Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.1, с. 115–137

УДК 519.21
ББК 22.171

ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ НЕТРАНЗИТИВНЫХ НАБОРАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПАРАМЕТРОМ

Александра Н. Якушева
МГУ имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
119991, Москва, Ленинские горы, 1
e-mail: alexandra.yakusheva.msu@gmail.com

Рассматриваются произведения дискретных случайных величин, образующих нетранзитивные наборы костей с равными средними и дисперсиями, и независимых непрерывных случайных величин, распределённых по законам Вейбулла или Парето. Показано, что функции, характеризующие отношение стохастического предшествования, с ростом параметра распределения асимптотически стремятся к значениям, соответствующим дискретной модели. Определены критические значения параметров, начиная с которых нетранзитивность устойчиво восстанавливается у всех наборов. Выявлено парадоксальное немонотонное поведение: у части наборов при малых значениях параметра нетранзитивность восстанавливается временно, при дальнейшем росте параметра исчезает и возникает вновь, иногда неоднократно, а также с изменением порядка обхода. Рассмотрены различные вариации данного эффекта.

Ключевые слова: нетранзитивность, нетранзитивные наборы, стохастическое предшествование, нетранзитивные кости, случайные величины.

Поступила в редакцию: 25.06.2025 *После доработки*: 21.11.2025 *Принята к публикации*: 26.12.2025

©2026 А.Н. Якушева

1. Введение

Настоящая работа посвящена анализу свойств некоторых нетранзитивных наборов случайных величин с параметром. Набор из трёх объектов A, B, C называется нетранзитивным, если отношение превосходства объектов на нём нетранзитивно, то есть выполняется циклический порядок $A \succ B$, $B \succ C$ и $C \succ A$.

Такое возможно, например, если объекты нельзя упорядочить в целом с помощью их числовых характеристик, но можно задать некое правило, согласно которому в любой паре превосходство или равенство объектов будет строго определено. Классической моделью таких отношений является игра «Камень, ножницы, бумага»: камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, а бумага побеждает камень.

Нетранзитивность широко распространена в экономических, социальных и биологических моделях, с её проявлениями в различных аспектах можно ознакомиться в подробном обзоре [6].

В данной работе отношение превосходства подразумевается в вероятностном смысле. А именно, для построения данного отношения рассматривается *отношение стохастического предшествования* (stochastic precedence) независимых случайных величин A и B:

$$A \succ B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}(A > B) > \mathbf{P}(A < B) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(A - B) > 0.$$

Данное отношение было введено под таким названием в статье [9], но фактически рассматривалось и ранее, со времён работы [16].

Тема нетранзитивности отношения стохастического предшествования получила известность на примере нетранзитивных костей. Имеются в виду кости (игральные кубики), на грани которых нанесены числа (обычно целые). Первый игрок выбирает одну кость из набора, затем второй игрок выбирает одну из оставшихся. Далее они бросают свои кости и побеждает тот, у кого выпало большее число. В общем случае кости могут иметь не обязательно шесть, а произвольное число $n \geq 3$ абстрактных граней (в том смысле, что на них нанесены числа и любая из них выпадает равновероятно). Далее для простоты будем часто отождествлять кости и соответствующие им дискретные случайные величины, описывающие результаты бросания костей.

Первый нетранзитивный набор костей был предложен американским математиком Брэдли Эфроном в 1960-е годы (кубики Эфрона) и популяризован Мартином Гарднером в [13, 14]. Набор Эфрона состоял из четырёх игральных костей:

- кость A с числами на гранях: 4, 4, 4, 4, 0, 0;
- кость B с числами на гранях: 3, 3, 3, 3, 3, 3;
- кость C с числами на гранях: 6, 6, 2, 2, 2, 2;
- кость D с числами на гранях: 5, 5, 5, 1, 1, 1.

Числа на гранях нанесены так, что результат броска каждой кости из набора больше результата броска следующей с одинаковой вероятностью:

$$\mathbf{P}(A > B) = \mathbf{P}(B > C) = \mathbf{P}(C > D) = \mathbf{P}(D > A) = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, при любом выборе первого игрока, второй игрок может выбрать свою кость так, чтобы обеспечить себе выигрыш с вероятностью $2/3$.

Таким образом, с игровой точки зрения не существует наиболее «сильной» или «слабой» кости в данном наборе, несмотря на то, что кости можно ранжировать по величине математического ожидания чисел, выпадающих на гранях:

$$\mathbf{E}A = \frac{8}{3}, \qquad \mathbf{E}B = \mathbf{E}D = 3, \qquad \mathbf{E}C = \frac{10}{3}.$$

Однако большой интерес представляют нетранзитивные структуры, в которых и математические ожидания, и дисперсии случайных величин равны, и их нельзя упорядочить по этим характеристикам, как это делается традиционно. Например, в теории массового обслуживания среднее время ожидания заявки в очереди в системе $M|G|1$ определяется как средним временем обслуживания, так и его дисперсией (при известной загрузке) [2, §4.2]. Если в двух системах средние времена ожидания различны, то их можно упорядочить по этому показателю (лучше та система, в которой это среднее меньше). Если же средние одинаковы, то системы можно сравнивать, в том числе, с помощью отношения стохастического предшествования, и при этом возникает нетранзитивность. Подобным вопросам посвящена работа [3].

В финансах и страховании [1, 7] различные риски и инструменты часто оцениваются по среднему и дисперсии случайных доходностей (или убытков). Если же эти характеристики равны, можно использовать отношение стохастического предшествования, что также может вести к нетранзитивности.

Известны различные модификации набора Эфрона, в которых математические ожидания результата броска каждой кости равны. В работе [12] показано, что даже при ограничении на равенство математических ожиданий (фиксированной сумме чисел на гранях) можно построить нетранзитивные циклы из n-гранных костей.

Первый параметрический нетранзитивный триплет случайных величин с равными средними и дисперсиями был построен Станиславом Трыбулой [16]. Триплет X, Y, Z определялся следующим образом:

$$X = \begin{cases} -a, & \text{с вероятностью } 1-t \\ 1, & \text{с вероятностью } t \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{с вероятностью } t \\ a, & \text{с вероятностью } 1-t \end{cases},$$

$$Z = \begin{cases} -ab, & \text{с вероятностью } \varepsilon \\ 0, & \text{с вероятностью } 1-2\varepsilon \\ ab, & \text{с вероятностью } \varepsilon \end{cases},$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < t = \frac{2\varepsilon - 1 + \sqrt{4\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 5}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a = \frac{t}{1-t} > 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} > 1,$$

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}Z = 0,$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = \mathbf{D}Z = a.$$

Для этого триплета

$$\mathbf{P}(X > Y) = \mathbf{P}(Y > Z) = \mathbf{P}(Z > X) = t^2 < \frac{1}{2},$$

что означает нетранзитивность вида $X \prec Y \prec Z \prec X$ на заданном

интервале значений параметра ε. Отметим, что недавно в [3] верхняя граница параметра ε была повышена с приведённого в [16] значения $(\sqrt{2}-1)/2 \approx 0{,}207\ldots$ до $0,264\ldots$.

