Математическая Теория Игр и её Приложения, т.18, в.2, с. 110–127

УДК 519.83

КООПЕРАТИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ ИГРАХ С КОРРЕКТИРОВКОЙ СЕТИ

Леон А. Петросян
Мэнфа Тянь
Ярославна Б. Панкратова
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru, 18606875043@163.com,
y.pankratova@spbu.ru

В статье исследуются дифференциальные сетевые игры с попарным взаимодействием и возможностью корректировки сети в промежуточные моменты времени. Предлагается подход, основанный на модификации функций выигрыша, для стабилизации начальной кооперативной сети на всем временном горизонте. Показано, что если функции мгновенного выигрыша игрока модифицируются относительно базовой функции выигрыша предложенным способом, то начальная кооперативная сеть остается оптимальной в каждой подыгре. Полученный результат иллюстрируется на примере игры контроля загрязнения окружающей среды с шестью игроками.

Ключевые слова: дифференциальные сетевые игры, кооперативное поведение, корректировка сети, стабилизация кооперативной сети.

Поступила в редакцию: 27.04.26 *После доработки*: 25.05.26 *Принята к публикации*: 01.06.26

1. Введение

Кооперативные дифференциальные игры широко изучались в связи с проблемой динамической устойчивости кооперативных решений

©2026 Л.А. Петросян, М. Тянь, Я.Б. Панкратова

[2, 3, 6, 10, 11]. В таких играх игроки сперва максимизируют суммарный выигрыш, а затем полученный суммарный (кооперативный) выигрыш распределяется между игроками в соответствии с некоторым принципом оптимальности. Различные подходы к построению динамически устойчивых кооперативных решений рассматривались в [10, 11].

В сетевых играх возможности кооперации между игроками ограничиваются коммуникационной сетью. Поэтому структура сети становится важным фактором при построении характеристической функции и при анализе устойчивой кооперации [1, 4, 5, 14].

В дифференциальных сетевых играх кооперативная сеть выбирается в начальный момент времени путем максимизации суммарного выигрыша игроков на всем временном интервале. Однако при развитии игры вдоль кооперативной траектории эта сеть может перестать быть оптимальной в подыгре, начинающейся в некоторый промежуточный момент времени (см. [7, 9]). Полученные результаты показывают, что кооперативная сеть, выбранная в начальный момент времени, может отличаться от кооперативной сети в подыгре на оставшемся временном интервале.

В данной работе предполагается, что для каждого игрока $i \in N$ существует фиксированное подмножество $N_i \subset N \backslash \{i\}$, состоящее из тех игроков $j \in N \backslash \{i\}$, с которыми игрок i может образовать ребро (i, j). Для каждого игрока i число игроков, с которыми он может быть связан, не превосходит n_i, (т.е. n_i задает максимально допустимое число связей для игрока i). В начальный момент игрок $i \in N$ выбирает возможных соседей из множества N_i. Ребро (i, j) образуется тогда и только тогда, когда игрок i выбирает игрока j, а игрок j одновременно выбирает игрока i. На основе таких взаимных выборов формируется допустимая сеть G. Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех допустимых сетей.

В момент времени t_0 игроки кооперируются и выбирают сеть, максимизирующую суммарный выигрыш на интервале $[t_0, T]$. Такая сеть называется кооперативной сетью.

Однако при развитии игры вдоль кооперативной траектории кооперативная сеть, выбранная в момент времени t_0, может уже не быть кооперативной сетью подыгры на интервале $[t_1, T]$, где $t_1 \in$

$(t_0, T]$. Это означает, что начальная кооперативная сеть может оказаться неустойчивой.

Цель данной работы состоит в изучении этой неустойчивости и в предложении метода, позволяющего сохранить устойчивость начальной кооперативной сети. Мы модифицируем функции мгновенного выигрыша игроков на ребрах вдоль кооперативной траектории, сохраняя неизменным выигрыш игрока на всем временном интервале развития игры, и доказываем, что после такой модификации кооперативная сеть на интервале $[t_0, T]$ остается кооперативной сетью подыгры на любом интервале $[t, T]$, $t \in [t_0, T]$.

2. Класс дифференциальных сетевых игр с попарными взаимодействиями

Рассмотрим класс дифференциальных сетевых игр n лиц с попарным взаимодействием на временном отрезке $[t_0, T]$. Игроки связаны в сети $G = (N, M)$, где N — множество вершин, совпадающее с множеством игроков, а $M \subseteq N \times N$ — множество ребер сети. Предполагается, что все связи являются неориентированными. Через $\hat{K}_G(i) = \{j : (i,j) \in M,\ i \in N,\ j \in N,\ i \neq j\}$ обозначим множество игроков, непосредственно связанных с игроком i в сети G.

Динамика игры описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{x}^{ij}(\tau) = f^{ij}\left(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau), u^{ji}(\tau)\right); x^{ij}(t_0) = x_0^{ij};\\ \text{для } \tau \in [t_0, T], \quad i \in N, \quad j \in \hat{K}_G(i).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Через $x^{ij}(\tau) \in \mathbb{R}^m$ обозначим фазовую переменную игрока i в процессе взаимодействия с игроком j в момент времени τ. Через $u^{ij}(\tau) \in U_{ij}$, $U_{ij} \subset \operatorname{Comp} \mathbb{R}^l$, обозначим управление игрока i в процессе взаимодействия с игроком j в момент времени τ. В уравнении (2.1) функция $f^{ij}\left(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau), u^{ji}(\tau)\right)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по $x^{ij}(\cdot)$, $u^{ij}(\cdot)$ и $u^{ji}(\cdot)$.

