Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.1, с. 87-105

УДК 519.834
ББК В183.3

ОГРАНИЧЕННАЯ СОГЛАСОВАННОСТЬ, ПОРОЖДЕННАЯ ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ КОАЛИЦИЙ

Наталия И. Наумова*
Факультет математики и механики
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
email: nataliai.naumova@mail.ru

Кооперативная игра рассматривается как задача векторной оптимизации с целевой точкой, координаты которой – требования коалиций. Для заданного набора непрерывных строго возрастающих функций полезности коалиций предполагается, что для каждого разбиения множества игроков решение задачи не изменится после переоценки требований его элементов, в которой потери полезностей всех элементов разбиения будут одинаковы. В условии непрерывности это приводит к специальному значению игры, имеющему итеративный метод вычисления. В частности, для одинаковых логарифмических функций полезности возникает пропорциональная переоценка требований коалиций и получается значение взвешенной энтропии. Условие анонимности и свойство «болвана» дают вектор Шепли, а условие положительной однородности приводит к значению взвешенной энтропии.

* Работа была поддержана грантом NWO (The Netherlands Organization for Scientific Research) NL-RF 047.017.017 и Российским Фондом Фундаментальных Исследований грант 05-01-89005-НВО-а

Ключевые слова: кооперативная игра, взвешенная энтропия, вектор Шепли.

1. Введение

Игрой с трансферабельными полезностями (TU) называется пара (N, v), где $N = \{1, \ldots, n\}$ – *множество игроков*, v – *характеристическая функция*, т. е. v назначает каждой коалиции $S \subset N$ скалярную силу влияния $v(S)$. В этой статье сила влияния коалиции интерпретируется как ее запрос в процессе переговоров.

Одной из главных проблем в кооперативной теории игры является построение правила распределения. *Правило распределения* Ψ назначает для каждой игры (N, v) n-вектор $\Psi(N, v)$, где $\Psi_i(N, v)$ – величина влияния (или сила) игрока i. Оно *эффективно*, если сумма распределений равна $v(N)$. *Решение* – это эффективное правило распределения.

В данной статье кооперативная игра рассматривается как задача переговоров с целевой точкой, где вектор значений характеристической функции коалиций – целевая точка и набор всех аддитивных функций множеств с зафиксированным решением для коалиции N – допустимое множество. Некоторые результаты из [2], [3], [6] касающиеся решений общих задач переговоров с целевыми точками применены здесь к кооперативным играм.

Специальный класс задач переговоров с целевыми точками – класс проблем распределения ресурса, где цель состоит в том, чтобы разделить фиксированную сумму между агентами в соответствии с их требованиями (см. [11] например). Для задач распределения ресурса широко рассматриваются два главных метода распределения: равное приращение и пропорциональное разделение. Методы равных убытков, где все участники имеют равные приращения полезностей их выигрышей, обобщают эти методы.

Эти идеи ведут нас к семейству новых решений кооперативных игр. Пусть для каждой коалиции S ее функция полезности g_S известна. Тогда решение, основанное на этих функциях полезности определено. Решение назначает для каждой кооперативной игры единственное решение специальной проблемы минимизации. Если функции полезности всех коалиций равны одной и той же логарифмической функции, тогда это решение – результат максимизации взвешенной функции энтропии на наборе эффективных распределений. Класс решений, основанных на линейных функциях полезности коалиций, содержит решение Шепли и минимальное квадратичное решение.

Решение, основанное на функциях полезности коалиций, может быть обосновано двумя путями. Первый рассматривает итеративный процесс модификации запросов коалиций. На каждой стадии этого процесса рассматриваемое разбиение набора всех игроков переоценивает запросы всех его членов. Сумма новых запросов равна значению главной коалиции и все члены разбиения имеют равные приращения их функций полезности.

Например, если функции полезности всех членов разбиения равны одной и той же логарифмической функции, то разбиение распределяет доход от полной кооперации среди его членов пропорционально их запросам. Следующая стадия процесса рассматривает другое разбиение множества игроков. Если все возможные разбиения появляются в этом процессе циклически, то последовательность характеристических функций сходится к аддитивной функции, которая обеспечивает результат распределения. Это распределение является единственным решением специальной задачи минимизации.

Второй путь – аксиоматическое обоснование решения, где ключевая аксиома – ограниченная согласованность, основанная на функциях полезности коалиций. Это требует для каждого разбиения множества игроков сохранение результата правила распределения после переоценки запросов членов разбиения при равных потерях их функций полезности. Предположение, что для каждого разбиения множества игроков, пропорциональная переоценка значений характеристической функции для членов разбиения не изменяет результат правила распределения и предположение непрерывности ведут нас к обоснованию решения, максимизирующего взвешенную энтропию в кооперативных играх. Если мы заменяем пропорциональный принцип переоценки принципом равного приращения, то те же самые аргументы ведут нас к распределению, минимизирующему сумму квадратов эксцессов коалиций, т. е. к минимальному квадратичному решению.

