УДК 519.8
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ n ЛИЦ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Владимир В. Мазалов
Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН
Петрозаводск
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Минору Сакагучи
Университет Осака
Япония

В статье рассматривается игра n-лиц с выбором момента времени. В каждый момент времени игрок решает сделать выстрел или нет. В терминах таких игр формулируются модели аукционов, игры на истощение, предсказания и др. Используя симметрию задачи, строится равновесие в данной игре.

Ключевые слова: игра с выбором момента времени, равновесие, игра на истощение, предсказание случайной величины.

Введение

Игры с выбором момента представляют собой важный раздел теории игр, определенных на компактных множествах. В терминах таких игр формулируются задачи, связанные с дуэлями, аукционами, играми на истощение и другие. Сложность таких задач в том, что равновесие достигается в смешанных стратегиях. Для нахождения равновесия здесь разработаны специальные методы сведения игровой задачи к нахождению решения системы дифференциальных уравнений [1–2]. В литературе в основном были исследованы игры двух лиц. В данной работе мы исследуем бескоалиционные игры с выбором момента времени для n игроков. Вначале мы рассматриваем модели аукционов, затем дуэли, игры на истощение и, в завершение, игры, связанные с угадыванием случайной величины [3].

1. Аукционы

Задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, относится к моделям аукционов. Для простоты мы рассмотрим только симметричный случай, когда все n игроков находятся в одинаковых условиях. Итак, на аукционе выставлен некоторый предмет с одинаковой ценностью V для всех игроков и игроки одновременно объявляют цену за него, соответственно $(x_1, ..., x_n)$. Тот из игроков, который объявил наивысшую цену, получает этот предмет. Существуют различные схемы аукционов. Мы рассмотрим две схемы аукционов: по первому и второму предложениям.

Аукцион по первому предложению. Предположим, что правила аукциона таковы, что победитель, т.е. игрок, назвавший максимальную цену, получает данный предмет и ничего не платит. Остальные игроки должны заплатить за участие в аукционе ту цену, которую они заявили. Если же несколько игроков заявили максимальную цену, они делят выигрыш поровну. Согласно данным правилам функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$H_i(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i(x)} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $y_{-i} = \max\limits_{j \neq i}\{x_j\}$ и $m_i(x)$ - число игроков, чьи предложения совпали с x_i, $i = 1, ..., n$. Нетрудно понять, что здесь нет равновесия в чистых стратегиях, будем искать его среди смешанных стратегий. Пользуясь симметрией, можно проводить рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x), x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, ..., x_n\}$. Легко понять, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$- я степень распределения $F(x)$, а именно $F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Тогда, с вероятностью $[F(x)]^{n-1}$ предложение первого игрока будет максимальным и он получит выигрыш V, и с вероятностью $1-[F(x)]^{n-1}$ кто-то назовет большую цену и ему придется заплатить x. Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = V[F(x)]^{n-1} - x\left(1 - [F(x)]^{n-1}\right) = (V+x)[F(x)]^{n-1} - x. \quad (1.2)$$

Достаточным условием того, что профиль $(F(x), ..., F(x))$ будет образовывать равновесие, является условие

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = const \text{ или } \partial H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1})/\partial x = 0.$$

Последнее условие приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1 - F_{n-1}(x)}{V + x}, \quad 0 \le x < \infty$$

с граничным условием $F_{n-1}(0) = 0$. Интегрирование дает

$$F_{n-1}(x) = \frac{x}{V + x}.$$

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия определяется следующим образом

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V + x}\right)^{1/(n-1)},$$

а плотность данного распределения имеет вид

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{x}{V + x}\right)^{-\frac{n-2}{n-1}}.$$

Подставляя найденное распределение в (1.2), находим $H_1(x, \overbrace{F^*, \cdots, F^*}^{n-1}) = 0$ для любого $x \ge 0$. Таким образом, какую бы смешанную стратегию не использовал первый игрок, его выигрыш будет равен нулю. А это означает, что значение игры равно нулю.

Теорема 1. *В аукционе с функцией выигрыша (1.1) равновесие образуют смешанные стратегии вида*

$$F^*(x) = \left(\frac{x}{V+x}\right)^{1/(n-1)},$$

а значение игры равно нулю.

Аукцион по второму предложению. Правила данного аукциона таковы, что все игроки должны заплатить за участие в аукционе названную цену, а выигравший игрок платит лишь цену второго по величине игрока. Аукционы, в которых победитель платит цену второго по величине предложения, называются аукционами Викри. Если несколько игроков сделали максимальное предложение, V распределяется на всех поровну.