В работе [8] были построены все возможные нетранзитивные наборы из трёх и четырёх костей с одинаковым числом граней n (то есть целочисленных случайных величин, принимающих значения с равными или кратными $1/n$ вероятностями) с равными средними и дисперсиями. Средние и дисперсии полагались равными соответствующим характеристикам для стандартных костей, на грани которых нанесены числа $1, 2, \ldots, n$, где n — число граней. Задача была решена при n от 6 до 10, некоторые наборы с равными средними были известны ранее, но с условиями на равенство дисперсий были рассмотрены впервые.

В последние годы интерес в изучении нетранзитивности заметно сместился и в сторону непрерывных случайных величин. В [4] получены критерии, с помощью которых доказано, что для многих классов непрерывных распределений (равномерного, экспоненциального, нормального) нетранзитивные отношения стохастического предшествования невозможны, в [5] рассмотрены нетранзитивные наборы смесей некоторых непрерывных распределений, а в [15] показано, что нетранзитивные циклы возможны для распределений, заданных многочленами степени ≥ 4 на отрезке $[0, 1]$.

Следует отметить, что ещё в работе С. Трыбулы [16] нетранзитивный парадокс был сформулирован на примере из теории прочности, то есть в непрерывном случае. Пусть в лаборатории сравнивают попарно на прочность железные бруски одинакового размера и формы. Предположим, что бруски производятся на трёх разных заводах (которые дают разное распределение прочности) и сравниваются бруски с первого и второго, второго и третьего, первого и третьего заводов. Тогда теоретически может сложиться парадоксальная ситуация, что бруски с первого завода «хуже» брусков со второго завода (т.е. оказываются чаще менее прочными), бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого. В недавней работе [11] подобное явление было обнаружено на реальных данных в масштабном клиническом исследовании при сравнении продолжительности жизни в нескольких группах пациентов.

В данной работе проведено обобщение модели костей [8] путём умножения соответствующих дискретных случайных величин на непрерывные из некоторых параметрических семейств. Целью работы являлось исследование условий, при которых исходная нетранзитивность наборов из [8] восстанавливается, и описание некоторых эффектов, возникающих при этом преобразовании.

С теоретико-игровой точки зрения речь идёт о следующей игре. Пусть имеется набор костей. Первый игрок выбирает одну кость из набора, затем второй игрок выбирает одну из оставшихся. Далее они бросают свои кости. Выпавшие числа умножаются на независимые положительные случайные величины с одинаковым известным распределением (зависящим от параметра). Побеждает тот игрок, у которого результат окажется больше. Нетранзитивность в данном случае означает, что второй игрок всегда может выбрать кость так, чтобы обеспечить себе преимущество.

Анализ наборов проводился с использованием компьютерных методов, в связи с этим сошлёмся на работу с подобной методологией [10].

2. Теоретические основания

Пусть имеется нетранзитивный набор дискретных случайных величин (костей) A, B, C. Переход к непрерывным величинам осуществим с помощью следующего преобразования:

$$\widetilde{A} = A \cdot \xi, \quad \widetilde{B} = B \cdot \eta, \quad \widetilde{C} = C \cdot \zeta,$$

где ξ, η, ζ — независимые положительные случайные величины с одинаковой функцией распределения F.

Это приводит к «сглаживанию порядка», так как сравнение двух величин становится вероятностным, а не детерминированным, и в общем случае нетранзитивность набора при данном преобразовании утрачивается.

Далее рассматриваются распределения Вейбулла и Парето, поскольку для них вероятности вида $\mathbf{P}(a\xi > b\eta)$, $a, b > 0$, находятся в явном и достаточно простом виде. В обоих случаях при стремлении параметра распределения к бесконечности соответствующие случайные величины сходятся по вероятности к константе 1.

Действительно, рассмотрим семейство случайных величин $\{\xi_\alpha\}_{\alpha>0}$ с функциями распределения

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^\alpha}, & x \geq 0,\ \alpha > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Для любого фиксированного $x \neq 1$ имеем:

$$\text{при } x < 1 \quad \lim_{\alpha\to\infty} F_\alpha(x) = 1 - \lim_{\alpha\to\infty} e^{-x^\alpha} = 1 - e^0 = 0,$$

$$\text{при } x > 1 \quad \lim_{\alpha\to\infty} F_\alpha(x) = 1 - \lim_{\alpha\to\infty} e^{-x^\alpha} = 1 - 0 = 1.$$

Следовательно, при $\alpha \to \infty$ функции F_α сходятся к функции распределения вырожденной случайной величины в точке 1:

$$F_\infty(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Так как F_∞ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, по определению слабой сходимости $\xi_\alpha \xrightarrow{d} 1$, $\alpha \to \infty$. Отсюда следует и сходимость по вероятности $\xi_\alpha \xrightarrow{P} 1$, $\alpha \to \infty$.

Аналогично, для семейства $\{\xi_\beta\}_{\beta>0}$ с функциями распределения

$$F_\beta(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta}, & x \geq 1,\ \beta > 0 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

для любого $x > 1$ находим $\lim\limits_{\beta\to\infty} F_\beta(x) = 1 - \lim\limits_{\beta\to\infty} x^{-\beta} = 1$, откуда получаем ту же предельную функцию $F_\infty(x)$ и сходимость $\xi_\beta \xrightarrow{P} 1$, $\beta \to \infty$.

Так как величины A, B, C принимают конечное число целых значений, то существуют константы $M_A, M_B, M_C > 0$, такие, что $|A| \leq M_A$, $|B| \leq M_B$, $|C| \leq M_C$. Для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\mathbf{P}(|A\xi_\alpha - A| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|A| \cdot |\xi_\alpha - 1| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}\left(|\xi_\alpha - 1| > \frac{\varepsilon}{M_A}\right) \to 0,$$

при $\alpha \to \infty$, то есть $A\xi_\alpha \xrightarrow{P} A$, $\alpha \to \infty$. Аналогичные рассуждения

применимы и к произведениям величин ξ_β и костей B, C.