Некоторые дополнительные свойства решений, основанных на функциях полезности коалиций, дают возможность описывать эти функции полезности. Свойство «болвана» и предположение анонимности приводят к решению Шепли. Предположение положительной однородности и равные права всех коалиций дают решение, максимизирующее взвешенную энтропию.

Для задач переговоров с целевыми точками, независимыми от допустимых множеств, результат максимизации взвешенной функции энтропии был предложен Брегман и Романовским [3]. Наумова [4] формализовала их аргументы и представила аксиоматическое обоснование этого решения. Эта аксиоматика была обобщена в Брегман и Наумова [2], где логарифмические функции, приводящие к решению, максимизирующему взвешенную энтропию, были заменены произвольными функциями полезности агентов. Кроме того, в [2] и [6] существование функций полезности агентов, порождающих решение задачи, было получено из некоторых аксиом. Подобный результат был получен позже независимо Csiczar [7] при дополнительных предположениях.

В теории кооперативных игр Hamiache [9] описал последовательность характеристических функций, сходящуюся к аддитивной функции, которая обеспечивает решение Шепли для первой функции последовательности. В этой статье решение Шепли получено как предел другой последовательности характеристических функций и сходимость последовательности характеристических функций в общем случае основана на результате Брегман [1]. Понятие «ограниченной согласованности» было введено Hamiache [9], где оно использовалось для нового аксиоматического обоснования решения Шепли. Это означает постоянство решения при некоторых изменениях характеристических функций.

2. Решения, основанные на функциях полезности коалиций

Пусть $X = R^1$ или $X = (0, +\infty)$, (N, v) – TU кооперативная игра с $v(S) \in X$ для всех $S \neq \emptyset$, $v(\emptyset) = 0$, $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset \neq Q \subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X с множеством значений равным R^1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{x \in X^n : x(N)=v(N)} \sum_{S:S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt, \tag{2.1}$$

где $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

Утверждение 2.1. *Задача (2.1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим другую задачу

$$\min \sum_{S:S \subset N} \int_{v(S)}^{x_S} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt, \tag{2.2}$$

определенную для $\{x_S\}_{S:S \subseteq N, S \neq \emptyset}$ с ограничениями

$$x_S \in X \quad \text{для всех } S \subset N, S \neq \emptyset,$$
$$\sum_{S \in \mathcal{P}} x_S = v(N) \quad \text{для всех разбиений } \mathcal{P} \text{ множества } N.$$

Задачи (2.1) и (2.2) эквивалентны, поскольку все допустимые точки задачи (2.2) являются аддитивными функциями множества.

Для каждого $S \subset N$, $y \in X$ обозначим $f_S(y) = \int\limits_{v(S)}^{y} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$. Имеем $f'_S(y) = g_S(y) - g_S(v(S))$, следовательно строгое возрастание g_S влечет то, что f_S – строго выпуклая функция. Целевая функция (2.2) также строго выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве, поэтому, если решение (2.2) существует, то оно единственно.

Теперь докажем существование решения. Заметим, что $f_S(y) \geq f_S(v(S)) = 0$ для всех $y \in X$.

Пусть $X = R^1$, тогда, поскольку $\{g_S(y) : y \in X\} = R^1$, $f_S(y) \to +\infty$ при $y \to \infty$. Следовательно существует α_S, β_S $(S \subset N)$, такая что дополнение неравенств $\alpha_S \leq x_S \leq \beta_S$ для всех $S \subset N$ к ограничениям (2.2) не изменяет решение (2.2). Новая задача имеет решение, поскольку она имеет компактное допустимое множество.

Пусть $X = (0, +\infty)$. Тогда для всех S, $x_S \leq v(N)$ для всех допустимых x. Функция $f_S(y)$ строго убывает по $y < v(S)$. Если $\lim\limits_{y \to 0} f_S(y) = +\infty$, то существует $\alpha_S > 0$ такая, что дополнение неравества $x_S \geq \alpha_S$

к ограничениям (2.2) не изменяет решение (2.2). Если $\lim\limits_{y\to 0} f_S(y) < +\infty$, то определим $f_S(0) = \lim\limits_{y\to 0} f_S(y)$ и $\alpha_S = 0$. Теперь рассмотрим задачу (2.3), где условие $x_S \in X$ в задаче (2.2) заменено на $\alpha_S \leq x_S \leq v(N)$. Задача (2.3) имеет компактное допустимое множество и непрерывную целевую функцию, следовательно имеет решение $z = \{z_S\}_{S\subset N}$. Докажем, что z – решение (2.2). Предположим, что $z_Q = 0$ для некоторого $Q \subset N$. Существуют $i, j \in N$ такие, что $i \in Q$, $z_{\{j\}} > 0$. Зафиксируем $\epsilon : 0 < \epsilon < \min\limits_{z_S>0} z_S$. Пусть $M = \max\limits_{S:z_S>0} \max\{|g_S(t) - g_S(v(S))| : t \in [z_S - \epsilon, z_S + \epsilon]\}$. Зафиксируем $\delta > 0$ такое, что $\delta < \min\{\epsilon, \min\limits_{S\subset N} v(S)\}$ и $g_Q(\delta) - g_Q(v(Q)) > 2^n M$. Рассмотрим следующее $x = \{x_S\}_{S\subset N}$:
$x_S = z_S + \delta$, $i \in S$, $j \notin S$,
$x_S = z_S - \delta$, $i \notin S$, $j \in S$,
$x_S = z_S$ иначе.
Если $z_s > 0$, то $|f_S(x_S) - f_S(z_S)| < \delta M$. Если $z_s = 0$, то $f_S(x_S) < f_S(z_S)$. Более того, $f_Q(x_Q) - f_Q(z_Q) < -2^n\delta M$. Следовательно $\sum\limits_{S\subset N} f_S(x_S) < \sum\limits_{S\subset N} f_S(z_S)$. Это противоречит определению z, следовательно z – решение задачи (2.2). $\square$

