Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.2, с. 3–22

УДК 519.837
ББК 22.18

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ В СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ РЕЛИГИОЗНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ *

Мария А. Булгакова
Денис В. Кузютин
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: m.bulgakova@spbu.ru, d.kuzyutin@spbu.ru
Надежда В. Смирнова
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: nvsmirnova@hse.ru
Игорь Р. Тантлевский
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: i.tantlevsky@spbu.ru

Статья вносит вклад в теорию структурного баланса в знаковых социальных сетях. Для класса так называемых взвешенных сетей, где веса ребер отражают силу связей, мы вводим

©2026 М.А. Булгакова, Д.В. Кузютин, Н.В. Смирнова, И.Р. Тантлевский

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-18-00479, https://rscf.ru/project/24-18-00479/, СПбГУ

характеристическую функцию (ХФ) на основе весов сбалансированных циклов. Доказана теорема о выпуклости этой ХФ для полной сети с произвольным конечным числом вершин. С использованием введенной ХФ в статье построены количественные оценки влиятельности игроков, зависящие от распределения весов на ребрах сети. Полезное свойство попарной устойчивости сети распространено на рассматриваемый класс взвешенных сетей. Результаты продемонстрированы на сетевых моделях взаимоотношений между религиозными течениями и властью в Иудее (II-I вв. до н.э.), основанных на известных исторических свидетельствах.

Ключевые слова: сети, знаковые сети, структурный баланс, взвешенная сеть, кооперативные игры, характеристическая функция, выпуклые игры, вектор Шепли, попарная устойчивость.

Поступила в редакцию: 07.11.25 *После доработки*: 15.04.26 *Принята к публикации*: 27.04.26

1. Введение

Начиная с основополагающих работ [12,11,8], посвящённых проблеме структурного баланса в знаковых сетях, сетевые подходы широко использовались для моделирования социальных сетей различной природы и структуры (см., например, исследовательские статьи [1, 10, 14, 15, 18, 20 -22], обзор [7] и монографии [17,2]). В этой постановке различные «игроки» (социальные группы, религиозные или политические движения и т.д.) рассматриваются как вершины сети, а отношения или отношения между этими игроками представлены связями (или рёбрами), которые могут быть как положительными, так и отрицательными (см. раздел 2 ниже для краткого введения в теорию знаковых сетей). В зависимости от структуры сети и количества положительных и отрицательных знаков рёбер для всех циклов в этой сети некоторые сети можно охарактеризовать как сбалансированные. Обычно сбалансированные социальные сети рассматриваются как находящиеся в устойчивом / равновесном состоянии. При этом большинство сетей не являются (полностью) сбалансированными, и в этом случае используются различные оценки частичной сбалансированности конкретной сети (см., например, [4,5,9,21]).

В статье рассматривается введенный ранее в [21] класс так называемых взвешенных знаковых сетей (далее для простоты – «взве-

шенная сеть»), в которых учитывается не только знак, но и силы каждой связи (вес ребра). В качестве демонстрационных примеров вводимых понятий и свойств мы используем сетевые модели взаимодействия основных сторон (религиозных школ фарисеев, саддукеев, ессеев/кумранитов и власти) в Иудее в различные периоды II–I вв. до н. э. (см. раздел 3 с кратким описанием моделей, а также статьи [19 - 22] и монографию [18]).

С целью использования подходов кооперативной теории игр для исследования сетевых моделей (см., например, статьи [14, 15, 18] и монографии [16,2]), мы предлагаем способ введения характеристической функции $V(T)$ на подмножествах T множества N всех вершин, основанный на учете весов ребер всех сбалансированных циклов, которые содержит коалиция T. Введенная таким образом характеристическая функция удовлетворяет свойству выпуклости (см., например, [16]). Далее в качестве оценки «влиятельности» (или – выигрыша) каждого игрока в заданной сети мы предлагаем использовать отношение соответствующей компоненты вектора Шепли [16] к $V(N)$ (содержательно близкий подход использован, например, в статье [14]).

Наконец, мы распространяем введенное в [13] свойство попарной устойчивости сети на класс взвешенных знаковых сетей и проводим анализ попарной устойчивости для четырёх модельных примеров. Важно, что попарная устойчивость не следует автоматически из сбалансированности сети, а значит является самостоятельной характеристикой, которую целесообразно дополнительно использовать при анализе устойчивости сетевой модели взаимоотношений сторон.

Основная часть статьи структурирована следующим образом: в разделе 2 представлена формализация взвешенной знаковой сети и понятие сбалансированности сети. Раздел 3 содержит краткое описание четырёх примеров взвешенных сетей, моделирующих изменяющуюся систему взаимоотношений трех основных религиозных течений и власти в Иудее во II–I вв. до н. э. В разделе 4 введена характеристическая функция, доказана ее выпуклость, а также предложены количественные оценки влиятельности игроков, основанные на векторе Шепли. Раздел 5 посвящен распространению свойства попарной устойчивости на класс взвешенных полных сетей, а раздел 6 содер-

жит заключительные замечания.

