Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.1, с. 46-66

УДК 519.833.5
ББК 210.301

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МЕЖДУ ПРЕД k- И ПРЕД n-ЯДРАМИ РЕШЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР*

Илья Кацев
Елена Яновская
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-
математический институт РАН
Санкт-Петербург
email: economics-hse@yandex.ru, eyanov@emi.nw.ru

Определяется набор решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями, промежуточных между пред k- и n-ядрами. Все эти решения обладают свойствами симметрии, ковариантности и согласованности в определении Дэвиса–Машлера. Каждое решение из этого набора определяется параметром – положительным целым числом k, таким что для всех игр с числом игроков, не превосходящим k, решение для параметра k совпадает с пред n-ядром, а для игр с числом игроков, большим чем k, оно является максимальным согласованным решением, т. е. удовлетворяет свойству «k-обратной согласованности». Описываются свойства этих решений и дается их характеризация посредством сбалансированности некоторых наборов коалиций.

Ключевые слова: игра с трансферабельными полезностями, пред k-ядро, пред n-ядро, согласованность.

---

* Работа поддержана РФФИ, проект N 09-06-00155а

1. Введение

Классические кооперативные игры предполагают разрешенными любые коалиции из множества игроков. На практике, по разным причинам оказывается, что не все коалиции возможны. Поэтому большой раздел теории решений кооперативных игр посвящен определению и нахождениям решений для кооперативных игр с ограниченной кооперацией. Начало этим работам было положено Оуэном [13], который обобщил значение Шепли на игры с заданной коалиционной структурой. В дальнейшем именно линейные значения были определены и охарактеризованы для различных возможностей кооперации игроков. В первую очередь следует выделить работы Майерсона [9], [10], в которых были даны определение и аксиоматизация линейного "значения Майерсона". Другое важное значение (и тоже линейное) - "позиционное значение рассмотренное в работах [4], [8]. Также аналоги значения Шепли были построены для некоторых специфических структур допустимых коалиций, например, в работах [3], [2].

Во всех этих работах ограниченная кооперация задавалась с помощью графа связей между игроками или с помощью наперед заданного набора допустимых коалиций.

Однако возможен и другой подход к определению ограниченной кооперации. В случае, если нет экзогенно заданной коалиционной структуры, то игрокам труднее объединиться в большие коалиции, чем в малые. Поэтому в таких случаях целесообразно считать коалиции разрешенными, если число их участников не превышает некоторого заданного числа. В данной статье максимальный размер разрешенных коалиций используется в качестве параметра, с помощью которого построен однопараметрический набор решений кооперативных игр, которые оказались "промежуточными"между популярными решениями: пред k-ядром и пред n-ядром.

Эти решения обладают схожей аксиоматической характеризацией: они непусты для любой кооперативной игры и удовлетворяют известным аксиомам симметрии, ковариантности относительно линейных преобразований и согласованности в определении Дэвиса–Машлера [5].

Пред n-ядро является одноточечным решением, т.е. оно является минимальным (хотя и не единственно минимальным) решением, удовлетворяющим остальным аксиомам, а пред k-ядро обладает свойством обратной согласованности, иначе, оно является максимальным по включению решением, удовлетворяющим остальным аксиомам. Таким образом, оба они занимают крайние позиции среди множества ковариантных, симметричных и согласованных решений.

Если в определении пред n-ядра существенно используются сила всех коалиций, задаваемая значениями характеристической функции, то определение пред k-ядра можно рассматривать как набор таких векторов выигрышей, против исхода которых не может возразить ни одна пара игроков в смысле того, что их относительные максимальные "недовольства"оказываются равными, если этих игроков по очереди исключить из игры. Оказалось, что пред k-ядро можно определить оптимизационным образом так же, как и пред n-ядро, если сравниваемые вектора выигрышей отличаются только двумя компонентами. Дальнейшее расширение возможностей сравнений векторов выигрышей происходит увеличивающимся размером разрешенных коалиций, так что если все коалиции оказываются разрешенными, то мы получаем пред n-ядро.

В статье определен и охарактеризован набор решений кооперативных игр, "промежуточных"между пред k-ядром и пред n-ядром. Каждое решение, PKN_k, определяется максимальным размером разрешенных коалиций k, где $k = 2, 3, ...$ Решение PKN_k совпадает с пред k-ядром для $k = 2$. Для $k > 2$ вектор выигрышей x принадлежит решению $PKN_k(N, v)$, если для каждой коалиции $S \subset N, |S| = k$, $x_S = PN(S, v^x)$, где $\langle S, v^x \rangle$– редуцированная игра в определении Дэвиса–Машлера на множество игроков S относительно вектора x.