Пусть $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset\neq Q\subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X с множеством значений равным R^1. *Решение* $\Psi^{\mathcal{G}}$*, основанное на семействе функций* $\mathcal{G}$ – это отображение, переводящее каждое (N, v) с $v(S) \in X$ в единственное решение задачи (2.1). Теперь опишем обоснование значения $\Psi^{\mathcal{G}}$.

Для каждого разбиения $\mathcal{P}$ из N определим характеристическую функцию $v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$ следующим образом.

$$\begin{cases} v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S) = v(S) \quad \text{для всех } S \notin \mathcal{P}, \\ \sum\limits_{S\in\mathcal{P}} v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S) = v(N), \\ g_S(v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}(S)) - g_S(v(S)) \quad \text{равны для всех } S \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Здесь характеристическая функция $v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$ – результат переоценки v для членов $\mathcal{P}$, где все члены получают равные приращения их полезностей.

Рассмотрим следующие 3 свойства правила распределения Ψ, определенное на множестве (всех / положительных) кооперативных TU игр.

C1. Если v – аддитивная функция, то $\Psi_i(N,v) = v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

C2. Если $v_k \to v$ при $k \to \infty$, то $\Psi(N,v_k) \to \Psi(N,v)$ при $k \to \infty$.

C3. $\Psi(N,v) = \Psi(N, v^{\mathcal{P},\mathcal{G}})$ для всех v, всех разбиений $\mathcal{P}$ множества N.

Условие C1 известно как *несущественное свойство игры*, C2, предположение непрерывности, C3 можно рассмотреть как некоторый тип устойчивости или некоторый тип условий инвариантности. (Hamiache [9] называет свойство этого типа «ограниченной согласованностью».) Фактически это эквивалентно сохранению результата распределения при переоценке требований членов разбиения $\mathcal{P}$ с равными приращениями их полезностей.

Теорема 2.1. *Пусть $X = R^1$ или $X = (0,+\infty)$, $\mathcal{G} = \{g_Q\}_{\emptyset \neq Q \subset N}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X с множеством значений, равным R^1.*

Тогда $\Psi^{\mathcal{G}}$ – единственное решение, определенное на множестве кооперативных TU игр (N,v) с $v(S) \in X$ для $S \neq \emptyset$ и удовлетворяющее условиям C1, C2, C3.

Доказательство. Проверим, что $\Psi^{\mathcal{G}}$ удовлетворяем условиям C1, C2, C3.

Пусть v – аддитивная функция, $z_i = v(\{i\})$ для всех $i \in N$, тогда $z(S) = v(S)$ для всех S. Поскольку функция f_S минимизирована на $v(S)$ для всех $S \subset N$, C1 выполнено.

Целевая функция задачи (2.1) – непрерывная функция от v. Пусть $v_k \to v$ при $k \to \infty$. Поскольку множество значений g_S равно R^1, все $\Psi^{\mathcal{G}}(N,v_k)$ принадлежат компактному множеству. Тогда предположение $\Psi^{\mathcal{G}}(N,v_k) \not\to \Psi^{\mathcal{G}}(N,v)$ при $k \to \infty$ противоречит единственности решения (2.1). Поэтому C2 выполнено.

Проверим C3. Пусть $\mathcal{P}$ – разбиение N. Рассмотрим новую задачу минимизации (2.4) с такой же целевой функцией как и (2.2) и только одним уравнением во множестве ограничений: $\sum\limits_{S \in \mathcal{P}} x_S = v(N)$.

Также как и задача (2.2), задача (2.4) имеет единственное решение $z = \{z_S\}_{S\subset N}$. Для каждого $S \subset N$, $y \in X$ обозначим $f_S(y) = \int\limits_{v(S)}^{y} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$. Это следует из правила множителей Лагранжа, что для некоторого $\lambda \in R^1$,
$f'_S(z_S) = 0$ для $S \notin \mathcal{P}$ и $f'_S(z_S) = \lambda$ для всех $S \notin \mathcal{P}$.
Поскольку $f'_S(z_S) = g_S(z_S) - g_S(v(S))$, получим $z = v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$.

