

УДК 519.8

ББК 22.1

НАЛОГОВАЯ ИГРА В ДУОПОЛИИ КУРНО

АЛЕКСАНДР ГАЛЕГОВ

АНДРЕЙ ГАРНАЕВ

Факультет прикладной математики –
процессов управления

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: galegov@rambler.ru, agarnaev@rambler.ru

Модель Штакельберга для иерархических олигопольных рынков с однородными продуктами исследовалась учеными интенсивно. В данной работе мы расширим на общий случай иерархической структуры решение по Штакельбергу в аналитическом виде. Игра может рассматриваться как многошаговая с полной информацией. Главной особенностью игры является наличие лидирующих групп фирм, которые первыми устанавливают объем выпуска товаров, а остальные фирмы ориентируются в своих расчетах на них.

Ключевые слова: иерархические структуры, равновесие Штакельберга в иерархических структурах, Курно-Нэш равновесия.

1. Введение

Во многих странах налоговая ставка зависит от базы налогообложения. В России в 2003 для поддержки малого бизнеса была введена так называемая упрощенная налоговая система, которая состоит из двух налоговых ставок (6 и 15 процентов). Именно поэтому некоторые фирмы оказываются перед проблемой выбора одной из них: либо

налоговая ставка с чистой прибыли (когда фирма платит налоги от совокупного дохода минус общие затраты), либо налоговая ставка с совокупного дохода (когда фирма платит налог с совокупного дохода). Налоговая ставка с совокупного дохода (6 процентов) - меньше чем налоговая ставка с чистой прибыли (15 процентов), потому что база налогообложения в первом случае больше.

В конкурентной среде, когда есть несколько фирм, производящих однородную продукцию для рынка, проблема выбора становится теоретико-игровой задачей, так как каждая фирма должна взять в рассмотрение поведение его конкурента. Мы назовем эту ситуацию налоговой игрой. Цель данной статьи состоит в обобщении проблемы выбора налоговой ставки так же как и критериев этого выбора для случая конкуренции. В этой работе мы рассматриваем два сценария данной задачи. Первый сценарий – двухшаговая игра. На первом шаге фирмы планируют их производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок, в то время как на втором шаге они решают какую налоговую ставку лучше использовать. Таким образом, двухшаговая игра является комбинацией модели Курно и биматричной игры, как это было сделано в R&D игре в транспорте и коммуникациях Lambertini, Mantovani и Rossini ([3], [4])

Второй сценарий – одношаговая игра, где фирмы выбирают оптимальную налоговую ставку после установки плана производства и этот сценарий является модификацией модели Курно.

2. Модель двухшаговой игры

Мы исследуем дуополию, где две фирмы (1 и 2) конкурируют некооперативно в двухшаговой структуре модели Курно. Обе фирмы производят однородную продукцию. Рыночная конкуренция описывается с помощью игры Курно, где каждая фирма выбирает максимизирующее прибыль количество продукции по отдельности. На первом шаге фирмы планируют свое производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок, в то время как на втором шаге они решают какую налоговую ставку лучше использовать. Мы используем обратную индукцию.

3. Первый шаг игры: модель Курно

В этом разделе и в последующих четырех подразделах мы исследуем первый шаг налоговой игры, где фирмы планируют их производство в модели Курно для каждой комбинации возможных налоговых ставок (совокупный доход и чистая прибыль). Пусть q_i – количество продукции, произведенной фирмой i , где $i = 1, 2$ и p цена продукции, которая зависит от его общего количества на рынке по следующей линейной модели ([3])

$$p = A - q_1 - q_2$$

где A – максимально возможная цена продукции, поддерживаемая рынком. Также мы предполагаем что предельные затраты для продукции для обеих фирм - c и $A > c$ из-за неотрицательности предельных затрат.

3.1. Обе фирмы выбирают налоговую ставку с чистой прибылью

В этом подразделе мы предполагаем, что обе фирмы выбирают налоговую ставку с чистой прибылью. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\pi_1^{pp} &= \beta_p((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1), \\ \pi_2^{pp} &= \beta_p((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2),\end{aligned}$$

где $\beta_p = 1 - T_p$ и T_p – налоговая ставка с чистой прибылью.