Решения PKN_k имеют и другое определение в терминах лексикографической минимизации аналогично определению пред n-ядра, которое определяется как множество векторов выигрышей лексикографически минимизирующих векторы эксцессов, компоненты которых расположены в порядке убывания. Решение PKN_k для каждой игры определяется аналогичной "частичной"лексикографической минимизацией векторов эксцессов, которая сравнивает между собой только векторы с не более чем k разными координатами. Из этого определения следует, что для любой игры $\langle N, v \rangle$ и $k < l$ $PKN_l(N, v) \subset PKN_k(N, v)$, и $PKN_k(N, v)$ совпадает с пред n-ядром для $k \geq n$. Таким образом, набор решений $PKN_k, k = 2, ...$ можно рассматривать как "мост"между пред k-ядром, и пред n-ядром.

Структура статьи следующая: в параграфе 2 приводятся основные определения и свойства известных согласованных решений и определения рассматриваемого набора таких решений. Параграф 3 посвящен оптимизационному подходу к определениям пред k-ядра, пред n-ядра и набору рассматриваемых решений. Модификация определения сбалансированности наборов коалиций и ее применение к характеризации решений из предлагаемого набора дается в параграфе 4. Примеры таких решений даны в параграфе 5.

2. Определения и основные свойства решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП игрой) называется пара $\langle N, v\rangle$, где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция игры* сопоставляющая каждой коалиции $S \subset N$ вещественное число $v(S)$ (полагается $v(\emptyset) = 0$), выражающее силу коалиции. *Исходом* игры называется вектор выигрышей игроков $x \in \mathbb{R}^N \in X(N, v)$, где

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N)\} -$$

множество *допустимых векторов выигрышей.*

Решением σ для класса $\mathcal{G}$ ТП игр называется отображение, сопоставляющее каждой игре $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}$ некоторое подмножество $\sigma(N, v) \subset X(N, v)$

Через $X^*(N, v)$ обозначим множество *эффективных* векторов выигрышей:

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Если для каждой игры $\langle N, v\rangle$ из класса $\mathcal{G}$ $|\sigma(N, v)| = 1$, то решение σ называется *значением.*

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Через $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ будем обозначать такой класс игр , что

$$\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \implies N \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $\pi : N \to \mathcal{N}$ – взаимно-однозначное отображение. Определим игру $\langle \pi(N), \pi v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ равенствами $v(\pi(S)) = v(S)$ для всех $S \subseteq N$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через $y = \pi(x)$ такой вектор $y \in \mathbb{R}^{\pi(N)}$, что $y_{\pi(i)} = x_i, i \in N$. Игра $\langle N', w \rangle$ называется *изоморфной* игре $\langle N, v \rangle$, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и $\pi v = w$. .

Две игры $\langle N, v \rangle, \langle N', w \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называются *стратегически эквивалентными* , если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и такие вектор $\beta \in \mathbb{R}^N$ и положительное число $\alpha > 0$, что $w = \pi(v')$, где $v' = \alpha v + \beta$.

Напомним некоторые известные свойства теоретико-игровых решений:

Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называется

- *не пустым*, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ для всех $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;
- *эффективным*, если $\sum\limits_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и любой игры $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;
- *анонимным*, если для любых игры $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, игрока $i \in N$ и отображения $\pi : N \to \mathcal{N}$ игра $\langle \pi(N), \pi v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и $\sigma_{\pi(i)}(\pi(N), \pi v) = \sigma_i(N, v)$
- *симметричным*, если для любой игры $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ *симметричные игроки* i, j, для которых $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для всех $S \not\ni i, j$, получают поровну: $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для всех $x \in \sigma(N, v)$;
- *ковариантным*, если оно ковариантно относительно стратегически эквивалентных игр $\langle N, v \rangle, \langle N', w \rangle$: из $w = \pi(\alpha v + \beta)$ следует

  $$\sigma(N', w) = \pi(\alpha \sigma(N, v) + \beta).$$

  для всех $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N$, где $(\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum\limits_{i \in S} \beta_i$ для всех $S \in N$;
- удовлетворяет *инвариантности относительно сдвига*, если для любой игры $\langle N, v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и числа b $\langle N, v + b \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, и

  $$x \in \sigma(N, v) \implies x \in \sigma(N, v + b),$$

где $(v+b)(S) = v(S) + b$ для всех $S \subsetneqq N$, и $(v+b)(N) = v(N)$.

– *непрерывным*, если из $\langle N, v\rangle = \langle N, v_n\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $v_n \to v, x_n \in \sigma(N, v_n), x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует $x \in \sigma(N, v)$.