Рассмотрим следующее представление целевой функции задачи (2.2):

$$\sum_{S:S\subset N} \int\limits_{v(S)}^{x_S} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt = \sum_{S:S\subset N} \int\limits_{v(S)}^{z_S} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$$
$$+ \sum_{S:S\subset N} \int\limits_{z_S}^{x_S} (g_S(t) - g_S(z_S))dt + \sum_{S:S\subset N} \int\limits_{z_S}^{x_S} (g_S(z_S) - g_S(v(S)))dt.$$

Так как для всех допустимых x, $\sum\limits_{S\in\mathcal{P}} x_S = v(N) = \sum\limits_{S\in\mathcal{P}} z_S$,

$$\sum_{S:S\subset N} \int_{z_S}^{x_S} (g_S(z_S) - g_S(v(S)))dt = \sum_{S\in\mathcal{P}} \lambda(x_S - z_S) = 0.$$

Следовательно, если мы заменим в задаче (2.2) v на $z = v^{\mathcal{P},\mathcal{G}}$, то целевые функции новой задачи и задачи (2.2) различаются на константу $\sum\limits_{S:S\subset N} \int\limits_{v(S)}^{z_S} (g_S(t) - g_S(v(S)))dt$, следовательно решения этих задач совпадают. Так как задача (2.1) эквивалентна задаче (2.2), $\Psi^{\mathcal{G}}$ удовлетворяет C3.

Теперь пусть решение Ψ удовлетворяет C1, C2, C3. Перечислим все возможные разбиения $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m$ множества N. Рассмотрим следующую последовательность характеристических функций $v^0, v^1, \ldots$: $v^0 = v$, $v^i = (v^{i-1})^{\mathcal{P}_j,\mathcal{G}}$ с $j \equiv i \pmod m$. В [1] было доказано, что $v^i \to w$ при $i \to \infty$, где w – решение задачи (2.2), т. е. w – аддитивная функция и $\{w_{\{i\}}\}_{i\in N} = \Psi^{\mathcal{G}}(N, v)$. По C1, $\{w_{\{i\}}\}_{i\in N} = \Psi^{\mathcal{G}}(N, w)$, следовательно $\Psi^{\mathcal{G}}(N, v) = \Psi^{\mathcal{G}}(N, w)$. По C1, $\Psi^{\mathcal{G}}(N, w) = \Psi(N, w)$. Ввиду C3 и C2, $\Psi(N, v) = \Psi(N, v^i) \to \Psi(N, w)$, следовательно $\Psi(N, v) = \Psi(N, w)$, so $\Psi = \Psi^{\mathcal{G}}$. $\square$

Замечание 2.1. Итеративный процесс модификаций запросов коалиций, рассмотренный в доказательстве Теоремы 2.1, может сам быть обоснованием значения $\Psi^{\mathcal{G}}$. Это обоснование кажется естественным для некоторых специальных функций полезности, рассмотренных ниже.

Замечание 2.2. Итеративный процесс описанный в доказательстве может быть использован для вычисления $\Psi^{\mathcal{G}}(N,v)$.

Замечание 2.3. Множество ограничений в задаче (2.2) может быть изменено: необходимо только гарантировать аддитивность допустимых векторов в этой задаче. Например, достаточно рассматривать только разбиения, состоящие из не более чем трех элементов.

3. Взвешенная энтропия и минимальное квадратичное решения

Рассмотрим решение $\Psi^{\mathcal{G}}$ для некоторого семейства $\mathcal{G}$ функций полезности. Пусть $X = (0,+\infty)$, $g_S(t) = \ln(t)$ для всех $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, Ψ – решение, определенное на множестве кооперативных TU игр с положительными характеристическими функциями. Тогда C3 превращается в следующее условие.

C4. $\Psi(N,v) = \Psi(N,v^{\mathcal{P}})$ для всех положительных v, всех разбиений $\mathcal{P} = \{S_1,\ldots,S_k\}$ множества N, где

$$\begin{cases} v^{\mathcal{P}}(S) = v(S) \quad \text{для } S \notin \mathcal{P}, \\ v^{\mathcal{P}}(S) = v(N)v(S)/\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \quad \text{для } S \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Характеристическая функция $v^{\mathcal{P}}$ – результат пропорциональной переоценки запросов для коалиций в $\mathcal{P}$, если переговоры ведутся среди ее членов.

C4 – сохранение результата распределения при пропорциональной переоценке запросов членами разбиения $\mathcal{P}$.

Решение, максимизирующее взвешенную энтропию для (N,v) – единственное решение задачи

$$\min_{x\in R^n: x_i>0, x(N)=v(N)} \sum_{S:S\subset N} x(S)\ln(x(S)/v(S)), \tag{3.1}$$

где $x(S) = \sum\limits_{i\in S} x_i$.

Существование этого решения будет доказано в Теореме 3.1. *Решение взвешенной энтропии* – решение, которое назначает каждой игре (N, v) с положительными v решение, максимизирующее ее взвешенную энтропию.

