Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.2, с. 77–109

УДК 519.83
ББК 22.185

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ НА ОСНОВЕ СРАВНЕНИЯ СО СРЕДНИМИ МНЕНИЯМИ В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ С УПРЯМЫМИ АГЕНТАМИ

Яншань Лю*
Университет Циндао
Школа математики и статистики
266071, Китай, Циндао, Нигсия роад, 308
Владимир В. Мазалов
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики-процессов управления
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Пин Сунь
Ядзин Чен
Университет Циндао
Школа математики и статистики
266071, Китай, Циндао, Нигсия роад, 308
e-mail: v.v.mazalov@spbu.ru

©2026 Я. Лю, В.В. Мазалов, П. Сунь, Я. Чен

*Первый автор поддержан грантами National Natural Science Foundation of China (№ 12526591), Natural Science Foundation of Shandong Province (№ ZR2025QC799) и Systems Science Plus Joint Research Program of Qingdao University (№ XT2024301).

В моделях динамики мнений формирование консенсуса представляет собой итерационный динамический процесс, в котором внешние игроки воздействуют на мнения агентов. В данной работе исследуется динамическая игровая модель эволюции мнений в социальной сети со взаимодействиями, основанными на усреднении мнений, в которой часть агентов проявляет упрямое поведение, характеризуемое неоднородными параметрами упрямства, при наличии внешнего воздействия со стороны игроков. Цель игроков состоит в том, чтобы направить мнения всех агентов к единому заданному целевому значению. Предложенная модель формулируется как линейно-квадратичная динамическая игра в дискретном времени. С использованием уравнения Беллмана получены равновесные по Нэшу стратегии и соответствующие им оптимальные траектории динамики мнений. Анализируется характер сходимости и устанавливаются условия, при которых достигается консенсус. Численные эксперименты демонстрируют, как взаимодействия на основе усреднения и расположение упрямых агентов в сети влияют на процесс формирования консенсуса при различных стратегиях управления. Кроме того, исследовано влияние неопределенности о степени упрямства агентов на функции выигрыша игроков. Полученные результаты проясняют взаимосвязь структуры сети, упрямства агентов и стратегического управления в задачах формирования консенсуса.

Ключевые слова: динамика мнений, упрямые агенты, взаимодействия на основе усреднения, динамическая игра, уравнение Беллмана.

Поступила в редакцию: 07.01.26 *После доработки*: 14.04.26 *Принята к публикации*: 01.06.26

1. Введение

Задачи с исследованием динамики мнений и формированием консенсуса возникли при исследовании процессов эволюции индивидуальных мнений в результате межличностных взаимодействий в социальной сети [28]. В большинстве классических многоагентных моделей индивиды рассматриваются как принимающие решения агенты, чьи мнения описываются непрерывными переменными, изменяющимися во времени вследствие многократного обмена информацией

с соседями по сети [22, 17]. Реальные социальные системы по своей природе являются неоднородными и, как правило, включают как адаптивных агентов, корректирующих свои мнения под воздействием социального влияния, так и упрямых агентов – часто называемых лидерами мнений, – взгляды которых в значительной степени устойчивы к окружающим взаимодействиям [3]. Структура взаимодействий обычно описывается графом, в котором вершины соответствуют индивидам, а рёбра представляют коммуникационные связи. Вследствие взаимодействия топологии сети, индивидуальных поведенческих правил и внешних воздействий коллективная динамика мнений может демонстрировать богатый спектр макроскопических явлений, включая формирование консенсуса, поляризацию мнений и фрагментацию [16]. В связи с этим модели динамики мнений стали мощным аналитическим инструментом для исследования возникновения и распространения коллективных мнений в широком круге приложений, таких как коллективное принятие решений [7], маркетинговая динамика [4], электоральные процессы [25] и регулирование общественного мнения [29].

Мнения в социальной сети, как правило, моделируются либо в виде дискретных переменных, представляющих качественно различные, но сопоставимые точки зрения, либо в виде непрерывных переменных, часто нормированных на интервал $[0, 1]$, для количественной оценки степени индивидуальной поддержки или предпочтения [13]. К характерным моделям с дискретным пространством состояний относятся модель избирателя [23], модель Аксельрода [2], модель Шнайда [24] и модель правила большинства [9]. В противоположность этому, эволюция непрерывных мнений обычно описывается такими моделями, как модель Де Гроота [6], модель Фридкина–Джонсена [8], модель Деффуана [5] и модель Хегсельмана–Краузе [11]. Соответствующие механизмы обновления мнений существенно различаются в рамках указанных подходов. Модели с дискретными состояниями, как правило, опираются на переходы состояний, инициируемые соседями, при которых агенты обновляют свои мнения путём имитации или заимствования состояний выбранных соседей. Модели с непрерывными состояниями, напротив, используют правила локальной агрегации или консенсусного обновления, в соответствии с которыми

мнение каждого агента пересматривается как взвешенная комбинация мнений соседей. При введении предположения об ограниченном доверии эволюция мнений дополнительно ограничивается соседями, различие во мнениях с которыми не превышает заданного порога доверия.

Хорошо изученным расширением моделей динамики мнений является включение упрямых агентов, мнения которых частично привязаны к их начальным значениям, что вносит устойчивое смещение в эволюцию мнений в сети. В таких условиях сходимость к равновесному профилю мнений определяется топологией сети и степенью упрямства агентов, а скорость сходимости определяется структурой влияния в сети [10]. В ряде работ дополнительно учитываются стратегические или антагонистические воздействия, такие как враждебные агенты или тролли, формулируя эволюцию мнений в рамках теоретико-игрового подхода [27]. Также были предложены модели в дискретном времени с ограниченной информацией, обеспечивающие реализуемость правил обновления и допускающие аналитическое исследование устойчивости [3]. Более реалистичные сценарии взаимодействия, включая динамику сотрудничества–конкуренции [14] и влияние средств массовой информации [13], подчёркивают взаимосвязь между внутренней устойчивостью и внешними управляющими факторами. Кроме того, задержки информации могут существенно влиять как на переходные режимы, так и на установившиеся состояния системы [18]. Есть также иерархические подходы к управлению эволюцией мнений в сетях, содержащих упрямых агентов [17].

В прикладных работах по развитию моделей динамики мнений игроки — модераторы, инфлюенсеры и операторы средств массовой информации — рассматриваются как внешние факторы управления, оказывающие управляющее воздействие на выбранных агентов для достижения заданных целей. Такое целенаправленное формирование мнений, как правило, требует ресурсов и сопряжено с существенными издержками (например, расходами на стимулирование или рекламные кампании). В ранних работах по управлению динамикой мнений изучались задачи регулирования мнений при различных предположениях о доступной информации и механизмах коммуникации, включая случаи полной и неполной связности внутри сети [19]; при

этом для описания стратегий управления, основанных на усреднении мнений, использовалось уравнение Эйлера [20]. В последующих исследованиях были установлены условия управляемости и достижения консенсуса, а также получены оптимальные стратегии вмешательства при фиксированной структуре сетевого взаимодействия [26, 15]. Под влиянием современных интернет-платформ, где мнения пользователей постоянно подвергаются воздействию целенаправленных кампаний со стороны инфлюенсеров и средств массовой информации, более поздние модели явно учитывают стратегии медиаакторов и анализируют их влияние на формирование консенсуса и поляризацию мнений [12]. Параллельно предложены механизмы управления на уровне сети, позволяющие направлять коллективные мнения путём изменения глобальных структурных параметров сети [21].