Пусть $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_n(t))$, где $u_i(t) = \left(u^{ij}(t), j \in \hat{K}_G(i)\right)$ набор управлений игрока i. Через $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^i, \ldots, x_0^n)$ обозначим начальные условия, где $x_0^i = \left(x^{ij}(t_0), j \in \hat{K}_G(i)\right)$ означает набор начальных условий игрока i. Пусть $k_i^j(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau))$ обозначает мгновенный выигрыш игрока i на ребре (i,j) в момент времени τ.

Выигрыш игрока i задается следующим образом:

$$H_i\left(x_0^i, u_i, u_j, T-t_0\right) = \sum_{j\in\hat{K}_G(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\left(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau)\right)\, d\tau = \sum_{j\in\hat{K}_G(i)} h_i^{ij}\left(x_0^{ij}, u^{ij}, u^{ji}, T-t_0\right). \tag{2.2}$$

Здесь полагаем $h_i^{ij}\left(x_0^{ij}, u^{ij}, u^{ji}, T-t_0\right) = \int_{t_0}^{T} k_i^j\left(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau)\right)\, d\tau$.

Для каждого ребра (i,j) мгновенный выигрыш игрока i непосредственно зависит от состояния $x^{ij}(\tau)$ и от собственного управления игрока i, $u^{ij}(\tau)$. Управление $u^{ji}(\tau)$ игрока j, $j\in\hat{K}_G(i)$, не входит явно в функцию мгновенного выигрыша, но влияет на нее косвенно через динамику состояния $x^{ij}(\tau)$. Поэтому в (2.2) функция выигрыша игрока i зависит от его фазовой переменной, его управления, а также от управлений игроков из множества $\hat{K}_G(i)$.

3. Характеристическая функция

Определим значение характеристической функции для коалиции N в сети G:

$$V_G(N; x_0, T-t_0) = \max_{u_1,u_2,\ldots,u_n} \left\{ \sum_{i\in N} \left(\sum_{j\in\hat{K}_G(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\left(x^{ij}(\tau), u^{ij}(\tau)\right)\, d\tau \right) \right\} = \sum_{i\in N} \sum_{j\in\hat{K}_G(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\left(\bar{x}_G^{ij}(\tau), \bar{u}_G^{ij}(\tau)\right)\, d\tau. \tag{3.1}$$

Здесь максимум берется по множеству всех допустимых управлений, и предполагается, что этот максимум достигается. Заметим, что кооперативная траектория $\bar{x}^{ij}(\tau)$ и кооперативное управление $\bar{u}^{ij}(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, определяются на сети G, поэтому можно записывать их в виде $\bar{x}_G^{ij}(\tau)$ и $\bar{u}_G^{ij}(\tau)$.

Обозначим

$$V(N; x_0, T-t_0) = \max_{G\in\mathcal{G}} V_G(N; x_0, T-t_0) = V_{\bar{G}}(N; x_0, T-t_0) = \sum_{i\in N} \sum_{j\in\hat{K}_{\bar{G}}(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\big(\bar{x}_{\bar{G}}^{ij}(\tau),\, \bar{u}_{\bar{G}}^{ij}(\tau)\big)\, d\tau. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем опускать нижний индекс $\bar{G}$ при $\bar{x}$ и $\bar{u}$.

Для каждого $S \subset N$ определим значение характеристической функции [9] следующим образом:

$$V(S; x_0, T-t_0) = \sum_{i\in S}\left[\sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)\cap S}\int_{t_0}^{T} k_i^j\left(\bar{x}^{ij}(\tau), \bar{u}^{ij}(\tau)\right)\, d\tau \right.$$
$$\left. + \alpha(S)\cdot \sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)\cap N\setminus S}\int_{t_0}^{T} k_i^j\left(\bar{x}^{ij}(\tau), \bar{u}^{ij}(\tau)\right)\, d\tau\right].$$

Здесь $\alpha(S) \in [0,1)$ – коэффициент дисконтирования, а величина $1-\alpha(S)$ может интерпретироваться как уровень санкций, применяемых коалицией $N\setminus S$ против коалиции S.

Для удобства обозначений определим выигрыш игрока i на ребре $(i,j) \in \bar{G}$ следующим образом:

$$\beta_{ij}(t_0) = \beta_{ij}(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^{T} k_i^j\left(\bar{x}^{ij}(\tau), \bar{u}^{ij}(\tau)\right)\, d\tau$$

и

$$\beta_{ij}(t) = \beta_{ij}(\bar{x}(t), T-t) = \int_{t}^{T} k_i^j\left(\bar{x}^{ij}(\tau), \bar{u}^{ij}(\tau)\right)\, d\tau$$

для $t \in [t_0, T]$. Обозначим

$$P_{ij}(\tau) = k_i^j\left(\bar{x}^{ij}(\tau), \bar{u}^{ij}(\tau)\right). \tag{3.3}$$

В начальный момент времени t_0 игроки кооперируются и выбирают сеть $\bar{G} \in \mathcal{G}$, максимизирующую суммарный выигрыш игроков множества N. Этот выигрыш равен $V_{\bar{G}}(N; x_0, T-t_0)$. Такая сеть $\bar{G}$ называется кооперативной сетью на интервале $[t_0, T]$, а соответствующий выигрыш называется кооперативным выигрышем.