2. Понятие сбалансированности взвешенной сети

Следуя [12,11,8,20,21], приведем далее базовые определения, связанные с концепцией структурного баланса во взвешенных сетях (см. также статьи [4,5,9], обзор [7] и монографии [17,2]). Рассмотрим взвешенную сеть (граф с ребрами, имеющими вес) $G_w = (V, L, w)$, где V и L обозначают конечные множества всех вершин (узлов) и ребер (связей) соответственно. Вершины графа соответствуют некоторым игрокам (персоналиям или социальным группам, имеющим сходные интересы и предпочтения и возможность действовать координировано, политическим объединениям, религиозно-идеологическим течениям и т.д.), соединенным друг с другом ребрами, представляющими определенные связи между игроками. Эти связи могут рассматриваться как положительные (что соответствует доверию, сотрудничеству, дружбе, союзническим отношениям и т.д.), либо как отрицательные (взаимное недоверие, напряженные отношения, соперничество, вражда и т.д.). Ограничимся в статье полными сетями, в которых каждая пара вершин соединена ребром.

Как было отмечено в [8], положительные и отрицательные связи между игроками могут быть различной силы. Для учета силы связей в [20,21] были введены так называемые взвешенные сети. А именно, положим, что каждая связь $e \in L$ во взвешенной сети G_w имеет свой собственный положительный или отрицательный вес $w = w_e \in W = \{-r, \ldots, -1, 1, \ldots, r\}$, где $r \in N$, $r \geq 2$, обозначает диапазон выбранной системы весов. Другими словами, мы используем функцию весов $w : L \to W$, где $|w_e| = |w_{A_iA_j}|$ представляет «силу» положительной или отрицательной связи (ребра) $e \in L$, соединяющего вершины A_i и A_j.

На Рис. 1 представлен пример взвешенной сети G_w с вершинами (игроками) A, E, P, S, в которой выбран минимальный нетривиальный диапазон весов $r = 2$. Отметим, что две связи PA и PE сильнее, чем остальные четыре связи в данной взвешенной сети. При этом «классическая» знаковая сеть G, введенная в [12,11,8], может рассматриваться как частный случай взвешенной сети G_w при $r = 1$.

Следуя [12,11,8], приведем ниже определение сбалансированного цикла и (полностью) сбалансированной сети.

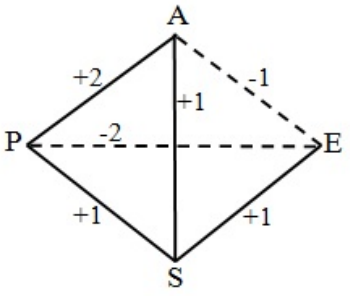


Рисунок 1. Взвешенная сеть – модель взаимодействия религиозных школ в период правления Йоханана Гиркана (до его конфликта с фарисеями в 107 г.до н.э.)

Циклом $c = c^k$ длины k, $k \geq 3$, во взвешенной сети G_w называется замкнутая последовательность смежных ребер вида $(A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{(k-1)}A_k, A_kA_1)$, где все k вершин $A_1, A_2, \ldots, A_k$ различны. Мы не будем в статье учитывать «направление» цикла, то есть делать различия между циклом $(A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{(k-1)}A_k, A_kA_1)$ и циклом в «противоположном направлении» $(A_1A_k, A_kA_{(k-1)}, \ldots, A_2A_1)$. В этом случае на Рис. 1 есть четыре цикла длины 3 (треугольника), например (PA, AE, EP) или просто PAE, и три цикла длины 4, например (PA, AS, SE, EP) или просто $PASE$.

Определение 2.1. *Знак цикла определяется как знак произведения весов всех его ребер. Цикл считают сбалансированным, если он имеет положительный знак, и несбалансированным – в противном случае.*

Интуитивное обоснование такому определению в простейшем случае треугольников было предложено в базовой статье [12] (см. также [8,11,4,20]). Например, система связей в треугольнике PAE может считаться сбалансированной, поскольку: (a) – отношения между двумя игроками P и A – «хорошие» (положительный вес связи $+2$), (b) – оба игрока P и A отрицательно относятся к третьему участнику («Ничто так не объединяет, как общий враг» – D.F. Wallace). В противоположность этому, система связей в треугольнике PSE представляется «несбалансированной» – игрок S является «другом» каждого из игроков P и E, однако P и E находятся во враждеб-

ных отношениях друг с другом. Более сложные сетевые структуры (с более длинными циклами) могут быть классифицированы с использованием аналогичного подхода, хотя более длинные циклы не допускают столь простой интуитивной интерпретации как треугольники (некоторые мотивации к определению сбалансированности для более длинных циклов предложены в [5,7,9,17]).