В настоящей работе исследуется теоретико-игровая модель динамики мнений в дискретном времени с внешним управлением и упрямыми агентами; в её рамках количественно оценивается, как упрямство изменяет эволюцию и возможности регулирования коллективных мнений. Общество моделируется как сеть взаимодействующих агентов, тогда как набор внешних игроков (не входящих в сеть) стремится направить мнения агентов к заданным целевым значениям, оказывая управляющее воздействие на выбранные вершины при определённых затратах. Тем самым каждый игрок решает задачу компромисса между (i) отклонением мнений агентов от своего целевого значения и (ii) затратами на управление, что приводит к динамической некооперативной игре. На основе формализма динамического программирования получены оптимальные стратегии управления игроков и соответствующая равновесная траектория состояний; полученное решение представляет собой равновесие по Нэшу в стратегиях с обратной связью для динамической игры. Далее исследуется, как расположение упрямых агентов в сети влияет на равновесные стратегии и траектории, а также оценивается уменьшение выигрышей игроков в условиях, когда уровни упрямства агентов неизвестны игрокам, что позволяет выявить потери эффективности, обусловленные параметрической неопределённостью.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 представлена сетевая модель и динамика обновления мнений,

учитывающяя упрямство агентов. В разделе 3 рассматривается модель с двумя игроками в социальной сети, структура коммуникаций которой задаётся полным графом. В разделе 4 формулируется многоагентная игра управления и приводится аналитический вид равновесия по Нэшу. В разделе 5 исследуется изменение выигрышей в случае, когда уровни упрямства агентов неизвестны игрокам. В разделе 6 представлены численные эксперименты, иллюстрирующие влияние упрямства и топологии сети на равновесные управляющие воздействия игроков и формирование консенсуса. Наконец, в разделе 7 подводятся основные итоги работы, обсуждаются практические следствия полученных результатов и возможные направления дальнейших исследований предложенной модели.

2. Теоретико-игровая модель динамики мнений

В настоящей работе рассматривается процесс формирования мнений, развивающийся на бесконечном временном горизонте в связной социальной сети. Сеть моделируется неориентированным связным графом (N, E), в котором множество вершин N соответствует агентам, а множество рёбер E отражает их попарные взаимодействия. Агенты i и $j \in N$ оказывают взаимное влияние тогда и только тогда, когда $(i, j) \in E$. Каждый агент характеризуется начальным мнением по рассматриваемой теме. Со временем это мнение эволюционирует в результате взаимодействий с соседями и внешних управляющих воздействий, при этом стремясь оставаться близким к своему начальному значению. Эндогенная динамика мнений описывает поведение обычных агентов внутри сети. Кроме того, в системе действуют внешние игроки, не участвующие напрямую в социальных взаимодействиях. Эти игроки представляют такие субъекты, как политические акторы или медиа- и рекламные агентства, которые влияют на динамику мнений, напрямую воздействуя на выбранных агентов в соответствии со своими стратегическими целями. Тем самым роль игроков является экзогенной по отношению к сетевой динамике. Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество игроков, где каждый игрок идентифицируется индексом p. Каждый игрок воздействует на подмножество агентов, стремясь направить общее распределение мнений в сети в желаемом направлении.

Агенты обновляют свои мнения, учитывая три источника информации: мнения соседних агентов, воздействия игроков и собственные начальные мнения. Относительное влияние этих компонентов определяется индивидуальными коэффициентами доверия, отражающими неоднородное отношение агентов к социальным взаимодействиям и внешним воздействиям. Рассматривается динамическая игра в дискретном времени: на каждом шаге времени все игроки наблюдают текущее распределение мнений в сети и одновременно выбирают управляющие действия, минимизируя свои функционалы качества. В рамках данной модели мнение каждого агента задаётся вещественной переменной $x_i(t)$, эволюция которой описывается дискретным правилом обновления

$$x_i(t+1) = s_i\Bigg(x_i(t) + a_i\Big(\frac{x_i(t) + \sum\limits_{j\in W_i} x_j(t)}{|W_i|+1} - x_i(t)\Big) + \sum_{p\in M_i} u_p(t)\Bigg) + (1-s_i)\,x_i(0),$$

где $x_i(0)$ – начальное значение мнения агента i. Для любого агента $i \in N$ обозначим через W_i множество агентов из N, непосредственно связанных с агентом i в социальной сети. Агенту i сопоставляется параметр $a_i > 0$, характеризующий интенсивность усреднения (восприимчивость к социальной информации). Обозначим через M_i множество игроков, оказывающих влияние на агента i, а через $u_p(t)$ – управляющее воздействие игрока $p \in M_i$. Параметр $s_i \in [0,1]$ соответствует степени конформизма агента i, отражая его готовность согласовывать своё мнение с его окружением, тогда как коэффициент $1 - s_i$ характеризует приверженность агента начальному мнению $x_i(0)$. При отсутствии упрямства все агенты удовлетворяют условию $s_i = 1$. Предполагается, что каждый игрок воздействует не более чем на одного агента, в результате чего множества M_i для различных агентов попарно не пересекаются. Также допускается, что $M_i = \varnothing$, что означает отсутствие воздействия со стороны игроков на агента i.

Введём стохастическую матрицу $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которую будем называть матрицей влияния социальной сети. Каждый элемент a_{ij} задаёт относительную степень влияния, оказываемого агентом j на агента i, и определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{|W_i|}{|W_i|+1}\, a_i, & j = i, \\ \dfrac{a_i}{|W_i|+1}, & j \in W_i, \\ 0, & j \notin W_i \cup \{i\}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где W_i обозначает множество соседей агента i, а $a_i > 0$ — весовой параметр. По построению сумма элементов каждой строки матрицы A равна единице, то есть $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ для всех $i \in N$. Кроме того, $a_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $j = i$ или $j \in W_i$. В общем случае интенсивности взаимодействия являются несимметричными, то есть $a_{ij} \neq a_{ji}$. Сеть предполагается связной.

В матричной форме мнения агентов эволюционируют согласно уравнению

$$x(t+1) = S\Big(Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i\Big(\sum_{p\in M_i} u_p(t)\Big)\Big) + (I-S)\,x(0),$$
$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0))',$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))'$ – вектор мнений в момент времени t, а B_i — базисный вектор в $\mathbb{R}^n$, имеющий единицу на i-й позиции и нули на остальных. Здесь $S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ — диагональная матрица, элементы которой характеризуют степень конформизма агентов. В частности, параметр s_i определяет, в какой мере агент i склонен учитывать социальное воздействие при обновлении своего мнения. При $s_i = 1$ агент i не является упрямым, и его мнение полностью формируется под влиянием взаимодействия с другими агентами. При $s_i < 1$ агент i является упрямым и частично сохраняет своё начальное мнение благодаря члену $(I-S)\,x(0)$. Таким образом, чем меньше значение s_i, тем выше степень упрямства агента. Матрица I обозначает единичную матрицу.

В рассматриваемой постановке игрок p стремится направить совокупные мнения в сети к заданному целевому значению $\hat{x}_p$, неся при этом как можно меньшие издержки вмешательства. Соответственно,

функционал качества игрока p задаётся следующим образом

$$J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \hat{x}_p)^2 + \gamma_p u_p^2(t) \frac{1}{|K(p)|} \sum_{k \in K(p)} s_k \right\}, \quad p \in M,$$

где $\delta \in (0,1)$ – единый коэффициент дисконтирования, применяемый ко всем моментам времени, а $\gamma_p > 0$ – удельная стоимость (единичные затраты), соответствующая управляющему воздействию игрока p. Обозначим через $K(p)$ подмножество агентов, на которых игрок p воздействует непосредственно, а через $|K(p)|$ – их численность. При отсутствии упрямых агентов указанная постановка сводится к координационной игре с непрерывными функциями выигрыша. Для нахождения оптимальных стратегий управления игроков используется аппарат динамического программирования. В дальнейшем анализе мы ограничиваемся случаем, когда каждому игроку разрешено воздействовать не более, чем на одного агента.

На каждом этапе принятия решений функционал затрат игрока состоит из двух слагаемых: первое количественно характеризует отклонение мнений агентов от желаемого для игрока целевого уровня, тогда как второе – затраты на управляющее воздействие, прикладываемое игроком. Цель каждого игрока — минимизировать указанные затраты на заданном горизонте планирования. Для удобства перепишем целевую функцию в матричном виде

$$J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\left(x'(t)\, x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2 \right) + s_i \gamma_p u_p^2(t) \right], p \in M_i, i \in N,$$

где $q_p = (-2\hat{x}_p, -2\hat{x}_p, \cdots, -2\hat{x}_p)$.

Такая постановка позволяет получить явные равновесные стратегии и установить свойства сходимости, сохраняя при этом основные структурные особенности системы, а именно упрямство агентов и внешнее стратегическое воздействие в сети. Возможные обобщения на более общие постановки могут быть рассмотрены в дальнейших исследованиях.