– *согласованным*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, коалиции $T \subset N$, и вектора $x \in \sigma(N, v)$ ее *редуцированная игра* $(N \setminus T, v^x_{N\setminus T})$, полученная после ухода игроков из коалиции T с выигрышами $x_i, i \in T$, также принадлежит классу $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и

$$x = (x_{N\setminus T}, x_T) \in \sigma(N, v) \implies x_{N\setminus T} \in \sigma(N \setminus T, v^{\Phi}_{N\setminus T}). \quad (2.1)$$

– *обратно согласованным*, если для $x \in X(N, v)$ из соотношений $x_{\{i,j\}} \in \sigma(\{i, j\}, v^x_{\{i,j\}})$ для всех $i, j \in N$ следует $x \in \sigma(N, v)$.

– удовлетворяет *свойству подтверждения*, если из $x \in \sigma(N, v)$, $S \subset N$, $y_S \in \sigma(S, v^x_S)$, $\langle S, v^x\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, где $\langle S, v^x\rangle$ – редуцированная игра на множество игроков S относительно вектора x, следует $(x_{N\setminus S}, y_S) \in \sigma(N, v)$.

В формулировках трех последних свойств использовались редуцированные игры. Такие игры не определены просто заданием игры и ее векторов выигрышей, относительно которых происходит редуцирование. Различные определения редуцированных игр приводят к различным свойствам согласованности решений. В данной работе используется определение согласованности в определении Дэвиса–Машлера со следующим определением редуцированных игр:

Пусть σ произвольное решение для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ – произвольная игра, $x \in X^*(N, v)$, $S \subsetneqq N$ – произвольные вектор выигрышей и коалиция.

Редуцированной игрой (S, v^x_S) на множество игроков S относительно вектора x называется игра со следующей характеристической функцией:

$$v^x_S(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max\limits_{Q\subset N\setminus S} (v(T \cup Q) - x(Q)) & \text{для остальных коалиций}. \end{cases}$$

Из определений последних трех свойств решений следует, что если для некоторого класса игр $\mathcal{G}$ мы рассматриваем множество всех согласованных (и, возможно, удовлетворяющих еще каким-либо свойствам) решений, то в этом множестве одно-точечные решения, т.е. значения, если они существуют, являются *минимальными*[1] относительно включения, а те из них, которые удовлетворяют еще свойству обратной согласованности, являются *максимальными* относительно включения. Для класса игр с бесконечным универсальным множеством игроков $\mathcal{N}$ среди множества всех не пустых, эффективных, анонимных, ковариантных и согласованных решений существуют единственные одно-точечное решение – пред n-ядро [1], и максимальное – пред k-ядро [14].

Приведем их определения.

Для произвольных игры $\langle N, v\rangle$ и ее вектора выигрышей x *эксцессом* коалиции S относительно вектора x называется разность $v(S) - \sum\limits_{i\in S} x_i$. Эта разность выражает отрицательную относительную полезность выигрыша $x(S) = \sum\limits_{i\in S} x_i$ для коалиции S. Вектор значений эксцессов $e(x) = \{e(S,x)\}_{S\subset N}$ называется *вектором эксцессов* для x. В некоторых случаях мы будем пользоваться обозначениями $e_v(x)$, $e_v(S,x)$ для того чтобы подчеркнуть, для каких характеристических функций определен соответствующий эксцесс.

Пред n-ядром (PN) называется решение, уравнивающие значения эксцессов относительно лексиминного упорядочения. Формально, пред n-ядро игры $\langle N, v\rangle$, $PN(N,v)$, состоит из единственного вектора выигрышей, определяемого из следующего соотношения:

$$-e(PN(N,v)) \succ_{lexmin} -e(x) \text{ для всех } x \in X(N,v). \qquad (2.2)$$

Существование и единственность пред n-ядра для каждой игры следует из теоремы Шмайдлера [15], хотя он рассматривал только *n-ядра*, определяемые соотношениями (2.2), но только для *индивидуально рациональных* векторов выигрышей (дележей): $x \in I(N,v)$, где

$$I(N,v) = \{x \in X^*(N,v) \,|\, x_i \geq v(\{i\}) \;\; \forall i \in N\}.$$

Для любой пары игроков $i, j \in N$ и любого вектора выигрышей x определим *максимальное превышение* игрока i над игроком j в x

---

[1] хотя минимальным может быть и не одноточечное решение, см., напр. [12]

равенством

$$s_{ij}(x) = \max_{S \ni i, S \not\ni j} (v(S) - x(S)).$$

Пред k-ядром [7] игры $\langle N, v \rangle$, $PK(N, v)$, называется множество

$$PK(N, v) = \{x \in X(N, v) \,|\, s_{ij}(x) = s_{ji}(x) \text{ для всех } i, j \in N\}. \quad (2.3)$$

Пред n-ядро и пред k-ядро имеют аксиоматические характеризации. Рассмотрим класс всех игр $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ с бесконечным универсальным множеством игроков $\mathcal{N}$.

