Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.2, с. 50–76

УДК 519.83
ББК 22.18

ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ ИГР С ПРИЛОЖЕНИЕМ К МОДЕЛИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ РЕЧНОЙ СЕТИ*

Арсений А. Вилисов
Артем А. Седаков
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
e-mail: a.sedakov@spbu.ru

В работе исследуется класс линейных по переменной состояния динамических сетевых игр. В качестве решения выбрано и охарактеризовано частично кооперативное равновесие, представляющее промежуточный тип поведения между некооперативным и кооперативным и допускающее формирование одной коалиции игроков. На его основе определена характеристическая функция и динамически устойчивые схемы распределения максимального суммарного выигрыша. Результаты адаптированы к модели загрязнения речной сети в условиях конкуренции игроков-фирм и обобщены на случай древовидных графов. Установлено, что при отсутствии перераспределения выигрышей структура графа позволяет определить игроков с различной склонностью к кооперации, однако применение устойчивых схем распределения на основе вектора Шепли и CIS-значения мотивирует всех игроков к полной кооперации.

Ключевые слова: динамические игры, сети, загрязнение речной сети, кооперация, динамическая устойчивость.

Поступила в редакцию: 07.05.26 *После доработки*: 29.05.26 *Принята к публикации*: 01.06.26

©2026 А.А. Вилисов, А.А. Седаков

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00817, https://rscf.ru/project/25-21-00817/.

1. Введение

Традиционные подходы к регулированию загрязнения водоемов, опирающиеся на мониторинг воды и штрафные санкции, нередко не учитывают пространственное расположение источников выбросов и их взаимное влияние. В речных системах это может приводить к тому, что даже одинаковые объемы загрязнений от различных производителей формируют неравномерное распределение загрязнения: от вышестоящих производств оно переносится вниз по течению, увеличивая экологические издержки нижележащих участников. Формализация этих процессов в теоретико-игровых моделях позволяет учитывать пространственную асимметрию при оценке регуляторных мер, а также анализировать условия экономической целесообразности кооперации.

К первым работам, посвященным динамическим моделям трансграничных загрязнений, можно отнести работы [14, 16], учитывающее асимметрию эффектов от производимого игроками загрязнения друг на друга. Отдельные аспекты получили дальнейшее развитие в работах [1, 9, 13, 22], моделирующих взаимодействие двух и более участников. Традиционно в подобной литературе изучаются конкурентное и кооперативное взаимодействие, где классическими решениями выступают равновесие по Нэшу или же решения кооперативных игр с трансферабельной полезностью. В упомянутых выше работах, а также в работах [12, 15, 24] перед исследователями ставятся задачи определения индивидуальных объемов загрязнения, производимого вовлеченными сторонами, анализа финансовых результатов в зависимости от типа принимаемого решения, а также оценки размеров инвестиций, необходимых для модернизации отдельных производств с целью снижения затрат на природоохранные мероприятия и повышения их эффективности.

В работе [22] для динамической сетевой модели трансграничного загрязнения речной сети, задаваемой простым путем, установлено, что кооперация игроков приводит к двум положительным эффектам: а) суммарный выигрыш игроков максимален и б) совокупный объем загрязнения меньше, чем в равновесии по Нэшу. В то же время показано, что, хотя суммарный выигрыш максимален, выигрыш некоторых игроков остается ниже, чем в равновесии по Нэшу. Это

означает, что без дополнительных стимулов участие таких игроков в кооперации экономически нецелесообразно. В литературе предложены различные подходы к стимулированию кооперативного поведения [3, 11, 18, 25]. В настоящей работе используются механизмы, удовлетворяющие условию динамической устойчивости.

Дальнейшая структура работы следующая. В разделе 2 мы приведем необходимые предварительные сведения. В разделе 3 охарактеризуем частично кооперативное равновесие для линейных по переменной состояния динамических сетевых игр общего вида, как некоторый промежуточный тип поведения игроков между некооперативным и кооперативным. Там же на основе частично кооперативного равновесия построим характеристическую функцию, которая дает возможность реализовывать динамически устойчивые кооперативные решения, тем самым мотивируя игроков к кооперации. В разделе 4 адаптируем результаты к модели загрязнения речной сети путем распространения анализа с линейных структур на древовидные графы.

2. Предварительные сведения

Основой рассматриваемой модели является динамическая игра с сетевыми эффектами и дискретным временем, предложенная в [22]. Пусть $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ – конечный набор шагов в игре, а $N = \{1, \ldots, n\}$ – конечное множество игроков. Предполагается, что взаимодействие между игроками осуществляется посредством ориентированного графа (N, g), множество вершин которого совпадает с множеством игроков (тем самым отождествляя вершину графа с игроком), а множество ребер представляет собой некоторое заданное подмножество $g \subseteq \{(i, j) : i, j \in N,\ i \neq j\}$. В дальнейшем под записью g будем понимать граф (N, g). Обозначим через $N_i^{in} = \{j \in N : j \xrightarrow{g} i\}$ множество всех *предшественников* игрока i в графе g (вершины, от которых существует путь к i в g), а через $N_i^{out} = \{j \in N : i \xrightarrow{g} j\}$ – множество всех *преемников* i в g (вершины, к которым существует путь от i в g), а также $\bar{N}_i^{in} = N_i^{in} \cup \{i\}$ и $\bar{N}_i^{out} = N_i^{out} \cup \{i\}$.

Пусть $u_i(t)$ – действие игрока i на шаге $t \in \mathcal{T} \setminus T$, принадлежащее некоторому компакту $U_i \subset \mathbb{R}$, $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ – набор действий игроков на этом шаге, $u_i = (u_i(0), \ldots, u_i(T-1))$ – последовательность

действий игрока i, а $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Пространство состояний обозначим через $X \subset \mathbb{R}^n$, где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in X$ – значение вектора состояний на шаге $t \in \mathcal{T}$.

Предполагается, что динамика состояния описывается линейным уравнением вида

$$x_i(t+1) = b_{i0}x_i(t) + b_{ii}u_i(t) + \sum_{j \in N_i^{in}} b_{ij}u_j(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T, \quad i \in N,$$

при заданных начальных состояниях $x_i(0) = x_{i0}$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$. Пусть $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$.

Выигрыш игрока $i \in N$ имеет вид:

$$J_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t h_{it}(x_i(t), u(t)) + \rho^T h_{iT}(x_i(T)),$$

где h_{it} — выигрыш игрока i на шаге t, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{it}(x_i(t), u(t)) = a_{i0}u_i(t) + a_{i1}u_i^2(t) + a_{i2}u_i(t) \sum_{j \neq i} u_j(t) + \\ + a_{i3}x_i(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T, \\ h_{iT}(x_i(T)) = a_{i4}x_i(T), \end{aligned}$$

при $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Параметры модели удовлетворяют ограничениям $a_{i1} < 0$, $a_{i3} \neq 0$, $b_{ii} \neq 0$ для всех $i \in N$. Первое условие гарантирует, что h_{it} строго вогнута по $u_i(t)$. Второе условие показывает явное влияние переменной состояния на текущий выигрыш, а последнее условие – явное влияние игрока на свою переменную состояния.

В играх, линейных по переменной состояния, равновесие по Нэшу в классе программных стратегий является «вырожденным» равновесием по Нэшу в классе позиционных стратегий, независящим от переменной состояния. Это было показано в работах [6, 10] для дифференциальных игр конечной продолжительности и может быть перенесено на случай игр с дискретным временем. Так, с учетом заданного начального состояния x_0 под *стратегией* игрока i будем понимать последовательность его действий u_i, а в качестве функции выигрыша этого игрока – $J_i(u)$ при заданном наборе u, предполагая,

что все текущие значения состояний $x_i(t)$ выражены через начальное состояние x_0 и набор u.