Теорема 3.1. *Решение взвешенной энтропии – это единственное решение, определенное на множестве положительных кооперативных TU игр и удовлетворяющее условиям C1, C2, C4.*

Доказательство. Заметим, что если $x \in R^n$, $x(N) = v(N)$, то $\sum\limits_{S \subset N} x(S) = v(N) \cdots 2^{n-1}$. Поэтому решение, максимизирующее взвешенную энтропию для (N, v), существует тогда и только тогда, когда существует единственное решение следующей задачи:

$$\min_{x \in R^n : x_i > 0, x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} x(S)(\ln(x(S)/v(S)) - 1). \qquad (3.2)$$

Более того, эти решения совпадают.

Для каждого $S \subset N$ рассмотрим $h_S(t) = t(\ln(t/v(S)) - 1)$. Имеем $h'_S(t) = \ln t - \ln v(S)$, следовательно задача (3.2) совпадает с задачей (2.1) для $g_S(t) = \ln t$. □

Замечание 3.1. Итеративный процесс, описанный в доказательстве Теоремы 2.1, может использоваться для вычисления решения взвешенной энтропии. Автор использует этот метод для вычисления. Поскольку пропорциональная переоценка запросов коалиций кажется естественной, это можно рассмотреть как обоснование решения взвешенной энтропии.

Теперь рассмотрим те же самые аргументы обоснования, используя принцип равного приращения вместо пропорционального.

Пусть $X = R^1$, $g_S(t) = t$ для всех $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, Ψ – решение, определенное на множестве всех кооперативных TU игр. Тогда C3 превращается в следующее условие.

C5. $\Psi(N, v) = \Psi(N, v_{\mathcal{P}})$ для всех v, всех разбиений $\mathcal{P}$ множества N, где

$v_{\mathcal{P}}(S) = v(S)$ для $S \notin \mathcal{P}$,

$v_{\mathcal{P}}(S) = v(S) + (v(N) - \sum\limits_{i=1}^{k} v(S_i))/|\mathcal{P}|$ для $S \in \mathcal{P}$.

C5 означает сохранение результата распределения, когда все коалиции в фиксированном разбиении N разделяют кооперативный излишек поровну.

Минимальное квадратичное решение – решение, которое дает каждой TU игре (N, v) решение задачи

$$\min_{x \in R^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} (v(S) - x(S))^2.$$

Существование этого решения известно. Тогда Теорема 2.1 обеспечивает следующий результат.

Теорема 3.2. *Минимальное квадратичное решение – это единственное решение, определенное на множестве всех кооперативных TU игр и удовлетворяющее условиям C1, C2, C5.*

Обобщенное минимальное квадратичное решение – решение, которое дает каждой TU игре (N, v) решение задачи

$$\min_{x \in R^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} a(S)(v(S) - x(S))^2,$$

где $a(S) \geq 0$ для всех $S \subset N$.

Keane [10] доказал, что решение Шепли – обобщенное минимальное квадратичное решение для $a(S) = (|S| - 1)!(n - |S| - 1)!$. Это представление генерирует итеративный процесс, сходящийся к решению Шепли. Процесс отличается от процесса в [9].

Рассмотрим некоторые свойства наших решений.

Решение f удовлетворяет *свойству «болвана»* если $v(S \cup \{i_0\}) = v(S) + v(\{i_0\})$ для всех $S \neq \emptyset$ влечет $f_{i_0}(N, v) = v(\{i_0\})$.

Следующая теорема показывает, что при дополнительной симметрии и условии «болвана» только решение Шепли возможно.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geq 3$, $X = R^1$ или $X = (0, +\infty)$, $\{g_k\}_{k=1}^{n-1}$ – семейство строго возрастающих непрерывных функций, определенных на X со множеством значений равным R^1. Если решение f, определенной на TU-играх с $v(S) \in X$ удовлетворяет свойству «болвана» и для всех (N, v), $f(N, v)$ – решение задачи*

$$\min_{x \in X^n : x(N) = v(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_{|S|}(t) - g_{|S|}(v(S))) dt,$$

то $X = R^1$ и f – решение Шепли.

Доказательство. Пусть $u, t \in X$, рассмотрим следующее (N, v):
$v(\{i\}) = u$ для всех $i \in N \setminus \{n\}$,
$v(S) = t|S|$ для $S \subset N \setminus \{n\}$, $|S| \geq 2$,
$v(S \cup \{n\}) = v(S) + v(n)$ для всех $S \subset N \setminus \{n\}$.
Обозначим $\bar{x} = f(N, v)$. Поскольку n – «болван» для (N, v) и $g_S = g_{|S|}$, из свойства «болвана» следует, что $\bar{x}_i = t$ для всех $i < n$ и $\bar{x}_n = v(n)$, следовательно $\bar{x}(S) = v(S)$ для $|S \setminus \{n\}| \geq 2$. Пусть

$$H(x) = \sum_{S:S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (g_{|S|}(t) - g_{|S|}(v(S)))dt,$$

тогда из правила множителей Лагранжа следует, что $\frac{\partial}{\partial x_i} H(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} H(\bar{x})$ для всех $i, j \in N$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H(\bar{x}) = \sum_{S:i \in S} (g_{|S|}(\bar{x}(S)) - g_{|S|}(v(S)).$$