Теорема 2.1. [Sobolev [1]] *Единственным значением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, анонимности и согласованности является пред n-ядро.*

Теорема 2.2. [Orshan [11]] *Единственным значением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, симметрии и согласованности, является пред n-ядро.*

Так как из одноточечности решения и его анонимности следует симметрия, Теорема 2.2 является усилением Теоремы 2.1.

Теорема 2.3. [Peleg [14]] *Единственным решением для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, симметрии, согласованности и обратной согласованности, является пред k-ядро.*

Известно [1], что из согласованности следует эффективность, так что оба приведенных решения эффективны. Заметим, что выше приведенные формулировки Теорем 2.1 и 2.2 даются для значений, поэтому их можно (как это и делают авторы) сформулировать для общих решений, но добавляя при этом свойство одноточечности. При таких формулировке Теорема 2.2 отличается от Теоремы 2.3 одной аксиомой: Аксиома одноточечности в Теореме 2.2 заменяется на обратную согласованность в Теореме 2.3.

3. Решения, промежуточные между k-ядром и n-ядром

В этом параграфе строится набор решений для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ с произвольным множеством $\mathcal{N}$, каждое из которых для любой игры из этого класса содержит пред n-ядро и содержится в пред k-ядре. Свойства этих решений также совпадают со свойствами пред n-ядра и пред k-ядра, приводимых в Теоремах 2.2 и 2.3, кроме разделяющих их одноточечности и обратной согласованности: для некоторых игр и решений из приводимого набора эти решения оказываются одноточечными, в противном случае эти решения удовлетворяют ослабленным вариантам обратной согласованности.

Заметим, что определение пред k-ядра, в противоположность определению n-ядра, не содержит никаких оптимизационных процедур, приводящих к решению. Однако на самом деле пред k-ядро имеет и определение, сходное с оптимизационным определением пред n-ядра. Для каждого вектора выигрышей $x \in \mathbb{R}^N$, любой пары игроков $i, j \in N$ и трансфера между ними $(y_i, y_j) : y_i + y_j = x_i + x_j$ j,обозначим через $x||y_{i,j}$ вектор x, в котором компоненты x_i, x_j заменены соответственно на y_i, y_j.

Утверждение 3.1. *Для того чтобы вектор выигрышей x произвольной игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}$ принадлежал пред k-ядру, $x \in PK(N, v)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_{ij}) \text{ для всех } i, j \in N \text{ и трансферов } y_i, y_j. \quad (3.1)$$

Доказательство. Достаточность. Предположим, что вектор x удовлетворяет (3.1), но не принадлежит пред k-ядру. Тогда найдутся такие игроки i, j, для которых $s_{ij}(x) \neq s_{ji}(x)$, и пусть $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$, что означает выполнение неравенства

$$\max_{S: S \ni i, S \not\ni j} (v(S) - x(S)) > \max_{S: S \ni j, S \not\ni i} (v(S) - x(S)).$$

Тогда для любого положительного ε и трансфера $(y_i, y_j) = (\varepsilon, -\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$e(x||y_{ij}, S) \begin{cases} < e(x, S), & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ > e(x, S), & \text{если } j \in S, i \notin S, \\ = e(x, S), & \text{иначе }. \end{cases} \quad (3.2)$$

Следовательно, для достаточно малых ε

$$-e(x||y_{ij}) \succ_{lexmin} -e(x)$$

что противоречит (3.1).

Необходимость. Предположим, что для некоторого $x \in PK(N, v)$, соотношение (3.1) не выполняется. Тогда найдется такой трансфер (y_i, y_j), что

$$-e(x||y_{ij}) \succ_{lexmin} -e(x) \tag{3.3}$$

Пусть $y_i < x_i, y_j > x_j$. Тогда

$$e(S,x)\begin{cases} = e(S,x||y_i,y_j), & \text{для коалиций } S \text{, таких что } S \ni i,j \text{ или } S \not\ni i,j \\ < e(S,x||y_i,y_j), & \text{для коалиций } S \ni i, S \not\ni j \\ > e(S,x||y_i,y_j), & \text{для коалиций } S \ni j, S \not\ni i. \end{cases} \tag{3.4}$$

и первые неравные компоненты упорядоченных по убыванию векторов $e^*(x)$ и $e^*(x||y_{ij}$ соответствуют некоторым коалициям $S' \ni j, S' \notin i$ и $S'' \ni i, S'' \not\ni j$. Из (3.4) и $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ следует, что $e(S'', x) < e(S'', x||y_i, y_j)$, поэтому выполняется соотношение (3.1). $\square$

Утверждение 3.1 показывает, что и пред k-ядро, и пред n-ядро состоят из векторов, на которых отрицательный вектор эксцессов достигает максимума по отношению лексимина. Однако области, на которых производится максимизация этого отношения, разные для этих двух задач. Для пред n-ядра такой областью является множество всех допустимых векторов выигрышей $X(N, v)$, а для пред k-ядра отношение лексимина рассматривается только между векторами, отличающимися не более чем двумя компонентами.