Определение 2.2. *Взвешенная сеть G_w называется (полностью) сбалансированной, если все циклы в G_w являются сбалансированными [12,11].*

Отметим, что взвешенная сеть G_w на Рис. 1 не является полностью сбалансированной, поскольку имеет два сбалансированных треугольника (PAE и PAS) из четырех и один сбалансированный цикл $PEAS$ из трех существующих циклов длины 4. Для оценки степени частичной сбалансированности взвешенных сетей, не удовлетворяющих определению 2.2, могут быть использованы различные скалярные и векторные меры частичной сбалансированности, введенные в [21].

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $CW_+^k = CW_+^k(G_w)$ обозначает сумму модулей весов ребер всех сбалансированных циклов длины k, а $CW^k = CW^k(G_w)$ – сумму модулей весов ребер всех циклов длины k во взвешенной сети G_w, $k = 3, \ldots, n$.

3. Сетевые модели взаимовлияния религиозных школ и власти в Иудее

В середине II в.до н.э. к власти в Иудее почти на столетие пришли священники-правители из рода Хасмонеев. В этот период внутри иудаизма сформировались три основных религиозных течения («школы») – фарисеи, саддукеи и ессеи (кумраниты). Детальное описание различий этих религиозных течений и истории их взаимовлияния можно найти, например, в [6, 19 - 22]. В работе [21] были введены взвешенные сетевые модели, описывающие основные признаки взаимоотношений трех религиозных течений и власти в Иудее в разные исторические периоды во II - I вв.до н.э., там же приведено обоснование выбранной системы весов связей, согласованное с известными историческими свидетельствами (см. [6, 19, 20]).

Данные сетевые модели представлены на Рис. 1 – 4, для обозначения вершин (игроков) использованы следующие сокращения: фарисеи (Pharisees) – игрок P, саддукеи (Sadducees) – игрок S, ессеи (Essenes) – игрок E и власть (Authority) – игрок A.

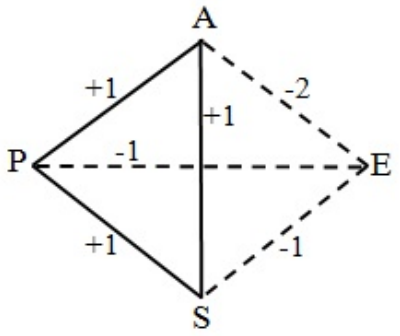


Рисунок 2. Сетевая модель взаимодействия религиозных школ в период правления Йонатана и Симона Хасмонеев (152-134 гг. до н.э.)

Взвешенная сеть на Рис. 2 является (полностью) сбалансированной, что достаточно хорошо согласуется с известными историческими свидетельствами, подтверждающими высокий уровень устойчивости сложившейся системы взаимоотношений трех религиозных течений и власти в Иудее в этот период.

Взвешенная сетевая модель взаимоотношений внутри иудейского общества в период первого этапа правления Йоханана Гиркана (134–107/106 гг. до н.э.) – до его конфликта с фарисеями, представлена выше на Рис. 1 в разделе 2. Отметим, что сеть G_w на Рис. 1 является лишь частично сбалансированной, точные значения индексов частичной сбалансированности приведены в [21].

Взвешенная сеть на Рис. 3 также не является сбалансированной (в частности, ни один треугольник, т.е. цикл длины 3, не является сбалансированным).

Согласно источникам, в 94/93 г. до н.э. в Иудее вспыхивает народное восстание под предводительством фарисеев против правителя Александра Янная, которое продлилось 6 лет. Только в период правления царицы Александры Саломеи (76-67 гг. до н.э.) структура вза-

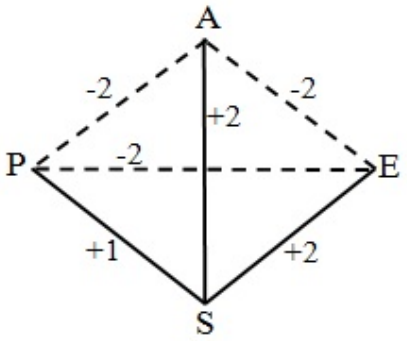


Рисунок 3. Сетевая модель взаимоотношений религиозных течений и власти в Иудее (106-94 гг. до н.э.)

имоотношений между основными религиозными школами и властью – см. Рис. 4 – вновь обрела признаки сбалансированности.