Условие $\frac{\partial}{\partial x_1} H(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_n} H(\bar{x})$ влечет

$$g_1(t) - g_1(u) = (n-2)(g_2(t + v(n)) - g_2(u + v(n))). \qquad (3.3)$$

Поскольку t, u, $v(n)$ произвольны, имеем

$$g_1(t) - g_1(u) = g_1(t+h) - g_1(u+h) \quad \text{для всех } t, u, h \in X.$$

Для $u, w \in X$, $w > u$, $h = (w-u)/2$, $t = (w+u)/2$, получим

$$2g_1((t+u)/2) = g_1(t) + g_1(u).$$

Это уравнение Йенсена (см. [5]), таким образом $g_1(t) = at + b$. Так как множество значений g_1 равняется R^1, $X = R^1$ и $a \neq 0$. Строгое возрастание g_1 влечет $a > 0$ и мы можем принять без потери общности, что $g_1(t) = t$. Точно так же следует из (3.3), что g_2 является линейной функцией, тогда

$$(n-2)g_2 = g_1.$$

Докажем индукцией по m что $C_{n-2}^{m-1} g_m = g_1$ для всех $m \leq n-1$. Пусть $m > 2$ и $C_{n-2}^{j-1} g_j(t) = g_1(t) = t$ для всех $j < m$. Пусть $t \in X$, тогда рассмотрим игру (N, v^m), где

$v^m(S) = 0$ для $|S| < m$, $n \notin S$,
$v^m(S) = t|S|$ для $|S| \geq m$, $n \notin S$,
$v^m(S \cup \{n\}) = v^m(S) + v(n)$ для всех $S \subset N \setminus \{n\}$.
Тогда, по свойству «болвана», $f_i(N, v^m) = t$ для всех $i < n$ и $f_n(N, v^m) = v(n)$.

Условие $\frac{\partial}{\partial x_1} H(f(N, v^m)) = \frac{\partial}{\partial x_n} H(f(N, v^m))$ влечет

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{n-2}^{k-1}(g_k(kt) - g_k(0)) = \sum_{k=2}^{m} C_{n-2}^{k-1}(g_k((k-1)t + v(n)) - g_k(v(n))).$$

По индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{m-2} C_{n-2}^{k-1}(g_k(kt) - g_k(0)) = \sum_{k=2}^{m-1} C_{n-2}^{k-1}(g_k((k-1)t + v(n)) - g_k(v(n))),$$

следовательно

$$\begin{gathered} C_{n-2}^{m-1}(g_m((m-1)t + v(n)) - g_m(v(n))) = \\ C_{n-2}^{m-2}(g_{m-1}((m-1)t) - g_{m-1}(0)) = (m-1)t. \end{gathered}$$

Поскольку t и $v(n)$ произвольны, из этого следует (подобно случаю $m = 1$), что g_m – линейная функция и тогда $C_{n-2}^{m-1} g_m(t) = t$. Таким образом,

$$g_k(t) = t\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-2)!}$$

и, ввиду результата Keane, f совпадает с решением Шепли. $\square$

Замечание 3.2. В случае, когда известно, что все функции g_S линейны, результат Теоремы 3.3 следует из [14].

Теорема 3.4. *Пусть $X = (0, +\infty)$ или $X = R^1$. Предположим, что $\Psi^G = \Psi^H$ для двух семейств строго возрастающих непрерывных функций $G = \{g_S\}_{S \subset N}$ и $H = \{h_S\}_{S \subset N}$, определенных на X с множеством значений, равным R^1. Тогда существуют $K > 0$ и $c_S \in R^1$ ($S \subset N$, $S \neq N$), такие что $h_S(t) = Kg_S(t) + c_S$ для всех $S \subset N$, $S \neq N$, $t \in X$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого разбиения $\mathcal{P}$ N с $|\mathcal{P}| > 1$, $h_S(t) = Kg_S(t) + c_S$ для всех $S \in \mathcal{P}$. Зафиксируем

$\mathcal{P}$ такое, что $|\mathcal{P}| > 1$. Зафиксируем некоторое $Q \in \mathcal{P}$ и определим функцию $\mu(\lambda)$ на R^1 как

$$\mu(\lambda) = h_Q(g_Q^{-1}(\lambda)) - h_Q(g_Q^{-1}(0)).$$

Будет доказано, что

$$\mu(\lambda) = h_S(g_S^{-1}(\lambda)) - h_S(g_S^{-1}(0)) \quad \text{для всех } S \in \mathcal{P} \tag{3.4}$$

и

$$\mu(\lambda) = K\lambda \quad \text{для некоторого } K > 0. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что для $c_S = h_S(g_S^{-1}(0))$ для каждого $t \in X$, если $\lambda = g_S(t)$, то $Kg_S(t) + c_S = h_S(t)$ для всех $S \in \mathcal{P}$.