Очевидно, можно рассмотреть и другие возможности, которые приведут к построению решений, состоящих из векторов выигрышей, чьи отрицательные эксцессы достигают максимумов по отношению лексимина на множестве векторов, отличающихся только фиксированным числом компонент. Приведем формальные определения. для

Определение 3.1. Для каждого целого числа $k \geq 2$ и произвольной игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, $|N| = n$ решение

$$PKN_k(N,v) = \begin{cases} PK(N,v) \text{ для } k = 2, \\ PN(N,v), \text{ для } k \geq n, \end{cases}$$

а для $2 < k < n$

$$x \in PNK_k(N,v) \iff -e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_S)$$

для любого трансфера $y_S, |S| = k$, определяемого равенством $\sum\limits_{i\in S} y_i = \sum\limits_{i\in S} x_i$.

Из Определения 3.1 непосредственно следует монотонность решений PKN_k по k : для любой игры $\langle N, v\rangle$

$$k_1 < k_2 \implies PKN_{k_2}(N, v) \subset PKN_{k_2}(N, v).$$

Другие свойства решений PNK_k будут приведены в следующих параграфах.

4. Характеризация решений $\mathbf{PKN_k}$ посредством сбалансированности

Прежде всего, заметим, что решения PKN_k удовлетворяют ковариантности и симметрии:

Ковариантность решений PKN_k следует из их определения: они определяются с помощью отношения лексимина на подмножествах множества векторов эксцессов, а векторы эксцессов при ковариантных преобразованиях характеристической функции и вектора выигрышей отличаются только одинаковым положительным множителем, так что отношение лексимина сохраняется.

Симметрия решений PNK_k также следует из их определения. Действительно, Определение 3.1 показывает, что для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и всех k $PNK_k(N, v) \subset PK(N, v)$.

Из Определения 3.1 следует, что решения PNK_k одноточечны для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ с $|\mathcal{N}| = k$.

Приведем характеризацию решений PKN_k с помощью сбалансированности наборов коалиций, аналогичную характеризации Колберга пред n-ядра [6].

Определение 4.1. Набор $\mathcal{S}$ коалиций $S \subset N$ называется *k-сбалансированным*, если для любой коалиции $K \subset N$ мощности $|K| = k$ набор

$$\mathcal{S}_K = \{S' \subset K \,|\, S' = S \cap K, S \in \mathcal{S}\}$$

является сбалансированным на множестве K.

Теорема 4.1. *Для того чтобы $x \in PNK_k(N,v)$ для произвольной игры $\langle N,v\rangle \in \mathcal{G}_N$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа α набор коалиций*

$$\mathcal{B}^k_\alpha(x,v) = \{S \in N \,|\, e(S,x) \geq \alpha\}$$

являлся пустым или k-сбалансированным

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in PNK_k(N,v)$, $K \subset N$ – произвольная коалиция мощности $|K| = k$. Тогда для любого трансфера $y_K \in \mathbb{R}^N$, $y_K(K) = x_K(K)$ выполняется соотношение

$$-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K). \tag{4.1}$$

По определению трансфера y_K для любой коалиции $S \subset N$

$$e(x,S) > e(x||y_K,S) \implies y(S \cap K) > x(S \cap K).$$

Следовательно, из отношения (4.1) следует неразрешимость системы неравенств

$$x(S \cap K) \geq y_K(S \cap K) \text{ для всех } S \in B_k(\alpha) \text{ и для произвольного } \alpha, \\ \text{если } x_K \not\equiv y_K. \tag{4.2}$$

Так как $x(K) = y_K(K)$, по теореме Колберга [6] неразрешимость системы неравенств (4.2)эквивалентна k-сбалансированности набора коалиций $\mathcal{B}_\alpha$ или ее пустоте.

Достаточность. Пусть наборы B_α k-сбалансированы или пусты для всех α. Рассмотрим α, для которого $B_\alpha \neq \emptyset$. Тогда для любой коалиции K мощности $|K| = k$ и трансфера $y_K \neq x_K$ невозможны неравенства $y_K(S \cap K) \geq x(S \cap K)$ для всех $S \in \mathcal{B}_\alpha$, что означает существование такой коалиции $T_{K,\alpha} \in \mathcal{B}_\alpha$, что $y_K(T_{K,\alpha} \cap K) < x(T_{K,\alpha} \cap K)$.

Пусть $\alpha_1 = \max_{S \subset N}(v(S) - x(S)$.