Каждая фирма максимизирует свою прибыль, учитывая количество продукции, проданной на рынке. Поэтому равновесные стратегии задаются соотношениями:

$$q_{*1}^{pp} = q_{*2}^{pp} = \frac{A - c}{3}.$$

Подставляя равновесные стратегии в функции прибыли мы получаем равновесные общие прибыли:

$$\pi_{*1}^{pp} = \pi_{*2}^{pp} = \frac{\beta_p(A - c)^2}{9}.$$

3.2. Обе фирмы выбирают налоговую ставку с совокупного дохода

В этом подразделе мы предполагаем, что обе фирмы выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\pi_1^{tt} &= \beta_t(A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1, \\ \pi_2^{tt} &= \beta_t(A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2,\end{aligned}$$

где $\beta_t = 1 - T_t$ и T_t – налоговая ставка с совокупного дохода.

Тогда равновесные стратегии задаются уравнениями:

$$q_{*1}^{tt} = q_{*2}^{tt} = \frac{\beta_t A - c}{3\beta_t},$$

с соответствующими равновесными прибылями:

$$\pi_{*1}^{tt} = \pi_{*2}^{tt} = \frac{(\beta_t A - c)^2}{9\beta_t}.$$

3.3. Фирмы выбирают различные налоговые ставки

В этом подразделе мы предполагаем, что фирмы выбирают различные налоговые ставки. Например, фирма 1 выбирает налоговую ставку с чистой прибыли и фирма 2 выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли в модели Курно имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\pi_1^{pt} &= \beta_p((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1), \\ \pi_2^{pt} &= \beta_t(A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2.\end{aligned}$$

Каждая фирма максимизирует свою прибыль, учитывающую количество, проданное на рынке. Тогда равновесные стратегии задаются уравнениями:

$$\begin{aligned}q_{*1}^{pt} &= \frac{\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c}{3\beta_t} \\ q_{*2}^{pt} &= \frac{\beta_t A + (\beta_t - 2)c}{3\beta_t},\end{aligned}$$

с соответствующими равновесными прибылями:

$$\pi_{*1}^{pt} = \frac{\beta_p(\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2},$$

$$\pi_{*2}^{pt} = \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t}.$$

Теперь фирма 2 выбирает налоговую ставку с чистой прибыли и фирма 1 выбирают налоговую ставку с совокупного дохода. Тогда их функции прибыли имеют следующий вид

$$\pi_1^{tp} = \beta_t(A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1,$$

$$\pi_2^{tp} = \beta_p((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2).$$

В этом случае равновесные стратегии и соответствующие равновесные общие прибыли имеют вид:

$$q_{*1}^{tp} = \frac{\beta_t A + (\beta_t - 2)c}{3\beta_t},$$

$$q_{*2}^{tp} = \frac{\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c}{3\beta_t},$$

$$\pi_{*1}^{tp} = \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t},$$

$$\pi_{*2}^{tp} = \frac{\beta_p(\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2}.$$

4. Второй шаг игры: выбор налоговой ставки

В этом разделе мы исследуем второй шаг игры, где фирмы выбирают налоговую ставку, чтобы максимизировать свои доходы. Итак, каждая фирма имеет две чистые стратегии: выбрать налоговую ставку с чистой прибыли (P) и выбрать налоговую ставку с совокупного дохода (T). Таким образом, второй шаг игры может быть описан следующей биматрицей:

	P	T
P	(b_{11}, b_{11})	(b_{12}, b_{21})
T	(b_{21}, b_{12})	(b_{22}, b_{22})

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\beta_p(A - c)^2}{9}, \\ b_{21} &= \frac{(\beta_t A + (\beta_t - 2)c)^2}{9\beta_t}, \\ b_{12} &= \frac{\beta_p(\beta_t A + (1 - 2\beta_t)c)^2}{9\beta_t^2}, \\ b_{22} &= \frac{(\beta_t A - c)^2}{9\beta_t}. \end{aligned}$$

Так как база налогообложения налога с совокупного дохода больше чем налога на чистую прибыль, то чтобы приблизительно уравнять налоговые выплаты в реальных налоговых ставках, не теряя общности, будем предполагать, что $T_t < T_p$. Итак, $\beta_t > \beta_p$. Например, в Российской Федерации фирма может использовать упрощенную налоговую систему, где $T_t = 0.06$ и $T_p = 0.15$ ([2]). Тогда, $\beta_t = 0.94$ и $\beta_p = 0.85$. Мы будем исследовать нашу игру для этих конкретных значений. Таким образом наша цель найти равновесие по Нэшу (NE) в следующей матричной игре