Таким образом, функция выигрыша в данной игре имеет вид

$$H_i(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < y_{-i}, \\ \frac{V}{m_i} - x_i, & \text{если } x_i = y_{-i}, \\ V - y_{-i}, & \text{если } x_i > y_{-i}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $y_{-i} = \max\limits_{j \neq i}\{x_j\}$ и m_i - имеют то же значение, что и в первой модели. Здесь нет равновесия в чистых стратегиях. Если все предложения не превосходят V, следует пытаться максимально увеличить предложение, однако, если хотя бы одно предложение станет больше V, следует объявлять нулевую цену. Найдем равновесие в смешанных стратегиях, причем в силу симметрии проведем рассуждения только для первого игрока.

Предположим, что игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же смешанную стратегию с функцией распределения $F(x), x \in [0, \infty)$. Выигрыш первого игрока зависит от распределения величины $y_{-1} = \max\{x_2, ..., x_n\}$. Мы отмечали выше, что распределение этого максимума есть просто $(n-1)$- я степень распределения $F(x)$, а именно $F_{n-1}(x) = F^{n-1}(x)$. Теперь мы можем выписать выигрыш первого игрока, использующего чистую стратегию x.

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \int\limits_0^x (V-t)dF_{n-1}(t) - \int\limits_x^\infty x dF_{n-1}(t).$$

Поскольку носитель распределения $F(x)$ есть $[0,\infty)$, то достаточное условие существования равновесия $H_1(x,\overbrace{F,\cdots,F}^{n-1}) = const$ или $\partial H_1(x,\overbrace{F,\cdots,F}^{n-1}))/\partial x = 0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dF_{n-1}(x)}{dx} = \frac{1-F_{n-1}(x)}{V},$$

общее решение которого имеет вид

$$F_{n-1}(x) = 1 - c\exp(-\frac{x}{V}).$$

Поскольку $F(0) = 0$ находим $F_{n-1}(x) = 1 - \exp(-\frac{x}{V})$. Теперь мы можем найти $F(x)$

$$F(x) = \left(1-\exp(-\frac{x}{V})\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.4}$$

Итак, если игроки $\{2,...,n\}$ используют смешанную стратегию $F(x)$, то выигрыш первого игрока имеет постоянное значение $H_1(x,\overbrace{F,\cdots,F}^{n-1}) = H_1(x,\overbrace{F,\cdots,F}^{n-1}) = 0$. Отсюда, какую бы стратегию не использовал первый игрок, его выигрыш в такой ситуации всегда будет равен нулю. А это означает оптимальность стратегий $F(x)$.

Теорема 2. *В аукционе с функцией выигрыша (1.3) равновесие образуют смешанные стратегии вида*

$$F(x) = \left(1-\exp(-\frac{x}{V})\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Для $n = 2$ плотность распределения (6.4) имеет вид $f^*(x) = V^{-1}e^{-x/V}$, и для $n \geq 3$,

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1}\left(1-e^{-x/V}\right)^{\frac{1}{n-1}-1}\cdot\frac{1}{V}e^{-x/V} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x \downarrow 0 \\ 0, & \text{если} \quad x \uparrow \infty. \end{cases}$$

Интересно отметить, что хотя условия этих двух аукционов различаются незначительно, оптимальные стратегии имеют совершенно разный вид. В первом случае это степенная функция, а во втором - экспоненциальное распределение. Неожиданно оказывается, что обе оптимальные стратегии могут привести к предложениям, которые больше, чем ценность объекта V. В заключение сравним вероятности превысить данное значение V для обеих моделей аукционов для $n = 2$. Для аукциона по первому предложению данная вероятность равна $1 - F^*(V) = 1 - (1/2)^{-1} = 0.5$, а для аукциона по второму предложению эта вероятность меньше $1 - F^*(V) = 1 - (1 - \exp(-1))^{1/(n-1)} \approx 0.3679$.

2. Игра на истощение

Существует другая биологическая интерпретация игры, рассмотренной в предыдущем параграфе. Эта модель близка к модели конкуренции среди животных в борьбе за ресурс V, которая была предложена английским биологом М. Смитом.

Предположим, что $V = V(x)$, положительная и убывающая функция от x, представляет собой некий ресурс на данной территории. За ресурс идет борьба между n животными (игроками) и время игры ограничено единичным интервалом. В течение какого-то времени $x_i \in [0,1], i = 1, ..., n$ животные демонстрируют свою силу и то из них, которое делает это дольше всех, захватывает весь ресурс. При этом, затраты участников пропорциональны времени их затраченных усилий, а затраты победителя равны длине интервала времени, когда его последний конкурент покинул поле битвы.