Тогда либо $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, либо найдется такая коалиция $T_{K,\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, для которой $(x||y_K)(T_{K,\alpha_1}) < x(T_{K,\alpha_1})$, откуда получаем отношение $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$.

Если $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_1}$, то рассмотрим второй по величине эксцесс

$$\alpha_2 = \max_{S: S \notin \mathcal{B}_{\alpha_1}} (v(S) - x(S)).$$

Опять имеем либо $x(S) = y(S)$ для всех $S \in \mathcal{B}_{\alpha_2}$, либо найдется такая коалиция $T_{K,\alpha_2} \in \mathcal{B}_{\alpha_2}$, для которой $(x||y_K)(T_{K,\alpha_2}) < x(T_{K,\alpha_2})$, и мы опять получаем $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$.

Повторяя эту процедуру, мы придем к тому, что либо $y_K \equiv x_K$, либо $-e(x) \succ_{lexmin} -e(x||y_K)$. $\square$

5. Свойства согласованности решений $\mathbf{PKN_k}$

Как будет далее показано в этом параграфе, решения PKN_k согласованы для всех k. Однако они не удовлетворяют свойствам обратной согласованности и подтверждения. Поэтому для характеризации этих решений единой системой аксиом, мы определим "k-модификации" этих аксиом, аналогично тому как "k-сбалансированность", обобщающая понятие сбалансированности, была определена в предыдущем параграфе. Будет показано, что для каждого k решение PKN_k удовлетворяет k-модифицированным аксиомам обратной согласованности и подтверждения.

Определение 5.1. Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ удовлетворяет свойству *k-обратной согласованности*, если для любой игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и $x \in X(N,v)$ из соотношений $x_K \in \sigma(K, v_K^x)$ для всех $K \subset N$ с $|K| = k$ следует $x \in \sigma(N,v)$.

Легко видеть, что обратная согласованности эквивалентна 2-обратной согласованности, а из k-обратной согласованности следует l-обратная согласованность для $l > k$. Это свойство не накладывает никаких условий на решения игр с числом игроков меньших или равным k.

Определение 5.2. Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ удовлетворяет свойству *k-подтверждения*, если для любых игры $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$,вектора $x \in \sigma(N,v)$ и коалиции $S \subset N, |S| \leq k$, $y_S \in \sigma(S, v^x)$, где $\langle S, v^x\rangle$–редуцированная игра на множество S относительно вектора выигрышей x, выполняется соотношение $(x_{N\setminus S}, y_S) \in \sigma(N,v)$.

Очевидно, из свойства l-подтверждения следует свойство k-подтверждения для $k < l$.

Из теоремы 4.1 легко следуют свойства согласованности и k-согласованности решений PNK_k :

Утверждение 5.1. *Решения PNK_k согласованы в классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ для любого $k \geq 2$.*

Доказательство. Пусть $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$– произвольная игра и $x \in PNK_k(N, v)$. Если $k \geq n = |N|$, то $x = PN(N, v)$, и согласованность решения PNK_k следует из согласованности пред n-ядра.

Рассмотрим случай $k > n$. По теореме 4.1 для каждого α наборы $\mathcal{B}_\alpha$ k-сбалансированы. Следовательно, наборы

$$\mathcal{B}_\alpha \cap T = \{S \subset T \,|\, S = S' \cap T, S' \in \mathcal{B}_\alpha\}$$

также k-сбалансированы для любой на любой коалиции $T \subset N$.

Для редуцированной игры (T, v_T^x) на множество игроков $T \subset N$ соответствующий набор коалиций $\mathcal{B}_\alpha$, обозначаемый как $\mathcal{B}_\alpha^T$, равен $\mathcal{B}_\alpha^T = \mathcal{B}_\alpha \cap T$. Из этого равенства и теоремы 4.1 следует соотношение $x_T \in PNK_k(T, v_T^x)$. □

Утверждение 5.2. *Для всех $k \geq 2$ решение PNK_k удовлетворяет l-обратной согласованности на классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ для $l \geq k$.*

Доказательство. Из определения 5.1 следует, что достаточно установить это свойство для игр с числом игроков $n > k$.

Пусть $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$, $|N| > k$, $x \in X(N, v)$, и $x_K = PNK_k(K, v_K^x) = PN(K, v_K^x)$ для всех коалиций $K \subset N, |K| = k$, где (K, v_K^x) – редуцированная игра на множество игроков K относительно x.

