha_L^*(z^*) = 2\gamma(z^*)$.

На промежутке $[0, \frac{1}{2}] \subset (-\infty, \frac{1}{2}]$ величина $\sin\gamma(z^*) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$ возрастает от $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ до 1.

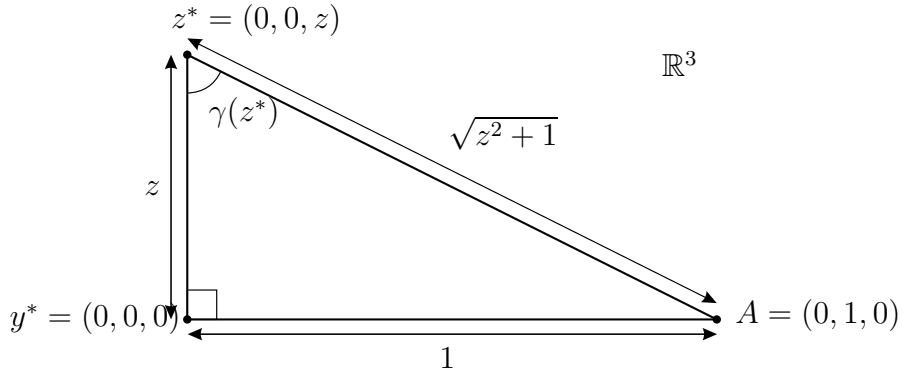

Рисунок 24.

При $z = (0, 0, 0)$ треугольник $y^c z^c A_*$ ($y^c = z^c$) есть горизонтальный отрезок с крайними точками z^c и A_* (см. рис. 25).

Значит, точка $A_* \in L^{(2)}$ принадлежит горизонтальной плоскости Γ, проходящей через $z^c = (0, 0, 0)$, то есть координатной плоскости x, y (см. рис. 25) в $\mathbb{R}^3$. Вместе с ней также ближайшие к z^c точки B_*, D_*, C_* на кривой L принадлежат Γ.

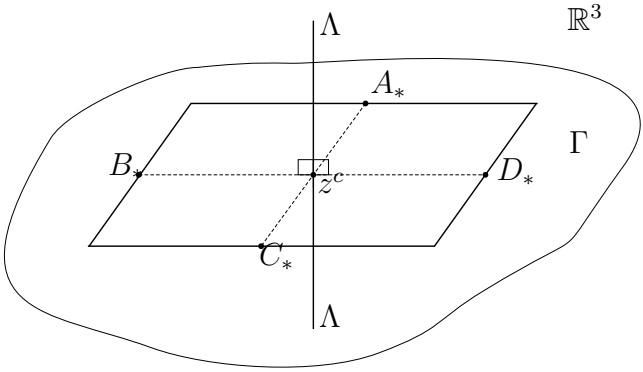

Рисунок 25.

Отсюда вытекает, что угол $\gamma_L(z^c)$ между вектором $\overrightarrow{z^c A_*}$ и осью Λ удовлетворяет $\gamma_L(z^c) = \dfrac{\pi}{2}$ и, значит, $\alpha_L^*(z^c) = 2\gamma_L(z^c) = \pi$ (см. рис. 25).

Нам осталось рассмотреть точки $z^* = (0, 0, z)$, $z \in (-\infty, 0)$. Для них точки A_*, B_*, C_*, D_* — ближайшие на L, а углы между векторами $\overrightarrow{z^* A_*}$, $\overrightarrow{z^* B_*}$, $\overrightarrow{z^* C_*}$, $\overrightarrow{z^* D_*}$ с осью Λ — острые и одинаковые по величине. Отсюда с очевидностью следует, что эти углы $\gamma(z^*) \downarrow 0$ при $z \downarrow -\infty$ и, значит, $\alpha_L^*(z^*) = 2\gamma(z^*) \downarrow 0$ при $z \downarrow -\infty$.

В итоге, изучив функцию $\alpha_L^*(z^*)$ на оси Λ, получаем, что в этом примере $\alpha_L^* = 2 \max\limits_{z^* \in \Lambda} \gamma(z^*) = \pi$.

Пример 2.5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан вертикальный полый цилиндр $H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in (-\infty, +\infty)\}$ и на нем непрерывная кривая L, являющаяся гомеоморфизмом $\varphi(S^1)$ сферы S^1 в $\mathbb{R}^3$.

Предполагается, что $S^1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$ есть ортогональная проекция prL кривой L на координатную плоскость x, y в $\mathbb{R}^3$ и $\varphi(s) = (s, g(s))$, $s \in S^1$ (см. рис. 26).

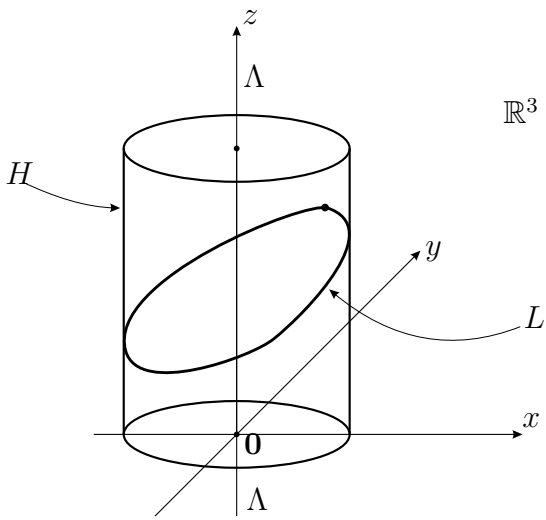

Рисунок 26.

Предполагается, что существует единственные верхняя и нижняя точки $A = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ и $B = (\check{x}, \check{y}, \check{z})$ с ортогональными проекциями $A_* = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ и $B_* = (\check{x}, \check{y}, 0)$ на координатную плоскость x, y (см. рис. 27).

От проекции B_* к A_* ведут вдоль окружности S^1 два пути, которые обозначим через $\overrightarrow{s_*}$ и $\overleftarrow{s^*}$.

Относительно L предполагаем, что вдоль каждого пути $\overrightarrow{s_*}$ и $\overleftarrow{s^*}$ функция $g(s)$ строго возрастает.

Через $\Gamma(z)$ обозначим горизонтальную плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящую через точку $(0, 0, z)$ на оси z. Далее для удобства обозначим ось z символом Λ.

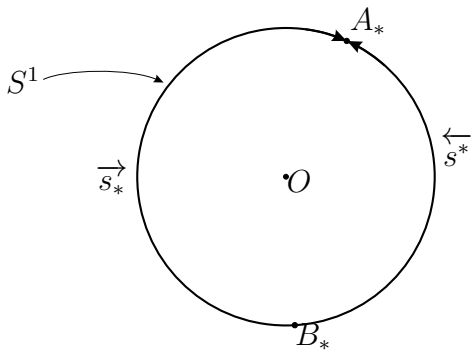

Рисунок 27.

При таком определении гиперплоскости $\Gamma(z)$ выполняются включения $A \in \Gamma(\hat{z})$, $B \in \Gamma(\check{z})$ соответственно.

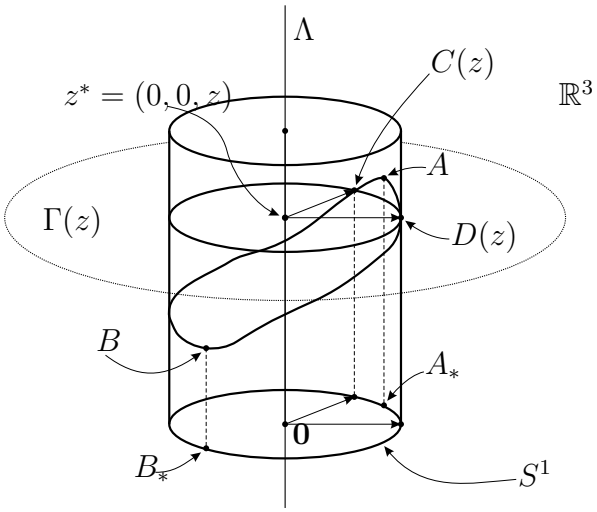

Рисунок 28.

Введем в $\mathbb{R}^3$ точки $C(z) = \{(s, g(s)) : s \in \overrightarrow{s_*}\} \bigcap \Gamma(z)$ и $D(z) = \{(s, g(s)) : s \in \overleftarrow{s^*}\} \bigcap \Gamma(z)$, где $z \in [\check{z}, \hat{z}]$, а также их ортогональные проекции $C_*(z)$ и $D_*(z)$ на плоскость x, y, считая, что $\check{z} \leqslant z \leqslant \hat{z}$ (см. рис. 28).

Справедливы равенства $C(\hat{z}) = D(\hat{z})$, $C(\check{z}) = D(\check{z})$.

Начиная сверху от точки A, по направлению вниз будем передвигать в $\mathbb{R}^3$ горизонтальные гиперплоскости $\Gamma(z)$ от самой высокой гиперплоскости $\Gamma(\hat{z})$ до самой низкой $\Gamma(\check{z})$.

При этом с непрерывным изменением (передвижением вниз) ги-

перплоскости $\Gamma(z)$ непрерывно изменяются точки $C(z)$ и $D(z)$ и вместе с ними их ортогональные проекции $C_*(z)$ и $D_*(z)$ на сфере S^1.

Обозначим символом $\gamma(z)$, $\check{z} \leqslant z \leqslant \hat{z}$ наименьший из двух углов $\widehat{C_*(z)D_*(z)}$, образованных векторами $C_*(z)$ и $D_*(z)$ (см. рис. 29).

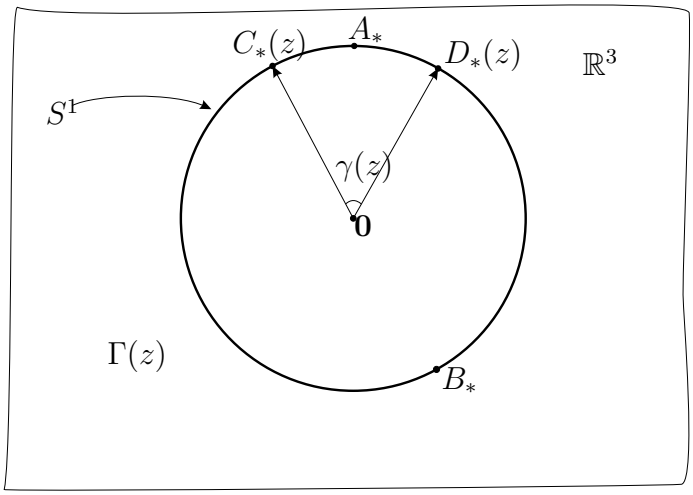

Рисунок 29.

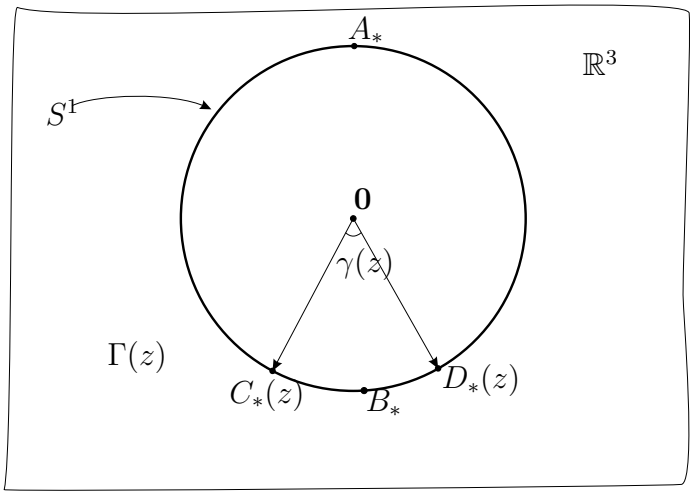

Рисунок 30.

Очевидно, что при предположениях, наложенных на кривую L, угол $\gamma(z)$ меняется непрерывно вместе с проекциями $C_*(z)$ и $D_*(z)$, начиная с угла $\gamma(\hat{z}) = \widehat{C_*(\hat{z}), D_*(\hat{z})} = 0^\circ$ и заканчивая углом $\gamma(\check{z}) = \widehat{= C_*(\check{z}), D_*(\check{z})} = 0^\circ$ (см. рис. 30).