Когда игроки движутся вдоль кооперативной траектории $(\bar{x}^{ij}(\tau))$ в кооперативной сети, в некоторые промежуточные моменты времени на этой траектории кооперативная сеть может перестать быть таковой. Это связано с тем, что в подыгре, начинающейся из состояния на кооперативной траектории, максимальный суммарный выигрыш игроков может достигаться на другой сети. Это свойство впервые было показано в работе [8].

4. Дифференциальная игра контроля загрязнения с попарным взаимодействием на сети

Рассмотрим следующую дифференциальную сетевую игру. Предположим, что имеется шесть игроков (узлов сети), и пусть $N = \{1,2,3,4,5,6\}$. Каждый из них взаимодействует с другими игроками в дифференциальной игре контроля загрязнения. Для каждого $i \in N$ множество его возможных соседей задается как $N_i = \{j \mid j \in N \backslash \{i\}\}$. Предположим, что игроки могут создавать не более трех связей, то есть для каждого $i \in N$ выполняется $n_i = 3$.

Если образуется ребро $(1,4)$, то игроки 1 и 4 играют следующую дифференциальную игру контроля загрязнения [3]. Динамика на ребре $(1,4)$ задается системой

$$\dot{x}^{14}(t) = u^{14}(t) \ + \ d\,u^{41}(t) \ - \ \delta\,x^{14}(t), \quad x^{14}(t_0) = x_0^{14},$$

$$\dot{x}^{41}(t) = u^{41}(t) \ + \ d\,u^{14}(t) \ - \ \delta\,x^{41}(t), \quad x^{41}(t_0) = x_0^{41}.$$

Выигрыш каждого игрока на ребре $(1,4)$ имеет вид

$$h_1^{14}\big(x_0^{14}, u^{14}, u^{41}, T-t_0\big) = \int_{t_0}^{T} \Big[a^{14}u^{14}(t) - \tfrac{c^{14}}{2}\big(u^{14}(t)\big)^2 - b_{14}x^{14}(t) + A^{14}\Big]\,dt,$$

$$h_4^{41}\big(x_0^{41}, u^{41}, u^{14}, T-t_0\big) = \int_{t_0}^{T} \Big[a^{41}\,u^{41}(t) - \tfrac{c^{41}}{2}\big(u^{41}(t)\big)^2 - b_{41}\,x^{41}(t) + A^{41}\Big]\,dt,$$

где $b_{14}, b_{41}, c^{14}, c^{41} > 0$, а $d, \delta, A^{14}, A^{41}$ являются заданными постоянными.

Та же дифференциальная игра контроля загрязнения типа 1, сформулированная выше для ребра $(1,4)$, рассматривается на ребрах $(1,2)$, $(4,5)$, $(1,5)$ и $(2,6)$ с соответствующими изменениями верхних индексов и значений параметров.

Если образуется ребро $(1,3)$, то игроки 1 и 3 играют следующую дифференциальную игру контроля загрязнения [12]. Динамика на ребре $(1,3)$ задается системой

$$\dot{x}^{13}(t) = u^{13}(t) \ + \ u^{31}(t) \ - \ \gamma\,m\,x^{13}(t), \quad x^{13}(t_0) = x_0^{13},$$
$$\dot{x}^{31}(t) = u^{13}(t) \ + \ u^{31}(t) \ - \ \gamma\,m\,x^{31}(t), \quad x^{31}(t_0) = x_0^{31}.$$

Выигрыш каждого игрока на ребре $(1,3)$ имеет вид

$$h_1^{13}\big(x_0^{13}, u^{13}, u^{31}, T-t_0\big) = \int_{t_0}^{T} \Big[-b_{13}\big(u^{13}(t)\big)^2 + c_{13}\,u^{13}(t) - d_{13}x^{13}(t) + A^{13}\Big]dt,$$

$$h_3^{31}\big(x_0^{31},u^{31},u^{13},T-t_0\big)=\int_{t_0}^{T}\Big[-b_{31}\big(u^{31}(t)\big)^2+c_{31}\,u^{31}(t)-d_{31}x^{31}(t)+A^{31}\Big]dt,$$

где $\gamma > 0$ и $m > 0$, а $b_{13}, b_{31}, c_{13}, c_{31}, d_{13}, d_{31}, A^{13}, A^{31} \geq 0$ являются заданными параметрами.

Та же дифференциальная игра контроля загрязнения типа 2, сформулированная выше для ребра $(1,3)$, рассматривается на ребрах $(2,5)$, $(4,6)$, $(1,6)$ и $(3,4)$ с соответствующими изменениями верхних индексов и значений параметров.