Будем искать равновесие среди смешанных стратегий в виде функций распределения

$$F(x) = I(0 \le x < a) \int_0^x h(t)dt + I(a \le x \le 1),$$

где a некоторое значение из интервала $[0,1]$ и I_A индикатор события A. Предположим, что все игроки $\{2, ..., n\}$ используют одну и ту же стратегию F, а первый игрок использует чистую стратегию $x \in [0,1]$. Его ожидаемый выигрыш равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \tag{2.1}$$
$$= \begin{cases} \int\limits_0^x (V(x) - t) d\,(F(t))^{n-1} - x\left\{1 - (F(x))^{n-1}\right\}, & \text{если } 0 \le x < a, \\ \\ \int\limits_0^a (V(x) - t)\, d\,(F(t))^{n-1}, & \text{если } a < x \le 1, \end{cases}$$

где t есть время прекращения борьбы второго по силе игрока. Пусть

$$Q(x) = V(x)\,(F(x))^{n-1}, \quad \text{для} \quad 0 < x < a. \tag{2.2}$$

Тогда (2.1) можно представить для $0 < x < a$,

$$\begin{aligned} H_1(x, F, \cdots, F) &= Q(x) - \int\limits_0^x td\,(F(t))^{n-1} - x\left\{1 - \tfrac{Q(x)}{V(x)}\right\} \\ &= Q(x) + \int\limits_0^x \tfrac{Q(t)}{V(t)} dt - x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Условие $\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0$ приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$Q'(x) + \frac{Q(x)}{V(x)} = 1, \quad \text{с} \quad Q(0) = 0 \tag{2.4}$$

решение которого есть

$$Q(x) = e^{-\int (V(x))^{-1} dx} \left[\int e^{\int (V(x))^{-1} dx} dx + c\right], \tag{7.5}$$

где c произвольная постоянная.

Предположим например, $V(x) = \overline{x}, 0 \le x \le 1$. Для этого случая находим

$$Q(x) = \overline{x}\left[\int\limits_0^x dt/\overline{t} + c\right] = \overline{x}(-\log \overline{x} + c).$$

Из граничных условий $Q(0) = 0$ следует $c = 0$, следовательно,

$$Q(x) = -\overline{x} \log \overline{x}, \tag{2.6}$$

что дает вместе с (2.2)

$$F(x) = (-\log \overline{x})^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \le x \le a, \tag{2.7}$$

это возрастающая функция с $F(0) = 0$ и $F(a) = (-\log \overline{a})^{\frac{1}{n-1}}$.
Условие $F(a) = 1$ дает $a = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$.

Для $F(x)$ вида (2.4) выигрыш (2.1)-(2.3) первого игрока становится равным для $0 < x < a$,

$$H_1(x, F, \cdots, F) = -\overline{x}\log\overline{x} + \int\limits_0^x (-\log\overline{t})dt - x = 0,$$

так как второе выражение в правой части равно $\overline{x}\log\overline{x} + x$, как следует из соотношения $\int(1 + \log\overline{t})dt = -\overline{t}\log\overline{t}$.

Для $a < x \le 1$, $H_1(x, F, \cdots, F)$ согласно (2.1) является убывающей функцией от x.
Следовательно, если $F^*(x)$ выбрано как определено в (2.4), то

$H_1(F, F^*, \cdots, F^*) \le H_1(F^*, F^*, \cdots, F^*) = 0$, $\forall$ функции распределения $F(x)$.

Окончательно, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *В игре на истощение с ресурсом вида $V(x) = \overline{x}$ равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида*

$$F^*(x) = I(0 \le x \le a)(-\log\overline{x})^{\frac{1}{n-1}} + I(a < x \le 1),$$

с выигрышем для каждого игрока равным 0*, где* $a = 1 - e^{-1} (\approx 0.63212)$.

Например, для $n = 2$, оптимальная плотность $f_2^*(x) = (-\log\overline{x})$, а при $n = 3$

$$f_3^*(x) = \frac{1}{2\overline{x}\,(-\log\overline{x})^{1/2}} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } \; x \downarrow 0 \\ e/2 \approx 1.359, & \text{если } \; x \uparrow a. \end{cases}$$

Их вид представлен на рис. 1. Интересно, отметить, что меняется радикально вид смешанных стратегий. Для $n = 2$ с большей вероятностью надо бороться за ресурс как можно дольше. При увеличении числа соперников следует с большой вероятностью сразу же покидать поле битвы.

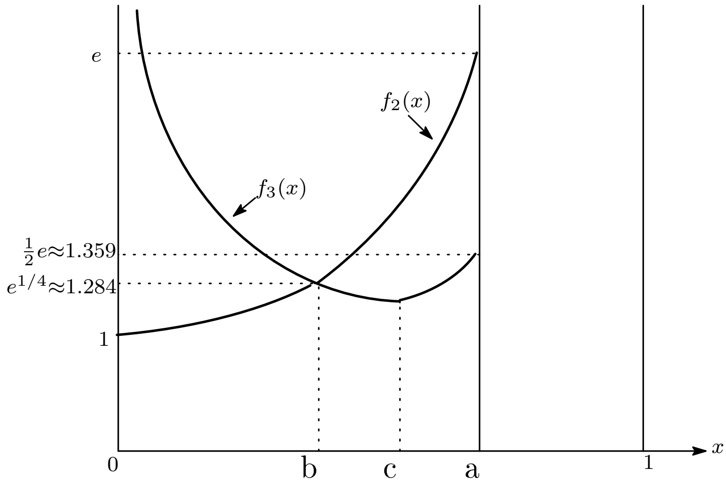

Рисунок 1. Решение для $n = 2$ и 3, где $V(x) = \overline{x}$.
Здесь, b$= 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$, c$= 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$, a$\approx 0.632$.