Итак, изменение угла $\gamma(z)$ начинается с угла $\gamma(\hat{z}) = 0°$, возрастает, затем убывает и переходит в угол $\gamma(\check{z}) = 0°$.

Поскольку это изменение происходит непрерывно, то найдется такое $z^0 \in (\check{z}, \hat{z})$, что $\gamma(z^0) = \pi$. Это означает, что точке $z^0 = (0, 0, z^0)$ соответствуют две противоположные точки $C_*(z^0)$ и $D_*(z^0)$, а на кривой L две точки $C(z^0)$ и $D(z^0)$ такие, что угол между векторами $\overrightarrow{Z^0C(z^0)}$ и $\overrightarrow{Z^0D(z^0)}$ равен π. Отсюда следует, что $\alpha_L^* = \alpha_L^*(Z^0) = \\ = \widehat{Z^0C(z^0), Z^0D(z^0)} = \pi$.

Пример 2.6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан единичный шар $\mathbb{B}(\mathbf{0}; 1) = \{b \in \\ \in \mathbb{R}^3 : \|b\| \leqslant 1\}$ со сферой $S^2 = \partial\mathbb{B}(\mathbf{0}; 1)$. Наряду с шаром $\mathbb{B}(\mathbf{0}; 1)$ и сферой S^2 введем синусоиду $\varphi(t) = \sin 4t$, изображенную на рис. 31.

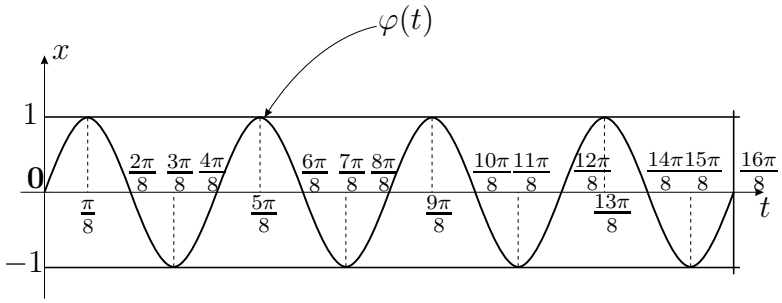

Рисунок 31.

Переведем $gr\varphi(\cdot)$ из плоскости (t, x) в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ на сферу S^2 так, чтобы точки пересечения с графиком $gr\varphi(\cdot)$ оси t в $\mathbb{R}^2$ перешли на экватор $\mathcal{E}$ сферы S^2, а точки графика $gr\varphi(\cdot)$, соответствующие точкам максимума и минимума функции $\varphi(t)$, $t \in \\ \in [0, 2\pi]$, переходят на одномерные сферы ε_* и ε^* симметричные относительно $\mathcal{E}$. Этот гомеоморфизм графика $gr\varphi(\cdot)$ на сферу S^2 обозначим символом L (см. рис. 32).

Очевидно величина α_L^* — степень невыпуклости кривой L достигается на вертикальной оси z в пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящей через точку $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_L^* = \max_{z^*=(0,0,z)} \alpha_L^*(z^*) = \alpha_L^*(\mathbf{0}) = \pi + \omega,$$

где $0 < \omega < \pi$ (см. рис. 33).

На рис. 33 изображен один из двух минимальных сферических сегментов S_l^ϑ $(l = (0, 0, 1))$, охватывающих кривую L.

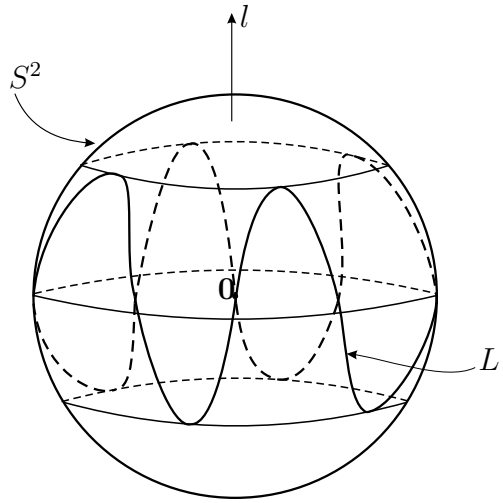

Рисунок 32.

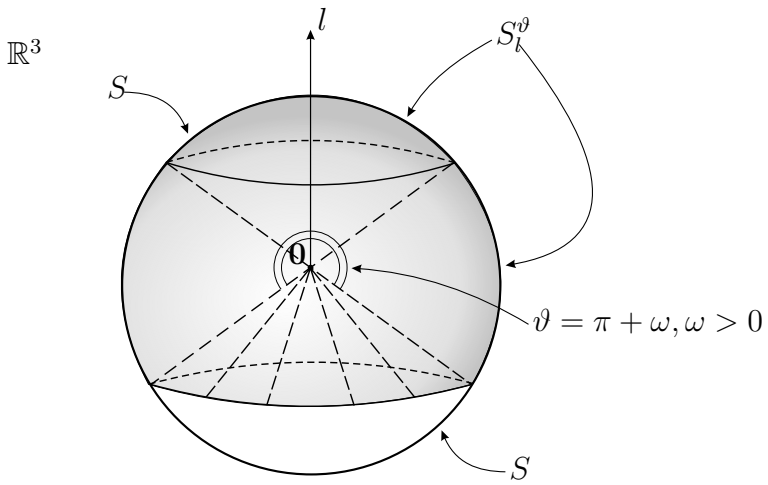

Рисунок 33.

Таким образом, рассмотрев несколько кривых L — гомеоморфизмов сферы S^1 в $\mathbb{R}^3$, приходим к выводу, что для кривых в $\mathbb{R}^3$, гомеоморфных сфере S^1, может быть как $\alpha_L^* = \pi$, так $\alpha_L^* > \pi$.

В связи с этим имеет смысл сформулировать достаточно общего вида критерии для упомянутых кривых в $\mathbb{R}^3$, выделяющие кривые L одного типа от других.

В примерах этого раздела изучаются свойства степени невыпуклости α_Φ^* некоторых замкнутых множеств Φ в пространствах $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и вычисляются числа α_Φ^*. Многие из этих множеств есть непрерывные

кривые в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ и, в том числе, — гомеоморфные образы сферы S^1 в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Некоторые из рассматриваемых кривых — ломаные линии.

Наше повышенное внимание к этим кривым обусловлено, с одной стороны, тем, что это — достаточно простые геометрические объекты для изучения (например, двузвенные, трехзвенные и k-звенные ломаные в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), а, с другой стороны, наше внимание навеяно различными схемами (картинками) из книг по биологии, точнее, — по биохимии клетки. В книгах по биохимии клетки можно встретить такие схемы (иллюстрации), на которых представлены те или иные («телесные» в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$) объекты, содержащие в себе множество, обладающее ленточной структурой, проще говоря, подобное некоей кривой в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Так, например, для нас представляют интерес геометрическая и топологическая структуры спирали ДНК конкретных живых организмов и конкретных видов с точки зрения выявления особенностей их пространственной конструкции, например, — вычисление их степеней невыпуклости и последующее сравнение этих степеней. Хотелось бы уразуметь, почему «творец» уложил генетические коды в спирали, а не иные топологические структуры.

Заключая комментарий к примерам этого раздела, отметим, что их изучение направлено на уяснение некоторых основных свойств показателя α^*_Φ степени невыпуклости множеств Φ в конечномерных евклидовых пространствах и, в том числе, — в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ и, более конкретно, — служит уяснению структуры гомеоморфных образов $\varphi(S^{n-2})$ единичной сферы S^{n-2} в пространствах $\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

3. О соотношении между α-множествами в α^*-множествами в $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе напомним определение α-множества в $\mathbb{R}^n$ и изучим вопрос о соотношении между α-множествами и α^*-множествами в $\mathbb{R}^n$.

Для этого приведем определение α-множества в $\mathbb{R}^n$.

Считаем как и ранее, что A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

Полагаем

$H_A(z^*)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов из $con(co\Omega_A(z^*) - z^*)$, где $\Omega_A(z^*)$ определено на стр. 49;

$(h_*, \widehat{\ } h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \|h^*\|} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*, $(h_*, h^*) \in H_A(z^*)$;

$\alpha_A(z^*) = \max\limits_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} (h_*, \widehat{\ } h^*) \in [0, \pi]$.

Полагаем $\alpha = \alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Определение 3.1 (см. [3–5]). *Множество A назовем α-множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Это определение было сформулировано в начале 2000-х годов в работах [3–5]. Оно вызвано вопросами, возникающими при изучении геометрии множеств достижимости управляемых систем. Во многих задачах управления эти множества невыпуклы, и они могут оказаться невыпуклыми не только в задачах управления нелинейными системами, но и в задачах управления линейными системами, в которых стартовые множества невыпуклы. При этом в некоторых задачах геометрия множеств достижимости близка к выпуклым множествам, а в других задачах она существенно отличается от геометрии выпуклых множеств. Актуальны также вопросы, относящиеся к прогнозированию тенденций изменения топологической структуры множеств достижимости; так в некоторых задачах управления имеют место тенденции превращения со временем односвязных множеств достижимости в неодносвязные множества или в множества, состоящие из нескольких компонент связности. К этим вопросам примыкает упомянутый в §2 вопрос, касающийся оценки величины отклонения одних множеств достижимости управляемой системы от других множеств достижимости.

В связи с этим возникает потребность в наведении определенной классификации множеств достижимости управляемых динамических систем в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, вообще, — множеств в $\mathbb{R}^n$, ранжирующей их по степени невыпуклости. Разумеется, что таких классификаций можно придумать в немалом количестве. Введение в [3–5] понятия α-множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ — попытка сформировать одну из таких классификаций.

Введенное в этих работах понятие α-множества в $\mathbb{R}^n$ обладает, однако, определенной ограниченностью: так, например, некоторым множествам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ в $\mathbb{R}^n$, сильно различающимся по степени невы-

пуклости, приписывается одно и то же число $\alpha = \alpha_{A^{(1)}} = \alpha_{A^{(2)}} = \pi$. Таким образом, получается, что некоторым множествам в $\mathbb{R}^n$, обладающим геометрией, существенно отличной от геометрии выпуклых множеств и при этом достаточно существенно отличающимся друг от друга по степени невыпуклости (визуально), приписывается одно и то же число $\alpha = \pi$. Такое огрубление множеств в $\mathbb{R}^n$ при определении α-множеств вызвало в последнее время необходимость скорректировать это определение и вместе с тем придать ему более эстетичный вид. Так возникло определение α^*-множества в $\mathbb{R}^n$, которое приведено в §2 этой работы. Наличие элемента эстетики в этом определении проявляется через такие понятия как сфера в $\mathbb{R}^n$ и сферический сегмент.

Приступим к некоторому сравнению определений 2.1 и 3.1.

Считаем, что A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$.

Для сегмента $S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ представляются следующие возможности, расклассифицированные относительно минимального угла $\vartheta^0(z^*)$ среди углов ϑ, отвечающих сегментам S^{ϑ}_{l}, $l \in S$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

$$1.\ \vartheta^0(z^*) = 0; \quad 2.\ \vartheta^0(z^*) \in (0, \pi);$$

$$3.\ \vartheta^0(z^*) = \pi; \quad 4.\ \vartheta^0(z^*) \in (\pi, 2\pi].$$

В варианте 1 сегмент $S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ вырождается в точку $l^0(z^*)$ на сфере S и, значит, $\alpha_A(z^*) = \alpha^*_A(z^*)$.

В более сложном варианте 2 введем обозначения, учитывая обозначения из §2:

$\Phi^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)} = coS^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ — шаровой сегмент в шаре $\mathbb{B}(\mathbf{0}; 1) \subset \mathbb{R}^n$;

$\Gamma^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)} = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, l^0(z^*)\rangle\} = cos\dfrac{1}{2}\vartheta^0(z^*)$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$;

$K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)} = \mathbb{B}(\mathbf{0}; 1) \bigcap \Gamma^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ — основание шарового сегмента $\Phi^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$.

Выполняется $S_A(z^*) \subset S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ и, значит, $coS_A(z^*) \subset coS^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)} = \Phi^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$.