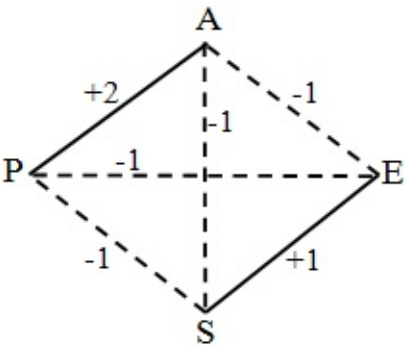


Рисунок 4. Сетевая модель взаимосвязей между религиозными течениями и властью в период царствования Александры Саломеи (76–67 гг. до н.э.)

Действительно, взвешенная сеть на Рис. 4 является (полностью) сбалансированной, что вполне согласуется с известными историческими свидетельствами.

4. Характеристическая функция на основе весов сбалансированных циклов

Для оценки уровня влияния каждого игрока и коалиций игроков во взвешенных сетевых моделях можно использовать подходы ко-

оперативной теории игр (см., например, [16, 2]). Различные способы введения характеристической функции (ХФ), зависящей от структуры сети, рассматривались в [2,3,14,15,18]. Для взвешенной сети G_w мы предлагаем ввести ХФ на основе учета сбалансированных циклов, которые содержит каждая коалиция, а также весов ребер этих циклов.

Определение 4.1. *Введем характеристическую функцию $v(T)$, $T \subset N$ рекурсией по числу участников в коалиции T:*
При $T = \emptyset$ и $|T| = 1$ положим $v(T) = 0$.
При $|T = \{A_1A_2\}| = 2$ положим $v(T) = w_e$, если $w_e > 0$, где e – ребро, соединяющее двух игроков A_1 и A_2 коалиции T; иначе (если $w_e < 0$) положим $v(T) = 0$.
При $|T = \{A_1A_2A_3\}| = 3$ положим

$$v(T) = \sum_{Q \subset T,\ |Q|=2} v(Q) + CW^3_+(G_w = (T, E, w)), \tag{4.1}$$

где CW^3_+ есть сумма модулей весов трех ребер (сторон треугольника) $A_1A_2A_3$, если этот треугольник сбалансирован; иначе второе слагаемое равно нулю. Отметим, что первое слагаемое в (4.1) представляет собой сумму значений характеристической функции по всем двухэлементным коалициям, содержащимся внутри T («подкоалициям»).
В предположении, что значения ХФ уже определены для всех коалиций с числом игроков $1, 2, 3, \ldots, n-1$, при $|T| = n$ положим

$$v(T) = \sum_{Q \subset T,\ |Q|=2} v(Q) + \ldots + \sum_{Q \subset T,\ |Q|=n-1} v(Q) + CW^n_+, \tag{4.2}$$

где $CW^n_+ = CW^n_+(G_w = (\{A_1A_2 \ldots A_n\}, E, w))$ есть сумма модулей весов ребер всех сбалансированных циклов длины n в сети с вершинами $A_1A_2 \ldots A_n$.

Замечание 4.1. Все слагаемые в правой части (4.2) по построению неотрицательны. Кроме того, для произвольных коалиций $T, K \subset N$ значения ХФ $v(T)$, $v(K)$, $v(T \cap K)$ и $v(T \cup K)$ зависят только от множества связей между вершинами из множества $v(T \cup K)$ и не зависят от других связей / вершин сети.

Замечание 4.2. Из определения 4.1 следует, что

$$\forall T \subset N,\ T \neq N,\ \forall i \in N \setminus T:\ v(T) \leq v(T \cup \{i\}). \tag{4.3}$$

В качестве иллюстративного примера рассмотрим построение ХФ для взвешенной сети на Рис. 1. (результат представлен в первой строке Таблицы 1). Для двухэлементных коалиций: $v(\{PA\}) = 2$ поскольку связь e между игроками P и A положительна и $w(e) = 2$, а $v(\{PE\}) = 0$ поскольку ребро PE имеет отрицательный вес. Для коалиции $T = \{P, A, S\}$ из трех игроков: $V(PAS) = 2+1+1+4 = 8$, где первые три слагаемых – это значения ХФ для двухэлементных коалиций $\{P, A\}$, $\{A, S\}$ и $\{S, P\}$, содержащихся внутри коалиции T, а последнее слагаемое есть сумма модулей весов сбалансированного треугольника PAS. Наконец, для максимальной коалиции $N = \{P, A, S, E\}$

$$V(N) = (2+1+1+1) + (8+7+2+2) + (5) = 29,$$

где первая и вторая группа слагаемых – это значения ХФ для всех двухэлементных (соответственно – трехэлементных) коалиций, а последнее слагаемое 5 есть сумма модулей весов ребер единственного сбалансированного цикла длины 4 – $PEAS$.