Рассуждая аналогично, нетрудно получить более общий результат.

Теорема 4. *Для* $V(x) = \frac{1}{k}\overline{x}, (0 < k \le 1)$, *равновесие по Нэшу достигается среди смешанных стратегий вида*

$$F^*(x) = \left[\left(k/\overline{k}\right)\left\{(\overline{x})^{k-1} - 1\right\}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad 0 \le x < a,$$

где a *есть единственный корень в интервале* $(0, 1)$ *уравнения*

$$-\overline{k}\log\overline{a} = -\log k.$$

Оптимальный выигрыш каждого игрока равен 0.

Заметим, что $\lim\limits_{k\to 1-0}\dfrac{(\overline{x})^{k-1} - 1}{\overline{k}} = -\log\overline{x}$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to 1-0} F^*(x) = (-\log\overline{x})^{\frac{1}{n-1}}$.

3. Дуэли, труэли и другие соревнования на меткость

Рассмотрим соревнования n игроков, связанные с поражением некоторой мишени (в частном случае своего противника). Каждый из игроков имеет одну пулю, которой он может выстрелить в цель в любой момент времени из интервала $[0, 1]$. Стартуя в момент $t = 0$, он движется к своей цели, которую может достигнуть в момент $t = 1$, и в какой-то момент должен выстрелить в нее. Пусть $A(t)$ есть вероятность поражения цели, если выстрел происходит в момент $t \in [0,1]$. Предполагается, что $A(t)$ дифференцируема и $A'(t) > 0, A(0) = 0$ и $A(1) = 1$.

Выигрыш игрока равен 1, если он поразил свою цель раньше, чем другие игроки, и равен 0, в противном случае. В случае, если несколько игроков поразили цель, их выигрыш равен 0. Каждый игрок заинтересован найти такую стратегию, при которой математическое ожидание попадания в цель максимально.

В силу симметрии задачи, естественно предположить, что в равновесии все оптимальные стратегии игроков одинаковы. Предположим, что все игроки используют одинаковые смешанные стратегии с функцией распределения $F(t)$ и, соответственно, плотностью $f(t), a \leq t \leq 1$, где параметр $a \in [0,1]$. Тогда, ожидаемый выигрыш первого игрока, если он стреляет в момент x, а другие игроки используют смешанные стратегии $F(t)$ равен

$$H_1(x, \overbrace{F, \cdots, F}^{n-1}) = \begin{cases} A(x), & \text{если } 0 \leq x < a, \\ A(x)\left[1 - \int\limits_a^x A(t)f(t)dt\right]^{n-1}, & \text{если } a \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

так как для $a \leq x \leq 1$ игрок 1 получит выигрыш 1, только в случае, если все другие игроки $2 \sim n$ не стреляли, или стреляли до момента x, но не попали в цель.

Пусть v общий для всех игроков оптимальный выигрыш. Тогда достаточное условие для равновесия будет выглядеть так.

$$H_1(x, F, \cdots, F) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \end{array} \right\} v, \text{ для } \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x < a \\ a \leq x \leq 1 \end{array} \right\}. \tag{3.2}$$

Для $a \leq x \leq 1$ дифференцируя (3.1) и приравнивая нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2n-1}{n-1}\left[\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{A''(x)}{A'(x)}\right]. \tag{3.3}$$

Интегрирование от a до x дает

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \frac{A'(x)}{A'(a)} \left(\frac{A(x)}{A(a)}\right)^{-\frac{2n-1}{n-1}}, \tag{3.4}$$

откуда

$$f(x) = c\,(A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}}\, A'(x). \tag{3.5}$$

Условие $\int\limits_a^1 f(t)dt = 1$ дает

$$c^{-1} = \int\limits_a^1 (A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}}\, A'(x)dx = \left(\frac{n-1}{n}\right) \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right]. \tag{3.6}$$

Условие (3.2) на интервале $a \le x \le 1$ требует, чтобы выполнялось

$$A(x) \left[1 - \int\limits_a^x A(t)f(t)dt\right]^{n-1} \equiv v,$$

которое приводит вместе с (3.3) после упрощений к равенству

$$c(n-1) \left[(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}}\right] = 1 - v^{\frac{1}{n-1}} (A(x))^{-\frac{1}{n-1}}, \quad \forall x \in [a,1]. \tag{3.7}$$

Исключая c в соответствии с (3.4), приходим к равенству

$$(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - (A(x))^{-\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}\left[1 - \left(\frac{v}{A(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right], \quad \forall x \in (a,1). \tag{3.8}$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - n\,(A(a))^{-\frac{1}{n-1}} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad v^{\frac{1}{n-1}} \left[(A(a))^{-\frac{n}{n-1}} - 1\right] = n. \tag{3.9}$$

Из этих двух уравнений находим $v^{-\frac{1}{n-1}} = (A(a))^{-\frac{1}{n-1}}$, и отсюда $v = A(a)$.