Если образуется ребро $(2,3)$, то игроки 2 и 3 играют следующую дифференциальную игру контроля загрязнения [13]. Динамика на ребре $(2,3)$ задается системой

$$\dot{x}^{23}(t)=\mu\,u^{23}(t)\;-\;\varepsilon\,x^{23}(t)\;+\;u^{32}(t),\quad x^{23}(t_0)=x_0^{23},$$

$$\dot{x}^{32}(t)=\mu\,u^{32}(t)\;-\;\varepsilon\,x^{32}(t)\;+\;u^{23}(t),\quad x^{32}(t_0)=x_0^{32}.$$

Выигрыш каждого игрока на ребре $(2,3)$ имеет вид

$$h_2^{23}\big(x_0^{23},u^{23},u^{32},T-t_0\big)=\int_{t_0}^{T}\Big[-b_{23}\big(u^{23}(t)\big)^2+c_{23}\,u^{23}(t)-d_{23}x^{23}(t)+A^{23}\Big]dt,$$

$$h_3^{32}\big(x_0^{32},u^{32},u^{23},T-t_0\big)=\int_{t_0}^{T}\Big[-b_{32}\big(u^{32}(t)\big)^2+c_{32}\,u^{32}(t)-d_{32}x^{32}(t)+A^{32}\Big]dt,$$

где $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ – коэффициент естественного убывания загрязнения, и все параметры $b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, A^{ij}$ строго положительны.

Та же дифференциальная игра контроля загрязнения типа 3, что и сформулированная для ребра $(2,3)$, рассматривается на ребрах $(3,6)$, $(5,6)$, $(2,4)$ и $(3,5)$ с соответствующими изменениями верхних индексов и значений параметров.

Мы определили три типа дифференциальных игр контроля загрязнения с попарными взаимодействиями, обозначаемые как типы 1–3. Игроки на каждом ребре кооперируются с целью максимизации суммарного выигрыша. Применяя принцип максимума Понтрягина [3, 5, 12, 13], получаем следующие оптимальные управления и соответствующие оптимальные фазовые траектории для каждого типа игр.

$$\bar{u}^{14}(t)=\frac{1}{c_{14}}\left[a_{14}\;+\;\Big(\frac{b_{14}+d\,b_{41}}{\delta}\Big)\big(e^{\delta\,(t-T)}-1\big)\right],\qquad t\in[t_0,T].$$

$$\bar{x}^{14}(t) = \frac{A}{\delta} \; + \; \frac{B}{2\,\delta}\, e^{\delta\,(t-T)} \; + \; \left(x_0^{14} \; - \; \frac{A}{\delta} \; - \; \frac{B}{2\,\delta}\, e^{\delta\,(t_0-T)} \right) e^{-\delta\,(t-t_0)}.$$

Здесь $A = K_{14} + d\,K_{41}$ and $B = M_{14} + d\,M_{41}$, где

$$K_{14} = \frac{1}{c_{14}} \Big(a_{14} \; - \; \frac{b_{14} + d\,b_{41}}{\delta} \Big), \qquad M_{14} = \frac{1}{c_{14}} \cdot \frac{b_{14} + d\,b_{41}}{\delta},$$

$$K_{41} = \frac{1}{c_{41}} \Big(a_{41} \; - \; \frac{b_{41} + d\,b_{14}}{\delta} \Big), \qquad M_{41} = \frac{1}{c_{41}} \cdot \frac{b_{41} + d\,b_{14}}{\delta},$$

$$\bar{u}^{13}(t) = \frac{c_{13}}{2\,b_{13}} \; + \; \frac{1}{2\,b_{13}} \, \frac{d_{13} + d_{31}}{\gamma\, m} \Big(e^{\gamma m\,(t-T)} - 1 \Big), \qquad t \in [t_0, T].$$

$$\bar{x}^{13}(t) = e^{-\gamma m\,(t-t_0)} \left[x_0^{13} + \big(A - B \big) \, \frac{e^{\gamma m\,(t-t_0)} - 1}{\gamma m} + B\, e^{\gamma m\,(t_0-T)} \, \frac{e^{2\gamma m\,(t-t_0)} - 1}{2\,\gamma m} \right],$$

где

$$A = \frac{c_{13}}{2\,b_{13}} + \frac{c_{31}}{2\,b_{31}}, \qquad B = \Big(\frac{1}{2\,b_{13}} + \frac{1}{2\,b_{31}} \Big) \, \frac{d_{13} + d_{31}}{\gamma\, m}.$$

$$\bar{u}^{23}(t) = \frac{1}{2\,b_{23}} \Big(c_{23} \; + \; \frac{1}{\varepsilon} \, (\mu\, d_{23} + d_{32}) \, (e^{\varepsilon\,(t-T)} - 1) \Big), \qquad t \in [t_0, T].$$

$$\bar{x}^{23}(t) = e^{-\varepsilon\,(t-t_0)} \left[x_0^{23} + \frac{C_0 - C_1}{\varepsilon} \, \big(e^{\varepsilon\,(t-t_0)} - 1 \big) + \frac{C_1}{2\,\varepsilon} \, e^{\varepsilon\,(t_0-T)} \, \big(e^{2\,\varepsilon\,(t-t_0)} - 1 \big) \right],$$

где $C_0 = \mu\, K_{23}\, c_{23} \; + \; K_{32}\, c_{32}$ и $C_1 = \frac{1}{\varepsilon} \, \big(\mu\, K_{23}\, M_{23} + K_{32}\, M_{32} \big)$,

$$M_{23} := \mu\, d_{23} + d_{32}, \quad M_{32} := \mu\, d_{32} + d_{23}, \quad K_{23} := \frac{1}{2\,b_{23}}, \quad K_{32} := \frac{1}{2\,b_{32}},$$

Если игроки симметрично входят в игру, то для получения решения для другого игрока достаточно заменить нижний индекс ij на ji.