Очевидно, что $con(co\Omega_A(z^*) - z^*) = con\, coS_A(z^*) \subset con\Phi^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)} = conS^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$.

Из включения $con(co\Omega_A(z^*) - z^*) \subset conS^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ следует, что любой паре (h_*, h^*) ненулевых векторов из $con(co\Omega_A(z^*) - z^*)$ соответствует

пара (s_*, s^*) $(s_* = \dfrac{h_*}{\|h_*\|},\ s^* = \dfrac{h^*}{\|h^*\|})$ векторов из $S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ такая, что $(s_*, \widehat{\ } s^*) = (h_*, \widehat{\ } h^*)$.

Отсюда следует неравенство

$$\alpha_A(z^*) = \max_{(h_*,h^*)\in H_A(z^*)} (h_*, \widehat{\ } h^*) \leqslant \max_{(s_*,s^*)\in S^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}} (s_*, \widehat{\ } s^*) =$$
$$= \vartheta^0(z^*) = \alpha^*_A(z^*).$$

Итак, в варианте 2 справедливо неравенство

$$\alpha_A(z^*) \leqslant \alpha^*_A(z^*),\ z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A. \tag{3.1}$$

При этом выполнение равенства или строгого неравенства в (3.1) для конкретной точки $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$ зависит от множества $con\, coS_A(z^*)$ или, что одно и то же, — от геометрии множества $S_A(z^*)$, а на самом деле от геометрической структуры множества $G_A(z^*) = S_A(z^*) \bigcap K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$.

Подтвердим это утверждение.

Введем обозначения

$d(G_A(z^*))$ — диаметр множества $G_A(z^*)$;
$d(K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)})$ — диаметр множества $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$.

Если $G_A(z^*)$ и $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ таковы, что

$$d(G_A(z^*)) = d(K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}),$$

то $\alpha_A(z^*) = \alpha^*_A(z^*)$, так как в множестве $G_A(z^*)$ существуют две диаметрально противоположные точки g_* и g^*, являющиеся в то же время диаметрально противоположными точками шара $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ (в подпространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^n$). Отсюда следует $\alpha_A(z^*) =$
$= \alpha^*_A(z^*)$.

Если $G_A(z^*)$ и $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ таковы, что

$$d(G_A(z^*)) < d(K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}),$$

то множество $G_A(z^*)$ не содержит диаметрально противположных точек, являющихся в то же время диаметрально противоположными точками шара $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$. Отсюда следует $\alpha_A(z^*) < \alpha^*_A(z^*)$.

Для иллюстрации приведем два примера.

На этих примерах представлены в пространстве $\mathbb{R}^3$ два полых (без внутренности) компакта A — правильная четырехгранная пирамида и тетраэдр с основанием — равносторонним треугольником. На высотах этих множеств A выбраны точки z^*. Показано, что для пирамиды A и точки z^* выполнено равенство $\alpha_A(z^*) = \alpha_A^*(z^*)$, а для тетраэдра A выполнено неравенство $\alpha_A(z^*) < \alpha_A^*(z^*)$.

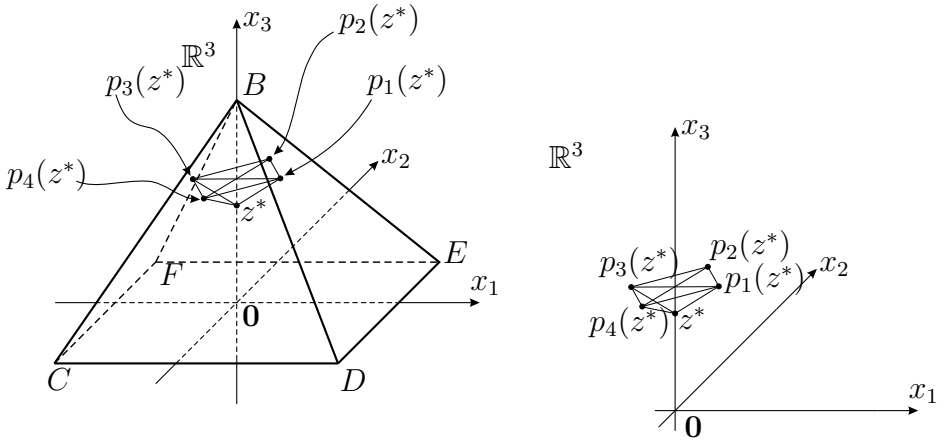

Рисунок 34.

Пример 3.1. Пусть компакт A в $\mathbb{R}^3$ представляет собой пирамиду $BCDEF$ (см. рис. 34) без внутренности (то есть без $intA$). Основанием пирамиды A является квадрат $CDEF$, принадлежащий подпространству переменных x_1, x_2 в $\mathbb{R}^3$. На высоте BO (здесь O — точка $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^3$) пирамиды A выбрана точка z^* достаточно близко к вершине B так, что ее проекциями на A являются четыре точки $p_i(z^*)$, $i = \overline{1,4}$, принадлежащие боковым граням пирамиды (см. рис. 34). По построению, множество $\Omega_A(z^*) = \{p_i(z^*) : i = \overline{1,4}\}$ есть множество в некоторой горизонтальной плоскости пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из вершин квадрата, гомотетичного полому квадрату, вписанному в квадрат $CDEF$ и имеющему вершинами середины сторон этого квадрата. Из этого следует, что множество $S_A(z^*)$ на сфере S есть четырехэлементное множество, принадлежащее границе $\partial^* K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ круга $K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ (в горизонтальной плоскости в $\mathbb{R}^3$) (см. рис. 35).

Имеем $S_A(z^*) = \{s_i : i = \overline{1,4}\}$ и $G_A(z^*) = S_A(z^*) = S_A(z^*) \bigcap K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)} = S_A(z^*) \bigcap \partial^* K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ (см. рис. 35).

Из равенства $G_A(z^*) = S_A(z^*) \bigcap \partial^* K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ следует, что на границе $\partial^* K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ круга $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ есть диаметрально противоположные точки множества $S_A(z^*)$, являющиеся, стало быть, диаметрально противоположными точками круга $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ и, значит, $d(G_A(z^*)) = d(K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)})$, откуда следует в этом примере $\alpha_A(z^*) = \alpha^*_A(z^*)$.

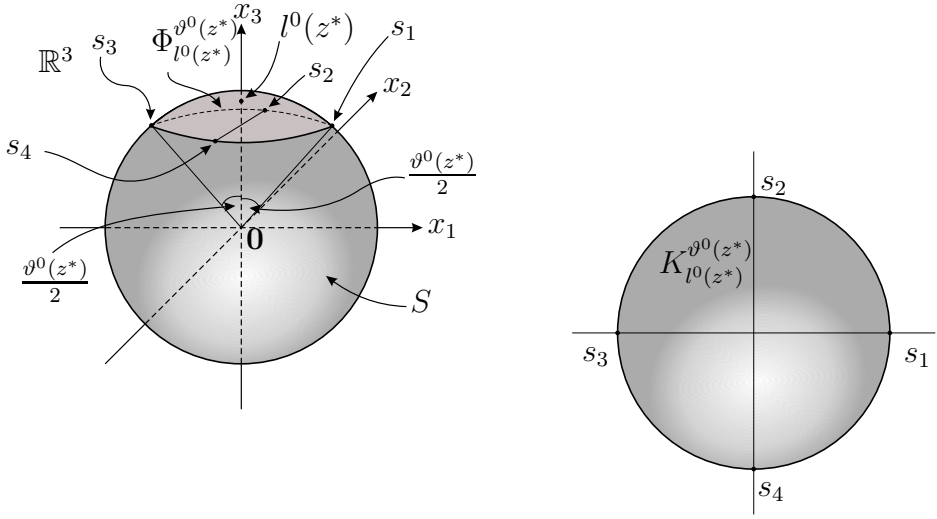

Рисунок 35.

Пример 3.2. Пусть компакт A в $\mathbb{R}^3$ представляет собой тетраэдр $BCDE$ (см. рис. 36) без внутренности. Основанием тетраэдра A является равносторонний треугольник CDE, принадлежащий плоскости переменных x_1, x_2 в $\mathbb{R}^3$. На высоте BO тетраэдра A выбрана точка z^*, расстояние от которой до вершины B меньше, чем расстояние до основания CDE тетраэдра A, так что ее проекциями на A являются три точки $p_i(z^*)$, $i = \overline{1,3}$, лежащие на боковых гранях тетраэдра (см. рис. 36). По построению, множество $\Omega_A(z^*) = \{p_i(z^*) : i = \overline{1,3}\}$ есть множество в некоторой горизонтальной плоскости пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из вершин равностороннего треугольника, гомотетичного полому треугольнику, вписанному в треугольник CDE и имеющему вершины в серединах сторон этого треугольника. Из этого следует, что множество $S_A(z^*)$ на сфере S есть трехэлементное множество на сфере S, принадлежащее границе $\partial^* K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ круга $K^{\vartheta^0(z^*)}_{l^0(z^*)}$ (см. рис. 37).

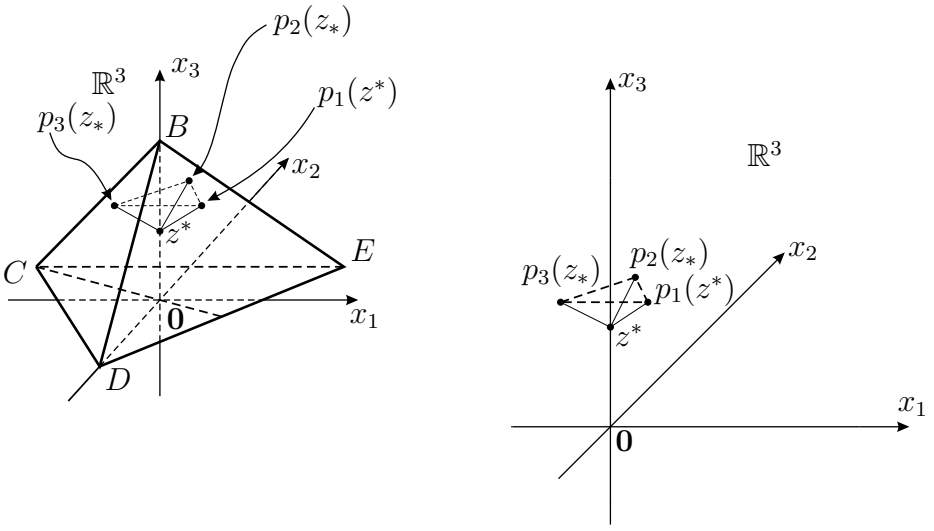

Рисунок 36.

Имеем $S_A(z^*) = \{s_i : i = \overline{1,3}\}$ и $G_A(z^*) = S_A(z^*) = S_A(z^*) \bigcap \bigcap \partial^* K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)} = S_A(z^*) \bigcap K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ (см. рис. 37).

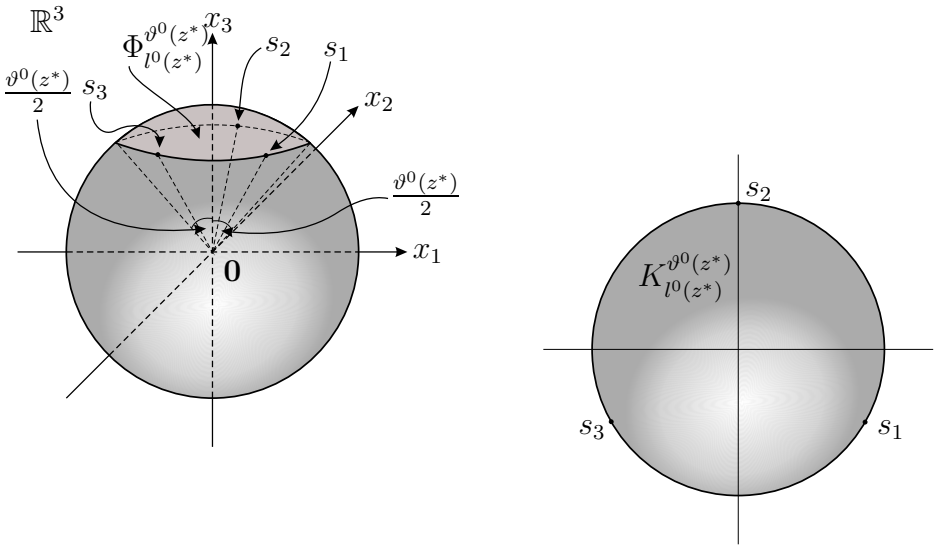

Рисунок 37.