Набор стратегий $u^{NE} = (u_1^{NE}, \ldots, u_n^{NE})$ называется *равновесием по Нэшу*, если его компоненты u_i^{NE} для всех $i \in N$ определяются следующим образом: $u_i^{NE} = \arg\max\limits_{u_i} J_i(u_i, u_{-i}^{NE})$, где под записью (u_i, u_{-i}^{NE}) понимается $(u_1^{NE}, \ldots, u_{i-1}^{NE}, u_i, u_{i+1}^{NE}, \ldots, u_n^{NE})$. Набор стратегий $u^C = (u_1^C, \ldots, u_n^C)$ называется *кооперативным* набором, если он максимизирует сумму выигрышей игроков: $u^C = \arg\max\limits_{u} \sum\limits_{i \in N} J_i(u)$. В рассматриваемой модели вид стратегий, формирующих u^{NE} и u^C, можно найти в [22].

3. Кооперативное поведение

Оптимальность кооперативного набора u^C не означает «справедливость» вознаграждения каждого игрока при достижения ими максимального суммарного выигрыша. Так, выигрыш отдельно взятого игрока при реализации такого набора может оказаться меньше его выигрыша в равновесии по Нэшу (т.е. $J_i(u^C) < J_i(u^{NE})$ для некоторого $i \in N$), делая кооперацию этого игрока с остальными нецелесообразной. Максимизация суммарного выигрыша игроков при дополнительных ограничениях вида $J_i(u) \geqslant J_i(u^{NE})$ для всех $i \in N$, т.е. с учетом *индивидуальной рациональности*, разве что уменьшит оптимальный исход. По этой причине будем рассматривать механизмы, стимулирующие кооперацию на основе кооперативных игр с трансферабельной полезностью (ТП-игр). В таких играх ключевым элементом является характеристическая функция (ХФ) $v : 2^N \to \mathbb{R}$, которая каждому непустому подмножеству (коалиции) $S \subseteq N$ ставит в соответствие ее *силу*, при этом полагая $v(\varnothing) = 0$. Множество N традиционно называют максимальной коалицией. В литературе есть ряд подходов к заданию ХФ. Стратегический подход к определению так называемых α- и β-ХФ для игр в нормальной форме был предложен в [4, 17], как максиминные и минимаксные значения специально построенных игр с нулевой суммой двух лиц — коалиции и ее дополнения. В экономических приложениях такие подходы мало применимы, поскольку, действуя против коалиции, не входящие в нее игроки могут заметно ухудшить свое положение. По этой причине зачастую предпочтительными оказываются подходы, базирующиеся на равно-

весии по Нэшу. Например, в работах [5, 11, 19, 20, 21] предлагается определять выигрыш коалиции в равновесии по Нэшу в соответствующим образом построенной некооперативной игре (так называемые γ- и δ-подходы). Мы будем придерживаться γ-подхода [5, 20], согласно которому сила коалиции определяется как ее выигрыш в равновесии по Нэшу в игре, в которой члены коалиции действуют совместно, максимизируя их общий выигрыш, а все остальные игроки действуют независимо, максимизируя собственные выигрыши.

3.1. Характеристическая функция

Определим формально γ-ХФ. Для коалиции $S \subset N$ положим $v(S) = \sum\limits_{i \in S} J_i(u^S)$, где компоненты набора u^S являются решением следующих оптимизационных задач:

$$u_S^S = \arg\max_{u_S} \sum_{i \in S} J_i(u_S, u_{-S}^S),$$
$$u_i^S = \arg\max_{u_i} J_i(u_i, u_{-i}^S), \quad i \notin S.$$

Здесь под u_S понимается набор стратегий игроков из коалиции S. Будем предполагать, что для каждой коалиции S набор u^S является единственным. Для максимальной коалиции N величина $v(N) = \sum\limits_{i \in N} J_i(u^C)$ представляет собой суммарный выигрыш всех игроков, соответствующий кооперативному набору u^C, а при выборе одноэлементной коалиции S, $|S| = 1$, $v(S)$ представляет собой выигрыш составляющего эту коалицию игрока в равновесии по Нэшу u^{NE}.

Введем следующие обозначения:

$$\chi_i(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-2} (\rho b_{i0})^\tau + \frac{a_{i4}}{a_{i3}} (\rho b_{i0})^{T-t-1}, & t \in \mathcal{T} \setminus \{T-1, T\}, \\ \frac{a_{i4}}{a_{i3}}, & t = T-1, \end{cases}$$

а также $\kappa_i(S,t) = a_{i0} + \rho \sum\limits_{j \in S} a_{j3} b_{ji} \chi_j(t)$, $\widehat{\kappa}_i(S,t) = \frac{\kappa_i(S,t)}{2a_{i1} - a_{i2}}$, $\widetilde{\kappa}_i(S,t) = \frac{\kappa_i(S,t)}{a_{i1} - a_{i2}}$, для некоторого игрока i и коалиции S, одновременно полагая $a_{i1} \neq a_{i2}$ и $2a_{i1} \neq a_{i2}$.

Охарактеризуем набор u^S, который будем называть *частично кооперативным равновесием*, связанным с коалицией S.

Теорема 3.1. *Частично кооперативное равновесие u^S формируют стратегии*

$$u_i^S(t) = -\widehat{a}_{i2}\cdot\frac{\sum\limits_{l\in S}\left(a_{l2}\cdot\frac{\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}}-1\right)\widetilde{\kappa}_l(\bar{N}_l^{out}\cap S,t)-2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{\kappa}_j(\{j\},t)}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}-\frac{\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}\cdot\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}}}-$$
$$-\widehat{\kappa}_i(\{i\},t),\qquad i\notin S,$$

игроков, не принадлежащих коалиции S, вместе со стратегиями

$$u_i^S(t)=\sum_{l\in S}\left[\frac{\left(\frac{\widetilde{a}_{i2}\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}-\frac{\widetilde{a}_{i2}}{a_{i2}}\right)\left(\frac{\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}-a_{l2}\right)}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}-\frac{\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\widetilde{a}_{i2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}\right]\frac{\widetilde{\kappa}_l(\bar{N}_l^{out}\cap S,t)}{2}+$$
$$+\sum_{l\in N\setminus S}\left[\frac{\left(\frac{\widetilde{a}_{i2}\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}-\frac{\widetilde{a}_{i2}}{a_{i2}}\right)\frac{\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}-\frac{\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}}\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\widetilde{a}_{i2}}{2+\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}+2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}\right]\widehat{\kappa}_l(\{l\},t)-\frac{\widetilde{\kappa}_i(\bar{N}_i^{out}\cap S,t)}{2},\ i\in S,$$

игроков, входящих в эту коалицию, где $t\in\mathcal{T}\setminus\{T\}$.