5. Численный пример

Для каждого ребра соответствующий тип игры и значения параметров приведены в таблицах 1–3, где $T = 10$ и $t_0 = 0$.

Таблица 1. Параметры для игр типа 1 (ребра 14, 12, 45, 15, 26)

ребро	игрок	d	δ	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}	x_0^{ij}	A^{ij}
14	1	0.32	0.55	6.11	0.45	2.10	3.54	9.00
14	4			5.79	0.40	2.20	4.07	8.70
12	1	0.35	1.10	9.18	1.00	2.00	15.00	0.00
12	2			9.26	1.10	2.16	14.18	0.00
45	4	0.33	1.08	8.82	1.00	2.00	14.10	0.00
45	5			9.83	1.10	2.16	13.50	0.00
15	1	0.35	0.12	9.99	0.80	1.50	0.20	0.00
15	5			9.57	0.68	1.61	0.44	0.00
26	2	0.33	0.13	10.36	0.84	1.50	0.26	0.00
26	6			9.93	0.70	1.61	0.36	0.00

Таблица 2. Параметры для игр типа 2 (ребра 25, 13, 46, 16, 34)

ребро	игрок	γ	m	b_{ij}	c_{ij}	d_{ij}	x_0^{ij}	A^{ij}
25	2	0.55	1.00	1.70	6.98	0.45	3.63	9.00
25	5			1.60	6.54	0.42	4.54	8.80
13	1	1.20	1.00	1.00	11.27	1.00	25.59	0.00
13	3			1.06	11.25	0.92	21.88	0.00
46	4	1.15	1.00	1.00	9.67	1.00	21.46	0.00
46	6			1.06	10.67	0.92	21.41	0.00
16	1	0.80	1.00	1.00	12.19	2.00	0.22	0.00
16	6			1.06	11.69	1.71	0.36	0.00
34	3	0.86	1.00	1.00	12.68	1.90	0.18	0.00
34	4			1.06	12.17	1.85	0.48	0.00

В начальный момент времени t_0 игроки максимизируют суммарный выигрыш на всем временном интервале $[t_0, T]$, как это определено в формулах (3.1) и (3.2), и формируют кооперативную сеть $G1$, представленную на рис. 1. Максимальный суммарный выигрыш на этой сети равен

$$V_{G1}\big(N; x_0, T-t_0\big) = \sum_{i\in N} \sum_{j\in \hat{K}_{G1}(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\big(\bar{x}^{ij}(\tau),\, \bar{u}^{ij}(\tau)\big)\, d\tau$$
$$= \max_{u_1,u_2,\ldots,u_n} \sum_{i\in N} H_i(\,\cdot\,) = 2892.08.$$

Таблица 3. Параметры для игр типа 3 (ребра 36, 23, 56, 24, 35)

ребро	игрок	μ	ε	b_{ij}	c_{ij}	d_{ij}	x_0^{ij}	A^{ij}
36	3	0.82	0.55	1.70	6.50	0.45	2.00	9.00
36	6			1.60	6.10	0.42	2.30	8.90
23	2	0.70	1.20	1.00	9.00	1.00	18.00	0.00
23	3			1.06	9.55	0.92	15.39	0.00
56	5	0.74	1.15	1.00	8.82	1.00	16.56	0.00
56	6			1.06	9.73	0.92	16.52	0.00
24	2	0.90	0.15	1.00	13.07	0.80	0.22	0.00
24	4			1.06	12.54	0.68	0.36	0.00
35	3	0.86	0.16	1.00	12.00	0.77	0.18	0.00
35	5			1.06	11.51	0.74	0.46	0.00

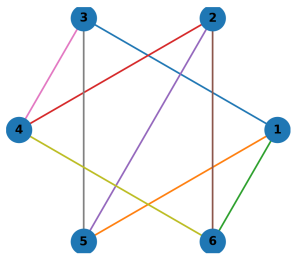


Рисунок 1. Начальная кооперативная сеть $G1$

Предположим, что сеть может быть скорректирована только один раз в некоторый промежуточный момент времени с целью максимизации суммарного выигрыша на всем интервале развития игрового процесса. Это означает, что если сеть корректируется только один раз в промежуточный момент времени t, то суммарный выигрыш на всем интервале $[0, 10]$ равен суммарному выигрышу оптимальной сети в начальный момент времени на интервале $[0, t]$ плюс суммарный выигрыш оптимальной сети на интервале $[t, 10]$. После вычисления оптимальной сети и соответствующего максимального суммарного выигрыша оказывается, что максимальный суммарный выигрыш на всем интервале $[0, 10]$ достигается при корректировке сети в промежуточный момент времени 5.156. Результаты приведены в табл. 4. Скорректированная сеть представлена на рис. 2.