Кроме того, умножая обе части первого уравнения (3.9) на $(A(a))^{\frac{n}{n-1}}$, приходим к уравнению

$$(A(a))^{\frac{n}{n-1}} + nA(a) - 1 = 0. \tag{3.10}$$

Окончательно, нам остается установить условие $H_1(x, F, \cdots, F) \leq v, \ \forall x \in [0, a]$. А это выполняется, поскольку в силу предположений $A(x) \leq A(a) = v, \ \forall x \in [0, a)$.

Данные рассуждения приводят нас к следующему утверждению.

Теорема 5. *Пусть* α_n *единственный корень на* $[0, 1]$ *уравнения*

$$\alpha^{\frac{n}{n-1}} + n\alpha - 1 = 0. \tag{3.11}$$

Тогда равновесие по Нэшу в данной игре состоит из смешанных стратегий вида

$$f^*(x) = \frac{1}{n-1} (\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} (A(x))^{-\frac{2n-1}{n-1}} A'(x), \quad \textit{для} \ A^{-1}(\alpha_n) = a_n \leq x \leq 1. \tag{3.12}$$

При этом, оптимальные выигрыши игроков в равновесии равны α_n.

Мы видим, что во-первых, что оптимальный выигрыш игроков α_n не зависит от функции точности $A(t)$, и, во-вторых, начальная точка носителя оптимальной стратегии a зависит от $A(t)$. Кроме того, мы видим из (3.12), что вероятность ничьей, т.е. когда все игроки получают нуль равна $(\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}}$.

При $n = 2$ (дуэль) ожидаемый выигрыш равен $\alpha_n = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$, а при $n = 3$ (труэль) $\alpha_n \approx 0.2831$. Интервал носителя распределения зависит от вида функции точности.

Пример 1. Пусть $A(x) = x^\gamma, \gamma > 0$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \alpha_n^{1/\gamma}$$

и оптимальная стратегия имеет следующую плотность распределения

$$f^*(x) = \frac{\gamma}{n-1} (\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} x^{-\left(\frac{n}{n-1}\gamma + 1\right)}, \quad \text{для} \ \alpha_n^{1/\gamma} \leq x \leq 1.$$

При $\gamma = 1$ и $n = 2$(дуэль) $a_n = \alpha_n = \sqrt{2} - 1$, т.е. начинать стрелять надо после момента 0.4142. Заметим, что для любого $n \geq 2$, a_n возрастает, когда параметр γ возрастает. Это соответствует интуитивному ожиданию, что чем меньше меткость игрока, тем позже надо начинать стрелять.

Пример 2. Пусть $A(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$. Тогда

$$a_n = A^{-1}(\alpha_n) = \log\{1 + (e-1)\alpha_n\},$$

следовательно, a_n убывает, если n возрастает. Например, при $n = 2$ (дуэль)

$$a_n = \log\left\{(\sqrt{2} - 1)(e + \sqrt{2})\right\} \approx 0.5375,$$

а при $n = 3$ (труэль)

$$a_n \approx 0.3964.$$

При этом, оптимальные стратегии определяются с помощью плотности распределения вида

$$f^*(x) = \tfrac{1}{n-1}(\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}}(e-1)^{-1}(e^x - 1)^{-\frac{2n-1}{n-1}} e^x, \quad \text{для } a_n \leq x \leq 1.$$

4. Игра предсказания

Представим, что n игроков стараются предсказать значение u случайной величины U, которая имеет равномерное распределение $U_{[0,1]}$ на интервале $[0,1]$. Правила игры таковы, что выигрывает тот игрок, который назвал значение, ближайшее к u, но не большее его. При этом, он выигрывает единицу, а остальные $n-1$ игроков получают 0. Каждый из игроков стремится максимизировать ожидаемый выигрыш.