3. Динамическая игра в симметричной социальной сети

Рассмотрим социальную сеть, в которой структура связей между однородными агентами задаётся полным графом. Для ясности отме-

тим, что в общей постановке с m игроками мы используем обозначение $p \in M$ для произвольного игрока, тогда как в частном случае двух игроков, для удобства изложения, будем называть их игроками 1 и 2. Предположим, что на мнения агентов воздействуют два игрока. Предположим, что имеется два игрока, влияющих на мнения агентов. Первый игрок воздействует на агента 1, который является единственным упрямым агентом в сети, а второй игрок воздействует на агента 2. Тогда динамика мнений агентов в сети описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= s_1\left(\bar{x}(t) + u_1(t)\right) + (1-s_1)x_1(0), \\ x_2(t+1) &= \bar{x}(t) + u_2(t), \\ x_i(t+1) &= \bar{x}(t), \quad i = 3, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\bar{x}(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)$ – среднее мнение всех агентов, $u_1(t)$ – управляющее воздействие первого игрока, а $u_2(t)$ – управляющее воздействие второго игрока. Для упрощения дальнейшего анализа предположим, что $a_i = 1$ для всех i. Эволюция среднего мнения $\bar{x}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+1) &= \frac{s_1 u_1(t) + u_2(t)}{n} + \frac{n + s_1 - 1}{n}\bar{x}(t) + \frac{1-s_1}{n}x_1(0), \\ \bar{x}(0) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(0). \end{aligned}$$

Целевые функции игроков имеют вид

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i(t) - \hat{x}_1\right)^2 + s_1\gamma_1 u_1^2(t) \right], \\ J_2(u) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i(t) - \hat{x}_2\right)^2 + \gamma_2 u_2^2(t) \right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Задача состоит в нахождении равновесия по Нэшу (u_1^*, u_2^*) в данной динамической игре. Зафиксируем стратегию $u_2(t)$ второго игрока и найдём наилучший ответ первого игрока. Уравнение Беллмана для первого игрока имеет вид

$$V_1(t, x(t)) = \min_{u_1(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i(t) - \hat{x}_1\right)^2 + s_1\gamma_1 u_1^2(t) + \delta V_1(t+1, x(t+1)) \right], \tag{3.3}$$

где $x(t+1)$ задаётся уравнениями (3.1). Предположим, что решение уравнения (3.3) имеет квадратичный вид

$$V_1(t, x(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + A_1 \bar{x}^2(t) + 2k_1 \bar{x}(t) + k_1^0, \tag{3.4}$$

где A_1, k_1 и k_1^0 – константы. Подставим это выражение в $V_1(t+1, x(t+1))$

$$\begin{aligned} V_1(t+1, x(t+1)) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t+1) + A_1 \bar{x}^2(t+1) + 2k_1 \bar{x}(t+1) + k_1^0 \\ &= (s_1(\bar{x}(t) + u_1(t)) + (1-s_1)x_1(0))^2 + (\bar{x}(t) + u_2(t))^2 + (n-2)\bar{x}^2(t) \\ &+ A_1\Big(\bar{x}(t) + \frac{s_1-1}{n}\bar{x}(t) + \frac{1-s_1}{n}x_1(0) + \frac{s_1u_1(t) + u_2(t)}{n}\Big)^2 \\ &+ 2k_1\Big(\bar{x}(t) + \frac{s_1-1}{n}\bar{x}(t) + \frac{1-s_1}{n}x_1(0) + \frac{s_1u_1(t) + u_2(t)}{n}\Big) + k_1^0. \end{aligned}$$

Подставив это в (3.3), выполним минимизацию по $u_1(t)$. Таким образом, оптимальное управление первого игрока выражается как

$$u_1(t) = -\delta \frac{\left(s_1 + \frac{A_1}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)\bar{x}(t) + (1-s_1)\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)x_1(0) + \frac{A_1u_2(t)}{n^2} + \frac{k_1}{n}}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)}. \tag{3.5}$$

Совместно с (3.4) получаем алгебраическое уравнение для A_1 и промежуточное соотношение для k_1. Во избежание перегрузки основного текста ниже приводится только уравнение для A_1, тогда как подробная процедура исключения и окончательное замкнутое выражение для k_1 представлены в Приложении А.

$$A_1 = -\delta^2 \frac{s_1\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)^2}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)} + \delta\Big(s_1^2 + n - 1 + A_1\frac{(n+s_1-1)^2}{n^2}\Big). \tag{3.6}$$

Теперь решим задачу оптимального управления для второго игрока. Зафиксируем стратегию первого игрока $u_1(t)$ и найдём наилучший ответ второго игрока. Как и в случае первого игрока, оптимальное управление второго игрока имеет вид

$$u_2(t) = -\delta \frac{\left(1 + \frac{A_2}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)\bar{x}(t) + \frac{A_2(1-s_1)}{n^2}x_1(0) + \frac{s_1A_2u_1(t)}{n^2} + \frac{k_2}{n}}{\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)}, \tag{3.7}$$

а неизвестные коэффициенты определяются алгебраическим уравнением для A_2 совместно с промежуточным соотношением для k_2. Подробная процедура вывода и окончательное замкнутое выражение для k_2 представлены в Приложении А.

$$A_2 = -\delta^2 \frac{\left(1 + \frac{A_2}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)^2}{\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)} + \delta\Big(s_1^2 + (n-1) + A_2\frac{(n+s_1-1)^2}{n^2}\Big). \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.7) следует, что $u_1(t)$ и $u_2(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \alpha_1\bar{x}(t) + \alpha_2 x_1(0) + \alpha_3 u_2(t) + \alpha_4\hat{x}_1, \\ u_2(t) &= \beta_1\bar{x}(t) + \beta_2 x_2(0) + \beta_3 u_1(t) + \beta_4\hat{x}_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-\delta\left(s_1 + \frac{A_1}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)}, \alpha_2 = \frac{-\delta(1-s_1)\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)}, \\ \alpha_3 &= \frac{-\delta A_1}{\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)n^2}, \alpha_4 = \frac{-\delta k_1}{\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)n}, \\ \beta_1 &= \frac{-\delta\left(1 + \frac{A_2}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)}{\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)}, \beta_2 = \frac{-\delta A_2(1-s_1)}{\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)n^2}, \\ \beta_3 &= \frac{-\delta s_1 A_2}{\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)n^2}, \beta_4 = \frac{-\delta k_2}{\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)n}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Наконец, из системы (3.9) получаем

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_3\beta_1)\bar{x}(t) + (\alpha_3\beta_2 + \alpha_2)x_1(0) + \alpha_3\beta_4\hat{x}_2 + \alpha_4\hat{x}_1}{1 - \alpha_3\beta_3}, \\ u_2^*(t) &= \frac{(\beta_1 + \beta_3\alpha_1)\bar{x}(t) + (\beta_3\alpha_2 + \beta_2)x_1(0) + \beta_3\alpha_4\hat{x}_1 + \beta_4\hat{x}_2}{1 - \alpha_3\beta_3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

После подстановки (3.11) в промежуточные соотношения для коэффициентов k_1 и k_2 и исключения текущего управления противоположного игрока получаем линейную алгебраическую систему размера 2×2 относительно постоянных коэффициентов k_1 и k_2. Её явный вид, а также соответствующие замкнутые аналитические выражения представлены в Приложении А.

Таким образом, в динамической игре двух игроков при наличии одного упрямого агента существует равновесие по Нэшу (u_1^*, u_2^*).

Оптимальная траектория среднего мнения в сети имеет вид

$$\bar{x}\,(t+1) = \frac{s_1 u_1^*\,(t) + u_2^*\,(t)}{n} + \frac{n + s_1 - 1}{n}\bar{x}\,(t) + \frac{1 - s_1}{n} x_1\,(0)\,, \quad (3.12)$$

где $u_1^*\,(t)$ и $u_2^*\,(t)$ определяются формулами (3.11).