Для простоты вычислений мы в данном случае предполагаем, что на всех ребрах игроки взаимодействуют в соответствии с уравнением

(2.1) и выигрышами (2.2). Однако кооперация всех игроков предполагается лишь на допустимых сетях. Такими являются сети $G1$ и $G2$.

Таблица 4. Однократная корректировка сети

Временной интервал	Сеть	Максимальный суммарный выигрыш
$[0, 10]$	$\{(1,3),(1,5),(1,6),(2,4),$ $(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(4,6)\}$	2892.08
$[0, 5.156]$	$\{(1,3),(1,5),(1,6),(2,4),$ $(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(4,6)\}$	1638.96
$[5.156, 10]$	$\{(1,2),(1,3),(1,6),(2,3),(2,5),$ $(3,4),(4,5),(4,6),(5,6)\}$	1398.73

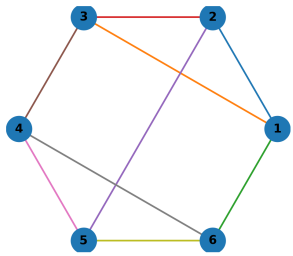


Рисунок 2. Сеть после одной корректировки ($G2$)

Пусть $V_{G2}(N; x_0, T-t_0)$ обозначает максимальный суммарный выигрыш игроков на отрезке времени, когда игроки кооперируются на сети $G2$. На всем временном отрезке $[0, 10]$ суммарный выигрыш на сети $G1$ больше, чем суммарный выигрыш на сети $G2$:

$$V_{G2}\big(N; x_0, 10\big) = 2829.10 < V_{G1}\big(N; x_0, 10\big) = 2892.08.$$

Однако, после корректировки сети в момент времени $t = 5.156$ суммарный выигрыш с использованием двух сетей $G1$ и $G2$ на всем временном интервале $[0.10]$ оказывается больше, чем суммарный выигрыш игроков в начальной кооперативной сети $G1$ на всем интервале:

$$V_{G1}\big(N; x_0, 5.156\big) + V_{G2}\big(N; \bar{x}(5.156), 4.844\big) = 1638.96 + 1398.73 = 3037.69.$$

То есть

$$V_{G1}\big(N; x_0, 5.156\big) + V_{G2}\big(N; \bar{x}(5.156), 4.844\big) > V_{G1}\big(N; x_0, 10\big) = 2892.08,$$

Таким образом, хотя $G1$ является кооперативной сетью в начальный момент времени, корректировка сети с $G1$ на $G2$ в промежуточный момент времени $t = 5.156$ приводит к большему суммарному выигрышу.

6. Стабилизация кооперативной сети

В предыдущем разделе на примере игры контроля загрязнения было показано, что при развитии игры вдоль оптимальной траектории кооперативная сеть может быть неустойчивой. В данном разделе обсудим, каким образом можно добиться устойчивости начальной кооперативной сети.

Пусть $P_{ij}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, обозначает функцию мгновенного выигрыша игрока i, когда игрок i кооперируется с игроком j на ребре (i, j). Наша цель состоит в том, чтобы сохраняя суммарный выигрыш игрока во всей игре (на всем интервале развития $[t_0, T]$) для каждого игрока i на каждом ребре (i, j) построить новую функцию мгновенного выигрыша $\hat{P}_{ij}(\tau)$, которая в некотором смысле подобна функции $P_{12}(\tau)$ (предполагается, что ребро $(1, 2)$ принадлежит кооперативной сети), и отличается от нее только коэффициентом пропорциональности.

Предположим, что

$$\int_{t_0}^{T} P_{12}(\tau)\, d\tau = A_{12}, \qquad \int_{t_0}^{T} P_{ij}(\tau)\, d\tau = A_{ij}.$$

Возьмем $P_{12}(\tau)$ в качестве базовой функции и определим

$$\hat{P}_{ij}(\tau) = \lambda_{ij} P_{12}(\tau),$$

где λ_{ij} является константой, которую необходимо определить.

Тогда

$$\int_{t_0}^{T} \hat{P}_{ij}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{T} \lambda_{ij} P_{12}(\tau)\, d\tau = \lambda_{ij} \int_{t_0}^{T} P_{12}(\tau)\, d\tau = \lambda_{ij} A_{12}.$$

Чтобы сохранить суммарный выигрыш A_{ij}, потребуем, чтобы

$$\int_{t_0}^{T} \hat{P}_{ij}(\tau)\, d\tau = A_{ij}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{ij}A_{12} = A_{ij}.$$

Таким образом, построенная функция мгновенного выигрыша имеет вид

$$\hat{P}_{ij}(\tau) = \lambda_{ij}P_{12}(\tau) = \frac{A_{ij}}{A_{12}}P_{12}(\tau). \tag{6.1}$$

Если использовать $\hat{P}_{ij}(\tau)$ для обозначения построенной функции мгновенного выигрыша каждого игрока $i \in N$ на каждом ребре (i,j), то получим $n(n-1)$ значений коэффициентов λ. При этом в любой момент времени между ними сохраняется одно и то же соотношение. Например, если

$$\lambda_{1n} > \lambda_{n1} > \lambda_{2n} > \lambda_{n2} > \cdots > \lambda_{n-1,n} > \lambda_{n,n-1},$$