Таким образом, при $\alpha \to \infty$ или $\beta \to \infty$ стохастическая компонента «затухает», а преобразованные случайные величины становятся сколь угодно близки к исходным дискретным (костям):

$$\widetilde{A} = A\xi_\alpha \xrightarrow{P} A, \quad \widetilde{B} = B\eta_\alpha \xrightarrow{P} B, \quad \widetilde{C} = C\zeta_\alpha \xrightarrow{P} C, \quad \alpha \to \infty,$$

$$\widetilde{A} = A\xi_\beta \xrightarrow{P} A, \quad \widetilde{B} = B\eta_\beta \xrightarrow{P} B, \quad \widetilde{C} = C\zeta_\beta \xrightarrow{P} C, \quad \beta \to \infty.$$

Можно обоснованно ожидать, что в пределе порядок величин восстанавливается (как в исходном дискретном наборе) и свойство нетранзитивности будет сохранено при достаточно больших значениях параметра распределения.

В качестве наборов дискретных случайных величин взяты нетранзитивные наборы из трёх костей с одинаковым числом граней n, равными средними и дисперсиями (совпадающими с соответствующими характеристиками стандартных костей, имеющих числа $1, 2, \ldots, n$ на гранях), ранее полученные в [8]. Было установлено, что существует 27 таких костей с числом граней $n = 8$ (решений системы на равенство соответствующим сумме и сумме квадратов чисел на гранях стандартной восьмигранной кости), из которых можно составить 232 нетранзитивных набора. Для $n = 9$ существует 80 решений, из которых можно получить 7899 нетранзитивных наборов. Для $n = 10$ в текущей работе задача не рассматривалась по причине ограничений вычислительной мощности.

2.1. Критерий нетранзитивности

В дискретном случае [8] отношение предшествования в паре костей A, B определялось знаком величины

$$S_{ab} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(a_i - b_j),$$

где a_i, b_j — значения на гранях костей A и B, имеющих по n граней. Для соответствующих случайных величин получаем

$$\mathbf{E}\operatorname{sign}(A - B) = \mathbf{P}(A > B) - \mathbf{P}(A < B) = \frac{S_{ab}}{n^2},$$

откуда по определению стохастического предшествования следует, что знак величины S_{ab} однозначно отражает порядок в паре величин A, B:

$$A \succ B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(A-B) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_{ab} > 0.$$

В дискретной модели результат любого попарного сравнения a_i и b_j фиксирован: $+1$, -1 или 0. После перехода к непрерывным величинам знак разности $a_i\xi$ и $b_j\eta$ будет «сглажен» некоторой вероятностью, но принцип определения предшествования остаётся прежним:

$$\widetilde{A} \succ \widetilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(A\xi - B\eta) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_{\widetilde{ab}} > 0,$$

где

$$S_{\widetilde{ab}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a_i\xi - b_j\eta).$$

Пусть заданы числа $a, b > 0$ и независимые случайные величины ξ и η с одинаковым непрерывным распределением F. Для дальнейших вычислений определим

$$p(a,b) = \mathbf{P}(a\xi > b\eta) = \int\limits_{x_0\,\max(a,b)}^{+\infty} F\left(\frac{x}{b}\right) dF\left(\frac{x}{a}\right), \tag{2.1}$$

где x_0 — левая концевая точка распределения F.

Заметим, что если понимать интеграл в (2.1) как интеграл Лебега-Стилтьеса, то данная формула применима в случае не только абсолютно непрерывных, но и любых непрерывных распределений. Однако на практике обычно используются абсолютно непрерывные распределения, и тогда можно рассматривать (2.1) как интеграл Римана. Для наших целей далее важно лишь то свойство непрерывных распределений, что $\mathbf{P}(a\xi = b\eta) = 0$ при $a, b > 0$.

Для строго положительных a, b также верно, что

$$\mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a\xi - b\eta) = \mathbf{P}(a\xi > b\eta) - \mathbf{P}(a\xi < b\eta) = 2p(a,b) - 1.$$

Обозначим за $f(a_i, b_j)$ математическое ожидание $\mathrm{sign}(a_i\xi - b_j\eta)$ при

конкретных значениях a_i, b_j. Имеем

$$f(a_i,b_j)=\mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a_i\xi-b_j\eta)=\begin{cases}2p(a_i,b_j)-1, & a_i>0,\ b_j>0\\ -1, & a_i\le 0,\ b_j>0\\ 0, & a_i=b_j=0\\ 1, & a_i>0,\ b_j\le 0\\ -(2p(|a_i|,|b_j|)-1), & a_i<0,\ b_j<0\end{cases}, \tag{2.2}$$

и теперь величина $S_{\widetilde{ab}}$, отражающая предшествование, примет вид:

$$S_{\widetilde{ab}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a_i\xi-b_j\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(a_i,b_j). \tag{2.3}$$

Нетранзитивность набора из трёх непрерывных случайных величин $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, полученных из нетранзитивного дискретного набора $A\succ B\succ C\succ A$, определяется знаками величин $S_{\widetilde{abc}}$ и $S^*_{\widetilde{abc}}$. Критерий нетранзитивности состоит в следующем: если выполнено

$$S_{\widetilde{abc}}=\min\left\{S_{\widetilde{ab}},S_{\widetilde{bc}},S_{\widetilde{ca}}\right\}>0,$$

то набор нетранзитивен и сохранил свой изначальный порядок обхода $\widetilde{A}\succ\widetilde{B}\succ\widetilde{C}\succ\widetilde{A}$ (назовём этот порядок *прямым*); или если выполнено

$$S^*_{\widetilde{abc}}=\max\left\{S_{\widetilde{ab}},S_{\widetilde{bc}},S_{\widetilde{ca}}\right\}<0,$$

то набор нетранзитивен и сменил изначальный порядок обхода на противоположный $\widetilde{A}\prec\widetilde{B}\prec\widetilde{C}\prec\widetilde{A}$ (назовём его *обратным*).

2.2. Аналитические формулы

Перейдём к выводу явных формул для $p(a,b)$ для каждого из рассматриваемых распределений.

Утверждение 2.1. *Для независимых положительных случайных величин ξ, η с одинаковой функцией распределения Вейбулла с параметром $\alpha>0$ и для $a,b>0$ вероятность $p(a,b)$ выражается*

функцией

$$p(a,b)=\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha}+b^{\alpha}}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Для распределения Вейбулла имеем:

$$p(a,b)=\int\limits_{x_0\,\max(a,b)}^{+\infty} F\left(\frac{x}{b}\right)dF\left(\frac{x}{a}\right)=$$
$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(1-e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha}}\right)d\left(1-e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}}\right)=\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha}+b^{\alpha}}.$$

□

Утверждение 2.2. *Для независимых положительных случайных величин ξ, η с одинаковой функцией распределения Парето с параметром $\beta>0$ и для $a,b>0$ вероятность $p(a,b)$ выражается функцией*

$$p(a,b)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\beta}, & a>b,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & a=b,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\beta}, & a<b.\end{cases} \tag{2.5}$$

Доказательство. Для распределения Парето имеем:

$$p(a,b)=\int\limits_{x_0\,\max(a,b)}^{+\infty} F\left(\frac{x}{b}\right)dF\left(\frac{x}{a}\right)=\int\limits_{\max(a,b)}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{x}{b}\right)^{-\beta}\right)d\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{-\beta}\right)=$$
$$=\frac{a^{\beta}}{\big(\max(a,b)\big)^{\beta}}-\frac{(ab)^{\beta}}{2\big(\max(a,b)\big)^{2\beta}}=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\beta}, & a>b,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & a=b,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\beta}, & a<b.\end{cases}$$

□

2.3. Критические значения параметра

Далее сформулированы лемма о сходимости величин, отражающих предшествование в наборе, и утверждения о существовании *критических значений* параметров рассматриваемых распределений. Критическим значением для конечного множества нетранзитивных наборов будем называть минимальное значение параметра, начиная с которого во всех рассматриваемых наборах после преобразования снова наблюдается нетранзитивность в исходном порядке обхода.