Доказательство. Воспользуемся принципом максимума. Составим гамильтониан $\mathcal{H}_S^t=\mathcal{H}_S(t,x(t),u(t),\lambda^S(t+1))$ для игрока-коалиции S, где $t\in\mathcal{T}\setminus\{T\}$, а λ^S – набор сопряженных переменных:

$$\mathcal{H}_S^t=\sum_{i\in S}\rho^t\left(a_{i0}u_i(t)+a_{i1}u_i^2(t)+a_{i2}u_i(t)\sum_{j\neq i}u_j(t)+a_{i3}x_i(t)\right)+$$

$$+\sum_{j\in N}\lambda_j^S(t+1)\Bigg(b_{j0}x_j(t)+b_{jj}u_j(t)+\sum_{k\in N_j^{in}}b_{jk}u_k(t)\Bigg).$$

Выпишем условия оптимальности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}_S^t}{\partial u_i(t)}&=\rho^t\Bigg(a_{i0}+2a_{i1}u_i(t)+a_{i2}\sum_{j\neq i}u_j(t)+\sum_{j\in S\setminus\{i\}}a_{j2}u_j(t)\Bigg)+\\&\quad+\sum_{j\in\bar N_i^{out}}b_{ji}\lambda_j^S(t+1)=\\&=\rho^t\Bigg(a_{i0}+2(a_{i1}-a_{i2})u_i(t)+a_{i2}\sum_{j\in N}u_j(t)+\sum_{j\in S}a_{j2}u_j(t)\Bigg)+\\&\quad+\sum_{j\in\bar N_i^{out}}b_{ji}\lambda_j^S(t+1)=0,\quad i\in S,\end{aligned}\tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}_S^t}{\partial x_i(t)}=\lambda_i^S(t)=\begin{cases}\rho^t a_{i3}+b_{i0}\lambda_i^S(t+1), & i\in S,\\ b_{i0}\lambda_i^S(t+1), & i\notin S,\end{cases}\tag{3.1b}$$

с граничным условием

$$\lambda_i^S(T)=\begin{cases}\rho^T a_{i4}, & i\in S,\\ 0, & i\notin S.\end{cases}$$

Составим теперь гамильтониан $\mathcal{H}_j^t=\mathcal{H}_j(t,x(t),u(t),\lambda_j(t+1))$ для игрока $j\notin S$, где $t\in\mathcal{T}\setminus\{T\}$, а λ_j — соответствующий набор сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j^t&=\rho^t\Bigg(a_{j0}u_j(t)+a_{j1}u_j^2(t)+a_{j2}u_j(t)\sum_{k\neq j}u_k(t)+a_{j3}x_j(t)\Bigg)+\\&\quad+\sum_{k\in N}\lambda_{jk}(t+1)\Bigg(b_{k0}x_k(t)+b_{kk}u_k(t)+\sum_{l\in N_k^{in}}b_{kl}u_l(t)\Bigg).\end{aligned}$$

Условия оптимальности принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}_j^t}{\partial u_j(t)}&=\rho^t\Bigg(a_{j0}+(2a_{j1}-a_{j2})u_j(t)+a_{j2}\sum_{k\in N}u_k(t)\Bigg)+\\&\quad+\sum_{k\in\bar N_j^{out}}b_{kj}\lambda_{jk}(t+1)=0,\end{aligned}\tag{3.2a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_j^t}{\partial x_i(t)} = \lambda_{ji}(t) = \begin{cases} \rho^t a_{j3} + b_{j0}\lambda_{jj}(t+1), & i = j, \\ b_{j0}\lambda_{ji}(t+1), & i \neq j, \end{cases} \tag{3.2b}$$

с граничным условием

$$\lambda_{ji}(T) = \begin{cases} \rho^T a_{j4}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С учетом введенных обозначений можно найти сопряженные переменные, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям, в явном виде:

$$\lambda_i^S(t) = \begin{cases} \rho^t a_{i3}\chi_i(t-1), & i \in S, \\ 0, & i \notin S, \end{cases} \qquad \lambda_{ji}(t) = \begin{cases} \rho^t a_{j3}\chi_j(t-1), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Теперь условия оптимальности (3.1a) и (3.2a) примут вид:

$$2u_i(t) + \widetilde{a}_{i2}\sum_{j\in N} u_j(t) + \frac{\widetilde{a}_{i2}}{a_{i2}}\sum_{j\in S} a_{j2}u_j(t) + \widetilde{\kappa}_i(\bar{N}_i^{out} \cap S, t) = 0, \quad i \in S, \tag{3.3a}$$

$$u_i(t) + \widehat{a}_{i2}\sum_{j\in N} u_j(t) + \widehat{\kappa}(\{i\}, t) = 0, \quad i \notin S. \tag{3.3b}$$

Просуммировав первую группу равенств (3.3a) по $i \in S$, а вторую группу (3.3b) по $i \notin S$, получим выражение для суммы:

$$\sum_{i\in N} u_i(t) = -\frac{\sum\limits_{j\in S}\frac{\widetilde{a}_{j2}}{a_{j2}} \cdot \sum\limits_{j\in S} a_{j2}u_j(t) + \sum\limits_{j\in S}\widetilde{\kappa}_j(\bar{N}_j^{out} \cap S, t) + 2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{\kappa}_j(\{j\}, t)}{2 + \sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2} + 2\sum\limits_{j\in N\setminus S}\widehat{a}_{j2}}.$$

Умножая каждое уравнение (3.3a) на a_{i2} и суммируя по всем $i \in S$, получим

$$\sum_{i\in S} a_{i2}u_i(t) = -\frac{\sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}a_{j2} \cdot \sum\limits_{j\in N} u_j(t) + \sum\limits_{j\in S} a_{j2}\widetilde{\kappa}_j(\bar{N}_j^{out} \cap S, t)}{2 + \sum\limits_{j\in S}\widetilde{a}_{j2}}.$$

Выражения стратегий в формулировке теоремы следуют после подстановки полученных выше сумм в (3.3a) и (3.3b). □

Существенного упрощения стратегий, формирующих частично кооперативное равновесие и представленных в теореме 3.1, можно добиться, если положить коэффициент $a_{i2} = 0$ для каждого игрока. В этом случае

$$u_i^S(t) = \begin{cases} -\dfrac{a_{i0} + \rho \sum\limits_{j \in \bar{N}_i^{out} \cap S} a_{j3} b_{ji} \chi_j(t)}{2a_{i1}}, & i \in S, \\ -\dfrac{a_{i0} + \rho a_{i3} b_{ii} \chi_i(t)}{2a_{i1}}, & i \notin S, \end{cases} \tag{3.4}$$

и стратегия каждого игрока коалиции зависит от множества его преемников в графе (их расположения) из той же коалиции.

Отметим, что приведенное утверждение, позволяющее определить ХФ в ТП-игре, дает возможность изучения самого частично кооперативного равновесия – равновесия Нэшу в ситуации, когда часть игроков сформировала коалицию и действует в ее интересах. Однако, здесь мы фокусируемся именно на побуждении игроков к кооперации.

3.2. Кооперативное решение и процедура распределения дележа

Имея ХФ, можно говорить о кооперативном решении ТП-игры – правиле, которое каждой такой игре однозначным образом ставит в соответствие подмножество $\mathcal{M}(v) \subset \mathbb{R}^n$, причем сумма компонент любого элемента $\xi(v) = (\xi_1(v), \ldots, \xi_n(v)) \in \mathcal{M}(v)$ равна $v(N)$. Величина $\xi_i(v)$ показывает часть общего выигрыша $v(N)$ максимальной коалиции, которую получает игрок i при кооперации всех игроков для выбранного $\xi(v) \in \mathcal{M}(v)$. В практических задачах часто используются *одноточечные* кооперативные решения, для которых $|\mathcal{M}(v)| = 1$. Яркими представителями таких решений являются CIS-значение $\mathrm{CIS}(v) = (\mathrm{CIS}_1(v), \ldots, \mathrm{CIS}_n(v))$ [8] и вектор Шепли $\mathrm{Sh}(v) = (\mathrm{Sh}_1(v), \ldots, \mathrm{Sh}_n(v))$ [23]. Их компоненты определяются следующим образом:

$$\mathrm{CIS}_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{n}\Big(v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})\Big), \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{S \subseteq N:\, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})), \tag{3.6}$$

где $s = |S|$. Для каждого из решений сумма компонент равна $v(N)$, т.е. при кооперации всех игроков максимальный суммарный выигрыш распределяется между ними без остатка. Однако, в *существенных* ТП-играх[1] CIS-значение удовлетворяет условию индивидуальной рациональности: $\mathrm{CIS}_i(v) \geqslant J_i(u^{NE}) = v(\{i\})$ и, следовательно, является *дележом*, когда для вектора Шепли это условие не гарантируется ввиду нарушения *супераддитивности* ХФ[2]. В то же время для специальных классов ТП-игр существует линейная связь между вектором Шепли и CIS-значением [7, 8], что позволяет аппроксимировать первое решение вторым.