Сеть	Коалиции из двух игроков						3 игрока				$V(N)$
G_w	PA	PS	PE	AS	AE	SE	PAS	PAE	PES	ASE	
Рис. 1	2	1	0	1	0	1	8	7	2	2	29
Рис. 2	1	1	0	1	0	0	6	5	4	5	37
Рис. 3	0	1	0	2	0	2	3	0	3	4	37
Рис. 4	2	0	0	0	0	1	6	6	4	4	37

Таблица 1. Значения характеристической функции

Теорема 4.1. *Характеристическая функция $v(T)$, введенная в опр. 4.1 для взвешенных сетей G_w, удовлетворяет свойству выпуклости [16], т.е.*

$$\forall\ T, K \subset N \quad v(T \cap K) + v(T \cup K) \geq v(T) + v(K). \tag{4.4}$$

Доказательство. С учетом замечания 4.1 легко проверить, что свойство (4.4) выполнено для частных значений $n = |T \cup K| = 1, 2, 3$.

Выберем произвольное конечное число игроков $n = |T \cup K| \geq 4$. Не уменьшая общности, положим, что $t = |T| \leq k = |K|$, где $k \leq n$.

Рассмотрим подробно наиболее общий случай, когда

$$T \cap K \neq \emptyset, \quad T \setminus K \neq \emptyset, \quad K \setminus T \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

В этом случае множество M всевозможных непустых коалиций $Q \subset T \cup K$ можно разбить на 7 непересекающихся подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_7$ (см. Табл. 2 и 3):

- $M_1 = \{Q : Q$ содержит только игроков из $T \setminus K\}$;
- $M_2 = \{Q : Q$ содержит игроков из $T \setminus K$ и из $T \cap K$, но не содержит игроков из $K \setminus T\}$;
- $M_3 = \{Q : Q$ содержит только игроков из $T \cap K\}$;
- $M_4 = \{Q : Q$ содержит только игроков из $K \setminus T\}$;
- $M_5 = \{Q : Q$ содержит игроков из $K \setminus T$ и из $K \cap T$, но не содержит игроков из $T \setminus K\}$;
- $M_6 = \{Q : Q$ содержит игроков из $T \setminus K$ и из $K \setminus T$, но не содержит игроков из $T \cap K\}$;
- $M_7 = \{Q : Q$ содержит игроков из $T \setminus K$ и из $K \setminus T$, и из $T \cap K\}$.

Заметим, что множество M_2 содержит единственную коалицию из t игроков (а именно коалицию T), а множество M_5 содержит единственную коалицию размера k (коалицию K).

В рамках общего случая (4.5) выполнена одна из двух альтернатив:

$$|T \cap K| = m < t < k, \tag{4.6}$$

$$|T \cap K| = m < t = k, \tag{4.7}$$

которые рассмотрим отдельно ниже.

Обозначение подмножества коалиций	Есть ли в коалиции $Q \in M_j$ игроки из определенного подмножества внутри $T \cup K$?		
	$T \setminus K$	$T \cap K$	$K \setminus T$
M_1	$+$	$-$	$-$
M_2	$+$	$+$	$-$
M_3	$-$	$+$	$-$
M_4	$-$	$-$	$+$
M_5	$-$	$+$	$+$
M_6	$+$	$-$	$+$
M_7	$+$	$+$	$+$

Таблица 2. Признаки подмножеств M_j множества всевозможных коалиций $M = \{Q \subset T \cup K, Q \neq \emptyset\}$.

	$\overbrace{\qquad\qquad}^{K}$	
$T \setminus K$	$T \cap K$	$K \setminus T$
$\underbrace{\qquad\qquad}_{T}$		

Таблица 3. Структура $T \cup K$.

При условии (4.6) выпишем более подробно слагаемые из $v(T \cup K)$ в левой части (4.4), используя обозначение $q = |Q|$ и полагая, что $\sum\limits_{q=n_1}^{n_2}(\cdot)$ не содержит слагаемых, а значит равна нулю, если $n_1 > n_2$.

$$v(T \cap K) + v(T \cup K) = v(T \cap K) + \sum_{q=2}^{t-1}\left(\sum_{Q \in M} v(Q)\right) +$$
$$+ \left\{\sum_{q=t, Q \in M_2} v(Q) + \sum_{\substack{q=t,\\ Q \in M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7}} v(Q)\right\} + \sum_{q=t+1}^{k-1}\left(\sum_{Q \in M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7} v(Q)\right) +$$
$$+ \left[\sum_{q=k, Q \in M_5} v(Q) + \sum_{\substack{q=k,\\ Q \in M_6 \cup M_7}} v(Q)\right] + \ldots. \tag{4.8}$$

В (4.8) первая сумма в фигурных скобках содержит единственное слагаемое $v(T)$, а первая сумма в квадратных скобках равна $v(K)$, остальные слагаемые неотрицательны. Следовательно, свойство (4.3) выполнено для альтернативы (4.6).