Будем искать равновесие в виде распределений с носителем на некотором интервале $[0, a]$, $a \leq 1$, а именно пусть

$$G(x) = I(x < a)\int_0^x g(t)dt + I(x \geq a).$$

Тогда ожидаемый выигрыш игрока 1, если его предсказанное значение равно x, а другие игроки следуют смешанной стратегии с функцией распределением $G(t)$ и ее плотностью $g(t)$, равен

$$H_1(x,\overbrace{G,\cdots,G}^{n-1}) = \overline{x}, \quad \text{если } a < x < 1. \tag{4.1}$$

Для $0 < x < a$ согласно условиям

$$H_1(x,G,\cdots,G) = (G(x))^{n-1}\,\overline{x} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) k\,(G(x))^{n-1-k} \int\limits_x^a g(t)\left(\overline{G}(t)\right)^{k-1}(t-x)dt, \tag{4.2}$$

поскольку k игроков $(1 \le k \le n-1)$ могут назвать значения большие, чем x, а другие $n-1-k$ игроков назвать меньше, чем x. Заметим, что плотность распределения случайной величины $\min(X_1,\cdots,X_k)$ есть $k\left(\overline{G}(t)\right)^{k-1} g(t)$.

Поскольку интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int\limits_x^a (t-x)\left(\overline{G}(t)\right)^{k-1} g(t)dt = \frac{1}{k}\int\limits_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt,$$

мы можем переписать (4.2) в виде

$$H_1(x,\overbrace{G,\cdots,G}^{n-1}) = (G(x))^{n-1}\,\overline{x} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) (G(x))^{n-1-k} \int\limits_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt, \tag{4.3}$$

для $0 < x < a$. Пусть v оптимальное ожидаемое значение выигрыша каждого игрока. Запишем условие смешанного равновесия для $G(x)$

$$H_1(x,G,\cdots,G)\left\{ \begin{array}{c} \equiv \\ \le \end{array} \right\} v, \quad \text{для} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x < a \\ a < x \le 1 \end{array} \right\}. \tag{4.4}$$

Пользуясь (4.3)-(4.4) , преобразуем уравнение $\frac{\partial}{\partial x} H_1(x,g,\cdots,g) = 0$ на интервале $0 \le x < a$. Деля обе части уравнения на $(G(x))^{n-1}$ и упрощая, приходим к уравнению

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{array}{c}n-1\\k\end{array}\right)\left(\frac{\overline{G}(x)}{G(x)}\right)^k=\frac{g(x)}{G(x)}\Bigg[(n-1)\overline{x}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{array}{c}n-1\\k\end{array}\right)(n-1-k)\int\limits_x^a\left(\frac{\overline{G}(t)}{G(x)}\right)^k dt\Bigg]. \tag{4.5}$$

Левая часть уравнения (4.5) равна $[G(x)]^{-(n-1)}$, а правая часть может быть представлена как

$$\frac{g(x)}{G(x)}\cdot(n-1)\left[\overline{a}+\int\limits_x^a\left\{1+\frac{\overline{G}(t)}{G(x)}\right\}^{n-2}dt\right].$$

Таким образом, мы можем представить (4.5) в виде

$$\overline{a}[G(x)]^{n-2}+\int\limits_x^a(G(x)+\overline{G}(t))^{n-2}dt=[(n-1)g(x)]^{-1},\;\; 0<x<a,\;\; \forall n\geq 2. \tag{4.6}$$

Естественно $g(x), G(x)$ и a зависят от n. Но мы для простоты опускаем индекс n.

Рассмотрим последовательность функций

$$s_k(x)=\left[\overline{a}[G(x)]^k+\int\limits_x^a(G(x)+\overline{G}(t))^k dt\right]\Big/\,\overline{x},\;\; \forall k=1,2,\cdots,n-2. \tag{4.7}$$

Очевидно, выполняются неравенства

$$1\equiv s_0(x)\geq s_1(x)\geq s_2(x)\geq\cdots\geq s_{n-2}(x)\geq 0,\;\; \forall x\in[0,a]. \tag{4.8}$$

Умножая обе части (4.7) на $\overline{x}$ и дифференцируя, приходим к рекуррентным дифференциальным уравнениям

$$\overline{x}s_k'(x)-s_k(x)=kg(x)\overline{x}s_{k-1}(x)-1,$$

или, эквивалентно,

$$s_k'(x)+(1-s_k(x))/\overline{x}=kg(x)s_{k-1}(x),\;\; \forall k=1,2,\cdots,n-2 \tag{4.9}$$

с граничными условиями

$$s_k(a) = 1, \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, n-2.$$

Из (4.6)-(4.7) мы видим

$$s_{n-2}(x) = [(n-1)\overline{x}g(x)]^{-1} \tag{4.10}$$

что эквивалентно

$$g(x) = [(n-1)\overline{x}s_{n-2}(x)]^{-1} \geq [(n-1)\overline{x}]^{-1} \ \ (\text{из } (4.8))$$

Среднее значение этого распределения равно

$$\int\limits_0^a xg(x)dx = \int\limits_0^a \frac{xdx}{(n-1)\overline{x}s_{n-2}(x)}. \tag{4.11}$$

Теорема 6. *Пусть* $\{s_1, \cdots, s_{n-2}\}$ *есть решение системы дифференциальных уравнений (4.9) и* $g(x) = \frac{1}{(n-1)(1-x)s_{n-2}(x)}$*. Выберем* a *из условия* $\int\limits_0^a g(x)dx = 1$*. Тогда* $g(x)$ *оптимальная смешанная стратегия в игре предсказания.*

Система (4.9) вместе с (4.10) может быть использована для нахождения решения задачи. Опишем этот алгоритм. Вначале фиксируем значение параметра a и рассматриваем систему дифференциальных уравнений (9.9) на интервале $[0, a]$. Когда найдем решение с граничным условием $s_k(a) = 1, k = 1, \cdots, n-2$, определяем плотность распределения $g(x) = [(n-1)s_{n-2}(x)(1-x)]^{-1}, x \in [0, a]$. Затем вычисляем a из условия $\int\limits_0^a g(x) = 1$.