Докажем (3.4). Зафиксируем $\lambda \in R^1$. Существует $z \in X^n$ таое, что $z(S) = g_S^{-1}(0)$ для всех $S \in \mathcal{P}$. Рассмотрим кооперативную игру (N, v), где
$v(T) = z(T)$ для всех $T \notin \mathcal{P}$,
$v(T) = g_T^{-1}(\lambda)$ для всех $T \in \mathcal{P}$.

Пусть $x = \Psi^G(N, v)$. Из правила множителей Лагранжа следует, что

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{T: i \in T} (g_T(x(T)) - g_T(v(T))) + \eta = 0 \\ \text{для некоторого } \eta \in R^1 \text{ для всех } i \in N, \\ x(N) = v(N). \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Вектор z удовлетворяет (3.6). Действительно, для каждого $S \in \mathcal{P}$, $i \in N$,
$\sum\limits_{T: i \in T} (g_T(z(T)) - g_T(v(T))) = g_S(z(S)) - g_S(v(S)) = 0 - \lambda$, $z(N) = v(N)$.

Более того, поскольку целевая функция задачи (2.1) строго выпукла, z – единственное решение (2.1). Тогда $z = \Psi^G(N, v) = \Psi^H(N, v)$, следовательно z – единственное решение задачи

$$\min_{x \in X^n : x(N) = v(N)} \sum_{S: S \subset N} \int_{v(S)}^{x(S)} (h_S(t) - h_S(v(S))) dt. \tag{3.7}$$

По правилу множителей Лагранжа существует $\chi \in R^1$ такой, что

$$\sum_{T: i \in T} (h_T(z(T)) - h_T(v(T))) = \chi \quad \text{для всех } i \in N.$$

Зафиксируем $S \in \mathcal{P}$, $i \in S$, тогда $h_S(z(S)) - h_S(v(S)) = \chi$, т. е. $h_S(g_S^{-1}(0) - h_S(g_S^{-1}(\lambda)) = \chi$. Таким образом (3.4) доказано.

Докажем (3.5). Поскольку функция $\mu(\lambda)$ строго возрастающая непрерывная функция, достаточно доказать, что

$$\mu(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2). \tag{3.8}$$

Существует $y \in X^n$ такой, что $y(S) = g_S^{-1}(0)$ для $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$, $y(Q) = g_Q^{-1}(\lambda_1)$. Рассмотрим игру (N, w), где
$w(T) = y(T)$ для $T \notin \mathcal{P}$,
$w(T) = g_T^{-1}(\lambda_2)$ для $T \in \mathcal{P}$, $T \neq Q$,
$w(Q) = g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Проверим, что y – решение задачи

$$\min_{x \in X^n : x(N) = w(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{w(S)}^{x(S)} (g_S(t) - g_S(w(S)))dt. \tag{3.9}$$

Если $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$, то $g_S(y(S)) - g_S(w(Q)) = -\lambda_2$. Более того, $g_Q(y(Q)) - g_Q(w(Q)) = \lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2$. Тогда

$$\sum_{T : i \in T} (g_T(y(T)) - g_T(w(T))) = -\lambda_2 \quad \text{для всех } i \in N,$$

следовательно y – единственное решение (13), т. е. $y = \Psi^G(N, w)$.

Тогда $y = \Psi^H(N, w)$ и y – решение следующей задачи:

$$\min_{x \in X^n : x(N) = w(N)} \sum_{S : S \subset N} \int_{w(S)}^{x(S)} (h_S(t) - h_S(w(S)))dt. \tag{3.10}$$

Из правила множителей Лагранжа следует, что существует $\delta \in R^1$ такой, что
$h_S(y(S)) - h_S(w(S)) = \delta$ для $S \in \mathcal{P}$, $S \neq Q$,
$h_Q(y(Q)) - h_Q(w(Q)) = \delta$.
По определению y и благодаря (3.4), получим
$\delta = h_S(g_S^{-1}(0)) - h_S(g_S^{-1}(\lambda_2)) = \mu(\lambda_2)$ для $S \neq Q$, $S \in \mathcal{P}$, следовательно ввиду определения y,

$$h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1)) - h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\mu(\lambda_2).$$

Теперь

$$\begin{aligned}&\mu(\lambda_1+\lambda_2)=h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1+\lambda_2))-h_Q(g_Q^{-1}(0))\\&=h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1+\lambda_2))-h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1))+h_Q(g_Q^{-1}(\lambda_1))-h_Q(g_Q^{-1}(0))\\&=\mu(\lambda_2)+\mu(\lambda_1).\end{aligned}$$

Это доказывает (3.8). □

Теорема 3.5. *Пусть* $X=(0,+\infty)$, $G=\{g_S\}_{S\subset N}$ *– семейство строго возрастающих непрерывных функций с множеством значений, равным* R^1 *и*

$$\Psi^G(N,\alpha v)=\alpha\Psi^G(N,v)\quad \textit{для всех } \alpha>0. \tag{3.11}$$

Тогда существуют $\delta_S>0$, $\beta_S\in R^1$ *такие, что* $g_S(t)=\delta_S\ln t+\beta_S$.