В динамических играх важным свойством кооперативного решения является *динамическая устойчивость* (состоятельность во времени) [2]. Под этим подразумевается то, что при развитии игры вдоль кооперативной траектории $x^C(t)$, соответствующей набору u^C, кооперативное решение, согласно которому был получен дележ на начальном шаге, будет порождать дележ аналогичной структуры и на любом последующем шаге. Следовательно, игрокам не выгодно отклоняться от принятого в начальный момент решения.

Рассмотрим одноточечное кооперативное решение, содержащее единственный элемент $\xi(v) \in \mathcal{M}(v)$. Кооперативное решение $\mathcal{M}(v)$ является динамически устойчивым, если для каждого $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ имеет место равенство

$$\xi_i(v) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \rho^\tau h_{i\tau}(x_i^C(\tau), u^C(\tau)) + \rho^t \xi_i(v_t). \tag{3.7}$$

Здесь $\xi(v_t) = (\xi_1(v_t), \ldots, \xi_n(v_t)) \in \mathcal{M}(v_t)$ принадлежит тому же решению, но уже соответствующему ХФ v_t, которая определена в том же смысле, что и ХФ v, только в подыгре, начинающейся на шаге t из начального состояния $x^C(t)$. Ввиду частого нарушения динамической устойчивости кооперативных решений, воспользуемся процедурой распределения дележа (ПРД) $\xi(v) \in \mathcal{M}(v)$ (см. [3]), обозначаемой β, которая определяется из соотношений:

---

[1]При $v(N) > \sum\limits_{j \in N} v(\{j\})$.

[2]Свойство означает, что $v(S_1 \cup S_2) \geqslant v(S_1) + v(S_2)$ для любых непересекающихся коалиций S_1 и S_2.

$$\sum_{t=0}^{T} \rho^t \beta_{it} = \xi_i(v), \quad i \in N,$$
$$\sum_{i \in N} \beta_{it} = \sum_{i \in N} h_{it}(x_i^C(t), u^C(t)), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\},$$
$$\sum_{i \in N} \beta_{iT} = \sum_{i \in N} h_{iT}(x_i^C(T)).$$

Величина β_{it} представляет собой выплату игроку i на шаге t при реализации кооперативного набора u^C вместо фактического выигрыша $h_{it}(x_i^C(t), u^C(t))$ этого игрока на данном шаге. Условием динамической устойчивости ПРД β для $\xi(v)$ будет аналогичное (3.7) равенство $\xi_i(v) = \sum\limits_{\tau=0}^{t-1} \rho^\tau \beta_{i\tau} + \rho^t \xi_i(v_t)$, выполняемое для каждого $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$. Такая ПРД будет иметь вид

$$\beta_{it} = \begin{cases} \xi_i(v_t) - \rho \xi_i(v_{t+1}), & t \neq T, \\ \xi_i(v_T) = h_{iT}(x_i^C(T)), & t = T. \end{cases}$$

Используя динамически устойчивую ПРД игроки на любом шаге игры не будут иметь оснований для пересмотра кооперативного решения как первоначально выбранного.

4. Модель загрязнения речной сети

Для проведения качественного анализа будем рассматривать модель загрязнения речной сети в условиях рыночной конкуренции игроков-фирм, расположенных вдоль ее течения (см. подробное описание в [22]). В процессе производства эти игроки загрязняют воду, при этом объемы загрязнений одной из них негативно сказывается на других, расположенных ниже по течению. В рамках этой модели под графом g понимается структура реки[3], с расположенными в вершинах игроками-фирмами, под $u_i(t)$ понимается объем производимого загрязнения от игрока i на шаге t, а под $x_i(t)$ – текущий объем загрязнения от игрока (в вершине) i. Если граф представляет собой дерево, направленное к корню, тогда для каждого игрока i обозначим через ν_i его высоту относительно самых дальних от корня

[3]В данной работе вместо графа, представляющего собой простой путь, рассматривается дерево.

листьев (они имеют высоту равную 1), а высоту же корня обозначим за m. В уравнении динамики состояния и выражениях текущих выигрышей игроков положим следующие параметры: $b_{i0} = \alpha$, $b_{ij} = \delta^{\nu_i - \nu_j}$, $a_{i0} = a - c$, $a_{i1} = -1$, $a_{i2} = -b$, $a_{i3} = a_{i4} = -d$. Тогда

$$x_i(t+1) = \alpha x_i(t) + \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} \delta^{\nu_i - \nu_j} u_j(t), \tag{4.1}$$

$$h_{it}(x_i(t), u(t)) = \left(a - u_i(t) - b \sum_{j \neq i} u_j(t)\right) u_i(t) - c u_i(t) - d x_i(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}, \tag{4.2}$$

$$h_{iT}(x_i(T)) = -d x_i(T). \tag{4.3}$$

Коэффициент $\alpha \in [0, 1]$ отражает естественное поглощение загрязнения за один шаг, $\delta \in (0, 1]$ показывает на сколько загрязнение одного игрока воздействуют на другого в зависимости от расстояния между ними. Обратная функция спроса задается выражением $p_i(u(t)) = a - u_i(t) - b \sum\limits_{j \neq i} u_j(t)$ и показывает зависимость между ценой товара и объемом загрязнения (предполагая между ним и объемом производства однозначное соответствие) игрока i и его конкурентов. Затраты на производство единицы загрязнения и штрафы за единицу загрязнения в текущем общем уровне равны c и d, соответственно. Параметры удовлетворяют естественным условиям: $a > c > 0$, $d > 0$, $b \geqslant 0$.

Из теоремы 3.1 получаем вид стратегий, образующих частично кооперативное равновесие в рассматриваемой модели:

$$u_i^S(t) = \begin{cases} \dfrac{b\Big(\frac{4+b(n-s-2)}{2} \sum\limits_{l \in S} \widetilde{\kappa}_l(\bar{N}_l^{out} \cap S, t) + (2-b) \sum\limits_{l \in N \setminus S} \widehat{\kappa}_l(\{l\}, t)\Big)}{4 + 2b(n+s-3) + b^2(n(s-2) - s^2 + 2)} - \\ \qquad - \dfrac{\widetilde{\kappa}_i(\bar{N}_i^{out} \cap S, t)}{2}, \quad i \in S, \\ - \dfrac{b\Big((b-1) \sum\limits_{l \in S} \widetilde{\kappa}_l(\bar{N}_l^{out} \cap S, t) - (2 + b(s-2)) \sum\limits_{l \in N \setminus S} \widehat{\kappa}_l(\{l\}, t)\Big)}{4 + 2b(n+s-3) + b^2(n(s-2) - s^2 + 2)} - \\ \qquad - \widehat{\kappa}_i(\{i\}, t), \quad i \notin S. \end{cases}$$

Его дальнейшее упрощение осложняется тем, что для каждой коалиции S и ее выбранного игрока l в графе g множество преемников

этого игрока, принадлежащих той же коалиции, т.е. $\bar{N}_l^{out} \cap S$, свое. Однако для равновесия по Нэшу или кооперативного набора, дальнейшее упрощение возможно:

$$u_i^{NE}(t) = \frac{a - c - \rho d \chi(t)}{2 + b(n-1)}, \qquad u_i^{C}(t) = \frac{a - c - \rho d \chi(t) \sigma_i}{2(1 + b(n-1))},$$

где $\sigma_i = \frac{b\Delta - (1+b(n-1))\Delta_i}{b-1}$, $\Delta_i = \sum\limits_{j \in \bar{N}_i^{out}} \delta^{\nu_j - \nu_i}$ и $\Delta = \sum\limits_{i \in N} \Delta_i$.