Случай $\mathbf{n = 2}$.
Из (4.1)-(4.3) следует

$$H_1(x, G) = \begin{cases} G(x)\overline{x} + \int\limits_x^a (t-x)g(t)dt, & \text{для } \ 0 < x < a \\ \overline{x}, & \text{для } \ a < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение (4.6) дает для $0 < x < a, g(x) = 1/\overline{x}$, и отсюда $G(x) = -\log \overline{x}, a = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$. Для $a < x < 1$, имеет место $H_1(x, g^*) = \overline{x} \leq \overline{a} = H_1(a, g^*)$ и, следовательно, условие (4.4) удовлетворяется. Общее значение игры равно $e^{-1} \approx 0.36788$.

Случай $\mathbf{n = 3}$.

$$H_1(x, G, G) = \tag{4.12}$$

$$= \begin{cases} (G(x))^2\, \overline{x} + 2G(x) \int\limits_x^a (t - x) g(t) dt + & \\ +2 \int\limits_x^a (t - x) \overline{G}(t) g(t) dt, & \text{если } \ 0 < x < a \\ \overline{x}, & \text{если } \ a < x < 1. \end{cases}$$

Уравнение (4.9) для $n = 3$ приводит к дифференциальному уравнению

$$s_1'(x) + (1 - s_1(x))\, / \overline{x} = g(x) s_0(x) = g(x), \ \text{ при этом } \ s_1(a) = 1, \tag{9.13}$$

и после упрощения

$$\overline{x} s_1(x) = \overline{a} G(x) + \int\limits_x^a \left(G(x) + \overline{G}(t)\right) dt = \frac{1}{2g(x)} \ \text{(из (4.6) при } \ n = 3). \tag{4.14}$$

Исключая $g(x)$ из (4.13)-(4.14), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{s_1 s_1'}{s_1^2 - s_1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\overline{x}}, \ \ 0 < x < a, \quad \text{с} \quad s_1(a) = 1. \tag{4.15}$$

Функция $g(x) = (2 s_1(x) \overline{x})^{-1}$ является положительной и непрерывной и представляет плотность распределения, если $\int\limits_0^a g(x) dx = 1$. Отсюда

$$1 = \int\limits_0^a g(x) dx = \int\limits_0^a \left\{ s_1'(x) + \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} \right\} dx = 1 - s_1(0) + \int\limits_0^a \frac{1 - s_1(x)}{1 - x} dx$$

так что

$$
\begin{aligned}
s_1(0) &= \int\limits_0^a \frac{1-s_1(x)}{1-x}dx = \int\limits_{s_1(0)}^1 \frac{s_1\overline{s}_1}{s_1^2-s_1+\frac{1}{2}}ds_1 \quad \text{(из (2.15))} \\
&= -1+s_1(0)+\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(2s_1(0)-1) \\
&\quad \left(\text{т.к.} \quad \int \frac{ds_1}{s_1^2-s_1+r_2} = 2\tan^{-1}2x\right)
\end{aligned}
$$

и поэтому

$$
s_1(0) = \frac{1}{2}\left\{1-\tan\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \approx 0.3910. \tag{4.16}
$$

Кроме того, интегрируя обе части (4.15) от x до a, мы приходим к управлению

$$
\left(s_1^2-s_1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tan^{-1}(2s_1-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}\overline{a}/\overline{x}. \tag{4.17}
$$

Подставляя здесь $x=0$ и используя $s_1(0)\approx 0.3910$, получаем

$$
a = 1-\left\{2\left(s_1(0)\right)^2-2s_1(0)+1\right\}^{1/2}e^{-1} \approx 0.7156. \tag{4.18}
$$

Условие (4.4) выполняется согласно (4.12) с $v=\overline{a}=0.2844$.

Решения для $n=2$ и $n=3$ изображены на рис. 2.