Лемма 2.1. *Для любой пары костей A, B и параметра распределения θ (Вейбулла и Парето) выполняется $S_{\widetilde{ab}}(\theta) \to S_{ab}$, $\theta \to \infty$, а для любой нетранзитивной тройки костей A, B, C имеет место сходимость $S_{\widetilde{abc}}(\theta) \to S_{abc}$, $S^*_{\widetilde{abc}}(\theta) \to S^*_{abc}$, $\theta \to \infty$.*

Доказательство. По определению

$$S_{\widetilde{ab}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i, b_j), \quad \text{где} \quad f(a_i, b_j) = \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a_i\xi - b_j\eta).$$

Согласно Утверждению 2.1 для $a, b > 0$ и величин ξ, η, распределённых по закону Вейбулла с некоторым параметром $\alpha > 0$, из выражения

$$p(a, b) = \mathbf{P}(a\xi > b\eta) = \frac{a^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha}$$

находим

$$f(a, b) = \mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a\xi - b\eta) = 2p(a, b) - 1 = \frac{a^\alpha - b^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha}.$$

При $a, b > 0$ имеем

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(a, b) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{a^\alpha - b^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha} = \mathrm{sign}(a - b).$$

При $a \le 0 < b$ имеем $a\xi \le 0$, $b\eta > 0$ и

$$\mathrm{sign}(a\xi - b\eta) \equiv -1 = \mathrm{sign}(a - b).$$

При $a > 0 \ge b$ аналогично имеем $\mathrm{sign}(a\xi - b\eta) \equiv 1 = \mathrm{sign}(a - b)$, а при $a = b$ верно $\mathbf{E}\,\mathrm{sign}(a\xi - b\eta) = 0$. При $a, b < 0$ функция $f(a, b)$

находится через уже рассмотренный случай, так как $\operatorname{sign}(a\xi - b\eta) = -\operatorname{sign}(|a|\xi - |b|\eta)$, откуда имеем

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(a,b) = -\lim_{\alpha\to\infty} f(|a|,|b|) = -\operatorname{sign}(|a| - |b|) = \operatorname{sign}(a-b).$$

Таким образом, для любых a, b верно, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(a,b) = \operatorname{sign}(a-b).$$

Для распределения Парето из явной формулы для $p(a,b)$ из Утверждения 2.2 аналогичным образом получаем $\lim\limits_{\beta\to\infty} f(a,b) = \operatorname{sign}(a-b)$. Так как суммы в определении $S_{\widetilde{ab}}$ конечны, получаем

$$\lim_{\theta\to\infty} S_{\widetilde{ab}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lim_{\theta\to\infty} f(a_i,b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(a_i - b_j) = S_{ab},$$

то есть $S_{\widetilde{ab}} \to S_{ab}$, $\theta\to\infty$ для любой пары A, B. Величина $S_{\widetilde{abc}}$ равна минимуму, а $S^*_{\widetilde{abc}}$ — максимуму трёх величин $S_{\widetilde{ab}}$, $S_{\widetilde{bc}}$, $S_{\widetilde{ca}}$, поэтому из сходимости попарных величин следует сходимость $S_{\widetilde{abc}} \to S_{abc}$, $S^*_{\widetilde{abc}} \to S^*_{abc}$, $\theta\to\infty$, так как минимум (максимум) конечного числа сходящихся величин сходится к минимуму (максимуму) их пределов. □

Утверждение 2.3. *Заведомо существует некоторое достаточно большое значение α_{cr} такое, что для всех $\alpha \geq \alpha_{\mathrm{cr}}$ все изначально нетранзитивные наборы из трёх костей при умножении на непрерывные величины с функцией распределения Вейбулла с параметром α восстанавливают свойство нетранзитивности и порядок обхода.*

Доказательство. Согласно Лемме 2.1 для каждого нетранзитивного набора костей A, B, C верно, что $S_{\widetilde{abc}} \to S_{abc} > 0$ при $\alpha\to\infty$, и существует критическое значение параметра α, по превышении которого соответствующий набор случайных величин восстанавливает свойство нетранзитивности. Следовательно, для любого конечного множества нетранзитивных наборов костей существует критическое значение α_{cr}, по превышении которого все соответствующие им наборы непрерывных случайных величин становятся нетранзитивны. □

Утверждение 2.4. *Заведомо существует некоторое достаточно большое значение* β_{cr} *такое, что для всех* $\beta \geq \beta_{\text{cr}}$ *все изначально нетранзитивные наборы из трёх костей при умножении на непрерывные величины с функцией распределения Парето с параметром* β *восстанавливают свойство нетранзитивности и порядок обхода.*

Доказательство. Дословно повторяет доказательство предыдущего Утверждения. □

Утверждения 2.3 и 2.4 гарантируют существование критических значений α_{cr}, β_{cr}, однако явных аналитических выражений для них не выведено. В результате численного эксперимента при дискретизации параметров α и β с шагом $h = 0{,}01$ получены следующие приближения критических значений (как первые такие значения параметров α и β в порядке их возрастания, при которых все наборы троек из соответствующих множеств становятся нетранзитивными):

$$\begin{array}{lll} \text{для } n = 8 & \alpha_{\text{cr}} \approx 19{,}57, & \beta_{\text{cr}} \approx 15{,}19; \\ \text{для } n = 9 & \alpha_{\text{cr}} \approx 23{,}08, & \beta_{\text{cr}} \approx 18{,}75. \end{array}$$

В силу величины шага, эти значения имеют точность 0,01.