Проведем анализ выигрышей игроков при трех типах поведения, а именно, в равновесии по Нэшу, реализации частично кооперативного равновесия и кооперативного набора стратегий. Здесь дополнительно будем предполагать, что $b = 0$ и $\delta = 1$. Применительно к рассматриваемой модели загрязнения речной сети выбранное значение параметра b соответствует независимым рынкам, а выбор δ означает, что загрязнение от всех предшественников игрока доходит до него в полном объеме без естественного поглощения.

Из вида (3.4) заключаем:

$$u_i^S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(a - c - \rho d \chi(t) |\bar{N}_i^{out} \cap S|\Big), & i \in S, \\ \frac{1}{2}(a - c - \rho d \chi(t)) = u_i^{NE}(t), & i \notin S, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $\chi(t)$ есть функция $\chi_i(t)$, в обозначении которой опущен индекс игрока ввиду одинаковых параметров для каждого из них[4]. Тогда можно записать выигрыш игрока $i \in S$, входящего в коалицию, в частично кооперативном равновесии:

$$J_i(u^S) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\rho^t}{4} \Big[(a-c)^2 - 2(a-c)\rho d \chi(t) |\bar{N}_i^{in}| + \\ + (\rho d \chi(t))^2 \Big(2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap S| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 + 2|\bar{N}_i^{in} \setminus S| \Big) \Big]. \tag{4.5}$$

[4]Поскольку стратегии игроков вне коалиции S совпадают с равновесными по Нэшу, то построенная согласно γ-подходу ХФ совпадает с ХФ, определяемой в соответствии с δ-подходом, когда коалиция S выбирает наилучший ответ на равновесные по Нэшу стратегии не входящих в нее игроков [21].

Из этого выражения, как частные случаи, получим выигрыши в равновесии по Нэшу и при кооперативном поведении:

$$J_i(u^{NE}) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\rho^t}{4} \Big[(a-c)^2 - 2(a-c)\rho d\chi(t)|\bar{N}_i^{in}| + \\ + (\rho d\chi(t))^2 \left(2|\bar{N}_i^{in}| - 1\right) \Big], \tag{4.6}$$

$$J_i(u^{C}) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\rho^t}{4} \Big[(a-c)^2 - 2(a-c)\rho d\chi(t)|\bar{N}_i^{in}| + \\ + (\rho d\chi(t))^2 \Big(2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} |\bar{N}_j^{out}| - |\bar{N}_i^{out}|^2 \Big) \Big]. \tag{4.7}$$

Выражения (4.5)–(4.7) позволяют установить соотношения между выигрышами.

Рассмотрим следующую разность для $i \in S$:

$$J_i(u^S) - J_i(u^{NE}) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\rho^t (\rho d\chi(t))^2}{4} \times \\ \times \Big(2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap S| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap S| + 1 \Big). \tag{4.8}$$

Из последнего выражения следует, что игроку из коалиции S не выгодно кооперироваться с его преемниками и выгодно кооперироваться с предшественниками в графе. Действительно, если игрок i объединяется с игроком $j \in N_i^{in}$, то выражение в круглых скобках будет равно 2, а значит и вся сумма будет положительной. Если же он объединяется с игроком $j \in N_i^{out}$, то выражение в круглых скобках станет -1, и вся сумма будет отрицательной. Данный результат также означает, что в случае отсутствия перераспределения выигрыша игроки будут стремиться образовывать коалицию с игроками, между которыми нет пути в графе. В силу того, что здесь не делалось каких-либо предположений о графе, данный результат верен для любого из них.

Утверждение 4.1. *Пусть $b = 0$, $\delta = 1$, а $S \subset N$ – некоторая коалиция. Тогда игроку из S выгодно присоединение к ней его предшественника, и существует игрок из S, которому присоединение к S его преемника не выгодно.*

Доказательство. Пусть $i \in S$. Рассмотрим коалицию $\widetilde{S} = S \cup \{k\}$, где k является предшественником i в g, т.е. $k \in N_i^{in}$ и $k \notin S$. Тогда для выражения в скобках из формулы (4.8) получим

$$2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap \widetilde{S}} |\bar{N}_j^{out} \cap \widetilde{S}| - |\bar{N}_i^{out} \cap \widetilde{S}|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap \widetilde{S}| + 1 =$$

$$= 2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap \widetilde{S}| + 2|\bar{N}_k^{out} \cap \widetilde{S}| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap S| + 1 - 2 >$$

$$> 2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap S| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap S| + 1.$$

Выберем теперь $i \in S$, для которого $N_i^{in} \cap S = \varnothing$ и рассмотрим коалицию $\widehat{S} = S \cup \{k\}$, где k является преемником i в g, т.е. $k \in N_i^{out}$ и $k \notin S$. Получим

$$2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap \widehat{S}} |\bar{N}_j^{out} \cap \widehat{S}| - |\bar{N}_i^{out} \cap \widehat{S}|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap \widehat{S}| + 1 =$$

$$= 2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap S| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 - 2|\bar{N}_i^{out} \cap S| <$$

$$< 2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in} \cap S} |\bar{N}_j^{out} \cap S| - |\bar{N}_i^{out} \cap S|^2 - 2|\bar{N}_i^{in} \cap S| + 1.$$

□

Найдем теперь условия на расположение игрока, при которых ему выгодна кооперация. Для этого рассмотрим разность:

$$J_i(u^C) - J_i(u^{NE}) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\rho^t (\rho d \chi(t))^2}{4} \times$$

$$\times \Big(2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} |\bar{N}_j^{out}| - |\bar{N}_i^{out}|^2 - 2|\bar{N}_i^{in}| + 1 \Big). \quad (4.9)$$

Если выражение в круглых скобках будет положительным, то игроку выгоднее кооперативное поведение, иначе – равновесие по Нэшу.

В случае, когда граф представляет собой дерево, направленное к корню, условие положительности выражения в круглых скобках в (4.9) приводит к неравенству

$$2m|\bar{N}_i^{in}| - (m - \nu_i)^2 + 2(\nu_i - m) - 2 \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} \nu_j > 0$$

или

$$\nu_i^2 - 2m\nu_i + \Big(m^2 - 2m|N_i^{in}| + 2\sum_{j\in N_i^{in}} \nu_j\Big) < 0,$$

а корни соответствующего квадратного уравнения равны

$$\nu_i = m \pm \sqrt{2\Big(m|N_i^{in}| - \sum_{j\in N_i^{in}} \nu_j\Big)}.$$

Среди корней имеет смысл рассматривать только наименьший, поскольку наибольший корень не достигается. Действительно, так как выражение под знаком корня неотрицательное (а при $n > 1$ – положительное), и m – максимально возможная высота, то ν_i не может превосходить этой величины. Таким образом положим

$$\widehat{\nu}_i = m - \sqrt{2\Big(m|N_i^{in}| - \sum_{j\in N_i^{in}} \nu_j\Big)}. \tag{4.10}$$

Если при подстановке в выражение (4.10) параметров графа выполняется неравенство $\nu_i \leqslant \widehat{\nu}_i$, то $J_i(u^{NE}) \geqslant J_i(u^C)$, иначе $J_i(u^C) > J_i(u^{NE})$. Из этого следует, что если для некоторого игрока i выполняется неравенство $J_i(u^C) > J_i(u^{NE})$, то и для всех его преемников $k \in N_i^{out}$ будет выполнятся $J_k(u^C) > J_k(u^{NE})$. Действительно, пусть ребро $(i,k) \in g$, т. е. $\nu_k = \nu_i + 1$. Тогда

$$\widehat{\nu}_k = m - \sqrt{2\Big(m\big(|N_i^{in}| + |N_k^{in} \setminus N_i^{in}|\big) - \sum_{j\in N_i^{in}} \nu_j - \sum_{j\in N_k^{in}\setminus N_i^{in}} \nu_j\Big)} <$$
$$< \widehat{\nu}_i < \nu_i < \nu_i + 1 = \nu_k.$$