Тогда для таких коалиций K выполняется отношение

$$-e_{v_K^x}(x_K) \succ_{lexmin} -e_{v_K^x}(y_K) \tag{5.1}$$

для любого вектора выигрышей $y_K \in X(K, v_K^x)$. Из отношений (5.1) следуют отношения

$$-e_v(x) \succ_{lexmin} -e_v(x||y_K) \text{ для всех } K, |K| = k,$$

откуда, по определению, $x \in PNK_k(N, v)$. □

Утверждение 5.3. *Решение PKN_k обладает свойством k-подтверждения на классе $\mathcal{G}_\mathcal{N}$.*

Доказательство. Для игр $\langle N, v\rangle \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$ с числом игроков $|N| \leq k$ по определению 5.1 решения PKN_k одноточечны, а по Утверждению

5.1 они согласованы. Следовательно, для таких игр решение PKN_k обладает свойством k-подтверждения.

Пусть теперь $|N| > k$, и $x \in PKN_k(N, v)$. Рассмотрим редуцированную игру $\langle S, v^x \rangle$ на множество игроков S, $|S| \leq k$ относительно x. Тогда по свойству согласованности решения PKN_k выполняется соотношение $x_S \in PKN_k(S, v^x)$. Однако решение $PKN_k(S, v^x)$ одноточечно, поэтому $x_S = PKN_k(S, v^x)$, откуда и следует свойство k-подтверждения решения PKN_k. $\square$

Заметим, что свойства решений PKN_k для любого $k \geq 2$, описанные в Утверждениях 5.1-5.3, были определены и установлены для всех игр в классе $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$.

6. Пример

Для игр двух и трех лиц пред k-ядро совпадает с пред n-ядром. Следовательно, решения PKN_k также совпадают с этими решениями.

Для игр четырех лиц $|N| = 4$ решение $PKN_3(N, v) = PN(N, v)$. решение $PKN_4(N, v)$ состоит из всех векторов выигрышей, которые редуцируются на пред n-ядро во всех редуцированных играх трех лиц. так как в играх трех лиц пред n-ядро совпадает с пред k-ядром, получаем, что $PKN_4(N, v) = PK(N, v)$.

Открытым вопросом остается нахождение минимального n, для которого нашлась бы такая игра $\langle N, v \rangle$, $|N| = n$, для которой $PKN_k \neq PN(N, v), PK(N, v)$ для некоторого $2 < k < n$.

В этом параграфе мы покажем, что $n \leq 11$ путем построения примера игры 11 лиц, для которой для некоторых k решения PKN_k отличны и от пред k-ядра, и от пред n-ядра.

Рассмотрим игры $\Gamma_1 = \langle N_1, v_1 \rangle, \Gamma_2 = \langle N_2, v_2 \rangle$, где $|N_1| = 5, |N_2| = 6$. Для определения их зарактеристических функций v_1 и v_2 обозначим $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и $N_2 = \{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$, $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{4, 5\}$, $S_3 = \{1', 2', 3', 4'\}, S_4 = \{5', 6'\}$ В этих обозначениях характеристические функции v_1, v_2 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1(N_1) = v_2(N_2) = 6, & \\ v_1(i,j,k) = 3, &\quad \text{если } i,j \in S_1, k \in S_2, \\ v_2(i,j,k) = 3, &\quad \text{если } i,j \in S_3, k \in S_4, \\ v_1(S) = v_2(T) = 0 &\quad \text{для остальных } S \subset N_1, T \subset N_2. \end{aligned}$$

Игры Γ_1 и Γ_2 являются модификациями игры из известного примера в [5]. В игре Γ_1 игроки 1,2,3 и 4,5 симметричны, а в игре Γ_2 игроки $1', 2', 3', 4'$ и $5', 6'$ симметричны. Следовательно, нетрудно проверить, что пред k-ядра этих игр имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} PK(N_1, v_1) = \left\{t, t, t, 3 - \tfrac{3t}{2}, 3 - \tfrac{3t}{2}\right\}_{t \in [0, \frac{3}{2}]}, \\ PK(N_2, v_2) = \{\tau, \tau, \tau, \tau, 3 - 2\tau, 3 - 2\tau\}_{\tau \in [0, \frac{3}{2}]}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Если $x \in PK(N_1, v_1)$, то

$$\mathcal{S}_1(v_1, x) = \begin{cases} \{i,j,k\}_{i,j \in S_1, k \in S_2} & \text{для } t \le 3/2, \\ \{i,j,k\}_{i,j \in S_1, k \in S_2}, \{k\}, k \in S_2, & \text{для } t = 3/2. \end{cases} \tag{6.2}$$

Набор коалиций во второй строке равенств (6.2) сбалансирован, и вектор из пред n-ядра, соответствующий значению $t = \frac{3t}{2}$, равен пред n-ядру игры Γ_1. Набор коалиций в первой строке равенств (6.2) не является сбалансированным, но он 3-сбалансирован, поэтому по Теореме 4.1, $PKN_3(N_1, v_1) = PK(N_1, v_1)$, $PKN_4(N_1, v_1) = PN(N_1, v_1)$.