3. Графическая интерпретация

Опишем численный эксперимент более подробно. Мы перебираем положительные значения параметров α и β с шагом $h = 0{,}01$. При каждом значении параметра перебираем все тройки костей, ранее найденные в статье [8] (сначала для $n = 8$, потом для $n = 9$). Для каждой тройки A, B, C вычисляем значения $S_{\widetilde{ab}}$, $S_{\widetilde{bc}}$, $S_{\widetilde{ca}}$ по формулам (2.2)–(2.5) и делаем вывод о транзитивности или нетранзитивности (в прямом или обратном порядке обхода) набора случайных величин $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$. А именно, если $S_{\widetilde{ab}}$, $S_{\widetilde{bc}}$, $S_{\widetilde{ca}}$ положительны, то имеет место нетранзитивность в прямом порядке обхода, если отрицательны, то нетранзитивность в обратном порядке обхода, в противном случае набор транзитивен при данном значении параметра. Затем вычисляем долю нетранзитивных наборов (от всех найденных в [8] наборов, это 232 набора при $n = 8$ и 7899 наборов при $n = 9$) при данном значении параметра и наносим точку на график, полученные точки соединяем сплошной линией.

Отметим, что построение выполняется без использования генераторов псевдослучайных чисел, статистическое моделирование не проводится. Все значения $S_{\widetilde{ab}}$, $S_{\widetilde{bc}}$, $S_{\widetilde{ca}}$ вычисляются с машинной точностью, по сетке параметров α и β с шагом $h = 0{,}01$, соответственно определяется доля нетранзитивных наборов.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости доли нетранзитивных наборов от параметра распределения. Вертикальными пунктирными линиями отмечены соответствующие критические значения α_{cr} и β_{cr}, начиная с которых все изначально нетранзитивные дискретные наборы восстанавливают это свойство после перехода к непрерывным случайным величинам.

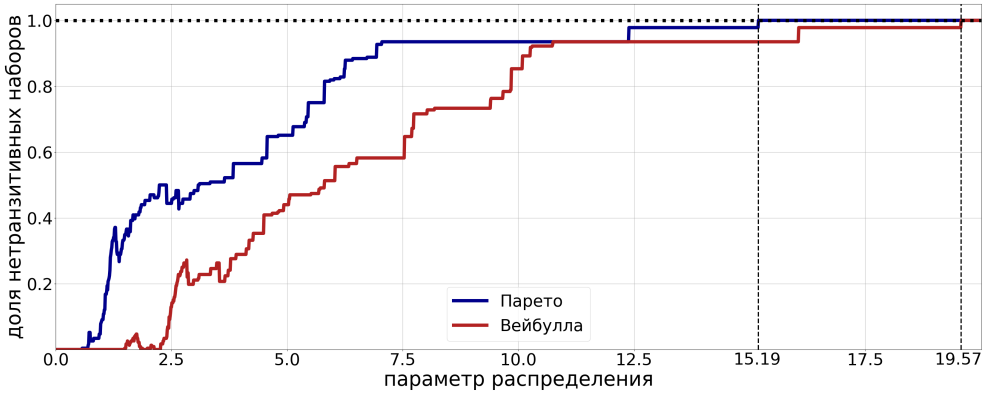

Рисунок 1. Доля нетранзитивных наборов в зависимости от параметра (при $n = 8$)

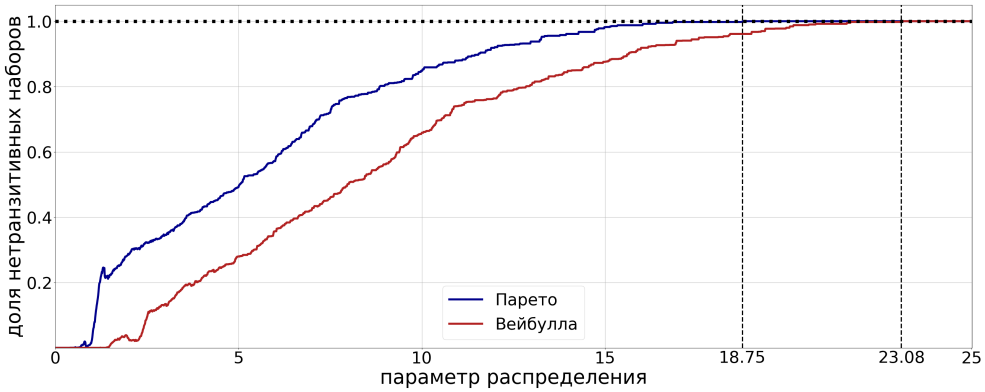

Рисунок 2. Доля нетранзитивных наборов в зависимости от параметра (при $n = 9$)

Эксперимент показал, что при малых значениях параметров доля нетранзитивных наборов равна нулю (т.е. все наборы транзитивны), затем она растёт. Заметим, что если с ростом параметра ровно один набор, ранее бывший транзитивным, становится нетранзитивным, доля увеличивается на $1/N$, где N — общее число наборов при данном n. Однако фактически на графиках наблюдаются и скачки большего размера, чем $1/N$.

Как выяснилось, такое явление происходит в случаях, когда несколько наборов одновременно (с ростом параметра) становятся нетранзитивными. Это обусловлено тем, что в некоторые разные наборы входят одни и те же пары исходных костей, изменения в отношении превосходства которых являются определяющими в появлении нетранзитивности в эти моменты.

На графиках видно, что доля нетранзитивных наборов растёт немонотонно: наблюдаются места локального «снижения» в обоих распределениях. Это указывает на парадоксальную динамику восстановления структуры превосходства — некоторые наборы при определённых значениях параметра, меньших критического, сначала восстанавливают нетранзитивность, затем ещё раз её утрачивают с ростом параметра, а затем снова возвращаются в нетранзитивное состояние по крайней мере при критическом значении.

4. Немонотонное восстановление нетранзитивности

4.1. Сводные результаты

В табл. 1–4 представлена классификация всех наборов по характеру восстановления нетранзитивности. Для каждого набора учитывалось, сколько раз в процессе возрастания параметра распределения он переходил в нетранзитивное состояние. В первых столбцах указано количество наборов, восстановивших нетранзитивность однократно (*1 прямая*). Последующие столбцы соответствуют случаям, когда нетранзитивность возникала более одного раза. Отдельно выделены наборы, у которых на промежуточных интервалах наблюдалась смена направления обхода: эти столбцы обозначены как *1 обр.+1 пр.*, *2 обр.+1 пр.* Во всех случаях нетранзитивность на последнем интервале наблюдается в прямом порядке обхода и начинается не позднее критических значений параметров, найденных выше.