Поскольку в множестве $G_A(z^*) = S_A(z^*) \bigcap K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)}$ отсутствуют диаметрально противоположные точки, то $d(G_A(z^*)) < d(K_{l^0(z^*)}^{\vartheta^0(z^*)})$, откуда следует $\alpha_A(z^*) < \alpha_A^*(z^*)$ в этом примере.

4. Фрактальные множества в конечномерных евклидовых пространствах и степень их невыпуклости

В предыдущем параграфе обсуждалась тематика α^*-множеств в конечномерных евклидовых пространствах. Рассматриваемые в рамках этой тематики вопросы имеют непосредственное отношение к множествам достижимости управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах. Подобные вопросы вполне можно адресовать к множествами из некоторых других известных классов множеств в конечномерных евклидовых пространствах, например, — к фрактальным множествам.

В этом параграфе зафиксируем внимание на некоторых известных фрактальных множествах в $\mathbb{R}^2$. Итерации фрактальных множеств вызывают очевидную аналогию с множествами достижимости управляемых систем, отвечающих дискретным моментам времени.

Ниже в этом параграфе мы изучаем снежинку Коха (см. [1]), n-ю итерацию которой обозначим $K^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$. Итерация $K^{(n)}$ представляет собой замкнутую ломаную линию в $\mathbb{R}^2$ с конечным числом вершин, ограничивающую невыпуклый (при $n \in \mathbb{N}$) многоугольник, которой обозначим $M^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. С возрастанием n многоугольник $M^{(n)}$ увеличивается, возрастает число его вершин, изменяется геометрия, и, в частности, $M^{(n)}$ становится все более невыпуклым (по виду).

Полагаем $\alpha^{(n)} = \alpha^*_{M^{(n)}} = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus M^{(n)}} \alpha^*_{M^{(n)}}(z^*)$ степень невыпуклости многоугольника $M^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При $n = 0$ имеем $\alpha^{(0)} = 0$. На итерациях с номером $n \in \mathbb{N}$ число $\alpha^{(n)}$ вычисляется с использованием так называемых биссектрис многоугольника $M^{(n)}$ (см. определение биссектрисы в [2]). А именно, при вычислении $\alpha^{(n)}$ мы учитываем только биссектрисы многоугольника $M^{(n)}$ и точки z^*, лежащие на них. Нетрудно видеть, что sup в выражении для $\alpha^{(n)}$ достигается на некоторых из этих точек z^*, не столь удаленных от $M^{(n)}$.

Величину $\alpha^*_{M^{(n)}}(z^*)$ для точки $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus M^{(n)}$ и, в частности, — для точки z^*, лежащей на биссектрисе многоугольника $M^{(n)}$, будем для ясности называть угловой характеристикой точки z^*. Также для точек z^*, принадлежащих биссектрисам многоугольника $M^{(n)}$, примем для простоты обозначение $\gamma^{(n)}(z^*) = \alpha^*_{M^{(n)}}(z^*)$.

Из проведенных вычислений замечаем, что на первых итерациях $n = \overline{0,5}$ многоугольник $M^{(n)}$ представляет собой односвязный компакт в $\mathbb{R}^2$, геометрия которого с возрастанием номера n изменяется, и он становится все более изощренным по виду и, в том числе, все менее выпуклым (по виду). Принимая это во внимание, мы не исключаем, что его односвязность может нарушаться. Это нарушение может осуществиться с многоугольником $M^{(n)}$ лишь в случае, когда при некотором $n \in \mathbb{N}$ реализуется неравенство $\alpha^{(n)} > \pi$.

Ниже в этом параграфе проведены вычисления числа $\alpha^{(n)}$ при $n = \overline{0,5}$, которые показывают, что, начиная с $n = 2$, то есть при $n = 2, 3, 4, 5$ справедливо $\alpha^{(n)} = \pi$.

Методика вычисления числа $\alpha^{(n)}$ дает нам основание сделать вывод о том, что и при последующих номерах ($n \geqslant 6$) будет справедливо $\alpha^{(n)} = \pi$.

На начальной итерации с номером $n = 0$ снежинка Коха $K^{(0)}$ представляет собой равносторонний треугольник с длиной стороны $L^{(0)} = l$ (см. рис. 38). Верхний индекс в обозначении длины соответствует номеру итерации n.

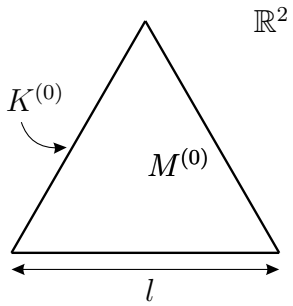

Рисунок 38.

Угловая характеристика $\gamma^{(0)}(z^*) = 0$ в любой точке z^* множества $\mathbb{R}^2 \backslash M^{(0)}$. Верхний индекс в обозначении угловой характеристики соответствует номеру итерации n. Степень невыпуклости снежинки Коха на данном этапе равна $\alpha^{(0)} = 0$, так как $M^{(0)}$ является выпуклым множеством. Верхний индекс в обозначении степени невыпуклости соответствует номеру итерации n.

Рассмотрим фрагмент снежинки Коха при $n = 1$, представленный на рис. 39.

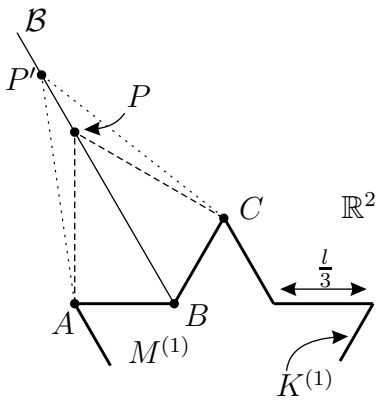

Рисунок 39.

Длина сегмента множества $K^{(n)}$ на каждой итерации определяется выражением

$$L^{(n)} = \frac{l}{3^n},$$

поэтому на данной итерации длина сегмента равна $L^{(1)} = \frac{l}{3}$. Отрезки AB и BC имеют одинаковую длину $l(AB) = l(BC) = L^{(1)}$. Положим, что точка $B = (B_x, B_y) = (0, 0)$ совпадает с началом координат. Тогда отрезок BC принадлежит прямой с угловым коэффициентом $k_{BC} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то есть отрезок BC является участком прямой, представимой выражением

$$y = \sqrt{3}x.$$

Биссектриса $\mathcal{B}$ угла ABC содержится на прямой с угловым коэффициентом $k_{BP} = -\sqrt{3}$, представимой выражением

$$y = -\sqrt{3}x. \tag{4.1}$$

Угловая характеристика $\gamma^{(1)}(z^*)$ точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ определяется углом между отрезками кратчайших расстояний к $M^{(1)}$, построенных из точек биссектрисы $\mathcal{B}$. По мере перемещения по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B кратчайшими расстояниями до рассматриваемого множества будут нормали к отрезкам AB и BC. Точка P является наиболее удаленной от точки B точкой биссектрисы $\mathcal{B}$, кратчайшие расстояния от которой до $M^{(1)}$ являются нормалями. То есть при дальнейшем движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в

направлении от точки P кратчайшие расстояния до $M^{(1)}$ будут достигаться в точках A и C, но векторы $P'A$ и $P'C$, определяющие кратчайшие расстояния до $M^{(1)}$, не будут нормалями к отрезкам AB и BC. Определим выражение для угловой характеристики $\gamma_0^{(1)}(z^*)$ при $l(Bz^*) > l(BP)$, где $l(BP) = \dfrac{L^{(1)}}{\cos\dfrac{\pi}{3}} = 2L^{(1)} = \dfrac{2l}{3}$. Ввиду того, что угловая характеристика $\gamma^{(n)}(z^*)$ при $n \geqslant 1$ является кусочно-непрерывной функцией, нижний индекс в ее обозначении будем использовать для указания на порядковый номер промежутка, на котором $\gamma^{(n)}(z^*)$ непрерывна.

Рассмотрим треугольник $AP'C$. Угловая характеристика $\gamma_1^{(1)}(z^*)$ при $l(Bz^*) \geqslant l(BP')$ будет равна величине угла $\angle AP'C$; здесь символ l в неравенстве означает длину отрезков Bz^* и BP'. Для вычисления этой величины рассмотрим треугольник $AP'B$, в котором $\angle AP'B$ составляет половину $\angle AP'C$. С учетом того, что длина $l(AB)$ стороны AB равна $L^{(1)}$, а длина $l(BP')$ стороны BP' равна $l(Bz^*)$, запишем в виде системы уравнений соотношения (теорема косинусов) для сторон AB и BP':

$$\begin{cases} {L^{(1)}}^2 = l(Bz^*)^2 + l(AP')^2 - 2l(Bz^*)\cdot l(AP')\cdot\cos\frac{\gamma_1^{(1)}(z^*)}{2}, \\ l(AP')^2 = {L^{(1)}}^2 + l(Bz^*)^2 - 2L^{(1)}l(Bz^*)\cdot\cos\frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

из которых выразим величину $\gamma_1^{(1)}(z^*)$.

Выполним доступные вычисления во втором уравнении и подставим значение длины $l(AP')$ в первое уравнение:

$$\begin{aligned} {L^{(1)}}^2 = l(Bz^*)^2 + {L^{(1)}}^2 + l(Bz^*)^2 - {L^{(1)}}^2\cdot l(Bz^*) - \\ -2l(Bz^*)\sqrt{{L^{(1)}}^2 + l(Bz^*)^2 - L^{(1)}}\cdot\cos\frac{\gamma_1^{(1)}(z^*)}{2}. \end{aligned}$$

Приведем подобные и выразим значение $\gamma_1^{(1)}(z^*)$:

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)}(z^*) = 2\arccos\frac{2l(Bz^*) - L^{(1)}}{2\sqrt{{L^{(1)}}^2 + l(Bz^*)^2 - L^{(1)}l(Bz^*)}} = \\ = 2\arccos\frac{2l(Bz^*) - \frac{l}{3}}{2\sqrt{\frac{l^2}{9} + l(Bz^*)^2 - \frac{l}{3}l(Bz^*)}}. \end{aligned}$$

Итоговое выражение для угловой характеристики $\gamma^{(1)}(z^*)$ для множества $M^{(1)}$ выражается соотношением

$$\gamma^{(1)}(z^*) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \text{ при } l(Bz^*) \leqslant \frac{2l}{3}, \\ 2\arccos \frac{2l(Bz^*)-\frac{l}{3}}{2\sqrt{\frac{l^2}{9}+l(Bz^*)^2-\frac{l}{3}l(Bz^*)}} \text{ при } l(Bz^*) > \frac{2l}{3}. \end{cases}$$

На рис. 40 изображен график функции, выражающий зависимость угловой характеристики точек z^* от расстояния до точки B при движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B.

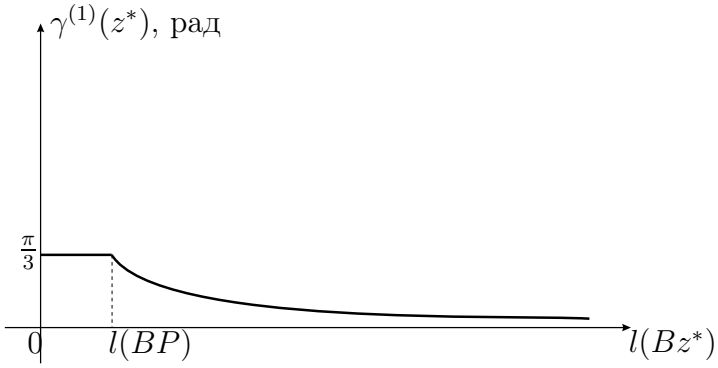

Рисунок 40.

Степень невыпуклости множества $M^{(1)}$ определяется в любой точке отрезка BP и равна $\alpha^{(1)} = \dfrac{\pi}{3}$. Координаты точки P могут быть найдены из уравнения (4.1): $P = (P_x, P_y) = (-\dfrac{l}{3}, \sqrt{3}\dfrac{l}{3})$.