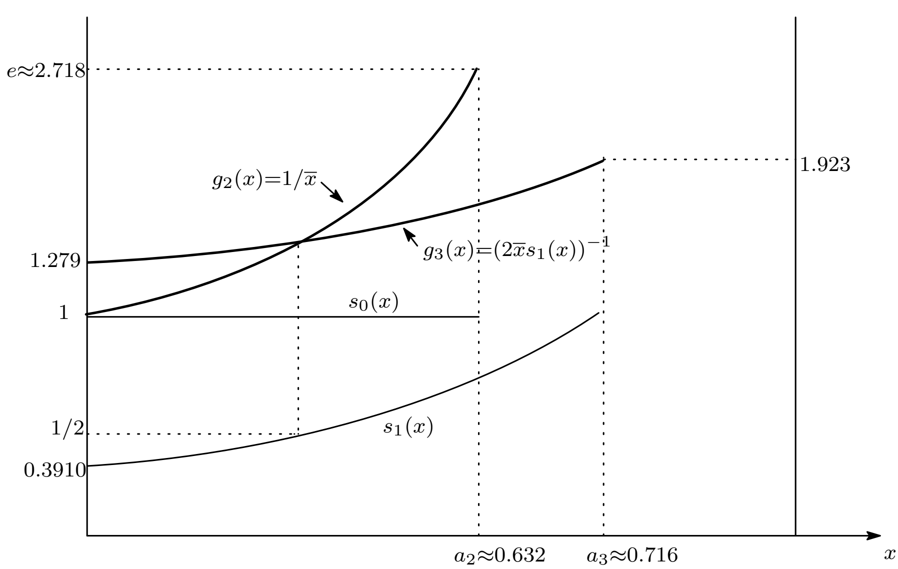

Рисунок 2. Решения для $n=2$ и 3

Случай $\mathbf{n = 4}$.

Из (4.1)-(4.3) для $n = 4$ имеем

$$H_1(x, G, G, G, G) \tag{4.19}$$
$$= \begin{cases} (G(x))^3\,\overline{x} + \sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} (G(x))^{3-k} \int\limits_x^a \left(\overline{G}(t)\right)^k dt, & 0 < x < a \\ \overline{x}, & a < x < 1. \end{cases}$$

Система (4.9)-(4.10) становится

$$\begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x))\,/\overline{x} = g(x)s_0(x) = g(x), & \text{с } \ s_1(0) = 1 \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x))\,/\overline{x} = 2g(x)s_1(x), & \text{с } \ s_2(0) = 1 \\ s_2(x) = (3g(x)\overline{x})^{-1}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Плотность распределения имеет вид $g(x) = (3\overline{x}s_2(x))^{-1}$, и мы можем выбрать a так, что $1 = \int\limits_0^a \frac{dx}{3\overline{x}s_2(x)}$. Так как правая часть есть $\geq \frac{2}{3}\int\limits_0^a \frac{dx}{2\overline{x}s_1(x)}$, мы можем использовать решение для случая $n = 3$. Исключая $g(x)$ из (4.20), получаем простое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} s_1'(x) + (1 - s_1(x))\,/\overline{x} = (3\overline{x}s_2(x))^{-1} \\ s_2'(x) + (1 - s_2(x))\,/\overline{x} = \frac{2}{3}s_1(x)/\left(\overline{x}s_2(x)\right). \end{cases} \tag{4.21}$$

После вычислений находим $a \approx 0.7917$. Условие (4.4) выполняется с $v = \overline{a} \approx 0.2083$.

Другие примеры.

Для случаев $n \geq 5$ вычисления приводят к следующим результатам

$$
\begin{array}{rlll}
n=2; & a\approx 0.6321, & \text{v}\approx 0.3679, & \int\limits_0^a xg(x)dx \approx 0.3678\\
3; & 0.7156, & 0.2844, & \\
4; & 0.7917, & 0.2083, & \\
5; & 0.8286, & 0.1714, & 0.4251\\
7; & 0.8731, & 0.1269, & 0.4425\\
10; & 0.9084, & 0.0916, & 0.4573
\end{array}
$$

Мы видим, что когда n возрастает, $a\uparrow 1$, оптимальные выигрыши $\downarrow 0$, и в равновесии плотности распределения асимптотически становятся равномерными распределениями $U_{[0,1]}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* М.: Мир, 1964.
2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М: Высшая школа, 1998.
3. Sakaguchi M., Szajowski K. *Competetive prediction of a random variable*// Math. Japonica. 1996. V. 34. N 3. P. 461-472.

EQUILIBRIUM IN N-PLAYER COMPETITIVE GAME OF TIMING

Vladimir Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Doctor of Science, professor (vmazalov@krc.karelia.ru).
Minoru Sakaguchi, Osaka University, Doctor of Science, professor

Abstract: Each player in the game of timing has to decide his time to shoot under the condition that he is not informed of the shooting times of his rivals. That is, we deal with silent games of timing. In the terms of games of timing can be formulated the auctions, games of war of attrition, competitive prediction of a random variable, etc. Using the symmetry we derive the equation to determine the equilibrium in these games.

Keywords: game of timing, n-person game, equilibrium, war of attrition, prediction of random variable.