Таблица 1: Характер восстановления нетранзитивности при $n = 8$ и распределении Вейбулла (всего 232 набора)

Тип восстановления	1 прямая	2 прямых	3 пр.	1 обр.+1 пр.
Число наборов	172	53	6	1

Таблица 2: Характер восстановления нетранзитивности при $n = 8$ и распределении Парето (всего 232 набора)

Тип восстановления	1 прямая	2 прямых	3 пр.	1 обр.+1 пр.
Число наборов	138	94	0	0

Таблица 3: Характер восстановления нетранзитивности при $n = 9$ и распределении Вейбулла (всего 7899 наборов)

Тип восст.	1 прямая	2 пр.	3 пр.	1 обр.+1 пр.	2 обр.+1 пр.
Число наб.	6261	1400	71	162	5

Таблица 4: Характер восстановления нетранзитивности при $n = 9$ и распределении Парето (всего 7899 наборов)

Тип восст.	1 прямая	2 пр.	3 пр.	1 обр.+1 пр.	2 обр.+1 пр.
Число наб.	4945	2870	25	59	0

4.2. Пример парадоксального набора

Рассмотрим набор, проявляющий нетранзитивность на двух интервалах значений параметра как при распределении Вейбулла, так и при распределении Парето. Исходный набор из трёх восьмигранных костей X, Y, Z задан следующим образом:

$$\begin{array}{rcccccccc} X: & 0 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 9 \\ Y: & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ Z: & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 6 & 9 \end{array}$$

Имеем $S_{xy} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \operatorname{sign}(x_i - y_j) = 5$, $S_{yz} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \operatorname{sign}(y_i - z_j) = 1$, $S_{zx} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} \operatorname{sign}(z_i - x_j) = 4$ и нетранзитивность $X \succ Y \succ Z \succ X$. Далее приведём формулы для величин $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$, соответствующих этому набору в непрерывной модели. Каждое слагаемое вида $k \cdot p(x_i, y_j)$ учитывает кратность одинаковых пар (x_i, y_j), по которым

вычисляется функция $f(x_i, y_j)$.

Для распределения Вейбулла:

$$S_{\widetilde{xy}}(\alpha)=-8+3\cdot 4^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{1}{4^{\alpha}+1}+\tfrac{2}{4^{\alpha}+3^{\alpha}}+\tfrac{2}{4^{\alpha}+6^{\alpha}}+\tfrac{1}{4^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-3\cdot 6+3\cdot 5^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{1}{5^{\alpha}+1}+$$
$$+\tfrac{2}{5^{\alpha}+3^{\alpha}}+\tfrac{2}{5^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{2}{5^{\alpha}+6^{\alpha}}+\tfrac{1}{5^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-3\cdot 8+2\cdot 9^{\alpha}\Big(\tfrac{1}{9^{\alpha}+1}+\tfrac{2}{9^{\alpha}+3^{\alpha}}+\tfrac{2}{9^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{2}{9^{\alpha}+6^{\alpha}}\Big)-7,$$

$$S_{\widetilde{yz}}(\alpha)=2\Big(\tfrac{3}{1+2^{\alpha}}+\tfrac{3}{1+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{1+6^{\alpha}}+\tfrac{1}{1+9^{\alpha}}\Big)-8+2\cdot 3^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{3^{\alpha}+2^{\alpha}}+\tfrac{3}{3^{\alpha}+5^{\alpha}}+$$
$$+\tfrac{1}{3^{\alpha}+6^{\alpha}}+\tfrac{1}{3^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-2\cdot 8+2\cdot 4^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{4^{\alpha}+2^{\alpha}}+\tfrac{3}{4^{\alpha}+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{4^{\alpha}+6^{\alpha}}+\tfrac{1}{4^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-2\cdot 8+$$
$$+2\cdot 6^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{6^{\alpha}+2^{\alpha}}+\tfrac{3}{6^{\alpha}+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{6^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-2\cdot 7+2\cdot 9^{\alpha}\cdot\Big(\tfrac{3}{9^{\alpha}+2^{\alpha}}+\tfrac{3}{9^{\alpha}+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{9^{\alpha}+6^{\alpha}}\Big)-7,$$

$$S_{\widetilde{zx}}(\alpha)=8+3\cdot 2^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{2^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{3}{2^{\alpha}+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{2^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-3\cdot 7+3\cdot 5^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{5^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{1}{5^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-$$
$$-3\cdot 4+6^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{6^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{3}{6^{\alpha}+5^{\alpha}}+\tfrac{1}{6^{\alpha}+9^{\alpha}}\Big)-7+9^{\alpha}\cdot 2\Big(\tfrac{3}{9^{\alpha}+4^{\alpha}}+\tfrac{3}{9^{\alpha}+5^{\alpha}}\Big)-6.$$

Для распределения Парето:

$$S_{\widetilde{xy}}(\beta)=-8+3\Big(1-\big(\tfrac{1}{4}\big)^{\beta}+2\Big(1-\big(\tfrac{3}{4}\big)^{\beta}\Big)+2\Big(\big(\tfrac{4}{6}\big)^{\beta}-1\Big)+\big(\tfrac{4}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+$$
$$+3\Big(1-\big(\tfrac{1}{5}\big)^{\beta}+2\Big(1-\big(\tfrac{3}{5}\big)^{\beta}\Big)+2\Big(1-\big(\tfrac{4}{5}\big)^{\beta}\Big)+2\Big(\big(\tfrac{5}{6}\big)^{\beta}-1\Big)+\big(\tfrac{5}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+$$
$$+1-\big(\tfrac{1}{9}\big)^{\beta}+2\Big(1-\big(\tfrac{3}{9}\big)^{\beta}\Big)+2\Big(1-\big(\tfrac{4}{9}\big)^{\beta}\Big)+2\Big(1-\big(\tfrac{6}{9}\big)^{\beta}\Big),$$

$$S_{\widetilde{yz}}(\beta)=3\Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)^{\beta}-1\Big)+3\Big(\big(\tfrac{1}{5}\big)^{\beta}-1\Big)+\big(\tfrac{1}{6}\big)^{\beta}-1+\big(\tfrac{1}{9}\big)^{\beta}-1+2\Big(3\Big(1-\big(\tfrac{2}{3}\big)^{\beta}\Big)+$$
$$+3\Big(\big(\tfrac{3}{5}\big)^{\beta}-1\Big)+\big(\tfrac{3}{6}\big)^{\beta}-1+\big(\tfrac{3}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+2\Big(3\Big(1-\big(\tfrac{2}{4}\big)^{\beta}\Big)+3\Big(\big(\tfrac{4}{5}\big)^{\beta}-1\Big)+$$
$$+\big(\tfrac{4}{6}\big)^{\beta}-1+\big(\tfrac{4}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+2\Big(3\Big(1-\big(\tfrac{2}{6}\big)^{\beta}\Big)+3\Big(1-\big(\tfrac{5}{6}\big)^{\beta}\Big)+\big(\tfrac{6}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+$$
$$+3\Big(1-\big(\tfrac{2}{9}\big)^{\beta}\Big)+3\Big(1-\big(\tfrac{5}{9}\big)^{\beta}\Big)+1-\big(\tfrac{6}{9}\big)^{\beta},$$