Рассмотрим следующую итерацию формирования снежинки Коха при $n = 2$ (см. рис. 41).

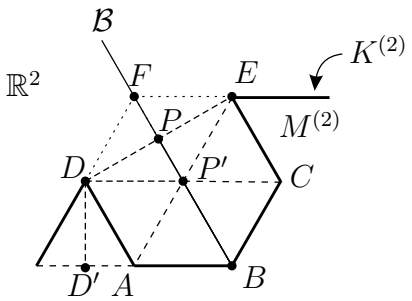

Рисунок 41.

Длина сегмента множества $K^{(2)}$ на данной итерации равна $L^{(2)} = \frac{l}{9}$. На данном этапе длины отрезков AB, BC, DA и CE равны $l(AB) = l(BC) = l(DA) = l(CE) = L^{(2)}$. Степень невыпуклости $\alpha^{(2)}$ достигается также на биссектрисе $\mathcal{B}$ угла ABC. На этом этапе обозначим P точку пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и вымышленного отрезка DE. По ходу движения вдоль биссектрисы $\mathcal{B}$ в направлении от точки B угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ определяется углом между нормалями к отрезкам AB и BC и равна $\gamma_0^{(2)}(z^*) = \frac{\pi}{3}$. Это значение сохраняется до тех пор, пока не достигается точка P', являющаяся центром окружности, описанной вокруг шестиугольника $DABCEF$, в котором стороны DF и FE являются вымышленными и добавлены на рисунок для наглядности рассуждений. Радиус этой окружности равен длине сегмента снежинки Коха $L^{(2)}$. Треугольники $AP'B$, $BP'C$, $CP'E$ и $P'DA$ являются равносторонними и равными друг другу с длиной стороны $a = L^{(2)}$.

При достижении точки P' кратчайшим расстоянием от биссектрисы $\mathcal{B}$ до множества $M^{(2)}$ будут не только нормали к отрезкам AB и BC, но и нормали к отрезкам DA и EC как высоты $h^{(2)} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ при вершине P' обозначенных выше треугольников. Значит, в точке P' угловая характеристика $\gamma_1^{(2)}(z^*) = \pi$ как угол между нормалями к отрезкам DA и EC. По мере дальнейшего продвижения точек вдоль биссектрисы $\mathcal{B}$ в направлении точки P кратчайшими расстояниями от них до $M^{(2)}$ будут нормали только к отрезкам DA и EC, угол между которыми также равен π.

При достижении точек z^* точки P и дальнейшем их движении точек вдоль биссектрисе $\mathcal{B}$, угловая характеристика $\gamma_2^{(2)}(z^*)$ определяется углом $\angle Dz^*E$. Длина $l(BP)$ отрезка BP равна сумма длин отрезков BP' и $P'P$. Длина $l(BP')$ отрезка BP' равна $L^{(2)}$, так как этот отрезок является стороной равностороннего треугольника $AP'B$ с известной длиной стороны $l(AB) = L^{(2)}$. Длина $l(P'P)$ отрезка $P'P$ равна половине длины сегмента $L^{(2)}$ множества $K^{(2)}$, так как отрезок EP является медианой треугольника $FP'E$, а длина $l(P'F)$ отрезка $P'F$ равна $L^{(2)}$. Выражение для угловой характеристики $\gamma_2^{(2)}(z^*)$ при $l(Bz^*) > l(BP)$, где $l(BP) = L^{(2)} + \frac{L^{(2)}}{2} = \frac{l}{6}$ выражается соотноше-

нием

$$\gamma_2^{(2)}(z^*) = 2\arctan\frac{h^{(2)}}{l(Bz^*) - l(BP)} = 2\arctan\frac{\frac{l}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{l(Bz^*) - \frac{l}{6}} =$$

$$= 2\arctan\frac{l\sqrt{3}}{18l(Bz^*) - 3l}.$$

Итоговое выражение для $\gamma^{(2)}(z^*)$ выражается формулой:

$$\gamma^{(2)}(z^*) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \text{ при } l(Bz^*) < l(BP'), \\ \pi \text{ при } l(BP') \leqslant l(Bz^*) < l(BP), \\ = 2\arctan\frac{l\sqrt{3}}{18l(Bz^*)-3l} \text{ при } l(Bz^*) \geqslant l(BP). \end{cases} \tag{4.2}$$

На рис. 42 изображен график функции, выражающий зависимость угловой характеристики точек z^* от расстояния до точки B при движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B при $n = 2$.

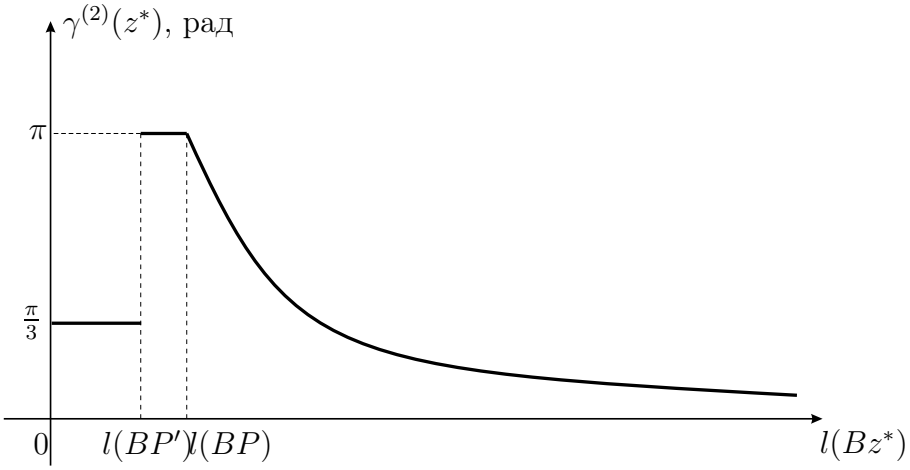

Рисунок 42.

Определим координаты точек P и P'.

Треугольник BCE является тупоугольным, в котором угол $\angle BCE = \frac{2\pi}{3}$. Тогда, по теореме косинусов длина его стороны BE равна

$$l(BE) = \sqrt{l(BC)^2 + l(CE)^2 - 2l(BC)l(CE)\cos(BCE)} =$$

$$= \sqrt{3\frac{l^2}{81}} = \sqrt{3}\cdot\frac{l}{9}.$$

Значит, координаты точки E равны $E = (E_x, E_y) = (0, \sqrt{3} \cdot \frac{l}{9})$.

Длина вымышленного отрезка DB равна длине вымышленного отрезка BE. Точка D' является проекцией точки D на ось абсцисс, то есть отрезок DD' является нормалью к оси абсцисс. Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD'. Длина катета BD' равна

$$l(BD') = \frac{l}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9}.$$

Значит, длина катета DD' равна

$$l(DD') = \sqrt{l(BD)^2 = l(BD')^2} = \frac{l}{9}\sqrt{3 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{9}.$$

Значит, координаты точки D равны $D = (D_x, D_y) = (-\frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cdot \frac{l}{9})$.

Уравнение прямой, которая содержит отрезок DE, может быть получено из координат точек D и E:

$$y(x) = \frac{x + \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{l}{9}} \cdot \left(\sqrt{3}\frac{l}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{9} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \cdot \frac{l}{9}.$$

Абсцисса точки пересечения отрезка DE и биссектрисы $\mathcal{B}$ может быть найдена из равенства

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \cdot \frac{l}{9} = -\sqrt{3}x,$$

откуда

$$P_x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{l}{9}.$$

Ордината точки P может быть найдена из подстановки абсциссы в уравнение прямой (4.1), содержащей биссектрису $\mathcal{B}$:

$$P_y = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l}{9}.$$

То есть координаты точки P равны

$$P = (P_x, P_y) = \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{l}{9}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l}{9} \right).$$

Абсцисса точки P' совпадает с серединой отрезка AB, а ордината может быть получена при подстановке в уравнение прямой, которая содержит биссектрису $\mathcal{B}$. Тогда координаты точки P' определяются выражением

$$P' = (P'_x, P'_y) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{9}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{9} \right).$$

Рассмотрим теперь следующую итерацию снежинки Коха при $n = 3$ (см. рис. 43).

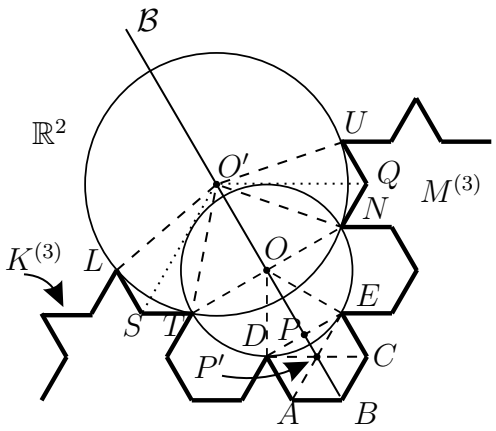

Рисунок 43.

По ходу движения по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B до точки O – точки пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и вымышленного отрезка TN, форма угловой характеристики точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ повторяется со случаем предыдущей итерации при $n = 2$ с отличием лишь в длине сегментов множества $K^{(3)}$, равной на данном этапе $l(AB) = \dfrac{l}{27}$. Значит, при движении в направлении точки P' угловая характеристика точек z^* равна $\gamma_0^{(3)}(z^*) = \dfrac{\pi}{3}$, а по достижении точки P' принимает значение $\gamma_1^{(3)}(z^*) = \pi$ и остается равной данному значению, пока не достигается точка P. Выражение для угловой характеристики точек z^* на интервале $l(BP) \leqslant l(Bz^*) < l(BO)$ выражается соотношением

$$\gamma_2^{(3)}(z^*) = 2 \arctan \frac{l(PE)}{l(Bz^*) - l(BP)} =$$

$$= 2\arctan\frac{L^{(3)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{l(Bz^*) - L^{(3)} + \frac{L^{(3)}}{2}} = 2\arctan\frac{l\sqrt{3}}{54l(Bz^*) - 3l}.$$

Затем угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ уменьшается в соответствии с выражением (4.2), пока не достигается точка O, в которой кратчайшими расстояниями от биссектрисы $\mathcal{B}$ до множества $M^{(3)}$ будут являться четыре отрезка равной длины: OT, OD, OE и ON. Длина каждого из этих отрезков может быть найдена как длина малой диагонали неполного шестиугольника $DABCE$, так как их длина также равна длине вымышленного отрезка DE (стороны равностороннего треугольника DOE). Значит, длина этих отрезков равна $R = \sqrt{3}L^{(3)} = \sqrt{3}\frac{l}{27}$. Угол между отрезками OT и ON равен $\gamma_3^{(3)}(z^*) = \pi$, то есть угловая характеристика точек z^* в точке, соответствующей $l(BO)$, снова принимает значение π.

Получим выражение для угловой характеристики точек z^* при движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении точки O'. Заметим, что длина отрезка ON равна длине отрезка DE, то есть равна R. Выражение для угловой характеристики точек z^* $\gamma_3^{(3)}(z^*)$ при $l(BO) \leqslant$ $\leqslant l(bz^*) < l(BO')$ выражается соотношением:

$$\gamma_3^{(3)}(z^*) = 2\arctan\frac{R}{l(Bz^* - l(BO))} = 2\arctan\frac{\sqrt{3}l}{27l(Bz^*) - 3l}.$$

Значение угловой характеристики точек z^* на данном участке уменьшается по ходу движения, так как это значение определяется углом между отрезками $O'T$ и $O'N$.

В точке O' кратчайшее расстояние от биссектрисы $\mathcal{B}$ до $M^{(3)}$, помимо отрезков $O'T$ и $O'N$, достигается также на отрезках $O'L$ и $O'U$, угол между которыми определяет значение угловой характеристики данной точки. Точка O' является точкой пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и биссектрис углов LST и UQN. Биссектрисы этих углов обозначены пунктирными линиями на рис. 42.

Координаты точки O могут быть найдены с помощью уравнения (4.1): $O = (O_x, O_y) = (-\frac{l}{18}, \sqrt{3}\frac{l}{18})$.