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} P \\ T \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{11}) & (a_{12}, a_{21}) \\ (a_{21}, a_{12}) & (a_{22}, a_{22}) \end{pmatrix} \end{array} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{17}{180}A^2 - \frac{17}{90}Ac + \frac{17}{180}c^2, \\ a_{21} &= \frac{47}{450}A^2 - \frac{53}{225}Ac + \frac{2809}{21150}c^2, \\ a_{12} &= \frac{17}{180}A^2 - \frac{374}{2115}Ac + \frac{8228}{99405}c^2, \\ a_{22} &= \frac{47}{450}A^2 - \frac{2}{9}Ac + \frac{50}{423}c^2. \end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2}{47} \left(\frac{160}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{7990} \right) \approx 1.0016, \\ t_2 &= \frac{7}{3} - \frac{2}{141} \sqrt{7990} \approx 1.065, \\ t_3 &= \frac{2}{47} \left(\frac{160}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{7990} \right) \approx 3.54, \\ t_4 &= \frac{7}{3} + \frac{2}{141} \sqrt{7990} \approx 3.6. \end{aligned}$$

Тогда

- (a) (P, P) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_2c, t_4c]$,
- (b) (T, T) – NE тогда и только тогда, когда $A \leq t_1c$ или $A \geq t_3c$,
- (c) (T, P) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_1c, t_2c]$,
- (d) (P, T) – NE тогда и только тогда, когда $A \in [t_1c, t_2c]$,
- (e) (P, P) Парето доминирует (T, T) тогда и только тогда, когда $A \in [t_{1*}c, t_{2*}c]$ где

$$t_{1*} = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7990}}{141} \approx 1.0327, \quad t_{2*} = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7990}}{141} \approx 2.3006.$$

Доказательство. (a) следует из (4.1) и факта, что (P, P) – NE тогда и только тогда, когда $a_{11} \geq a_{21}$. (b) следует из (4.1) и факта, что (T, T) – NE тогда и только тогда, когда $a_{22} \geq a_{12}$. (c) следует из (4.1) и факта, что (T, P) – NE тогда и только тогда, когда $a_{21} \geq a_{11}$ и $a_{12} \geq a_{22}$. (d) следует из (4.1) и факта, что (P, T) – NE тогда и только тогда, когда $a_{12} \geq a_{22}$ и $a_{21} \geq a_{11}$. (e) следует из (4.1) и факта, что (P, P) – Парето доминирует (T, T) тогда и только тогда, когда $a_{11} \geq a_{22}$.

Теорема 4.2. В игре существует смешанное равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда $A \in (t_1c, t_2c)$ или $A \in (t_3c, t_4c)$.

Доказательство. Пусть фирма 1 и фирма 2 используют стратегии $x = (p, 1 - p)$ и $y = (q, 1 - q)$ где $p, q \in (0, 1)$. Тогда

$$\pi_1(x, y) = a_{11}xy + a_{21}y(1 - x) + a_{12}x(1 - y) + a_{22}(1 - x)(1 - y).$$

Предположим, что стратегия y фирмы 2 зафиксирована. Тогда, фирма 1 хочет максимизировать прибыль $\pi_1(x, y)$.

Пусть W равно:

$$W = \frac{1}{3} \frac{6627A^2 - 30080Ac + 23480c^2}{c(282A - 649c)}.$$

Для фиксированного $y \in [0, 1]$ имеем

$$p = \begin{cases} 0 & \text{для } q < W, \\ \text{любое из } [0, 1], & \text{для } q = W, \\ 1 & \text{для } q > W. \end{cases}$$

Аналогично

$$\pi_2(x, y) = a_{11}xy + a_{21}x(1 - y) + a_{12}y(1 - x) + a_{22}(1 - x)(1 - y).$$

Наилучший ответ фирмы 2 для фиксированной стратегии x фирмы 1 имеет вид

$$q = \begin{cases} 0 & \text{для } p < W, \\ \text{любое из } [0, 1], & \text{для } p = W, \\ 1 & \text{для } p > W. \end{cases}$$

Если $p = W$, $q = W$ и $W \in [0, 1]$ ($A \in (t_1c, t_2c)$ или $A \in (t_3c, t_4c)$) имеем NE $((W, 1 - W), (W, 1 - W))$ с вектором выигрышей (π, π) , где

$$\pi = \frac{34}{2115} \frac{(2209A^2 - 4559Ac + 2341c^2)c}{282A - 649c}.$$

5. Точка переключения для двухшаговой игры

В этом разделе мы рассматриваем точку переключения с одной налоговой ставки на другую. Сначала рассмотрим переключение без модели Курно. Пусть TR – совокупный доход, TC – общие затраты. Тогда прибыль $\pi = TR - TC$. Таким образом, налоговые выигрыши для обеих налоговых ставок равны, если следующее условие выполнено ([1])

$$0.06(TR - TC) = 0.015TR.$$

Поэтому,

$$\frac{TC}{TR} = 0.6. \tag{5.1}$$

Это соотношение может интерпретироваться следующим образом: если общие затраты составляют больше, чем 60 процентов совокупного дохода, тогда фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, и если общие затраты - меньше, чем 60 процентов совокупного дохода, тогда фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода.