$$S_{\widetilde{zx}}(\beta)=3\Big(3\Big(\big(\tfrac{2}{4}\big)^{\beta}-1\Big)+3\Big(\big(\tfrac{2}{5}\big)^{\beta}-1\Big)+\big(\tfrac{2}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+3\Big(3\Big(1-\big(\tfrac{4}{5}\big)^{\beta}\Big)+\big(\tfrac{5}{9}\big)^{\beta}-1\Big)+$$
$$+8+3\Big(1-\big(\tfrac{4}{6}\big)^{\beta}\Big)+3\Big(1-\big(\tfrac{5}{6}\big)^{\beta}\Big)+\big(\tfrac{6}{9}\big)^{\beta}-1+3\Big(1-\big(\tfrac{4}{9}\big)^{\beta}\Big)+3\Big(1-\big(\tfrac{5}{9}\big)^{\beta}\Big).$$

На рис. 3-6 представлены графики зависимостей величин $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$ и $S_{\widetilde{zx}}$ от параметров распределений.

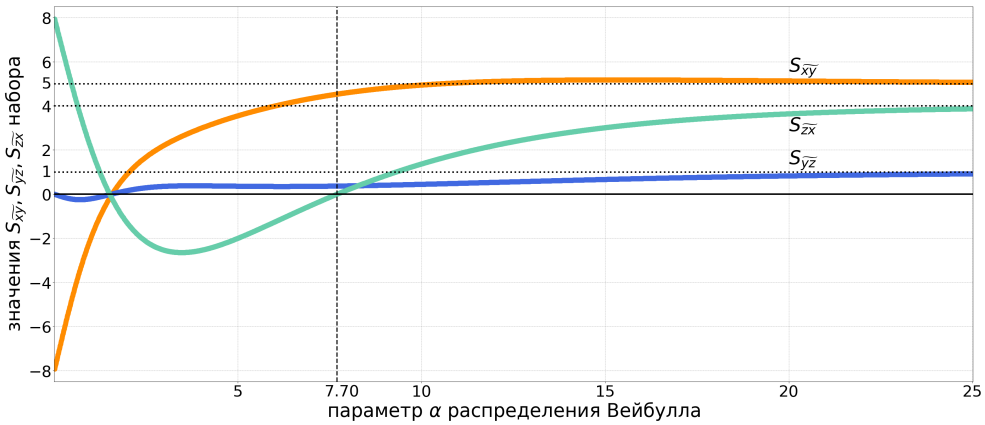

Рисунок 3. Распределение Вейбулла. Зависимость величин $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ от параметра α.

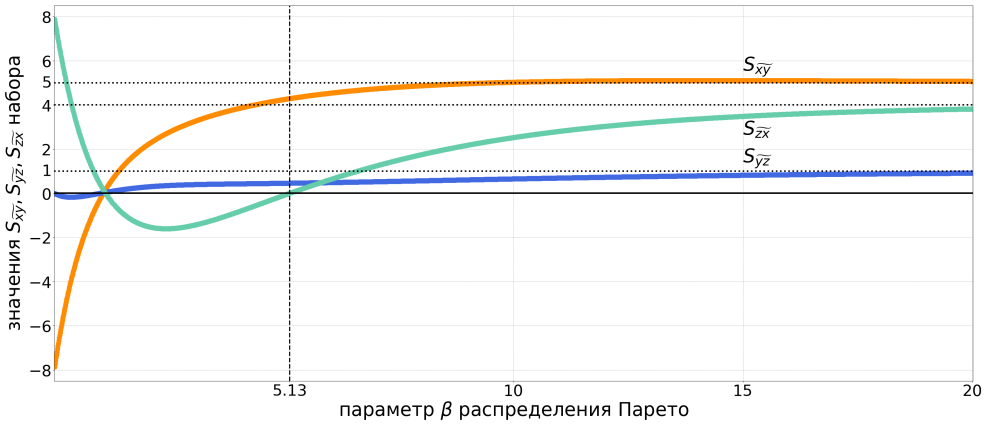

Рисунок 4. Распределение Парето. Зависимость величин $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ от параметра β.

На графиках (рис. 3-4) видно, что при превышении значений параметров $\alpha \geq 7.70$, $\beta \geq 5.13$ величины $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ окончательно становятся больше нуля и асимптотически приближаются к значениям, соответствующим дискретной модели: 5, 1, и 4. Это означает устойчивое восстановление нетранзитивности в прямом порядке обхода $\widetilde{X} \succ \widetilde{Y} \succ \widetilde{Z} \succ \widetilde{X}$.

Увеличив масштаб, обнаружим (рис. 5-6), что при малых значениях параметра у каждого из распределений наблюдается по одному небольшому интервалу, на котором набор временно демонстрирует

нетранзитивность, затем снова её утрачивает (до некоторого большего значения параметра).

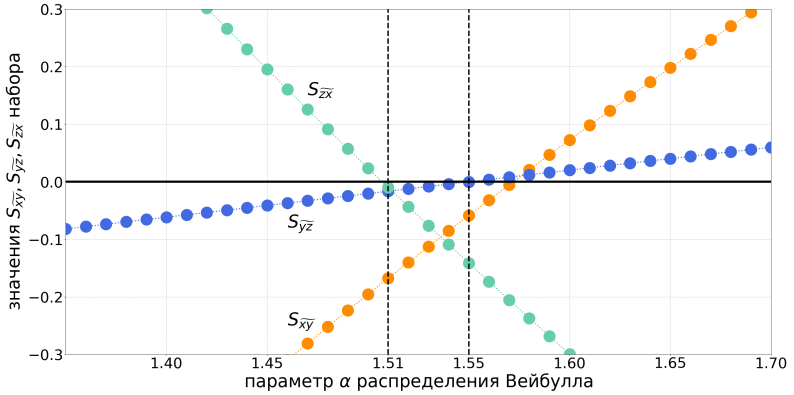

Рисунок 5. Распределение Вейбулла. Интервал параметра $\alpha \in [1.51, 1.55]$, на котором возникает нетранзитивность в обратном порядке.

При распределении Вейбулла при $\alpha \in [1.51, 1.55]$ величины $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ становятся отрицательными, что означает возникновение нетранзитивности в обратном порядке $\widetilde{X} \prec \widetilde{Y} \prec \widetilde{Z} \prec \widetilde{X}$.