Предположим, что оптимальная траектория (3.12) имеет предельное значение x^* при $t \to \infty$. Тогда из (3.11)–(3.12) получаем

$$\begin{aligned} x^* = {} & \frac{[(s_1\alpha_3\beta_4 + \beta_4)\,\hat{x}_2 + (\beta_3\alpha_4 + s_1\alpha_4)\,\hat{x}_1]}{s_1\,(\alpha_1 + \alpha_3\beta_1) + (\beta_1 + \beta_3\alpha_1)} \\ & - \frac{[s_1\,(\alpha_3\beta_2 + \alpha_2) + (\beta_3\alpha_2 + \beta_2) - (1 - s_1)]\,x_1\,(0)}{s_1\,(\alpha_1 + \alpha_3\beta_1) + (\beta_1 + \beta_3\alpha_1)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теорема 3.1. *Оптимальные управления в задачах (3.1) и (3.2) имеют вид (3.5) и (3.7) соответственно. Параметры A_1 и A_2 удовлетворяют приведённым выше алгебраическим уравнениям, а константы k_1 и k_2 определяются из линейной системы, получаемой после исключения текущего управления другого игрока; см. Приложение A. Кроме того, существует величина x^*, зависящая от целевых значений $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ и начального мнения $x(0)$, такая что среднее мнение асимптотически сходится к x^*.*

4. Равновесие по Нэшу с обратной связью в динамической игре с M игроками

Рассмотрим социальную сеть, состоящую из n агентов, взаимодействующих при наличии m стратегических игроков (где $m = |M|$), и сформулируем соответствующую динамическую игру. Для каждого игрока p динамика мнений агентов и критерий качества задаются следующим образом

$$x\,(t+1) = S\Big(Ax\,(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p\in M_i} u_p\,(t)\,\big)\Big) + (I - S)x(0),$$

$$J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big[\big(x'(t)x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2\big) + s_i\gamma_p u_p^2(t)\Big], p \in M_i,\ i \in N.$$

Начальное состояние задаётся как $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)\big)'$, а вектор q_p определяется как постоянный вектор, все компоненты которого равны $-2\hat{x}_p$.

Соответствующая задача оптимизации имеет вид

$$\begin{aligned}
&\min_{u_p(t)} J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big[\big(x'(t)x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2 \big) + s_i \gamma_p u_p^2(t) \Big] \\
&\text{при } x(t+1) = S\Big(Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \big) \Big) + (I - S)x(0), \\
&\qquad x(0) = \big(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0) \big)'.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Рассматриваемая динамическая игра имеет линейно-квадратичную (ЛК) структуру, поскольку динамика состояния линейна, а функции выигрыша квадратичны. Далее рассмотрим позиционные стратегии вида $u_p(t) = \psi_p\big(t, x(t)\big) \in \mathbb{R}$. Найдем равновесие по Нэшу. Для стандартных ЛК-динамических игр хорошо известно, что оптимальные управления (наилучшие ответы) представимы как линейные функции состояния системы.

Для вывода равновесия по Нэшу запишем уравнение Беллмана для игрока p

$$V_p\big(t, x(t)\big) = \min_{u_p(t)} \Big[\big(x'(t)x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2 \big) + s_i \gamma_p u_p^2(t) + \delta V_p\big(t+1, x(t+1)\big) \Big]. \tag{4.2}$$

Функцию Беллмана $V_p\big(t, x(t)\big)$ запишем в квадратичном виде

$$V_p\big(t, x(t)\big) = x'(t) K_p x(t) + k_p x(t) + k_{0p}, \tag{4.3}$$

где $K_p = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, $k_p = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ – вектор, а $k_{0p} \in \mathbb{R}$ – константа.

Подставляя (4.1) в (4.3), получаем

$$\begin{aligned}
&V_p\big(t+1, x(t+1)\big) = x'(t+1) K_p x(t+1) + k_p x(t+1) + k_{0p} \\
&= \Big(SAx(t) + S \sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \big) + (I - S)x(0) \Big)' K_p \\
&\quad \cdot \Big(SAx(t) + S \sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \big) + (I - S)x(0) \Big) \\
&\quad + k_p \Big(SAx(t) + S \sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \big) + (I - S)x(0) \Big) + k_{0p}.
\end{aligned}$$

Тогда (4.2) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
V_p\big(t,x(t)\big) = \min_{u_p(t)}\Big\{ & \big(x'(t)x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2\big) + s_i\gamma_p u_p^2(t) \\
& + \delta\Big(SAx(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p\in M_i} u_p(t)\big) + (I-S)x(0)\Big)' K_p \\
& \cdot \Big(SAx(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p\in M_i} u_p(t)\big) + (I-S)x(0)\Big) \\
& + \delta\, k_p\Big(SAx(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i\big(\sum_{p\in M_i} u_p(t)\big) + (I-S)x(0)\Big) + \delta k_{0p}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Минимизация по $u_p(t)$ даёт

$$
\begin{aligned}
u_p^*(t) = -\big(s_i\gamma_p + \delta\, B_{i'}' S K_p S B_{i'}\big)^{-1}\delta\Big[\frac{1}{2}k_p S B_{i'} + B_{i'}' S K_p\big(SAx(t) \\
+ (I-S)x(0)\big) + B_{i'}' S K_p\, U_{-p}(t)\Big],
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где игрок p воздействует на агента i', а

$$
U_{-p}(t) = \sum_{i=1}^{n} S B_i\Big(\sum_{j\in M_i\setminus\{p\}} u_j(t)\Big).
$$

Оптимальный ответ игрока $p \in M$ можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
& u_p^*(t) = c_p x(t) + c_{0p}, \\
& c_p = -\big(s_i\gamma_p + \delta\, B_{i'}' S K_p S B_{i'}\big)^{-1}\delta\, B_{i'}' S K_p S A, \\
& c_{0p} = -\big(s_i\gamma_p + \delta\, B_{i'}' S K_p S B_{i'}\big)^{-1}\delta\Big[\frac{1}{2}k_p S B_{i'} + B_{i'}' S K_p (I-S)x(0) \\
& + B_{i'}' S K_p\, U_{-p}(t)\Big],
\end{aligned}
$$

где $c_p = \big(c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{np}\big) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ и $c_{0p} \in \mathbb{R}$. Объединяя (4.2) и (4.3), получаем

$$
\begin{aligned}
& x'(t+1)\, K_p x(t+1) + k_p x(t+1) + k_{0p} \\
& = \big(x'(t)\, x(t) + q_p(t)\, x(t) + n\hat{x}_p^2\big) + s_i\gamma_p u_p^2(t) \\
& + \delta\Big[\Big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big)x(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)\, x(0)\Big]' K_p
\end{aligned}
$$

$$\cdot \left[\Big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big)x\,(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)\,x\,(0)\right]$$
$$+ \delta k_p\left[\Big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big)x\,(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)\,x\,(0)\right]$$
$$+ \delta k_{0p}.$$

Решение уравнений Риккати даёт матрицу K_p, вектор k_p и константу k_{0p}

$$K_p = I + s_i\gamma_p c_p' c_p + \delta\Big[SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big]' K_p \Big[SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big],$$
$$k_p = q_p + 2s_i\gamma_p c_p c_{0p} + 2\delta\Big(S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)\,x\,(0)\Big)' K_p$$
$$\cdot \Big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big) + \delta k_p\Big[SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\Big],$$
$$k_{0p} = n\hat{x}_p^2 + s_i\gamma_p c_{0p}^2 + \delta\Big[S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_p} c_{0p} + (I-S)x\,(0)\Big]' K_p$$
$$\cdot \Big[S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)x\,(0)\Big]$$
$$+ \delta k_p\Big[S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)\,x\,(0)\Big] + \delta k_{0p}. \tag{4.5}$$

Согласно [1], матрица K_p является симметричной, и среди всех симметричных положительно определённых решений выбирается минимальная. Оптимальные управления, соответствующие равновесию, допускают представление в виде обратной связи: $u_p^*(t) = c_p x(t) + c_{0p}$, $p \in M$. Подстановка данных стратегий в динамику мнений приводит к соответствующей системе

$$x(t+1) = \big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\big)x(t) + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)x(0).$$

Для всех $t > 0$ динамика мнений вдоль равновесной траектории имеет явное представление

$$x(t) = \big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\big)^t x(0) + \sum_{k=0}^{t-1} \big(SA + S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\big)^k \cdot \big(S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)x(0)\big).$$

Если траектория состояния сходится при $t \to \infty$, то есть $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$, то стационарный вектор x^* удовлетворяет

$$x^* = \big(I - SA - S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_p\big)^{-1} \big(S\sum_{i=1}^{n} B_i \sum_{p\in M_i} c_{0p} + (I-S)x(0)\big). \quad (4.6)$$

Это стационарное состояние характеризует равновесие по Нэшу рассматриваемой динамической игры.