Это значит, что для игрока k выполняется неравенство $J_k(u^C) > J_k(u^{NE})$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *Пусть $b = 0$ и $\delta = 1$. Если граф является деревом, направленным к корню, то игроки, которым кооперативное поведение выгоднее равновесия по Нэшу, образуют компоненту связности.*

Рассмотрим теперь случай, когда граф является деревом, направленным от корня. В этом случае условие положительности выраже-

ния (4.9) примет вид

$$\nu_i < \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} |\bar{N}_j^{out}| + \frac{1 - |\bar{N}_i^{out}|^2}{2}. \tag{4.11}$$

Пусть ребро $(i,k) \in g$, и для игрока i выполняется указанное выше неравенство, тогда

$$\nu_k = \nu_i + 1 < \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} |\bar{N}_j^{out}| + \frac{1 - |\bar{N}_i^{out}|^2}{2} + 1 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j \in \bar{N}_i^{in}} |\bar{N}_j^{out}| + |\bar{N}_k^{out}| + \frac{1 - |\bar{N}_i^{out}|^2}{2} < \sum_{j \in \bar{N}_k^{in}} |\bar{N}_j^{out}| + \frac{1 - |\bar{N}_k^{out}|^2}{2}.$$

Следовательно, из справедливости неравенства $J_i(u^C) > J_i(u^{NE})$ для игрока i следует справедливость неравенства $J_k(u^C) > J_k(u^{NE})$ для игрока k, также и для любого преемника игрока i в графе. Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 4.3. *Пусть $b = 0$ и $\delta = 1$. Если граф является деревом, направленным от корня, то игроки, которым равновесие по Нэшу выгоднее кооперативного поведения, образуют компоненту связности.*

5. Численная иллюстрация

Проиллюстрируем результаты на модели из предыдущего раздела со следующими параметрами: $T = 10$, $a = 3$, $c = 1$, $d = 0.1$, $\rho = 0.95$, $\alpha = 0.65$, и двумя графами – простым путем и деревом, направленным к корню.

5.1. Простой путь

Пусть $N = \{1,2,3,4\}$, $b = 0.5$, $\delta = 2/3$, а граф g – простой путь (рис. 1). В табл. 1 представлены непересекающиеся коалиции S_1 и S_2, показывающие нарушение супераддитивности ХФ v, а это, в свою очередь, означает, что вектор Шепли может не быть дележом (не обладать свойством индивидуальной рациональности).

На рис. 2 во всех подыграх вдоль траектории $x^C(t)$ демонстрируется соотношение между выигрышами в равновесии по Нэшу, а также при кооперативном поведении без перераспределения выигрышей

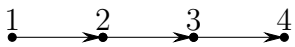


Рисунок 1. Простой путь.

Таблица 1. Пары коалиций S_1 и S_2, показывающие нарушение супераддитивности ХФ v.

S_1	S_2	$v(S_1)$	$v(S_2)$	$v(S_1 \cup S_2)$	$v(S_1 \cup S_2) - v(S_1) - v(S_2)$
{1}	{3}	2.090	1.120	3.120	−0.090
{1}	{4}	2.090	0.861	2.806	−0.144
{2}	{3}	1.508	1.120	2.542	−0.085
{2}	{4}	1.508	0.861	2.202	−0.167
{3}	{4}	1.120	0.861	1.831	−0.149

и при перераспределении в соответствии с CIS-значением и вектором Шепли. Заметим индивидуальную рациональность векторов Шепли в любой подыгре для каждого игрока, а также его близость к CIS-значению. Отметим также, что если в игре не вводить перераспределение выигрышей согласно кооперативному решению, то кооперацию предпочтут игроки 2, 3, и 4, в то время как игрок 1 предпочтет равновесие по Нэшу. Здесь хорошо видна значимость перераспределения выигрышей, поскольку дележ всегда не хуже выигрыша, который игрок получает в равновесии по Нэшу.

Таблица 2. Проверка динамической устойчивости вектора Шепли и CIS-значения.

Компонента $\xi_1(v)$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$\mathrm{Sh}_1(v) = 2.888$	2.702	2.526	2.361	2.206	2.062
$\mathrm{CIS}_1(v) = 2.847$	2.667	2.497	2.336	2.186	2.047

В рассматриваемом примере вектор Шепли и CIS-значение динамически неустойчивы. В табл. 2 приведены значения компонент $\mathrm{Sh}_1(v)$ и $\mathrm{CIS}_1(v)$ для игрока 1, а также значения правых частей выражения (3.7) для первых пяти шагов. Для двух кооперативных решений равенство (3.7) нарушается уже при $t = 1$. Использование динамически устойчивых ПРД вектора Шепли и CIS-значения позволяет реализовать их в игре, делая нецелесообразным пересмотр этих кооперативных решений в течение игры. На рис. 3 приведены соответствующие ПРД, а также текущие выигрыши игроков $h_{it}(x_i^C(t), u^C(t))$. Ввиду близости компонент вектора Шепли и CIS-значения отмечаем

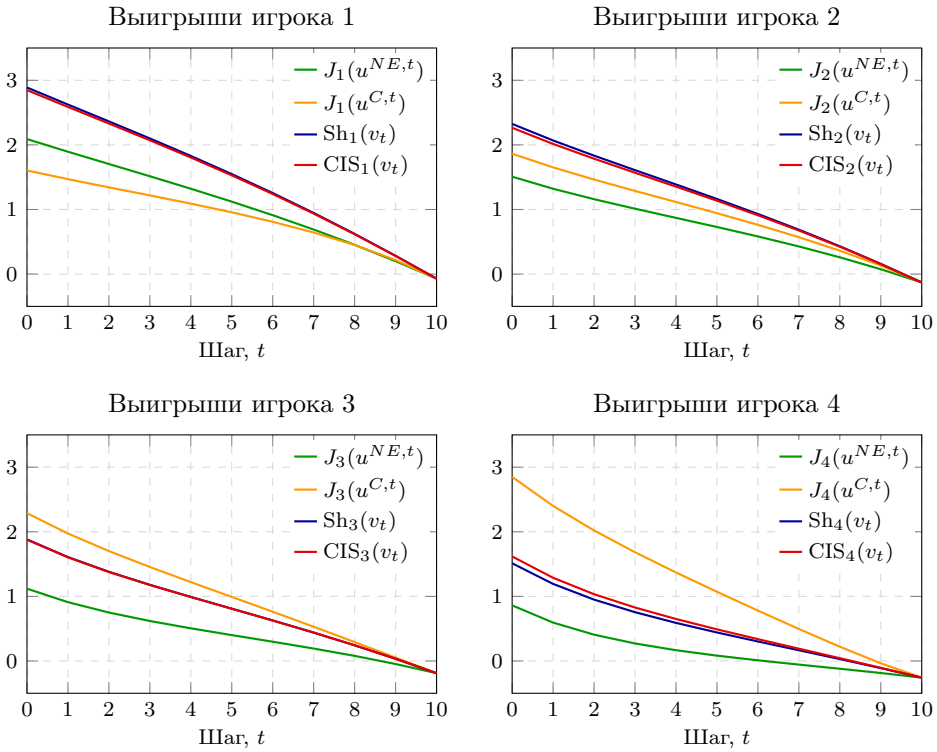


Рисунок 2. Выигрыши игроков в подыграх вдоль кооперативной траектории с начальным состоянием $x^C(t)$ на шаге t для простого пути.

и близость их ПРД. Отметим также положительность обеих ПРД на всех шагах игры, кроме последнего (на рисунке не представлены), где их компоненты совпадают с терминальными выигрышами игроков.

5.2. Дерево, направленное к корню

Пусть теперь $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $b = 0$, $\delta = 1$, а граф g – дерево, направленное к корню (рис. 4).