Теперь рассмотрим игру Курно с одной фирмой и найдем эквивалент условия (5.1), когда фирма предпочитает изменить налоговую ставку. Следуя рассмотренной выше схеме, мы предполагаем, что сначала фирма находит оптимальный план производства относительно каждой комбинации налоговых ставок и затем выбирает оптимальную налоговую ставку. Тогда выигрыши, оптимальные планы производства и соответствующие прибыли задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\pi^p &= \beta_p((A - q)q - cq), \\ q_*^p &= \frac{A - c}{2}, \\ \pi_*^p &= \frac{\beta_p(A - c)^2}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^t &= \beta_t(A - q)q - cq, \\ q_*^t &= \frac{\beta_t A - c}{2\beta_t}, \\ \pi_*^t &= \frac{(\beta_t A - c)^2}{4\beta_t}.\end{aligned}$$

Сравнивая π_*^p и π_*^t находим, что фирма будет использовать налоговую ставку с совокупного дохода, если $A > t_{2*}c$.

Перейдем к двухшаговой игре для двух фирм. Сначала заметим

(а) если $A > t_3c$, то единственное возможное НЕ для фирм - (T, T) , поскольку для $A \in [t_3c, t_4c]$ оно доминирует чистое НЕ (P, P) и использование смешанной стратегии для $A \in [t_3c, t_4c]$ не выгодно из-за существования чистого НЕ.

(б) Если $A \in (t_2c, t_3c)$, то существует единственное НЕ для фирм - (P, P) .

(с) Неотрицательность равновесных прибылей и равновесных количеств для налоговой ставки с совокупного дохода влечет, что $A >$

$50c/47$. Таким образом, нет никакого смысла рассматривать налоговую ставку с совокупного дохода для $A \leq 50c/47$. Если $A \in (50c/47, t_2c)$, то ситуация становится чрезвычайно неопределенной и конкурентоспособной для фирм с маленькими прибылями.

Таким образом, хотя в двухшаговой игре есть несколько НЕ, только два из них доступны, а именно, (T, T) и (P, P) и точка переключения — t_3c . Эта точка переключения больше чем точка переключения для двухшаговой игры с одной фирмой. Это означает, что в конкурентной среде точка переключения повышается и это гарантирует меньшую, но более устойчивую прибыль.

6. Одношаговая налоговая игра Курно

В этом разделе мы исследуем дуополию, где фирма выбирает налоговую ставку оптимальным образом после установления плана производства. Сначала рассмотрим игру с одной фирмой. После сравнения прибыли для налоговых ставок с чистой прибылью и совокупного дохода, прибыль фирмы задается как:

(a) если $A > 5c/3$, то

$$\pi(q) = \begin{cases} \frac{85}{100}((A - q)q - cq) & \text{для } q > A - 5c/3, \\ \frac{94}{100}(A - q)q - cq & \text{для } q \leq A - 5c/3, \end{cases}$$

(b) если $A \leq 5c/3$, то

$$\pi(q) = \frac{85}{100}((A - q)q - cq).$$

Оптимальные количества для налоговых ставок с чистой прибылью и совокупного дохода имеют вид

$$q_*^p = \frac{A}{2} - \frac{c}{2}, \quad q_*^t = \frac{A}{2} - \frac{25}{47}c.$$

Ясно, что $q_*^t < q_*^p$. Три случая должны быть рассмотрены:

(i) Пусть $A - 5c/3 < q_*^t < q_*^p$. Тогда $A \leq 320c/141$ и фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибылью.

(ii) Пусть $q_*^t < A - 5c/3 < q_*^p$. Тогда $320c/141 < A \leq 7c/3$ и

(a) если $320c/141 < A \leq (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли,

(b) если $(5/3 + \sqrt{7990}/141)c < A \leq 7c/3$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода,

(iii) Пусть $q_*^t < q_*^p < A - 5c/3$. Тогда $A > 7c/3$ и фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода.