Теорема 4.1. *Предположим, что система уравнений* (4.5) *допускает решение* $\{K_p, k_p, k_{0p}\}_{p\in M}$ *такое, что индуцированная замкнутая система корректно определена для всех* $t \geq 0$ *и является асимптотически устойчивой. Тогда стратегии* (4.4) *образуют равновесие в игре* (4.1), *причём* K_p, k_p *и* k_{0p} *удовлетворяют* (4.5) *для всех* $p \in M$. *Более того, при данном равновесии по Нэшу траектория мнений* $x(t)$ *сходится к стационарному состоянию* x^*, *удовлетворяющему* (4.6).

5. Модель при отсутствии информации об упрямстве агентов

Предположим, что игрок не располагает информацией о параметрах упрямства агентов. Вследствие этого он исходит из предположения, что в сети отсутствуют упрямые агенты. Соответственно, эволюцию мнений игрок моделирует как процесс, в котором мнения агентов определяются исключительно социальными взаимодействиями и применяемыми управляющими воздействиями. В рамках этой модели игрок использует следующее уравнение обновления мнений

$$\begin{gathered} x(t+1) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i\Big(\sum_{p\in M_i} u_p(t)\Big), \\ x(0) = \big(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)\big)'. \end{gathered} \quad (5.1)$$

Согласно (5.1), игрок предполагает, что мнения агентов полностью подвержены как социальному влиянию, так и внешнему управлению, не учитывая возможную упрямость отдельных агентов.

Целевая функция игрока p задаётся выражением

$$J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big[\sum_{j=1}^{n} \big(x_j(t) - \hat{x}_p\big)^2 + \gamma_p u_p^2(t) \Big], \quad p \in M. \tag{5.2}$$

Она направлена на минимизацию отклонений мнений агентов от целевого значения $\hat{x}_p$ при одновременном учёте затрат на управление. Первое слагаемое $\sum\limits_{j=1}^{n} \big(x_j(t) - \hat{x}_p\big)^2$ штрафует отклонение мнений от целевого уровня, а второе слагаемое $\gamma_p u_p^2(t)$ штрафует интенсивность управляющего воздействия. Таким образом, приходим к следующей задаче оптимального управления:

$$\begin{aligned}
&\min_{u_p(t)} J_p(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\big(x'(t)\, x(t) + q_p x(t) + n\hat{x}_p^2 \big) + \gamma_p u_p^2(t) \right] \\
&\text{при } x(t+1) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \Big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \Big), \\
&\qquad x(0) = \big(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0) \big)'.
\end{aligned}$$

Цель состоит в нахождении управления $u_p^*(t)$, минимизирующего суммарные затраты $J_p(u)$ при условии заданной динамики обновления мнений. Оптимальное управление $u_p^*(t)$ найдено в [15]. Игрок предполагает, что траектория управляемой системы $x^*(t)$ следует уравнению

$$x^*(t+1) = Ax^*(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \Big(\sum_{p \in M_i} u_p^*(t) \Big).$$

В этом случае выигрыш, на который рассчитывает игрок, равен $J_p\big(u^*, x^*\big)$.

В действительности в сети могут присутствовать упрямые агенты, и тогда уравнение обновления мнений имеет вид

$$x(t+1) = S\left(Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \Big(\sum_{p \in M_i} u_p(t) \Big) \right) + (I - S)x(0). \tag{5.3}$$

Наличие упрямых агентов означает, что их мнения будут менее восприимчивы к внешнему воздействию и с большей вероятностью сохранятся вблизи начальных значений. Упрямство приводит к расхождению между ожидаемой игроком траекторией и реальной динамикой мнений, что, в свою очередь, влияет на фактический выигрыш игрока.

При применении оптимального управления $u_p^*(t)$ фактическая траектория $x^{\text{real}}(t)$ с учётом наличия упрямых агентов задаётся следующим образом

$$x^{\text{real}}(t+1) = S\Bigg(Ax^{\text{real}}(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i\Big(\sum_{p\in M_i} u_p^*(t)\Big)\Bigg) + (I-S)x(0),$$

а фактический выигрыш игрока равен $J_p\big(u^*, x^{\text{real}}\big)$.

Поскольку игрок не знает о наличии упрямых агентов, возникает расхождение между фактическим и теоретическим выигрышем. Рассмотрим разность между этими величинами

$$\triangle J_p = J_p\big(u^*, x^{\text{real}}\big) - J_p\big(u^*, x^*\big). \tag{5.4}$$

В последующих численных экспериментах мы исследуем, как уровни упрямства агентов влияют на величину $\triangle J_p$. Эксперименты направлены на оценку того, в какой степени неоднородность упрямства изменяет разрыв между ожидаемыми затратами (рассчитанными в рамках представлений игрока) и фактическими затратами, возникающими при реальной динамике мнений. Это исследование помогает прояснить роль упрямых агентов в динамике мнений и эффективности управления.

6. Численные эксперименты

В данном разделе представлены результаты численного моделирования для социальной сети с двумя игроками и шестью агентами, представленной графом-звезда. Численные эксперименты направлены на исследование влияния упрямых агентов на эволюцию мнений, с акцентом на то, как их число и расположение в сети влияют на формирование консенсуса. В качестве базового случая сначала рассматриваются результаты, полученные при отсутствии упрямых агентов

и внешних игроков. Параметры, использованные в численных экспериментах, заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} &x(0) = \big(0.7, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4\big)', T = 20, \\ &a_1 = 0.6, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.8, \\ &\delta = 0.6, s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Матрицы влияния имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Структура графа изображена на рис. 1. В базовом случае мнения всех агентов сходятся к консенсусу $x^* = 0.533$. Траектории эволюции мнений показаны на рис. 2.

На рис. 3 показан сценарий с одним упрямым агентом. В этом сценарии предполагается, что центральный агент (вершина 1) является упрямым агентом с коэффициентом $s_1 = 0.7$. При таких условиях оптимальное управление формирует оптимальную траекторию мнений, изображенную на рис. 4, и сеть сходится к консенсусу $x^* = 0.694$.

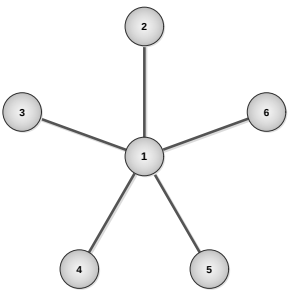


Рисунок 1. Звёздная сеть из шести агентов

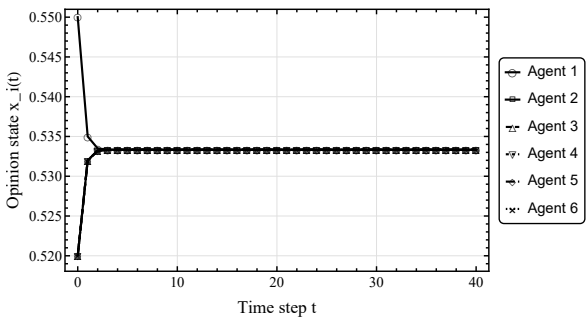


Рисунок 2. Траектории эволюции мнений агентов в отсутствие упрямых агентов

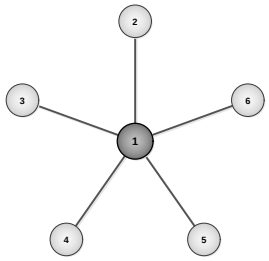


Рисунок 3. Звёздная сеть с одним упрямым агентом

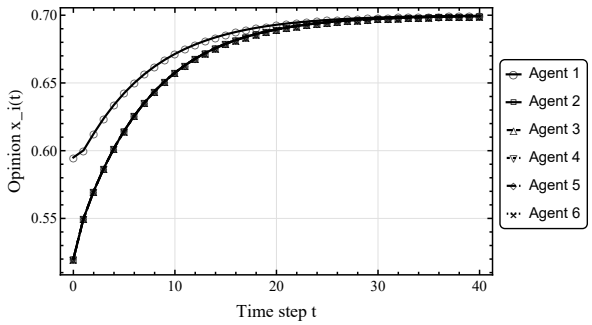


Рисунок 4. Траектории эволюции мнений агентов при наличии одного упрямого агента

На рис. 5 показан случай двух упрямых агентов, один из которых является центральной вершиной сети, с коэффициентами $s_1 = 0.7$, $s_2 = 0.6$. Для этой конфигурации получаем процесс эволюции мнений, представленный на рис. 6, где предельные мнения равны $x^* = \big(0.661,\, 0.498,\, 0.661,\, 0.661,\, 0.661,\, 0.661\big)'$. В частности, упрямый агент в центре сети оказывает более сильное влияние на окружающих агентов, что проявляется в более заметном эффекте в процессе формирования консенсуса.