то $\hat{P}_{1n}(\tau) > \hat{P}_{n1}(\tau) > \hat{P}_{2n}(\tau) > \hat{P}_{n2}(\tau) > \cdots > \hat{P}_{n-1,n}(\tau) > \hat{P}_{n,n-1}(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Теорема 6.1. *Пусть $\bar{G}$ является кооперативной сетью на интервале $[t_0, T]$. Предположим, что существует момент времени $t_1 \in (t_0, T)$, такой, что $\bar{G}$ не оказывается кооперативной сетью подыгры на интервале $[t_1, T]$. После модификации функций мгновенного выигрыша игроков на всех ребрах вдоль кооперативной траектории в соответствии с формулой (6.1) в момент времени t_0, сеть $\bar{G}$ остается кооперативной сетью подыгры на любом интервале $[t, T]$, $t \in [t_0, T]$. Следовательно, $\bar{G}$ остается устойчивой (т.е. не меняется) на всем интервале $[t_0, T]$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&V_{\bar{G}}(N; x_0, T - t_0) = \max_{G} V_G(N; x_0, T - t_0) \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)} \int_{t_0}^{T} k_i^j\big(\bar{x}_{\bar{G}}^{ij}(\tau),\, \bar{u}_{\bar{G}}^{ij}(\tau)\big)\, d\tau = \sum_{i\in N} \sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)} \int_{t_0}^{T} P_{ij}(\tau)\, d\tau \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)} (\lambda_{ij}A_{12}) = A_{12} \sum_{i\in N} \sum_{j\in \hat{K}_{\bar{G}}(i)} \lambda_{ij}.
\end{aligned}$$

Поскольку функция $P_{12}(\tau)$ фиксирована, а коэффициенты λ_{ij} не зависят от времени, порядок выигрышей для всех допустимых сетей

остается неизменным на всем интервале $[t_0, T]$. Поэтому сеть, оптимальная в начальный момент времени, остается оптимальной в любой промежуточный момент времени t_1. Следовательно, если функции мгновенного выигрыша всех игроков вдоль кооперативной траектории модифицируются в начальный момент времени t_0 согласно формуле (6.1), то кооперативная сеть в подыгре на интервале $[t_1, T]$ совпадает с кооперативной сетью на интервале $[t_0, T]$. □

Как было показано в предыдущем численном примере, кооперативная сеть, возникающая в дифференциальных играх контроля загрязнения, может быть неустойчивой относительно промежуточной корректировки сети. Чтобы устранить эту неустойчивость, не изменяя суммарный выигрыш, получаемый каждым игроком на каждом ребре на всем временном интервале развития игры, модифицируем функции мгновенного выигрыша игроков вдоль кооперативных траекторий в соответствии с формулой (6.1).

Более точно, для каждого игрока i на каждом ребре ij заменим исходную функцию мгновенного выигрыша $P_{ij}(\tau)$ на

$$\hat{P}_{ij}(\tau) = \lambda_{ij} P_{12}(\tau),$$

где коэффициент λ_{ij} выбирается так, чтобы суммарный выигрыш на интервале $[t_0, T]$ сохранялся:

$$\int_{t_0}^{T} \hat{P}_{ij}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{T} P_{ij}(\tau)\, d\tau.$$

Вычисленные коэффициенты λ_{ij} приведены в таблице 5, а модифицированные функции мгновенного выигрыша показаны на рис. 3. Согласно вычислениям, после модификации кооперативный выигрыш равен 2892.08, что совпадает с кооперативным выигрышем до модификации. Кооперативная сеть также остается неизменной и совпадает с исходной сетью $G1$. При этом после модификации ни одна промежуточная корректировка сети не увеличивает суммарного выигрыша игроков.

Таблица 5. Значения коэффициентов пропорциональности λ_{ij}

λ_{12}	λ_{21}	λ_{13}	λ_{31}	λ_{14}	λ_{41}	λ_{15}	λ_{51}	λ_{16}	λ_{61}
1.0000	0.8968	1.4566	1.4007	1.0192	0.9381	0.9481	0.8610	1.0996	0.9436
λ_{23}	λ_{32}	λ_{24}	λ_{42}	λ_{25}	λ_{52}	λ_{26}	λ_{62}	λ_{34}	λ_{43}
0.8885	1.0220	1.2749	1.0810	0.8958	0.8555	1.0415	0.9713	1.3591	1.0463
λ_{35}	λ_{53}	λ_{36}	λ_{63}	λ_{45}	λ_{54}	λ_{46}	λ_{64}	λ_{56}	λ_{65}
1.0738	0.7968	0.8657	0.8385	0.9004	1.0548	0.9537	1.2333	0.8169	1.0489