Также из рисунка видно, что угол $LO'U$ меньше, чем π. Точное значение угла может быть определено после получения координат точки O'. Пока лишь можно дать оценку $\gamma_4^{(3)}(l(BO')) < \pi$.

Итоговое выражение для угловой характеристики $\gamma^{(3)}(z^*)$ выражается формулой

$$\gamma^{(3)}(z^*) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \text{ при } l(Bz^*) < l(BP'), \\ \pi \text{ при } l(BP') \leqslant l(Bz^*) < l(BP), \\ 2\arctan(\frac{l\sqrt{3}}{54l(Bz^*)-3l}) \text{ при } l(BP) \leqslant l(Bz^*) < l(BO), \\ 2\arctan(\frac{l\sqrt{3}}{27l(Bz^*)-3l}) \text{ при } l(BO) \leqslant l(Bz^*) < l(BO'), \\ \gamma_4^{(3)}(z^*) \text{ при } l(Bz^*) \geqslant l(BO'). \end{cases}$$

На рис. 44 изображен график функции, выражающий зависимость угловой характеристики точек z^* от расстояния до точки B при движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B при $n = 3$.

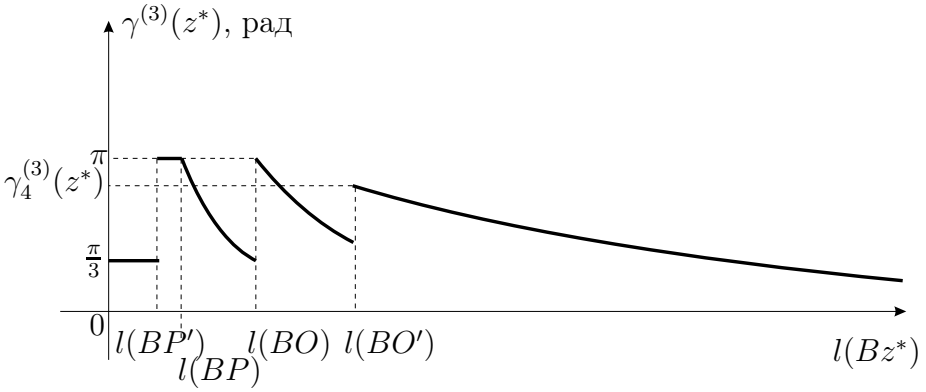

Рисунок 44.

Рассмотрим теперь следующую итерацию снежинки Коха при $n = 4$ (см. рис. 45).

По ходу движения вдоль биссектрисы $\mathcal{B}$ в направлении точки O форма угловой характеристики точек z^* повторяет вид для предыдущей итерации снежинки Коха $n = 3$, пока не достигнется точка O. При движении от точки O до точки P — точки пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и вымышленного отрезка CC' угловая характеристика $\gamma_4^{(4)}(z^*)$ точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ уменьшается, а по достижении самой точки P принимает значение $\gamma_5^{(4)}(z^*) = \pi$. Далее угловая характеристика точек z^* снова уменьшается, а по достижении точки Q – точки пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и биссектрис углов D и D' принимает значение $\gamma_6^{(4)}(z^*) < \pi$. По ходу дальнейшего движения вдоль

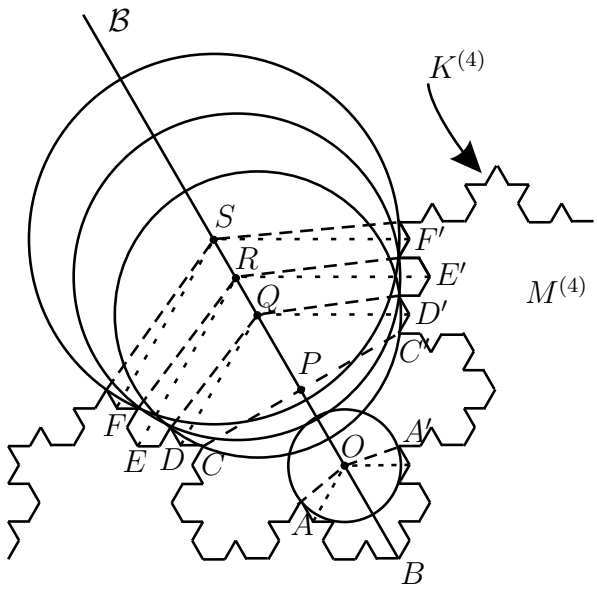

Рисунок 45.

биссектрисы $\mathcal{B}$ угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ снова уменьшается, пока не достигнется точка R — точка пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и биссектрис углов E и E', в которой ее значение изменяется на $\gamma_7^{(4)}(z^*) < \pi$. По ходу дальнейшего движения вдоль биссектрисы $\mathcal{B}$ угловая характеристика точек z^* снова уменьшается, пока не достигнется точка S – точка пересечения биссектрисы $\mathcal{B}$ и биссектрис углов F и F', в которой ее значение равно $\gamma_8^{(4)}(z^*) < \pi$. Значения угловой характеристики точек z^* в точках Q, R и S меньше значения угловой характеристики точек z^* в точке O и в то же время равны между собой, так как углы F, E и D одинаково ориентированы, и углы F', E' и D' так же одинаково ориентированы.

На рис. 46 изображен график функции, выражающий зависимость угловой характеристики точек z^* от расстояния до точки B при движении по биссектрисе $\mathcal{B}$ в направлении от точки B при $n = 4$.

Рассмотрим теперь следующую итерацию снежинки Коха при $n = 5$ (см. рис. 47).

Областью z обозначен фрагмент множества $M^{(5)}$, для которого рассуждения об угловой характеристике аналогичны рассуждениям для случая $n = 4$ с разницей в абсолютной величине одного сегмента снежники Коха, равного в данном случае $L^{(5)} = \frac{l}{243}$.

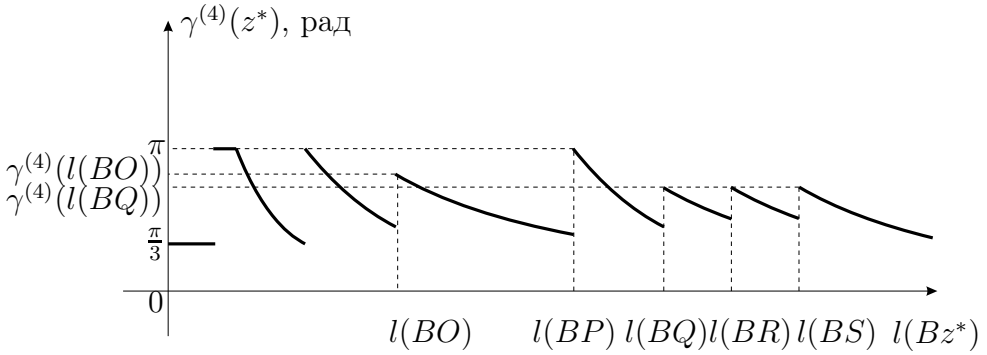

Рисунок 46.

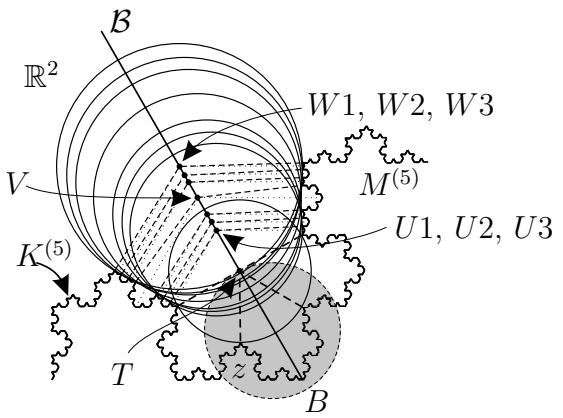

Рисунок 47.

При достижении точки T угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ принимает значение $\gamma_9^{(5)}(z^*) = \pi$. По мере дальнейшего движения угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ уменьшается до тех пор, пока не достигнется точка U_1, в которой угловая характеристика точек z^* принимает значение $\gamma_{10}^{(5)}(z^*) < \pi$. Характер изменения значения угловой характеристики точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ по мере продвижения от точки U_1 до точки U_3 аналогичен тому, который наблюдается в случае продвижения от точки Q до точки S при $n = 4$. Значит, $\gamma_{10}^{(5)}(z^*) = \gamma_{11}^{(5)}(z^*) = \gamma_{12}^{(5)}(z^*)$. Далее, при достижении точки V угловая характеристика точек z^* изменяется на величину $\gamma_{13}^{(5)}(z^*) < \pi$, причем $\gamma_{13}^{(5)}(z^*) > \gamma_{10}^{(5)}(z^*)$. По мере дальнейшего продвижения угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ уменьшается до тех пор, пока не достигнется точка W_1, в которой угловая характеристика точек z^* изменяется на величину $\gamma_{14}^{(5)}(z^*) < \pi$. Характер

изменения значения угловой характеристики точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ по мере продвижения от точки W_1 до точки W_3 аналогичен тому, который наблюдается в случае продвижения от точки U_1 до точки U_3. При дальнейшем продвижении от точки W_3 угловая характеристика точек z^* биссектрисы $\mathcal{B}$ уменьшается.

В таблице 1 приведены значения степени невыпуклости α для различных итераций снежинки Коха.

Таблица 1.

Номер итерации n	Степень невыпуклости α, рад
0	0
1	$\frac{\pi}{3}$
2	π
3	π
4	π
5	π

5. Об отделимости a^*-множеств в конечномерных евклидовых пространствах

В этом параграфе рассматриваются замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Распространены некоторые базовые понятия и утверждения из выпуклого анализа на α^*-множества в $\mathbb{R}^n$.

В частности, рассматриваются вопросы об отделимости α^*-множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$, а также задачи, смыкающиеся с тематикой об отделимости α^*-множеств в $\mathbb{R}^n$.

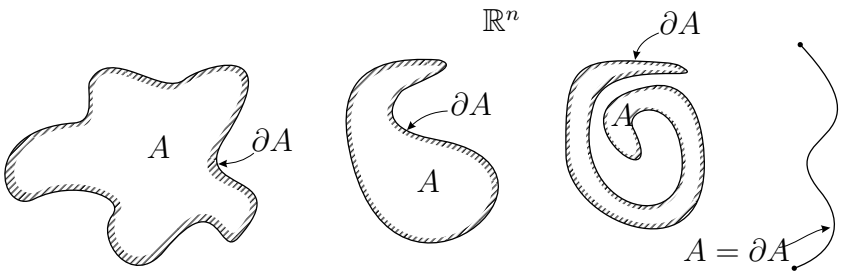

Рисунок 48.

Число $\alpha^* = \alpha^*_A \in [0, 2\pi]$ характеризует степень вогнутости границы ∂A замкнутого множества A в $\mathbb{R}^n$ по отношению к его дополнению $\mathbb{R}^n \backslash A$ (см. рис. 48).

В то же время выпуклые множества A, изображенные на рис. 49, обладают невогнутой по отношению к $\mathbb{R}^n \backslash A$ границей ∂A.

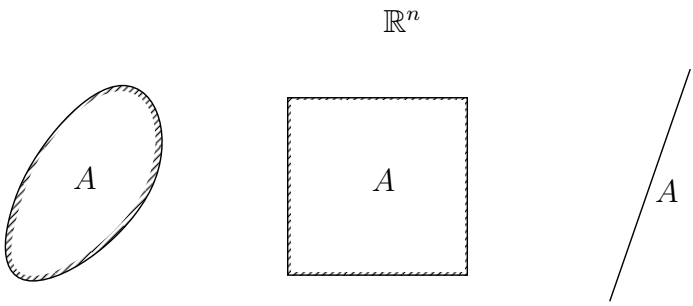

Рисунок 49.

Приведем некоторые определения.

Определение 5.1. *Обозначим через $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha$ совокупность всех замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^n$ соответственно с числом $\alpha^*_A = \alpha$ и $\alpha^*_A \leqslant \alpha$, где $\alpha \in [0, 2\pi)$.*

Очевидно, что $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ и $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in [0,\alpha]} \mathcal{A}_\beta$.

Пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Определение 5.2. *α-гиперплоскостью Γ в $\mathbb{R}^n$ назовем такой гомеоморфный образ гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, что:*

1. $\Gamma \in \mathcal{A}_\alpha$;

2. Γ разбивает $\mathbb{R}^n$ на два замкнутых множества в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфных замкнутому полупространству в $\mathbb{R}^n$.

При этом слово «разбивает» мы не понимаем в этом определении буквально: эти множества имеют непустое пересечение в $\mathbb{R}^n$.

Замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ из определения 5.2 обозначим через Φ^- и Φ^+. Согласно определению 5.2, эти множества есть элементы из $\mathcal{B}_\alpha$, и хотя бы одно из них — элемент совокупности $\mathcal{A}_\alpha$: $\max\{\alpha^*_{\Phi^-}, \alpha^*_{\Phi^+}\} = \alpha$.

$\Phi^-(\Phi^+)$ назовем α^*-полупространством в $\mathbb{R}^n$, если $\Phi^- \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$ ($\Phi^+ \in \in \mathcal{A}^*_\alpha$). Тогда, если $\Phi^- \in \mathcal{B}_{\alpha^*} \backslash \mathcal{A}_{\alpha^*}$ ($\Phi^+ \in \mathcal{B}_{\alpha^*} \backslash \mathcal{A}_{\alpha^*}$), то $\Phi^- \in \mathcal{A}_{\beta^*}$ ($\Phi^+ \in \mathcal{A}_{\beta^*}$) при некотором $\beta^* \in [0, \alpha^*)$.

В случае, если Γ, Φ^-, Φ^+ таковы, что Γ, $\partial\Phi^-, \partial\Phi^+$ содержат точку $z^* \in \mathbb{R}^n$, будем иногда пользоваться обозначениями $\Gamma(z^*)$, $\Phi^-(z^*)$,

$\Phi^+(z^*)$.

Также в случаях, когда ясно, что речь идет об α^*-полупространствах Φ^-, Φ^+ в $\mathbb{R}^n$, будем иногда называть их полупространствами в $\mathbb{R}^n$.

Определение 5.3. *α^*-гиперплоскость $\Gamma(z^*)$ в $\mathbb{R}^n$ назовем опорной к $A \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$ в точке $z^* \in \partial A$, если A содержится в одном из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, соответствующих α^*-гиперплоскости $\Gamma(z^*)$.*

То из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, которое содержит A, назовем опорным к A в точке $z^* \in \partial A$.

Определение 5.4. *Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ α^*-отделимы ($\mathcal{B}_{\alpha^*}$-отделимы), если $\exists$ такая α^*-гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$) в $\mathbb{R}^n$, что $A \subset \Phi^-$, $B \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, соответствующие α^*-гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$).*

Определение 5.5. *Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ сильно α^*-отделимы (сильно $\mathcal{B}_{\alpha^*}$-отделимы), если $\exists$ такая α^*-гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$) в $\mathbb{R}^n$ и $\rho \in (0, \infty)$, что $A_\rho \subset \Phi^-$, $B_\rho \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, соответствующие α^*-гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$).*

Выскажем следующее предположение, которое с некоторым изменением повторяет гипотезу из работы [4], стр. 287. Однако авторы этой статьи считают это изменение существенным.

Гипотеза 1. Пусть A и B из $\mathbb{R}^n$ — элементы $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, $\alpha^* \in [0, 2\pi)$ такие, что $\rho(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} \|a - b\| \geqslant \gamma > 0$. Тогда существует гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$, сильно разделяющая A и B.

Проиллюстрируем гипотезу 1 на некоторой паре компактов A и B из $\mathcal{A}_{\alpha^*}$, $\alpha^* = \dfrac{\pi}{2}$ из $\mathbb{R}^2$.

А именно, рассмотрим невыпуклые замкнутые прямоугольники A и B в $\mathbb{R}^2$ (удовлетворяющие $\alpha_A^* = \alpha_B^* = \dfrac{\pi}{2}$) такие, что $\rho(A, B) \geqslant \gamma$, где γ — заданное положительное число (см. рис. 50).

На рис. 50 показано, что прямоугольники A и B в $\mathbb{R}^2$ сильно $\dfrac{\pi}{2}$-разделяются $\dfrac{\pi}{2}$-гиперплоскостью Γ.

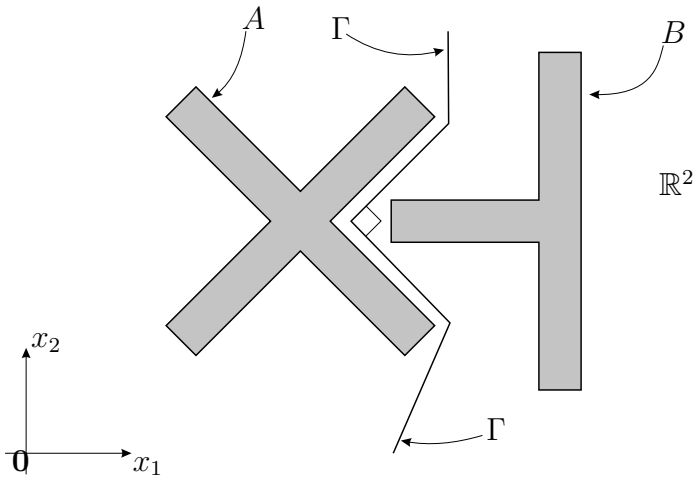

Рисунок 50.

Рассмотрим другой пример в пространстве $\mathbb{R}^2$, изменив слегка первый пример.

А именно, рассмотрим невыпуклые замкнутые прямоугольники A и B в $\mathbb{R}^2$ (A и B содержатся в $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, $\alpha^* = \pi$), где A — тот же самый $\frac{\pi}{2}$-многоугольник в $\mathbb{R}^2$, в B — прежний $\frac{\pi}{2}$-многоугольник с добавленным к нему снизу выпуклым прямоугольником, расположенным горизонтально в $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 51).

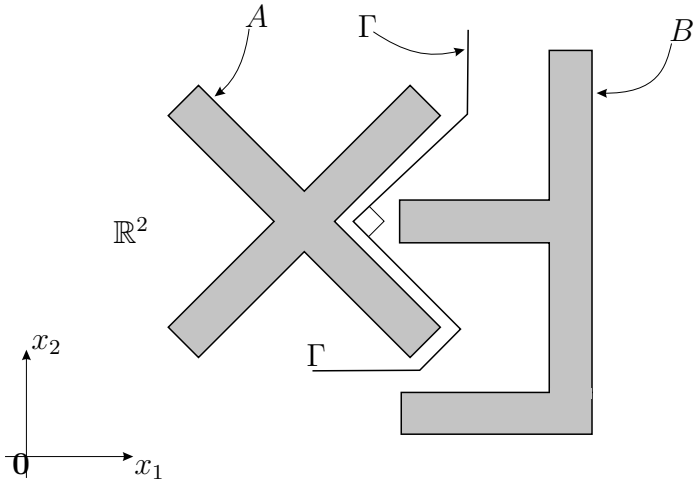

Рисунок 51.

В этом примере имеем $A \in \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}$, $B \in \mathcal{A}_\pi$, так что A и B — элементы совокупности $\mathcal{B}_\pi$.

Очевидно, что в этом примере многоугольники A и B сильно не разделить некоторой гиперплоскостью $\Gamma \in \mathcal{A}_{\frac{\pi}{2}}$, но, как видим, существует гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$, $\alpha^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, сильно разделяющая A и B. Это утверждение лишь подтверждает в частном случае гипотезу 1.

На рис. 52 изображены не пересекающиеся компакты A и B в $\mathbb{R}^2$ со значениями $\alpha_A^* = \alpha_B^*$ близкими к 2π. На этом же рис. 52 также изображена α_Γ^*-гиперплоскость ($\alpha_\Gamma^* = \alpha_A^*$), сильно разделяющая A и B.

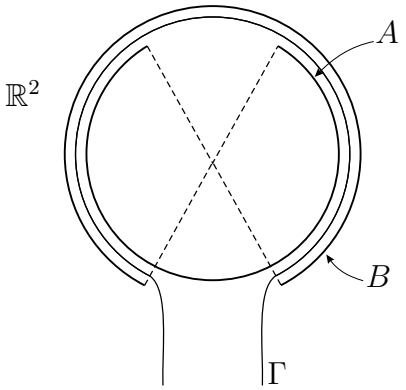

Рисунок 52.

С гипотезой 1 тесно связана следующая задача об отделимости α^* компактов A и B в $\mathbb{R}^n$, стесненных ограничением — компактом в $\mathbb{R}^n$.

Задача 1. Пусть A и B — компакты в $\mathbb{R}^n$ — элементы совокупности $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, $\alpha^* \in [0, 2\pi)$ такие, что $\rho(A, B) \geqslant \gamma > 0$, $A \bigcup B \subset \mathbb{Y}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий $\mathbb{Y} \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$.

Требуется выделить в $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ такую, что множество $\Gamma \bigcap \mathbb{C}$ сильно разделяет A и B, то есть при некотором $\rho > 0$ $A_\rho \subset \Phi^- \bigcap \mathbb{Y}$, $B_\rho \subset \Phi^+ \bigcap \mathbb{Y}$, где Φ^- и Φ^+ — замкнутые полупространства в $\mathbb{R}^n$, соответствующие гиперплоскости Γ (см. рис. 53).

В связи с задачей 1 выскажем следующее предположение

Гипотеза 2. Пусть компакты A и B в $\mathbb{R}^n$ — элементы совокупности $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, $\alpha^* \in [0, 2\pi)$ такие, что $\rho(A, B) \geqslant \gamma > 0$ и $A \bigcup B \subset \mathbb{Y}$, где компакт $\mathbb{Y} \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$. Тогда найдется гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ такая, что $\Gamma \bigcap \mathbb{Y}$ сильно разделяет A и B.

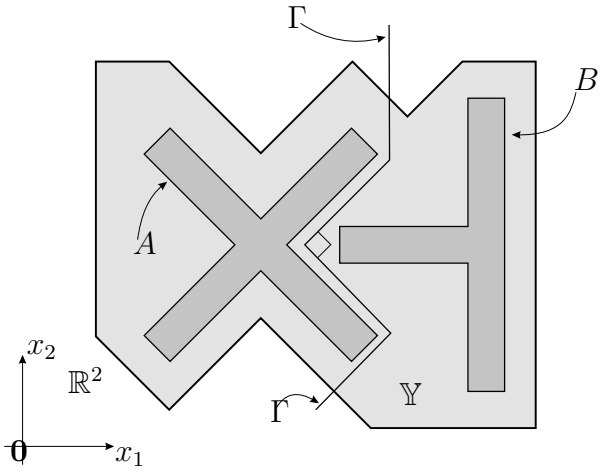

Рисунок 53.

С задачей 1 об отделимости множеств A и B при наличии на них ограничения связана следующая задача на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую мы называем (дизайнерской) задачей о прокладке трасс.

Задача 2. В задаче 1 рассмотрим компакты A и B в $\mathbb{R}^2$ — элементы совокупности $\mathcal{B}_{\alpha^*}$, $\alpha^* = \dfrac{\pi}{2}$ такие, что $\rho(A, B) \geqslant \gamma > 0$, где γ — некоторое малое число и $A \bigcup B \subset \mathbb{Y}$, где $\mathbb{Y} \in \mathcal{A}_{\alpha^*}$. Также выбраны в $\partial\mathbb{Y}$ точки y_* и y^*.

При заданных в задаче 1 условиях сформулируем два варианта требований, которые предъявим к трассе Γ, сильно разделяющей A и B.

Вариант 1. Требуется построить ломаную линию, соединяющую точки y_* и y^* и сильно разделяющую множества A и B (см. рис. 54).

Следующий вариант 2 предъявляет более жесткие требования к ломаной Γ, чем вариант 1.

Вариант 2. Требуется построить ломаную $\Gamma \subset \mathbb{Y}$, $\Gamma \in \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2}}$, соединяющую точки y_* и y^*, сильно разделяющую компакты A_ρ и B_ρ ($\rho > 0$ — некоторое заданное малое число) и имеющую не более m узловых точек (точек излома линии Γ) (см. рис. 55).