Приведем аналогичные выкладки при условии (4.7), когда коалиции T и K содержат равное число игроков.

$$v(T\cap K)+v(T\cup K)=v(T\cap K)+\sum_{q=2}^{t-1}\left(\sum_{Q\in M}v(Q)\right)+$$
$$+\left\{\sum_{q=t,Q\in M_2}v(Q)+\sum_{q=t,Q\in M_5}v(Q)+\sum_{\substack{q=t,\\ Q\in M_6\cup M_7}}v(Q)\right\}+\dots. \tag{4.9}$$

Здесь первая сумма в фигурных скобках равна $v(T)$, а вторая $v(K)$, значит (4.3) выполнено и для альтернативы (4.7).

Для частных случаев, когда по крайней мере одно из условий (4.5) не выполнено, в справедливости (4.4) легко убедиться непосредственной проверкой. Например, рассмотрим частный случай, когда $T\setminus K=\emptyset$ (а значит, $T\subset K$, $T\cap K=T$, $T\cup K=K$):

$$v(T\cup K)+v(T\cap K)=v(T)+v(K).$$

Остальные частные случаи проверяются аналогично. □

Из теоремы 4.1 следует, что кооперативная игра на взвешенной сети G_w с введенной характеристической функцией является выпуклой, а это значит, что C-ядро в данной игре непусто и вектор Шепли $Sh(v)=(Sh_1,\dots,Sh_n)$ принадлежит C-ядру (см., например, [16]).

В качестве количественной оценки «влиятельности» (важности, значимости) каждого игрока в различных сетях G_w можно использовать (см., например, [14]) отношение соответствующей компоненты вектора Шепли к $V(N)$:

$$\alpha_i=\frac{Sh_i}{V(N)}. \tag{4.10}$$

В дальнейшем показатель (4.10) будем называть выигрышем игрока $i\in N$ (зависящим от распределения весов на ребрах сети G_w, а в общем случае – от структуры сети).

Сеть G_w	α_P	α_S	α_E	α_A
Рис. 1	0.284	0.227	0.204	0.284
Рис. 2	0.252	0.252	0.234	0.261
Рис. 3	0.230	0.284	0.243	0.243
Рис. 4	0.261	0.239	0.239	0.261

Таблица 4. Оценки влиятельности игроков для сетей 1 – 4.

Результаты расчета оценок влиятельности (выигрышей) игроков для сетей на Рис. 1 – 4 представлены в Таблице 4.

Отметим, что полученные количественные оценки уровней влиятельности каждого игрока (религиозного течения власти) в различные периоды достаточно хорошо согласованы с известными историческими свидетельствами [6,19-22]. Так, например, из четырёх рассмотренных в статье периодов степень влиятельности (см. Таблицу 4) религиозной школы саддукеев была максимальной в период, отвечающий Рис. 3; в этот же период (правление Александра Янная) положение власти было наиболее шатким; а уровень влиятельности фарисеев был максимальным в периоды, соответствующие Рис. 1 и 4.

5. Свойство попарной устойчивости для взвешенных сетей

В работе [13] введено свойство попарной устойчивости сети (pairwise stability). Содержательно, сеть G называют попарно устойчивой при выполнении следующих двух условий:

- никакой паре игроков не выгодно «разрывать» существующую связь между ними;
- для любой пары игроков, не связанных ребром: если одному игроку выгодно установить связь, то другому – не выгодно.

Ниже распространим это определение на класс взвешенных знаковых полных сетей G_w. Оценкой $u_i(G_w)$ выгодности заданного распределения весов на ребрах сети G_w для каждого игрока $i \in N$ примем введенную выше оценку влиятельности (выигрыш) игрока

$$u_i(G_w) = \alpha_i = \frac{Sh_i}{V(N)}. \tag{5.1}$$

Пусть в сети G_w связь e между игроками i и j положительна: $w_e = w_{ij} > 0$. Обозначим через $G'_w = G'_w(i,j)$ взвешенную сеть, отличающуюся от G_w знаком связи между игроками i и j, причем модуль данной отрицательной связи примем минимально возможным (игроки i и j сменили доброжелательные отношения на враждебные, вес связи из заданного диапазона выбран ближе всего к нулю): $w'_{ij} = -1$. Поскольку в полных знаковых взвешенных сетях вес связи равный нулю (т.е. – отсутствие связи) недопустимо, предложенный подход представляется наиболее близким к классическому определению, введенному в [13] для сетей, в которых возможно удаление связи между некоторыми узлами.

Если в сети G_w связь e между игроками k и l отрицательна: $w_e = w_{kl} < 0$, обозначим через $G''_w = G''_w(k,l)$ взвешенную сеть, отличающуюся от G_w знаком связи между игроками k и l, причем модуль данной положительной связи примем минимально возможным (игроки k и l «примирились» с минимальным уровнем взаимной доброжелательности): $w''_{kl} = 1$.