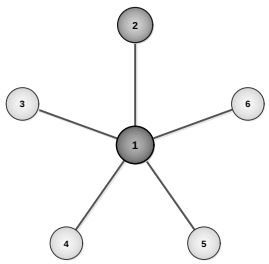


Рисунок 5. Социальная сеть с двумя упрямыми агентами, один из которых расположен в центре

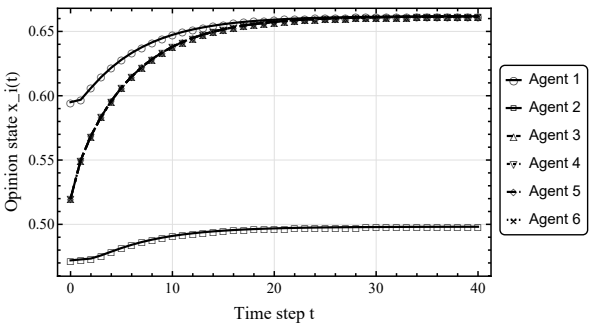


Рисунок 6. Траектории эволюции мнений агентов при наличии двух упрямых агентов

Далее, опираясь на предыдущую постановку с двумя упрямыми агентами, рассмотрим экзогенные вмешательства игроков. В данном эксперименте параметры игроков заданы как $\gamma_1 = 0.1$, $\gamma_2 = 0.15$, а целевые мнения равны $\hat{x}_1 = 0.8$ и $\hat{x}_2 = 0.5$, что отражает, соответственно, веса затрат на управление и желаемые целевые уровни. На рис. 7 игрок 1 воздействует на агента 4, а игрок 2 – на агента 6. Соответствующий процесс обновления мнений агентов и траектории оптимального управления игроков представлены соответственно на рисунках 8 и 9. Для этой конфигурации представлены соответствующие траектории мнений агентов и оптимальные стратегии игроков. Предельное значение мнений равно $x^* = \big(0.650,\ 0.473,\ 0.650,\ 0.752,\ 0.650,\ 0.506\big)'$. На рис. 10 игрок 1 воздействует на агента 4, а игрок 2 – на агента 5. В этом случае предельное значение мнений составляет $x^* = \big(0.530,\ 0.463,\ 0.530,\ 0.706,\ 0.502,\ 0.449\big)'$. На рисунке 11 показан процесс обновления мнений агентов, тогда как на рисунке 12 представлены траектории управления игроков.

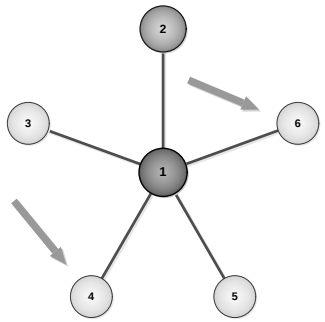


Рисунок 7. Звёздная социальная сеть с двумя упрямыми агентами и двумя игроками (игрок 1 воздействует на агента 4, игрок 2 — на агента 6)

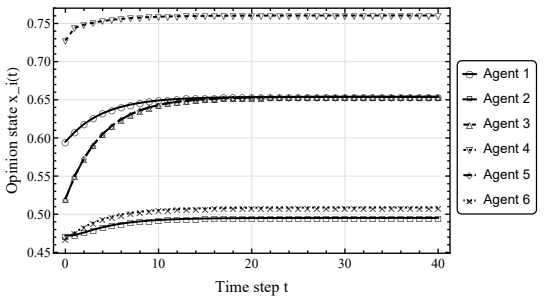


Рисунок 8. Динамика мнений в равновесии при наличии двух игроков (игрок 1 воздействует на агента 4, а игрок 2 — на агента 6).

Далее исследуем влияние неизвестного уровня упрямства на функционалы выигрыша игроков. Рассмотрим полный граф с шестью вер-

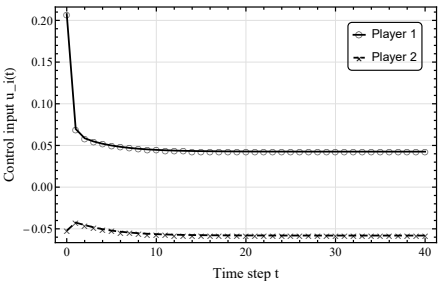


Рисунок 9. Оптимальные стратегии двух игроков в равновесии (игрок 1 воздействует на агента 4, игрок 2 — на агента 6)

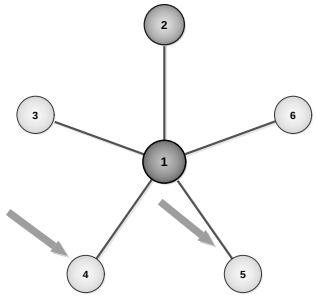


Рисунок 10. Звёздная социальная сеть в случае воздействия двух игроков на агентов 4 и 5

шинами при следующих значениях параметров

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.6,$$
$$\gamma_1 = 0.1,\ \gamma_2 = 0.15,\ \hat{x}_1 = 0.8,\ \hat{x}_2 = 0.5.$$

Матрицы влияния имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Структура соответствующей сети изображена на рис. 13. Как показано на рисунке, игрок 1 оказывает влияние на агента 1, тогда как игрок 2 оказывает влияние на агента 2.

В этом случае получаем вектор разностей выигрышей $[\triangle J_1, \triangle J_2] = [J_1\big(u^*, x^{\text{real}}\big) - J_1(u^*, x^*)\,,\ J_2\big(u^*, x^{\text{real}}\big) - J_2(u^*, x^*)] = [0.164, -0.133]$. Для игрока 1 фактический выигрыш оказывается выше теоретического, тогда как для игрока 2 фактический выигрыш ниже теоретического. Это связано с тем, что целевое значение игрока 1 требует более интенсивного управления, что приводит к большим затратам

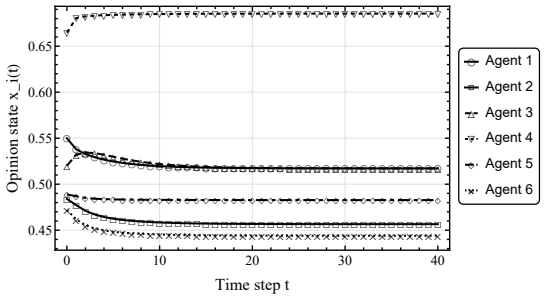


Рисунок 11. Равновесная траектория мнений в случае, когда игрок 1 воздействует на агента 4, а игрок 2 — на агента 5

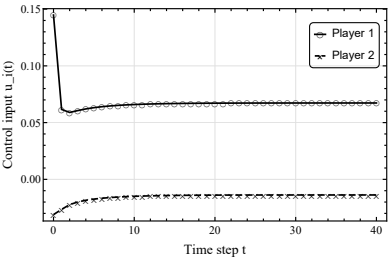


Рисунок 12. Равновесные траектории оптимальных управлений в случае, когда игрок 1 воздействует на агента 4, а игрок 2 — на агента 5

и, как следствие, к более заметному расхождению между оценкой в рамках воспринимаемой модели и реализацией в истинной динамике.

При увеличении упрямства агентов матрица S принимает вид

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Структура соответствующей сети представлена на рисунке 14. По сравнению с полностью связанной сетью, показанной на рисунке 13, сеть с пониженной связностью получается удалением рёбер $(1,3)$, $(1,5)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(3,5)$ и $(4,6)$. Как и в предыдущей конфигурации, агенты 1 и 2 являются упрямыми; игрок 1 воздействует на агента 1, а игрок 2 — на агента 2. На этом этапе разность выигрышей равна $[\triangle J_1, \triangle J_2] = [0.243, -0.180]$, и наблюдается, что рост упрямства увеличивает расхождение между фактическими и теоретическими выигрышами игроков.