Подобно рис. 2 на рис. 5 демонстрируется соотношение между выигрышами в равновесии по Нэшу, а также при кооперативном поведении без перераспределения выигрышей и при перераспределении (включая все подыгры вдоль $x^C(t)$). Индивидуальная рациональность вектора Шепли в любой подыгре вдоль $x^C(t)$ для каждого игрока также сохраняется; он также довольно близок к CIS-значению. В этом примере также видна значимость перераспределения выигрышей.

Выбранные параметры позволят применить утверждение 4.2. Вы-

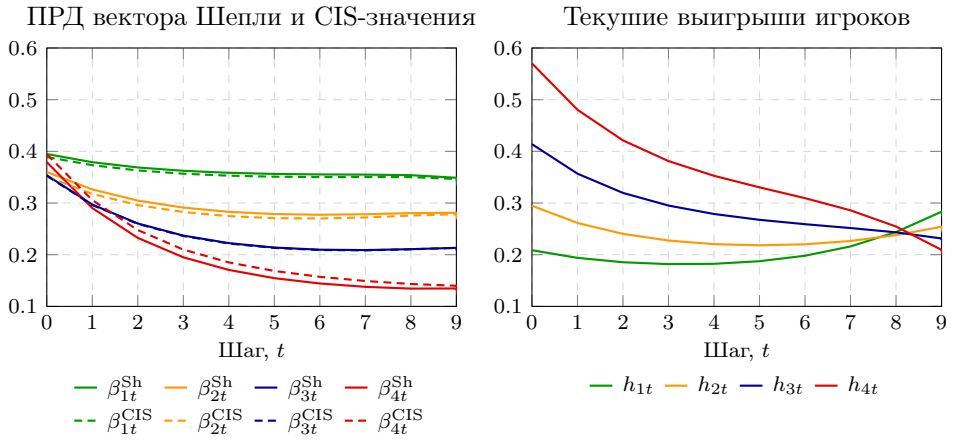


Рисунок 3. Динамически устойчивые ПРД вектора Шепли и CIS-значения и текущие выигрыши игроков при реализации кооперативного набора u^C для простого пути.

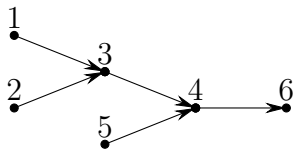


Рисунок 4. Дерево, направленное к корню.

пишем высоты вершин: $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_3 = \nu_5 = 2$, $\nu_4 = 3$ и $\nu_6 = 4$. Используя выражение (4.10), заключаем: $\widehat{\nu}_1 = \widehat{\nu}_2 = \widehat{\nu}_5 = 4$, $\widehat{\nu}_3 = 4 - 2\sqrt{3}$, $\widehat{\nu}_4 = 4 - 2\sqrt{5}$, $\widehat{\nu}_6 = 4 - \sqrt{22}$. Таким образом, игроки 1, 2, и 5 предпочитают равновесие по Нэшу нежели реализацию кооперативного набора стратегий, поскольку для них $\nu_i \leqslant \widehat{\nu}_i$. В то же время для игроков 3, 4 и 6 выполняется обратное неравенство и они предпочитают кооперацию. Кроме того, мы показали, что если игрок предпочитает кооперацию равновесию по Нэшу (например, игрок 3), то все его преемники в графе (игроки 4 и 6) также предпочтут кооперацию. Это можно наблюдать на рис. 5. Наконец, согласно утверждению 4.2 игроки 3, 4 и 6 находятся в одной компоненте связности.

В заключении на рис. 6 приведены ПРД для вектора Шелпи и CIS-значения, а также текущие выигрыши игроков $h_{it}(x_i^C(t), u^C(t))$. Снова отмечаем близость двух ПРД, однако в данном случае мы уже не наблюдаем положительность их компонент на всех шагах игры, кроме последнего (который на рисунке не представлен): для двух кооперативных решений выплаты β_{6t} игроку 6 становятся отрица-

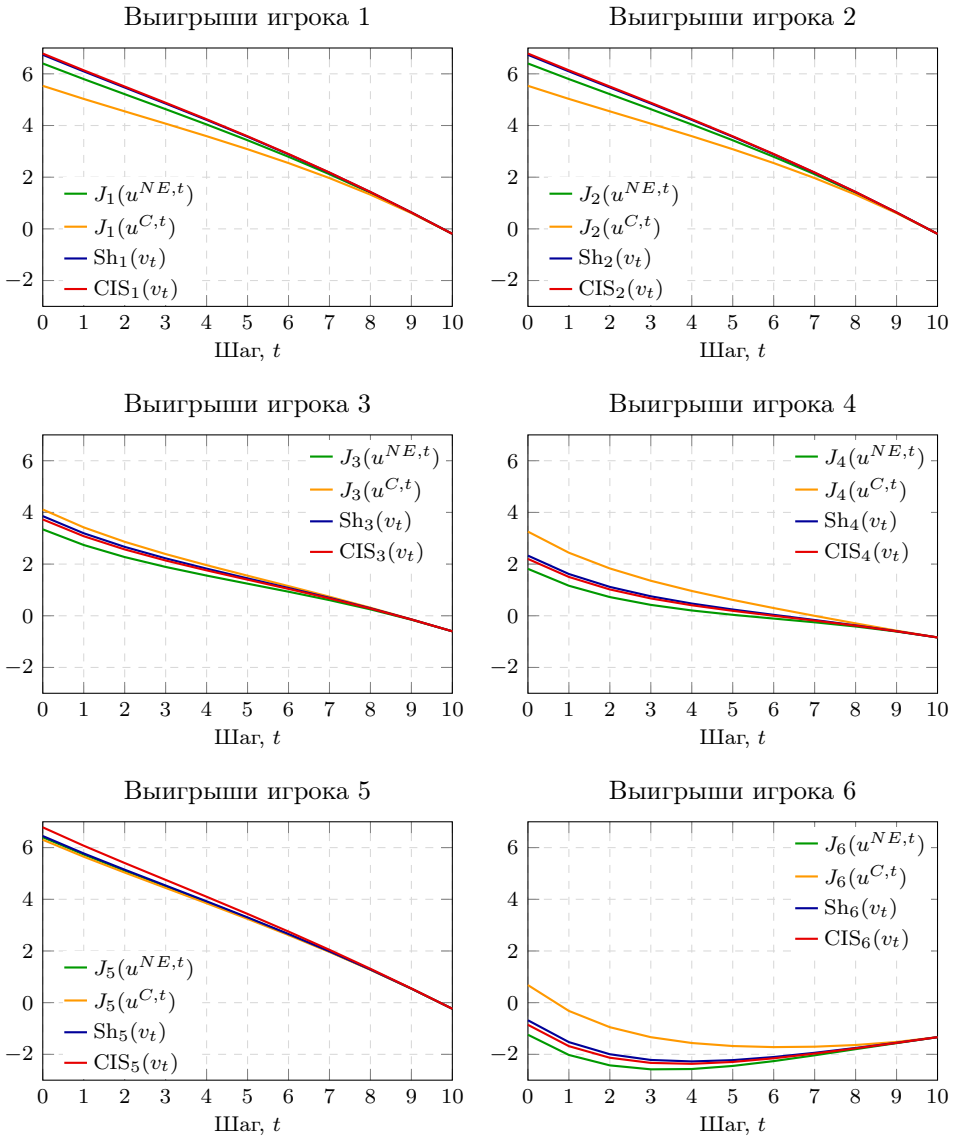


Рисунок 5. Выигрыши игроков в подыграх вдоль кооперативной траектории с начальным состоянием $x^C(t)$ на шаге t для дерева, направленного к корню.