Определение 5.1. *Взвешенная сеть G_w с фиксированным множеством игроков (вершин) N удовлетворяет свойству попарной устойчивости, если:*

- $\forall i,j \in N$: $w_{ij} > 0$, *выполнено*

$$\begin{cases} u_i(G_w) \geq u_i(G'_w(i,j)) \\ u_j(G_w) \geq u_j(G'_w(i,j)) \end{cases}; \tag{5.2}$$

- $\forall k,l \in N$: $w_{kl} < 0$, *выполнено*

$$\text{если } u_k(G''_w(k,l)) > u_k(G_w), \text{ то } u_l(G''_w(k,l)) < u_l(G_w). \tag{5.3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (полностью) сбалансированная взвешенная сеть G_w на Рис. 2 удовлетворяет свойству попарной устойчивости.

Покажем ниже, что (частично сбалансированная) сеть на Рис. 1 не удовлетворяет свойству попарной устойчивости (нарушается условие (5.2), однако (5.3) выполняется). Например, рассмотрим сеть $G''_w = G''_w(S,E)$, отличающуюся от исходной сети G_w на Рис. 1 весом ребра

AS: $w''_{SE} = -1$. Соответственно, для сети $G''_w = G''_w(S, E)$ изменятся значения ХФ $V(T)$ и вектор Шепли. В Таблице 5 для удобства сравнения приведены (округленные до 0,001) выигрыши игроков в исходной сети G_w и измененной сети $G''_w(S, E)$.

Рис. 1	α_P	α_S	α_E	α_A
Сеть G_w	0.284	0.227	0.204	0.284
Сеть G''_w	0.261	0.239	0.231	0.269

Таблица 5. Выигрыши игроков для сети G_w на Рис. 1 и измененной сети $G''_w(S, E)$.

Очевидно, что выигрыши обоих игроков S и E увеличиваются, если они «ссорятся», что противоречит условию (5.2) из определения попарной устойчивости. Однако, можно проверить, что, например, при изменении веса ребра AE и PE выполняется условие (5.3), т.е. враждебные отношения в данной сети устойчивы. Тем не менее, взвешенная сеть на Рис. 1 не удовлетворяет свойству попарной устойчивости. Аналогично проверяется, что (частично сбалансированная) сеть на Рис. 3 не удовлетворяет свойству попарной устойчивости (могут нарушаться оба условия из Опр. 5.1).

Отдельный интерес представляют результаты анализа попарной устойчивости для (полностью) сбалансированной сети G_w на Рис. 4. Условие (5.2) в этой сети выполнено для любой пары игроков (менять доброжелательные отношения на враждебные не выгодно ни одному из игроков). Например, в Таблице 6 приведены округленные значения выигрышей игроков в исходной сети G_w на Рис. 4 и измененной сети $G'_w(P, A)$ – выигрыши обоих игроков P и A уменьшаются в случае «ссоры».

Рис. 4	α_P	α_S	α_E	α_A
Сеть G_w	0.258	0.241	0.241	0.258
Сеть G'_w	0.192	0.307	0.307	0.192

Таблица 6. Оценки влиятельности игроков для сети G_w на Рис. 4 и сети $G'_w(P, A)$.

Однако второе условие (5.3) из определения попарной устойчивости нарушается для любой пары вершин, соединенных отрицательным ребром, и соответствующих измененных сетей $G''_w(A,S)$, $G''_w(P,E)$, $G''_w(A,E)$ и $G''_w(P,S)$.

Таким образом, из сбалансированности взвешенной сети G_w в общем случае не следует ее попарная устойчивость, и мы можем рассматривать свойство попарной устойчивости как дополнительный критерий устойчивости рассматриваемой взвешенной сети (сетевой модели взаимоотношений между игроками).

6. Заключение

Отметим вклад статьи в теорию и практику применения взвешенных знаковых сетей по следующим направлениям:

– предложен обоснованный способ введения характеристической функции, основанный на учете весов сбалансированных циклов, и доказана ее выпуклость;

– с использованием введенной ХФ и вектора Шепли получены количественные оценки влиятельности (выигрыши) игроков, зависящие от распределения весов ребер в сетевой модели;

– свойство попарной устойчивости распространено на новый класс взвешенных сетей, что дает исследователю дополнительный (к свойству сбалансированности) критерий устойчивости сети;

– возможность применения введенных теоретических понятий продемонстрирована на реальных исторических данных, а именно для сетевых моделей взаимоотношений религиозно-идеологических течений и власти в древней Иудее.

Авторы рассчитывают, что введенные в статье понятия и полученные результаты могут быть успешно применены для анализа других взвешенных сетей, моделирующих системы взаимоотношений сторон в различных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгакова М.А., Петросян Л.А. *Многошаговые игры с попарным взаимодействием на полном графе* // МТИиП. 2019. Т. 11, вып. 1. С. 3–20.