Следующим шагом является анализ того, как структура коммуникаций влияет на указанное расхождение. При приведённом выше уровне упрямства рассмотрим сеть с пониженной связностью, для

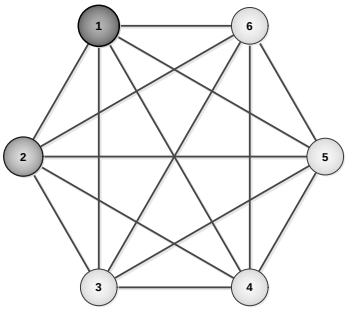


Рисунок 13. Полностью связанная социальная сеть из шести агентов, в которой агенты 1 и 2 являются упрямыми и управляются соответственно игроками 1 и 2.

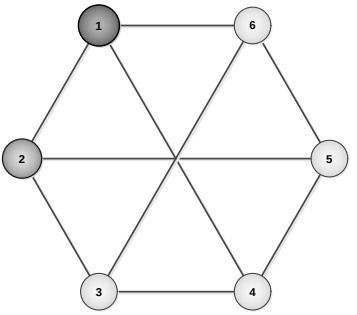


Рисунок 14. Частично связанная социальная сеть из шести агентов, в которой агенты 1 и 2 являются упрямыми; игрок 1 и игрок 2 воздействуют соответственно на агентов 1 и 2.

которой матрица влияния задаётся как

$$A = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & \frac{11}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & 0 & \frac{3}{20} & \frac{11}{20} \end{bmatrix}.$$

Структура соответствующей сети представлена на рис. 14. Аналогично предыдущей конфигурации, игрок 1 оказывает влияние на агента 1, а игрок 2 — на агента 2. В этом случае разность выигрышей составляет $[\triangle J_1, \triangle J_2] = [0.170, -0.124]$, и наблюдается, что снижение связности коммуникаций уменьшает величину расхождения.

7. Заключение

В работе исследована динамическая игровая модель эволюции мнений в социальных сетях при наличии внешних вмешательств и

упрямых агентов. Явное включение упрямства в модель и применение методов динамического программирования позволили охарактеризовать равновесие по Нэшу в стратегиях с обратной связью и соответствующие оптимальные стратегии управления. Показано, что как расположение упрямых агентов в сети, так и величина их упрямства критически влияют на траектории мнений, нередко затрудняя достижение консенсуса и способствуя возникновению поляризованных или экстремальных исходов. Кроме того, неопределённость относительно параметров упрямства приводит к заметному разрыву между предполагаемыми и фактическими выигрышами игроков, что подчёркивает стратегические последствия неполной информации. В дальнейшем предполагается расширить предложенную модель на случай, когда игроки могут воздействовать на нескольких агентов одновременно, что позволит глубже понять механизмы стратегического управления в более крупных и реалистичных сетевых структурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abou-Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Basel: Birkhäuser, 2012.

2. Axelrod R. *The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization* // Journal of Conflict Resolution. 1997. V. 41. N 2. P. 203–226.

3. Cao W., Zhang H., Kou G., Zhang B. *Discrete opinion dynamics in social networks with stubborn agents and limited information* // Information Fusion. 2024. V. 109. P. 102410.

4. Chen J., Kou G., Wang H., Zhao Y. *Influence identification of opinion leaders in social networks: an agent-based simulation on competing advertisements* // Information Fusion. 2021. V. 76. P. 227–242.

5. Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G. *Mixing beliefs among interacting agents* // Advances in Complex Systems. 2000. V. 3. N 1–4. P. 87–98.

6. DeGroot M. H. *Reaching a consensus* // Journal of the American Statistical Association. 1974. V. 69. N 345. P. 118–121.

7. Dong J., Hu J., Zhao Y., Peng Y. *Opinion formation analysis for Expressed and Private Opinions (EPOs) models: Reasoning private opinions from behaviors in group decision-making systems* // Expert Systems with Applications. 2024. V. 236. P. 121292.

8. Friedkin N. E., Johnsen E. C. *Social influence and opinions* // Journal of Mathematical Sociology. 1990. V. 15. N 3–4. P. 193–206.

9. Galam S. *Minority opinion spreading in random geometry* // European Physical Journal B. 2002. V. 25. N 4. P. 403–406.

10. Ghaderi J., Srikant R. *Opinion dynamics in social networks with stubborn agents* // Automatica. 2014. V. 50. N 12. P. 3209–3215.

11. Hegselmann R., Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulation* // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. V. 5. N 3.

12. Helfmann L., Djurdjevac Conrad N., Lorenz-Spreen P., Schütte C. *Modelling opinion dynamics under the impact of influencer and media strategies* // Scientific Reports. 2023. V. 13. N 1. P. 19375.

13. Hu H., Chen W., Hu Y. *Opinion dynamics in social networks under the influence of mass media* // Applied Mathematics and Computation. 2024. V. 482. P. 128976.

14. Hu H.X., Wen G., Chen Y., Zheng W.X. *Opinion dynamics analysis for stubborn individuals in cooperation–competition networks based on path-dependence framework* // Automatica. 2024. V. 169. P. 111840.

15. Jiang H., Mazalov V.V., Gao H., Wang C. *Opinion dynamics control in a social network with a communication structure* // Dynamic Games and Applications. 2023. V. 13. N 1. P. 412–434.

16. Jiang B., Zhao Y., Dong J., Hu J. *Analysis of the influence of trust in opposing opinions: An inclusiveness-degree based signed Deffuant–Weisbuch model* // Information Fusion. 2024. V. 104. P. 102173.

17. Kareeva Y., Sedakov A., Zhen M. *Stackelberg solutions in an opinion dynamics game with stubborn agents* // Computational Economics. 2025. V. 65. N 3. P. 1397–1428.

18. Liu M., Zhang J., Xiao X., Jin L. *Opinion dynamics considering Matthew effect under switching topology in social networks* // IEEE Transactions on Network Science and Engineering. 2024. V. 11. N 4. P. 3866–3875.

19. Mazalov V. V., Dorofeeva Y. A., Parilina E. M. *Opinion control in a team with complete and incomplete communication* // Contributions to Game Theory and Management. 2020. V. 13. P. 324–334.

20. Mazalov V., Parilina E. *The Euler-equation approach in average-oriented opinion dynamics* // Mathematics. 2020. V. 8. N 3. P. 355.

21. Nugent A., Gomes S. N., Wolfram M. T. *Steering opinion dynamics through control of social networks* // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2024. V. 34. N 7.

22. Peng Y., Zhao Y., Dong J., Hu J. *Adaptive opinion dynamics over community networks when agents cannot express opinions freely* // Neurocomputing. 2025. V. 618. P. 129123.

23. Sood V., Antal T., Redner S. *Voter models on heterogeneous networks* // Physical Review E. 2008. V. 77. N 4. P. 041121.

24. Sznajd-Weron K., Sznajd J. *Opinion evolution in closed community* // International Journal of Modern Physics C. 2000. V. 11. N 6. P. 1157–1165.

25. Vilela A. L., Pereira L. F. C., Dias L., Stanley H. E., da Silva L. R. *Majority-vote model with limited visibility: An investigation into filter bubbles* // Physica A. 2021. V. 563. P. 125450.

26. Wang C., Mazalov V. V., Gao H. *Opinion dynamics control and consensus in a social network* // Automation and Remote Control. 2021. V. 82. N 6. P. 1107–1117.

27. Yildiz A., Özgüler A. B. *Opinion dynamics of stubborn agents under the presence of a troll as differential game* // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2021. V. 29. N 7. P. 3259–3269.

28. Zhang Y., Chen X., Pedrycz W., Dong Y. *Minimum cost consensus with altruism utility constraints in social network group decision making* // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2023. V. 53. N 8. P. 5032–5045.

29. Zhao Y., Xu M., Dong Y., Peng Y. *Fuzzy inference based Hegselmann–Krause opinion dynamics for group decision-making under ambiguity* // Information Processing & Management. 2021. V. 58. N 5. P. 102671.

A. Определение коэффициентов k_1 и k_2

В настоящем приложении из промежуточных соотношений для коэффициентов k_1 и k_2 исключаются текущие управления $u_2(t)$ и $u_1(t)$.