тельными, начиная с шага $t = 3$. Хотя этот игрок также находится ниже всех по течению, как и игрок 4 в предыдущем примере, в отличие от него обе компоненты $\mathrm{Sh}_6(v)$ и $\mathrm{CIS}_6(v)$ – части максимального суммарного выигрыша – отрицательны, как и выигрыш в равновесии по Нэшу $J_6(u^{NE})$, который еще ниже (см. рис. 5 для $t = 0$).

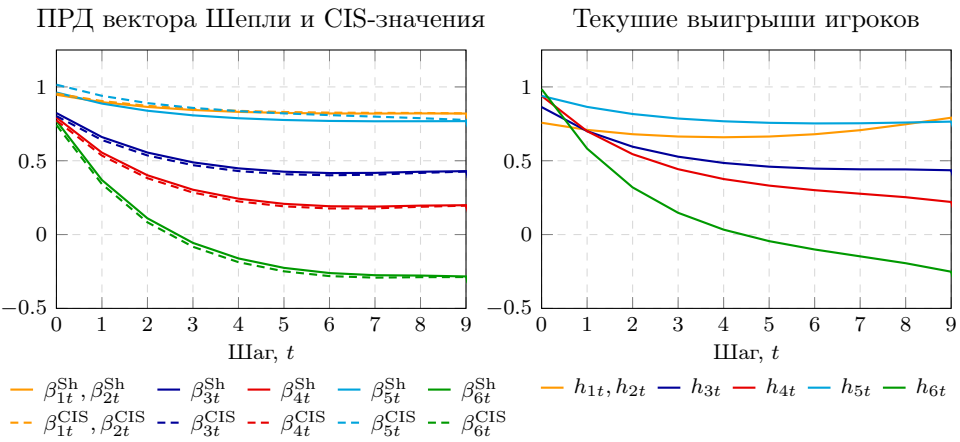


Рисунок 6. Динамически устойчивые ПРД вектора Шепли и CIS-значения и текущие выигрыши игроков при реализации кооперативного набора u^C для дерева, направленного к корню.

6. Заключение

В работе исследован класс линейных по переменной состояния динамических сетевых игр, для которого построено частично кооперативное равновесие – промежуточный между некооперативным и кооперативным тип поведения, допускающий образование одной коалиции игроков. Такой тип поведения позволяет, с одной стороны, анализировать взаимодействие игроков в условиях кооперации отдельной группы, а с другой – определить характеристическую функцию кооперативной игры и перейти к анализу полной кооперации всех игроков, поддержание которой обеспечивается динамически устойчивой процедурой распределения дележа из выбранного кооперативного решения.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на примере модели загрязнения речной сети в условиях рыночной конкуренции игроков-фирм, расположенных вдоль ее течения. Ряд результатов обобщен на случай, когда граф является деревом, как для общего, так и для частного случая. Установлено, что при отсутствии перераспределения максимального суммарного выигрыша игроки заинтересованы в образовании коалиций с теми, между которыми в графе отсутствует путь. В частном случае показано, что если граф речной сети является деревом, направленным к корню, то иг-

роки, для которых кооперативное поведение выгоднее равновесия по Нэшу, образуют компоненту связности. Если же граф представляет собой дерево, направленное от корня, то компоненту связности образуют игроки, для которых равновесие по Нэшу предпочтительнее кооперативного поведения. В случае допустимости перераспределения максимального суммарного выигрыша построены также динамически устойчивые процедуры распределения дележа для двух кооперативных решений – вектора Шепли и CIS-значения, стимулирующие всех игроков к кооперации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белицкая А. В., Петросян Л. А. *Сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. №. 2. С. 3–13.

2. Петросян Л. А. *Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 1977. № 19. С. 46–52.

3. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 52–59.

4. Aumann R. *Acceptable points in general cooperative n-person games.* In: Tucker L. (ed.) Contributions to the Theory of Games. 1959. V. 4. No 40. P. 287–324.

5. Chander P., Tulkens H. *The core of an economy with multilateral environmental externalities* // International Journal of Game Theory. 1997. V. 26. No 3. P. 379–401.

6. Dockner E., Feichtinger G., Jørgensen S. *Tractable classes of nonzero-sum open-loop Nash differential games: theory and examples* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1985. V. 45. No 2. P. 179–197.

7. Dragan I., Driessen T., Funaki Y. *Collinearity between the Shapley value and the egalitarian division rules for cooperative games* // Operations-Research-Spektrum. 1996. V. 18. No 2. P. 97–105.

8. Driessen T. S. H., Funaki Y. *Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions* // Operations-Research-Spektrum. 1991. V. 13. No 1. P. 15–30.

9. Fernandez L. *Wastewater pollution abatement across an international border* // Environment and Development Economics. 2008. V. 14. P. 67–88.

10. Fershtman C. *Identification of classes of differential games for which the open loop is a degenerate feedback Nash equilibrium* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1987. V. 55. No 2. P. 217–231.

11. Germain M. et al. *Transfers to sustain dynamic core-theoretic cooperation in international stock pollutant control* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 28. No 1. P. 79–99.

12. Gozzi F., Leocata M., Pucci G. *Network-based optimal control of pollution growth* // European Journal of Operational Research. 2026. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2026.03.012.

13. Jørgensen S., Zaccour G. *Time consistent side payments in a dynamic game of downstream pollution* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2001. V. 25. P. 1973–1987.

14. Kaitala V., Pohjola M., Tahvonen O. *Transboundary air pollution and soil acidification: A dynamic analysis of an acid rain game between Finland and the USSR* // Environmental and Resource Economics. 1992. V. 2. P. 161–181.

15. Ma S., Li S. *A differential game analysis of firms' Greentech innovation with emission tax in oligopoly exhibiting network externality* // International Transactions in Operational Research. 2025. https://doi.org/10.1111/itor.70103.

16. Mäler K., de Zeeuw, A. *The acid rain differential game* // Environmental and Resource Economics. 1998. V. 12. P. 167–184.

17. Neumann J. von, Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior*. 1944.

18. Parilina E. M., Zaccour G. *Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2022. V. 139.104440.

19. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. No. 3. P. 381–398.

20. Rajan R. *Endogenous coalition formation in cooperative oligopolies* // International Economic Review. 1989. V. 30. No 4. P. 863–876.

21. Reddy P. V., Zaccour G. *A friendly computable characteristic function* // Mathematical Social Sciences. 2016. V. 82. P. 18–25.

22. Sedakov A., Qiao H., Wang S. *A model of river pollution as a dynamic game with network externalities* // European Journal of Operational Research. 2021. Vol. 290. No 3. P. 1136–1153.

23. Shapley L. S. *A value for n-person games*. In: Kuhn H. W. and Tucker A. W. (eds.) Contributions to the Theory of Games. 1953. V. 2. P. 307–317).

24. Xue L., Wang X. *The impact of pollution transmission networks in a transboundary pollution game* // Journal of Cleaner Production. 2024. V. 451. 142010.

25. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Subgame consistent economic optimization: An advanced cooperative dynamic game analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.

TIME-CONSISTENT SOLUTIONS FOR NETWORK GAMES WITH AN APPLICATION TO RIVER POLLUTION

Arsenii A. Vilisov, Saint Petersburg State University,
Artem A. Sedakov, Saint Petersburg State University, Dr.Sc.
(a.sedakov@spbu.ru)

Abstract: The paper examines a class of linear-state dynamic network games. A partially cooperative equilibrium is characterized as an intermediate solution between non-cooperative and cooperative play, allowing for the formation of a single coalition. Based on this equilibrium, a characteristic function is defined, enabling time-consistent distribution schemes for the maximum total payoff. The results are illustrated using a river pollution model with competing firms and generalized to tree graphs. It is shown that without payoff redistribution, the graph structure determines distinct player groups with differing incentives for cooperation. However, implementing time-consistent distribution schemes based on the Shapley value and CIS-value aligns individual incentives and motivates all players to sustain full cooperation.

Keywords: dynamic games, networks, river pollution, cooperation, time consistency.