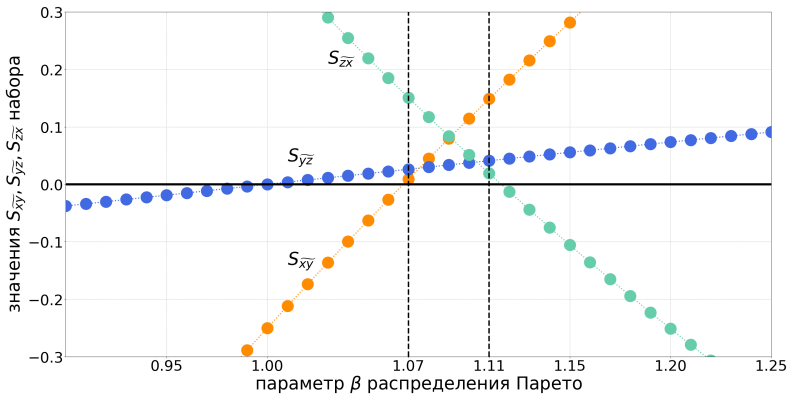

Рисунок 6. Распределение Парето. Интервал параметра $\beta \in [1.07, 1.11]$, на котором возникает нетранзитивность в прямом порядке.

При распределении Парето аналогичное поведение наблюдается при $\beta \in [1.07, 1.11]$, однако значения $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ на данном промежутке положительны, то есть возникает нетранзитивность с сохранением прямого порядка обхода $\widetilde{X} \succ \widetilde{Y} \succ \widetilde{Z} \succ \widetilde{X}$.

5. Заключение

В настоящей работе исследованы некоторые наборы непрерывных случайных величин с параметром. Рассмотрен случай, когда дискретные случайные величины с равными средними и дисперсиями, образующие нетранзитивную тройку, умножаются на независимые непрерывные случайные величины с одинаковой функцией распределения. Показано, что подобное преобразование подвергает исходный набор «стохастическому искажению», и в общем случае он утрачивает нетранзитивность. Однако доказано, что для распределений Вейбулла и Парето существуют критические значения параметра (α_{cr} и β_{cr} соответственно), начиная с которых все преобразованные наборы восстанавливают свойство нетранзитивности с тем же порядком обхода, что и в исходной дискретной модели. Критические значения параметра найдены для каждого из рассмотренных распределений и для числа значений, принимаемых исходными дискретными величинами, $n = 8$ и $n = 9$. Предложен обобщённый критерий нетранзитивности набора для непрерывной модели. Для обоих распределений, Вейбулла и Парето, выведены явные аналитические выражения для вероятности $p(a, b)$, отражающей стохастическое превосходство в паре величин.

При этом замечена немонотонная динамика доли наборов, восстановивших нетранзитивность с ростом параметра. Обнаружено парадоксальное явление: некоторые наборы на интервале значений параметра распределения от нуля до критического восстанавливают и утрачивают нетранзитивность неоднократно, прежде чем окончательно стабилизироваться по крайней мере при критическом значении параметра. Для всех рассмотренных распределений и различного числа n наблюдалось вплоть до 3 таких участков, причём у некоторых наборов нетранзитивность на промежуточных этапах появлялась в обратном порядке обхода относительно порядка обхода исходного дискретного набора. Выявлены все такие парадоксальные наборы, проведена их классификация по количеству интервалов и характеру восстановления нетранзитивности на них, результаты отражены в сводных таблицах. Для наглядной демонстрации рассмотренного явления построены графики зависимостей $S_{\widetilde{xy}}$, $S_{\widetilde{yz}}$, $S_{\widetilde{zx}}$ от параметров распределений для одного из таких наборов.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Лебедеву А.В. за постановку задачи, ценные замечания к работе и научное руководство. Автор благодарит рецензента за критические замечания, учтённые при существенной переработке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинская Е.В. *Теория риска и перестрахование.* М.: ООО «Мэйлер», 2008.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания.* М.: Наука, 1987.
3. Горбунова А.В., Лебедев А.В. *Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания* // Управление большими системами. 2020. Т. 85. С. 23–50.
4. Лебедев А.В. *Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин* // Автоматика и телемеханика. 2019. N 6. С. 91–103.
5. Лебедев А.В. *Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения* // Информатика и ее применения, 2019. Т. 13. В 3. С. 20–26.
6. Поддьяков А.Н. *Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах* // Вопросы психологии. 2019. N 2. С. 3–16.
7. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики.* М.: Фазис, 1998.
8. Якушева А.Н. *Нетранзитивные кости с равными средними и дисперсиями* // Математическая теория игр и ее приложения. 2022. Т. 14. В. 3. С. 101–120.
9. Boland P.J., Singh H., Cukic B. *The Stochastic Precedence Ordering with Applications in Sampling and Testing* // J. Appl. Probab. 2004. Vol. 41. N 1. P. 73–82.
10. Conrey B., Gabbard J., Grant K., Liu A., Morrison K. *Intransitive Dice* // Mathematics Magazine. 2016. V. 89. N 2. P. 133–143.
11. Demler O.V., Demler I.A. *Non-transitivity of the Win Ratio and Area Under the Receiver Operating Characteristics Curve (AUC): a case for evaluating the strength of stochastic comparisons*. 2023. https://arxiv.org/abs/2309.01791.

12. Finkelstein M., Thorp E.O. *Nontransitive dice with equal means* // Optimal Play: Mathematical Studies in Games and Gambling. 2000. P. 293–310.
13. Gardner M. *The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference* // Sci. Amer. 1970. V. 223. N 6. P. 110–114.
14. Gardner M. *On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations* // Sci. Amer. 1974. V. 231. N 6. P. 120–125.
15. Gorbunova A.V., Lebedev A.V. *Nontransitivity of tuples of random variables with polynomial density and its effects in Bayesian models* // Mathematics and Computers in Simulation. 2022. V. 202. P. 181–192.
16. Trybula S. *On the paradox of three random variables* // Zastos. Matem. 1961. V. 5. N 4. P. 321–332.

PARADOXICAL PHENOMENA IN SOME NONTRANSITIVE SETS OF PARAMETERIZED RANDOM VARIABLES

Alexandra N. Yakusheva, Lomonosov Moscow State University (alexandra.yakusheva.msu@gmail.com).

Abstract: We study products of discrete random variables forming nontransitive sets of dice with equal means and variances, and independent continuous random variables distributed according to the Weibull or Pareto laws. It is shown that the functions describing stochastic precedence converge to those of the original discrete model as the distribution parameter increases. For each distribution family, we establish critical parameter values beyond which nontransitivity is stably restored in all sets. The behavior of the sets is shown to be non-monotonic in certain cases: nontransitivity may emerge temporarily at low parameter values, become lost as the parameter increases, and subsequently reappear (in some sets, multiple times) including cases where the dominance cycle is reversed. Various forms of this effect are explored.

Keywords: nontransitivity, nontransitive tuples, stochastic precedence, nontransitive dice, random variables.