Из (3.10) получаем

$$\alpha_4 = \frac{-\delta k_1}{\left(\gamma_1 + \delta s_1 \left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right) n}, \qquad \beta_4 = \frac{-\delta k_2}{\left(\gamma_2 + \delta \left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right) n}. \tag{1.1}$$

Подставляя (1.1) в (3.11), представим равновесные управления по Нэшу в виде

$$u_1^*(t) = \frac{\left(\alpha_1 + \alpha_3\beta_1\right)\bar{x}(t) + \left(\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\right)x_1(0)}{1 - \alpha_3\beta_3} - \frac{\frac{\alpha_3\delta}{\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)n} k_2\hat{x}_2 + \frac{\delta}{\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)n} k_1\hat{x}_1}{1 - \alpha_3\beta_3}, \tag{1.2}$$

$$u_2^*(t) = \frac{\left(\beta_1 + \beta_3\alpha_1\right)\bar{x}(t) + \left(\beta_3\alpha_2 + \beta_2\right)x_1(0)}{1 - \alpha_3\beta_3} - \frac{\frac{\beta_3\delta}{\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)n} k_1\hat{x}_1 + \frac{\delta}{\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)n} k_2\hat{x}_2}{1 - \alpha_3\beta_3} \tag{1.3}$$

Рассмотрим промежуточное соотношение для k_1:

$$\begin{aligned} k_1 = {} & -s_1\delta^2 \frac{\left[(1-s_1)\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)x_1(0) + \frac{A_1 u_2(t)}{n^2} + \frac{k_1}{n}\right]\left(s_1 + \frac{A_1}{n}\frac{n+s_1-1}{n}\right)}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)} \\ & + \delta\Big[s_1(1-s_1)x_1(0) + u_2(t) \\ & + \frac{n+s_1-1}{n}\Big(A_1\frac{(1-s_1)x_1(0)+u_2(t)}{n} + k_1\Big)\Big] - n\hat{x}_1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

После приведения подобных членов уравнение (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & \Big[1 - \frac{\delta(n+s_1-1)}{n} + \frac{s_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big]k_1 \\ & = \frac{\delta\gamma_1(1-s_1)\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)}x_1(0) \\ & + \Big[\delta\Big(1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\Big) - \frac{s_1A_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big]u_2(t) - n\hat{x}_1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановка (1.3) в (1.5) даёт

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1 + \Gamma_1\bar{x}(t), \tag{1.6}$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{\beta_1 + \beta_3\alpha_1}{1-\alpha_3\beta_3}\Big[\delta\Big(1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\Big) - \frac{s_1A_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big], \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} a_{11} = {} & 1 - \frac{\delta(n+s_1-1)}{n} + \frac{s_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)} \\ & + \frac{\beta_3\delta\hat{x}_1}{n\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)(1-\alpha_3\beta_3)} \\ & \cdot \Big[\delta\Big(1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\Big) - \frac{s_1A_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big], \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$a_{12} = \frac{\delta\hat{x}_2}{n\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)(1 - \alpha_3\beta_3)} \cdot \Big[\delta\Big(1 + \frac{A_1(n + s_1 - 1)}{n^2}\Big) - \frac{s_1 A_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big], \tag{1.9}$$

$$b_1 = \Big[\frac{\delta\gamma_1(1 - s_1)\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)} + \frac{\beta_3\alpha_2 + \beta_2}{1 - \alpha_3\beta_3} \cdot \Big(\delta\big(1 + \frac{A_1(n + s_1 - 1)}{n^2}\big) - \frac{s_1 A_1\delta^2\left(s_1 + \frac{A_1(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1 + \frac{A_1}{n^2}\right)\right)}\Big)\Big]x_1(0) - n\hat{x}_1. \tag{1.10}$$

Аналогично, из промежуточного соотношения для k_2

$$k_2 = -2\delta^2\frac{\left(1 + \frac{A_2}{n}\frac{s_1+n-1}{n}\right)\left(\frac{A_2}{n}\frac{(1-s_1)x_1(0)+s_1u_1(t)}{n} + \frac{k_2}{n}\right)}{\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)} + \delta\Big[s_1(1 - s_1)x_1(0) + s_1^2u_1(t) + \frac{n + s_1 - 1}{n}\Big(A_2\frac{(1 - s_1)x_1(0) + s_1u_1(t)}{n} + k_2\Big)\Big] - n\hat{x}_2, \tag{1.11}$$

получаем

$$\Big[1 - \frac{\delta(n + s_1 - 1)}{n} + \frac{2\delta^2\left(1 + \frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\Big]k_2 = (1 - s_1)\Big[\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n + s_1 - 1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1 + \frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\Big]x_1(0) + s_1\Big[\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n + s_1 - 1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1 + \frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\Big]u_1(t) - n\hat{x}_2. \tag{1.12}$$

Подстановка (1.2) в (1.12) даёт

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = b_2 + \Gamma_2\bar{x}(t), \tag{1.13}$$

где

$$\Gamma_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3\beta_1}{1 - \alpha_3\beta_3}\,s_1\Big[\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n + s_1 - 1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\big(1 + \frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\big)}{n^2\left(\gamma_2 + \delta\left(1 + \frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\Big], \tag{1.14}$$

$$a_{21} = \frac{\delta \hat{x}_1 s_1}{n\left(\gamma_1 + \delta s_1\left(1+\frac{A_1}{n^2}\right)\right)(1-\alpha_3\beta_3)} \cdot \left[\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n+s_1-1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1+\frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\right], \tag{1.15}$$

$$a_{22} = 1 - \frac{\delta(n+s_1-1)}{n} + \frac{2\delta^2\left(1+\frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)} + \frac{\alpha_3\delta\hat{x}_2 s_1}{n\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)(1-\alpha_3\beta_3)} \cdot \left[\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n+s_1-1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1+\frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\right], \tag{1.16}$$

$$b_2 = \left[(1-s_1)\left(\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n+s_1-1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1+\frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\right) + \frac{\alpha_3\beta_2+\alpha_2}{1-\alpha_3\beta_3}\, s_1\left(\delta s_1 + \frac{\delta A_2(n+s_1-1)}{n^2} - \frac{2A_2\delta^2\left(1+\frac{A_2(n+s_1-1)}{n^2}\right)}{n^2\left(\gamma_2+\delta\left(1+\frac{A_2}{n^2}\right)\right)}\right)\right] x_1(0) - n\hat{x}_2. \tag{1.17}$$

Для самосогласованности стационарной квадратичной формы необходимо, чтобы соотношения, полученные после подстановки равновесных управлений по Нэшу, не зависели от текущего среднего мнения $\bar{x}(t)$. Поэтому полагаем

$$\Gamma_1 = 0, \qquad \Gamma_2 = 0. \tag{1.18}$$

Тогда (1.6)–(1.13) принимают вид линейной системы

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1, \qquad a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = b_2. \tag{1.19}$$

При условии

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \tag{1.20}$$

имеем

$$k_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad k_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.21}$$

DYNAMIC GAME ANALYSIS OF OPINION DYNAMICS BASED ON COMPARISON WITH AVERAGE OPINIONS IN A SOCIAL NETWORK WITH STUBBORN AGENTS

Yanshan Liu, Qingdao University, School of Mathematics and Statistics,
Vladimir V. Mazalov, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics-Processes of Control; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS, Dr.Sc., professor (v.v.mazalov@spbu.ru),
Ping Sun, Qingdao University, School of Mathematics and Statistics, PhD
Yajin Chen, Qingdao University, School of Mathematics and Statistics.

Abstract: In opinion dynamics, consensus formation is a dynamic and iterative process in which external players influence agents' opinions through feedback-based decision mechanisms. In this paper, we study a dynamic game model of opinion evolution in a social network with average-based interactions, where a subset of agents exhibits stubborn behavior characterized by heterogeneous stubbornness parameters, while being influenced by external players. The players aim to steer the opinions of all agents toward a common desired value. The proposed model is formulated as a discrete-time linear–quadratic dynamic game. Using the Bellman equation, we derive the feedback Nash equilibrium strategies and the corresponding optimal opinion trajectories. Theoretical analysis characterizes the convergence behavior and identifies conditions under which opinion consensus is achieved. Numerical simulations illustrate how average-based interactions and the locations of stubborn agents affect consensus formation under different control strategies. In addition, the impact of unknown agent stubbornness on the players' payoffs is investigated. The results provide insights into the interplay between network structure, agent stubbornness, and strategic control in guiding opinion consensus.

Keywords: opinion dynamics, stubborn agents, average-based interactions, dynamic game, Bellman equation.