Следовательно, следующая теорема доказана для игры с одной фирмой.

Теорема 6.1. *В налоговой игре с одной фирмой*

(a) Если $A \leq (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, оптимальное количество продукции $q_*^p = \frac{A}{2} - \frac{c}{2}$ и соответствующая прибыль $\frac{17}{80}(A - c)^2$.

(b) Если $A > (5/3 + \sqrt{7990}/141)c$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода, оптимально количество продукции $q_*^t = \frac{A}{2} - \frac{25c}{47}$ и соответствующая прибыль $\frac{47}{200}A^2 + \frac{25}{94}c^2 - \frac{1}{2}Ac$.

Перейдем к игре Курно с двумя фирмами. Пусть фирмы производят q_1 и q_2 количества продукции, тогда из функции прибыли имеют вид :

если $q_2 < A - 5c/3$, то

$$\pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1) & \text{для } q_1 > A - q_2 - 5c/3, \\ \frac{94}{100}(A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1 & \text{для } q_1 \leq A - q_2 - 5c/3, \end{cases}$$

если $q_2 \geq A - 5c/3$, то

$$\pi_1(q_1, q_2) = \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_1 - cq_1),$$

если $q_1 < A - 5c/3$, то

$$\pi_2(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2) & \text{для } q_2 > A - q_1 - 5c/3, \\ \frac{94}{100}(A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2 & \text{для } q_2 \leq A - q_1 - 5c/3, \end{cases}$$

если $q_1 \geq A - 5c/3$, то

$$\pi_2(q_1, q_2) = \frac{85}{100}((A - q_1 - q_2)q_2 - cq_2).$$

Аналогично теореме 3 получаем следующую теорему.

Теорема 6.2. *В налоговой игре с двумя фирмами*

(a) *Если $A < 135c/47$, то фирма выбирает налоговую ставку с чистой прибыли, оптимальные количества продукции $q_{1*}^p = q_{2*}^p = (A - c)/3$ и соответствующая прибыль $\frac{17}{180}(A - c)^2$.*

(b) *Если $A \geq 135c/47$, то фирма выбирает налоговую ставку с совокупного дохода, оптимальные количества продукции $q_{1*}^t = q_{2*}^t = (47A - 50c)/141$ и соответствующая прибыль $\frac{47}{450}A^2 - \frac{2}{9}Ac + \frac{50}{423}c^2$.*

7. Заключение

Сначала заметим, что для одношаговой игры с одной фирмой, так же как для двухшаговой игры, точки переключения совпадают и равны t_2c . Для игр с двумя фирмами ситуация изменяется. Было показано, что точка переключения с налоговой ставки с чистой прибыли на налоговую ставку с совокупного дохода для двухшаговой игры – t_3c и для одношаговой игры – $135c/47$ и $t_3c > 135c/47$. Это можно объяснить существованием в двухшаговой схеме некоторой дополнительной неопределенности по сравнению с одношаговой схемой. Эта неопределенность влияет на поведение фирм, заставляя их соглашаться получать меньшую прибыль, чтобы получить более устойчивое положение на рынке.

A TAX GAME IN A COURNOT DUOPOLY

Alexander Galegov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, post-graduate student (galegov@rambler.ru).

Andrey Garnaev, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (agarnaev@rambler.ru).

Abstract: Stackelberg models for hierarchical oligopolistic markets with a homogenous product were studied by researchers extensively. The goal of this paper is to extend the classical solution in closed form of the Stackelberg model for a general hierarchical structures composed by firms arranged into groups of different hierarchical levels.

Keywords: hierarchical structures, multi-level Stackelberg equilibrium, Nash-Cournot equilibrium.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нарегный В. *Управление малым бизнесом: выгодно ли использовать упрощенную налоговую систему с 2003?* // Финансовая газета. 2002. №10. С. 15-18.
2. *Налоговый Кодекс Российской Федерации*. Раздел N 346.20.
3. Lambertini L., Mantovani A. *Price vs Quantity in a Duopoly with Technological Spillovers: A Welfare Re-Appraisal*// Keio Economic Studies. 2001. V. 38. P. 41-52.
4. Lambertini L., Mantovani A., Rossini G. *R&D in Transport and Communication in a Cournot Duopoly*// Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali. 2003. V. 50. №2. P. 185-198.
5. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. *Game Theory*. World Scientific, London, 1996.