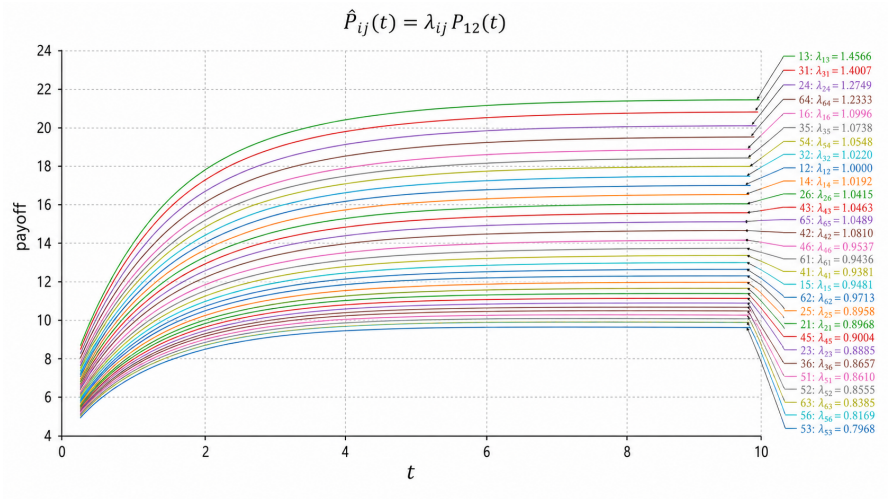


Рисунок 3. Модифицированные функции мгновенного выигрыша

Заключение

В данной работе рассмотрен класс дифференциальных сетевых игр с попарным взаимодействием. Для каждой сети кооперативная сеть выбиралась путем максимизации суммарного выигрыша игроков на интервале $[t_0, T]$.

Численный пример показывает, что кооперативная сеть, выбранная в начальный момент времени, может быть неустойчивой.

Для того чтобы сделать кооперативную сеть устойчивой, были модифицированы функции мгновенного выигрыша игроков на всех ребрах вдоль кооперативной траектории. Построенные функции имеют тот же вид, что и $P_{12}(\tau)$, и отличаются от нее только коэффициентами пропорциональности λ_{ij}. Эти коэффициенты выбираются таким образом, чтобы суммарный выигрыш каждого игрока на каждом ребре на интервале $[t_0, T]$ остается неизменным.

Доказано, что после такой модификации кооперативный выигрыш остается прежним, кооперативная сеть по-прежнему совпадает с $G1$, а кооперативная сеть в подыгре на любом интервале $[t, T]$, $t \in [t_0, T]$, совпадает с кооперативной сетью на интервале $[t_0, T]$. Таким образом, начальная кооперативная сеть остается устойчивой и неизменной на всем интервале $[t_0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulgakova M.A. *Dynamic cooperative network games with pairwise interactions* // Contributions to Game Theory and Management. 2020. Vol. 13. P. 95–120.

2. Jørgensen S., Zaccour G. *Time consistent side payments in a dynamic game of downstream pollution* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2001. Vol. 25. N 12. P. 1973–1987.

3. Long N.V. *Pollution control: A differential game approach* // Annals of Operations Research. 1992. Vol. 37. P. 283–296.

4. Parilina E.M., Sedakov A.A. *Stable cooperation in graph-restricted games* // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 271–281.

5. Parilina E., Sedakov A. *Cooperative differential games on networks: A survey* // International Game Theory Review. 2022. Vol. 24. N 3. Art. N 2250012.

6. Petrosyan L.A. *Differential Games of Pursuit*. Singapore: World Scientific. 1993.

7. Petrosyan L.A., Pankratova Y.B. *Time-inconsistency of cooperative networks in differential games* // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2025. P. 171–179.

8. Petrosyan L.A., Pankratova Y.B., Qi K. *About the instability of cooperative communication structures in differential network games* // Contributions to Game Theory and Management. 2024. Vol. 17. P. 155–163.

9. Petrosyan L.A., Yeung D.W.K., Pankratova Y.B. *Power degrees in dynamic multi-agent systems* // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2023. Vol. 29. N 3. P. 128–137.

10. Petrosyan L.A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. N 3. P. 381–398.

11. Reddy P.V., Zaccour G. *A friendly computable characteristic function* // Automatica. 2013. Vol. 49. N 9. P. 2851–2858.

12. Sedakov A., Qiao H., Wang S. *A model of river pollution as a dynamic game with network externalities* // European Journal of Operational Research. 2021. Vol. 290. N 3. P. 1136–1153.

13. Sedakov A. *A model of river pollution as a dynamic game with network externalities* // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 323–332.

14. Tur A.V., Petrosyan L.A. *Cooperative optimality principles in differential games on networks* // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. N 6. P. 1095–1106.

COOPERATIVE BEHAVIOR AND NETWORK STABILIZATION IN DIFFERENTIAL NETWORK GAMES WITH NETWORK STRUCTURE ADJUSTMENT

Leon A. Petrosyan, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc., Professor (l.petrosyan@spbu.ru),
Menfga Tian, Saint-Petersburg State University (18606875043@163.com),
Yaroslavna B. Pankratova, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc., associate professor (y.pankratova@spbu.ru).

Abstract: The article examines differential network games with pairwise interaction with the possibility of network corrections at intermediate time instants. An approach based on modification of payoff functions is proposed to stabilize the initial cooperative network over the entire time horizon. It is shown that if the player's instantaneous payoffs are modified in a special way keeping the total payoff of the player unchanged on the whole time interval, the initial cooperative network remains optimal in each subgame. The result is illustrated by an example of a six-player environmental pollution control game.

Keywords: differential network games, cooperative behavior, network adjustment, cooperative network stabilization.