Очевидно, что, наряду с вариантами 1, 2 в задаче 1, можно сформулировать бесчисленное множество других вариантов требований к прокладке трасс, в которых размерность рассматриваемого евклидова пространства не два, а более, например, — три. Ясно, что увеличение размерности рассматриваемого пространства $\mathbb{R}^n$ существенно

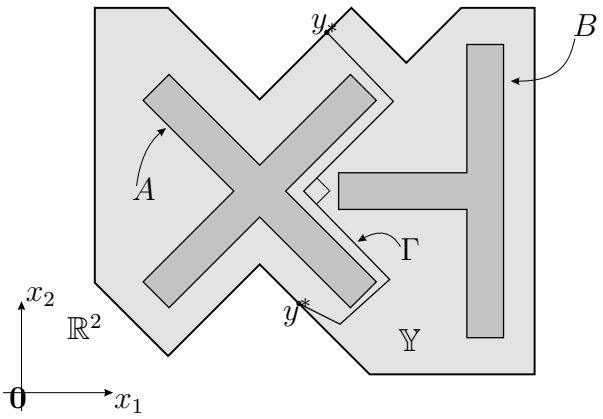

Рисунок 54.

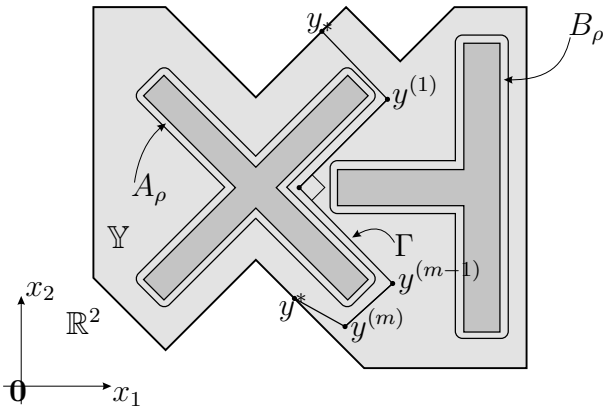

Рисунок 55.

усложнит решение задачи. тем не менее представляется, что такие задачи реальны.

На этом завершим краткое обсуждение важной проблематики, касающейся отделимости α^*-множеств в конечномерных евклидовых пространствах. Связь этой проблематики с теоремами об отделимости выпуклых множеств в пространствах $\mathbb{R}^n$ и ее значимость в приложениях не вызывает, на наш взгляд, сомнений.

В заключение сформулируем несколько дополнительных задач, имеющих отношение к α^*-множествам в конечномерных евклидовых пространствах.

Задачи

При формулировке задач для их простоты подразумевается, что

все множества, участвующие в формулировке, односвязные.

1. Изучить, каково соотношение между числами α^*_A, α^*_B и $\alpha^*_{A\cap B}$, $\alpha^*_{A\cup B}$. Особый интерес представляет ситуация, когда B — выпуклое множество в соответствующем евклидовом пространстве.

Также представляют интерес ситуации, при которых $\alpha^*_{A\cap B} \leqslant$ $\leqslant \max\{\alpha^*_A, \alpha^*_B\}$, $\alpha^*_{A\cup B} \leqslant \max\{\alpha^*_A, \alpha^*_B\}$.

2. Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r) = \{b \in \mathbb{R}^n : \|b\| \leqslant r\}$ таковы, что $\mathbb{C} = A \overset{*}{-} \mathbb{B}(\mathbf{0}; r) \neq \varnothing$. Изучить вопрос, касающийся связи чисел α^*_A и $\alpha^*_{\mathbb{C}}$.

3. Пусть $\mathbb{L}$ — спрямляемая кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$ и $h(x)$, $x \in$ $\in \mathbb{L}$ — скалярная функция. Полагаем $\varphi(\mathbb{L}) = \{(x, h(x)) : x \in \mathbb{L}\}$ — спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^3$. Изучить вопросы, связанные с $\alpha^*_{\varphi(\mathbb{L})}$.

4. Пусть $\mathbb{L}$ — спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, — ломаная, состоящая из конечного числа звеньев. Изучить вопросы, связанные с $\alpha^*_{\mathbb{L}}$ в случаях, когда

4^a. Кривая $\mathbb{L} = gr\varphi(\cdot)$, где $[a, b] \ni x_1 \mapsto \varphi(x_1) \in \mathbb{R}^n$, $-\infty < a < b <$ $< +\infty$;

4^b. Как связаны числа $\alpha^*_{\mathbb{L}}$ и $\alpha^*_{\gamma\mathbb{L}}$, где $\gamma \in (0, 1)$?

Замечание к вопросам 3, 4. Очевидно, что в этих вопросах должна быть дополнительная информация о структуре кривых $\mathbb{L}$ в конечномерных евклидовых пространствах.

5. Рассматриваем всевозможные кривые $\mathbb{L}$ в шаре $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие $\alpha^*_{\mathbb{L}} \leqslant \alpha^* \in [0, 2\pi)$. Какова кривая $\mathbb{L}^0$ из этой совокупности, имеющая наибольшую длину?

Например, представим частный случай задачи 5.

Рассмотрим всевозможные кривые $\mathbb{L}$ в круге $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие $\alpha^*_{\mathbb{L}} \leqslant \alpha^* = \dfrac{\pi}{2}$.

Какова кривая $\mathbb{L}^0$ в этой совокупности, имеющая наибольшую длину?

5^a. Рассматриваем всевозможные ломаные $\mathbb{L}$ в шаре $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^n$ с m узлами, удовлетворяющие $\alpha^*_{\mathbb{L}} \leqslant \alpha^* \in [0, 2\pi)$.

Какова ломаная $\mathbb{L}^0$ из этой совокупности, имеющая наибольшую длину?

5^b. Рассмотрим всевозможные кривые $\mathbb{L}$ в шаре $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r) \subset \mathbb{R}^n$ одинаковой длины l, удовлетворяющие $\alpha^*_{\mathbb{L}} \leqslant \alpha^* \in [0, 2\pi)$. (Длина l этих кривых позволяет им содержаться в шаре $\mathbb{B}(\mathbf{0}; r)$.)

Для каждой кривой $\mathbb{L}$ вычисляем хаусдорфово отклонение $h(\mathbb{B}(\mathbf{0};r),\mathbb{L})$ шара $\mathbb{B}(\mathbf{0};r)$ от нее.

Требуется в этой совокупности $\mathbb{L}$ выделить кривую $\mathbb{L}^0$, удовлетворяющую

$$h(\mathbb{B}(\mathbf{0};r),\mathbb{L}^0)=\min_{\mathbb{L}} h(\mathbb{B}(\mathbf{0};r),\mathbb{L}).$$

6. Пусть задано дифференцируемое отображение $y=F(x):\mathbb{R}^n\mapsto$ $\mapsto\mathbb{R}^n$.

Полагаем $X\in comp(\mathbb{R}^n)$ и $X=cl\,intX\neq\varnothing$, $Y=F(X)=\{y=$ $=f(x):x\in X\}\in comp(\mathbb{R}^n)$ и $Y=cl\,intY\neq\varnothing$.

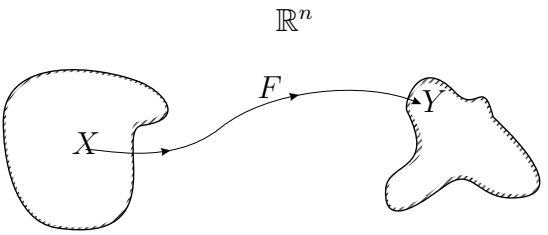

Рисунок 56.

6^a. Пусть X_0 — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Спрашивается, каковы условия на отображение F, при которых $\alpha^*_{X_0}<\alpha^*_{X_1}$ (здесь $X_1=$ $=F(X_0)$); при которых $\alpha^*_{X_0}=\alpha^*_{X_1}$;

6^b. Пусть $X_0\in comp(\mathbb{R}^n)$ и последовательность $\{X_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ определяется равенством $X_{k+1}=F(X_k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Каковы условия на X_0 и отображение $F:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$,
при которых $\alpha^*_{X_k}<\alpha^*_{X_{k+1}}$, $k\in\mathbb{N}$;
при которых $\alpha^*_{X_k}\geqslant\alpha^*_{X_{k+1}}$, $k\in\mathbb{N}$;
при которых $\{\alpha^*_{X_k}\}\downarrow 0$.

7. Пусть задано отображение $F:X\in comp(\mathbb{R}^n)\mapsto Y\in comp(\mathbb{R}^n)$. Спрашивается, каковы условия на множество X и отображение F, при которых $\alpha^*_X<\alpha^*_Y$ и при которых $\alpha^*_X\geqslant\alpha^*_Y$.

В частности, в этом вопросе представляет интерес случай, когда $X\in comp(\mathbb{R}^n)$ невыпуклое множество, то есть $\alpha^*_X>0$, $F=A\cdot X+U$ и $\alpha^*_Y=0$; здесь $U\in comp(\mathbb{R}^n)$.

6. Заключение

В работе изучаются вопросы, относящиеся к геометрии и топологии невыпуклых множеств в конечномерных евклидовых простран-

ствах. Потребность в изучении свойств невыпуклых множеств, прежде всего их геометрии, возникла при исследовании и конструировании множеств достижимости нелинейных управляемых систем в конечномерных евклидовых пространствах. Эти множества, как правило, невыпуклы. Достаточно давно возник вполне естественный вопрос об изменении некоторых топологических характеристик невыпуклых множеств достижимости управляемых систем в связи с изменением момента времени, которому эти множества отвечали.

Работа дополняет исследования [4, 5], посвященные α-выпуклым множествам в пространстве $\mathbb{R}^n$. Эти дополнения весьма существенны, поскольку уточняют классификацию невыпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ в тех случаях, когда эти множества достаточно «сильно» изогнуты. Это уточнение, выраженное в понятии α^*-множеств в $\mathbb{R}^n$, существенно расширяет тематику и, в частности, круг задач, относящихся к невыпуклым множествам. Это относится, например, к задаче об отделимости α^*-множеств в $\mathbb{R}^n$, которая становится гораздо более значимой и привлекательной для всевозможных таких приложений, как задачи прокладки маршрутов и разделительных линий, удовлетворяющих определенным условиям. Задачи об отделимости α^*-выпуклых множеств вывели авторов работы на такое важное в геометрии и ее приложениях понятие, как эквидистанта двух множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь, по-видимому, уместно напомнить о конвенции ООН по морскому праву, 1982 г., в которой объявляется, что граница территориальных вод двух государств проходит по эквидистанте территорий этих государств.

В работе также уделено внимание задачам, имеющим топологическую окраску. Достоинство этих задач в том, что они просты по постановке и допускают ясную, наглядную интерпретацию.

В заключительной части работы сформулировано несколько задач, которые, как надеются ее авторы, вызовут определенный интерес у лиц, специализирующихся в области геометрии и топологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы.* Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Успенский А.А., Лебедев П.Д. *Условия трансверсальности вет-*

вей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.

3. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. *α-множества и их свойства*. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. Деп. в ВИНИТИ, 2004.
4. Ушаков В.Н., Успенский А.А. *Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 277–291.
5. Ушаков В.Н., Успенский А.А. *α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120.

α^*-SETS IN FINITE-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES AND THEIR PROPERTIES

Vladimir N. Ushakov, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Dr.Sc., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (ushak@imm.uran.ru),
Oleg A. Kuvshinov, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS (okuvshinov@inbox.ru).

Abstract: The concept of α^*-sets in finite-dimensional Euclidean space is given, which is a generalization of the concept of α-sets and convex sets in finite-dimensional Euclidean space. This concept arose in connection with the study of nonconvex reachability sets of some nonlinear controlled systems in a finite-dimensional Euclidean space. The paper examines the concept of α^*-sets as applied to some sets in finite-dimensional Euclidean space and in particular to fractals in the space $\mathbb{R}^2$. The issues related to the topic of α^*-separability of nonconvex sets in finite-dimensional Euclidean spaces are considered.

Keywords: convex set in $\mathbb{R}^n$, convex hull in $\mathbb{R}^n$, α-set in $\mathbb{R}^n$, α^*-set in $\mathbb{R}^n$, α^*-hyperplane in $\mathbb{R}^n$, α^*-separability.