2. Мазалов В.В., Чиркова Ю.В. *Сетевые игры*. Изд-во Лань, 2023.

3. Петросян Л.А., Седаков А.А. *Многошаговые сетевые игры с полной информацией* // МТИиП. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 66–81.

4. Antal T., Krapivsky P.L., Redner S. *Social balance on networks: the dynamics of friendship and enmity* // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2006. Vol. 224(1-2). P. 130-136.

5. Aref S., Wilson M. C. *Measuring partial balance in signed networks* // Journal of Complex Networks. 2018. Vol. 6(4). P. 566-595.

6. Bickerman E. J. *The Jews in the Greek Age*. Harvard University Press, 1988.

7. Bolouki S., Nedich A., Basar T. *Social networks* // Handbook of Dynamic Game Theory. 2018. P. 907-949.

8. Cartwright D., Harary F. *Structural balance: a generalization of Heider's theory* // Psychological review. 1956. Vol. 63(5). P. 277-293.

9. Estrada E. *Rethinking structural balance in signed social networks* // Discrete Applied Mathematics. 2019. Vol. 268. P. 70-90.

10. Gershowitz U., Kuzyutin D. *The Resistance to Aristotelianism in Jewish Culture: Game-Theoretical Analysis of the Conflict around Maimonides' Manuscripts in the 13th century* // Schole. 2021. Vol. 15(1). P. 126–160.

11. Harary F. *On the notion of balance of a signed graph* // The Michigan Mathematical Journal. 1953. Vol. 2(2). P. 143-146.

12. Heider F. *Attitudes and cognitive organization* // The Journal of psychology. 1946. Vol. 21(1). P. 107-112.

13. Jackson M.O., Wolinsky A. *A Strategic Model of Social and Economic Networks* // Journal of Economic Theory. 1996. Vol. 71(1). P. 44-74.

14. Li J., Tur A., Zavrajnov M. *Importance of agents in networks: clique based game-theoretic approach* // Contributions to Game Theory and Management. 2022. Vol. 15. P. 189–199.

15. Mazalov V.V., Trukhina L.I. *Generating functions and the Myerson vector in communication networks* // Diskr. Mat. 2014. Vol. 26(3). P. 65–75.

16. Moulin H. *Axioms of cooperative decision making.* Cambridge university press, 1991.

17. Newman M. *Networks.* Oxford University Press (2nd edn), 2018.

18. Sun P., Parilina E.M. *Stable and efficient networks with neighborhood-influenced externalities* // Journal of Public Economic Theory. 2024. Vol. 26(3). [e12699].

19. Tantlevskij I. R. *Theological and ideological aspects of jewish identity formation within sectarian judaism in the hellenistic era (on the example of the qumran community)* // Schole. 2024. Vol. 18(2).

20. Tantlevskij I. R., Gromova E.V., Gromov D. *Network Analysis of the Interaction between Different Religious and Philosophical Movements in Early Judaism* // Philosophies. 2021. Vol. 6, no. 1, 2. P. 1-13.

21. Tantlevskij I., Kuzyutin D., Smirnova N. *A Signed Network Model of the Interaction Between Religious Movements and Authority in Judea* // Communications in Computer and Information Science. 2024. Vol. 2211. P. 32-45.

22. Tantlevskij I. R., Kuzyutin D. V., Smirnova N. V., Tantlevskaya E. I. *Models of Mutual Influence of Jewish Sects and Ideological Struggles in Judea in the 2nd-1st centuries BCE* // Vestnik RHGA. 2023. Vol. 24(4). P. 136–148.

CHARACTERISTIC FUNCTION FOR NETWORK MODEL OF THE INTERACTION BETWEEN RELIGIOUS MOVEMENTS

Mariia A. Bulgakova, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc., associate professor (m.bulgakova@spbu.ru),
Denis V. Kuzyutin, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc., associate professor (d.kuzyutin@spbu.ru),
Nadezhda V. Smirnova, HSE University, Cand.Sc., assistant professor (nvsmirnova@hse.ru),
Igor R. Tantlevskij, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc., professor (i.tantlevsky@spbu.ru).

Abstract: This article contributes to the theory of structural balance in signed networks. For a class of so-called weighted networks, where edge weights reflect the strength of links, we introduce a characteristic function (CF) based on the weights of balanced cycles. A convexity theorem for this CF is proved for a complete network with finite set of vertices. Using the introduced CF, we provide quantitative estimates of players' power based on the distribution of weights on the network edges. The well-known property of pairwise stability for networks is extended to this class of weighted networks. The results are demonstrated using network models of the relationships between religious movements and authority in Judea (2nd-1st centuries BCE), based on known historical evidence.

Keywords: networks, signed graphs, structural balance, weighted network, cooperative game, characteristic function, convex game, the Shapley value, pairwise stability.