Доказательство. Пусть $x=\Psi^G(N,v)$, $\alpha>0$. Из (15) и правила множителей Лагранжа следует, что для некоторого $\lambda\in R^1$, $\sum\limits_{T:i\in T}(g_T(\alpha x(T))-g_T(\alpha v(T)))=\lambda$ для всех $i\in T$ и $\alpha x(N)=\alpha v(N)$. Поскольку целевая функция задачи (2.1) строго выпукла, $x=\Psi^H(N,v)$, где $H=\{h_S\}_{S\subset N}$ и $h_S(t)=g_S(\alpha t)$. По Теореме 3.4, существуют $K(\alpha)>0$ и $c_S(\alpha)\in R^1$ такие, что

$$g_S(\alpha t)=K(\alpha)g_S(t)+c_S(\alpha).$$

Если мы предположим, что $g_s(1)=0$, то $g_s(\alpha)=c_S(\alpha)$, поэтому

$$g_S(\alpha t)=K(\alpha)g_S(t)+g_S(\alpha). \tag{3.12}$$

Поскольку множество значений g_S равно R^1, (16) влечет $g_S(t)=\delta_S\ln t$ для некоторого $\delta_S>0$ (см. [5], [7] (Теорема 4) или [12] (Следствие 2.1)).

В общем случае $\beta_S=g_S(1)$. □

4. Заключение

1. Рассмотрим проблему: являются ли исследованные решения индивидуально рациональными для супераддитивных игр? Для игры трех лиц решение взвешенной энтропии и минимальное квадратичное решение индивидуально рациональны для суперадитивных игр,

но ответ отрицателен в общем случае. Существуют супераддитивные игры 4-х лиц с решением взвешенной энтропии, которое не индивидуально рационально. Может быть, есть не анонимный $\Psi^{\mathcal{G}}$ кроме решения Шепли, которое удовлетворяет этому условию.

2. Другая открытая проблема состоит в том, чтобы найти естественные предположения на решение, обеспечивающие существования функций полезности коалиций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брегман Л.М. *Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для задач выпуклого программирования* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. № 7. С. 620-631.

2. Брегман Л.М., Наумова Н.И. *Арбитражные решения с идеальной точкой, порождаемые системами функций* // Доклады Академии наук СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 16-20.

3. Брегман Л.М., Романовский И.В. *Исследование операций и статистическое моделирование (ред. И.В. Романовский).* 1975. № 3. Изд. Ленинградского университета. С. 137-162.

4. Наумова Н.И. *Некоторые арбитражные схемы с идеальной точкой*// Вестник Ленинградского университета. 1983. № 19. (сер. Математика. Механика. Астрономия. В. 4). С. 30-36.

5. Aczel J., Dhombres J. *Functional equations in several variables with application to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.* Cambridge Univ. Press, 1989.

6. Bregman L.M., Naumova N.I. *Goal programming solutions generated by utility functions* // Lecture Notes in Economic and Math. Systems. 2002. N 510. P. 495-514.

7. Csiszar I. *Why Least Squares and Maximum Entropy? An Axiomatic Approach to Inference for Linear Inverse Problems* // The Annals of Statistics. 1991. V. 19. N 4. P. 2032-2066.

8. Feldman B. *The proportional value of a cooperatie game*, manuscript, Chicago: Scudder Kemper Investments, 1999.

9. Hamiache G. *Associated consistency and Shapley value*// International Journal of Game Theory. 2001. V. 30. N 2. P. 279-289.

10. Keane M. *Some topics in n-person game theory*, Thesis NorthWestern Univ. Evanston, Illinois, 1969.

11. Moulin H. *Handbook of Social Choice and Welfare*. 2002. V. 1. Chapter 6, Ed. by K.J.Arrow, A.K.Sen, K.Suzumura, Elsevier Science B.V., P. 290-357.

12. Naumova N.I. *Nonsymmetric equal sacrifice solutions for claim problem* // Mathematical Social Sciences. 2002. V. 43. P. 1-18.

13. Ortmann K.M. *The proportional value of a positive cooperative game*// Mathematical Methods of Operations Research. 2000. V. 51. P. 235-248.

14. Ruis L.M. *The Family of Least Squares Values for Transferable Utility Games* // F. Valenciano, J.M. Zarzuelo. Games and Economic Behaviour. 1998. N 24. P. 109-130.

ASSOCIATED CONSISTENCY BASED ON UTILITY FUNCTIONS OF COALITIONS

Natalia Naumova, Department of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (nataliai.naumova@mail.ru).

Abstract: A cooperative game problem is treated as a bargaining problem with claim point. For given continuous strictly increasing utility functions of coalitions, we suppose that for every partition of the player set, the result does not change after equal sacrifice w.r.t. these functions overestimation of characteristic function values for partition members. This supposition and continuity assumption lead to a special value and give an iterative method for computation its results. In particular, for equal logarithmic utility functions of coalitions, we get proportional overestimation of characteristic functions for partition members and the value is the weighted entropy solution. The anonymity assumption and the "dummy"property give the Shapley value. The weighted entropy solution follows from the positive homogeneity assumption.

Keywords: cooperative game, weighted entropy, Shapley value.