Аналогично, если $y \in PK(N_2, v_2)$, то

$$\mathcal{S}_1(v_2, y) = \{i,j,k\}_{i,j \in S_3, k \in S_4},$$

и этот набор сбалансирован.

Обозначим через $\mathcal{S}_2(v_2, y)$ набор коалиций из множества игроков N_2, на котором достигается второй по величине эксцесс для вектора y:

$$\mathcal{S}_2(v_2, y) = \arg \max_{S \notin \mathcal{S}_1(v_2, y)} e(v_2, y).$$

Тогда этот набор имеет следующий вид для разных значений t :

$$\mathcal{S}_2(v_2, y) = \begin{cases} \{i\},\ i \in S_3, & \text{если } t \in [0, 1), \\ \{k\},\ k \in S_4, & \text{если } t \in (1, \frac{3}{2}), \\ \{i\}, i \in S_3, \{k\}, k \in S_4, & \text{если } t = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Наборы в первых двух строках равенств (6.3) не являются сбалансированными, но они 5-сбалансированы; набор в третьей строке (6.3) сбалансирован, и вектор y, соответствующий значению $t = 1$, совпадает с пред n-ядром. Из Теоремы 4.1 следует
$PKN_3(N_2, v_2) = PKN_4(N_2, v_2) = PK(N, v)$,
$PKN_5(N_2, v_2) = PN(N_2, v_2)$.

Рассмотрим теперь сумму игр $\langle N, v\rangle = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $N = N_1 \cup N_2$, и если $Q = S \cup T, S \subset N_1, T \subset N_2$, то $v(Q) = v_1(S) + v_2(T)$.

Покажем, что для любого k

$$PNK_k(N, v) = PNK_k(N_1, v_1) \times PNK_k(N_2, v_2).$$

Для доказательства этого результата нам понадобится простое свойство пред k-ядра суммы игр.

Лемма 6.1. *Пусть $\langle N, v\rangle$– сумма двух игр:*

$$\langle N, v\rangle = \langle N_1, v_1\rangle + \langle N_2, v_2\rangle.$$

Тогда для любого $x \in PK(N, v)$ и любого числа α наборы коалиций

$$\{S \subsetneqq N_i, \mid e(S, v) \geq \alpha, \}, i = 1, 2$$

является пустыми или 2-сбалансированными.

Доказательство. Пусть $S = S_1 \cup S_2$ – произвольная коалиция, $S_1 \subset N_1, S_2 \subset N_2$. Тогда $e(S, x) = e(S_1, x) + e(S_2, x)$ и

$$e(S_1, x) \geq \alpha \implies e(S, x) \geq \alpha + e(S_2, x).$$

Пусть $i \in S_1$, $j \in N_1 \setminus S_1$. Так как $e(S, x) \leq s_{ij}(x) = \max\limits_{\substack{Q: Q \ni i \\ Q \not\ni j}} e(Q, x)$ и $x \in PK(N, v)$, найдется такая коалиция $T \subset N$, для которой $j \in T, i \notin T$, и $e(T, x) \geq e(S, x) \geq \alpha + e(S_2, x)$. Пусть $T = T_1 \cup T_2$, $T_i \subset N_i, i = 1, 2$. Тогда

$$e(T, x) = e(T_1, x) + e(T_2, x) \geq \alpha + e(S_2, x). \tag{6.4}$$

Заметим, что равенство (6.4) выполняется для любых коалиций $S_2 \subset N_2$, следовательно, и для $S_2 = T_2$, и из неравенства (6.4) следует $e(T_1, x) \geq \alpha$.

$\square$

Покажем теперь, что для выше приведенной игры $\langle N, v\rangle$ $x(N_1) = x(N_2) = 6$ для любого $x \in PK(N, v)$. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого вектора выигрышей $x \in PK(N, v)$ справедливо либо неравенство $x(N_1) > 6$, либо неравенство $x(N_1) < 6$. Рассмотрим оба случая.

1. $x(N_1) > 6$. Возьмем коалиции $T \in \arg\max_{S\subset N_1} e(S, x)$, $U \in \arg\max_{S\subset N_2} e(S, x)$. Покажем, что $e(T, x) \geq 0$. Предположим противное: $e(T, x) < 0$. Так как $e(N_2, x) > 0$, то и $e(U, x) > 0$. Для произвольных игроков $i \in T, j \in U$ рассмотрим коалицию $R:\ e(R, x) = s_{ij}(x)$, и пусть она имеет вид $R = R_1 \cup R_2, R_i \subset N_i, i = 1, 2$. Тогда

$$e(R, x) = e(R_1, x) + e(R_2, x) \leq e(T, x) + e(U, x) < e(U, x).$$

Полученное противоречие доказывает, что $e(T, x) \geq 0$.

Из симметрии игроков в коалициях S_1, S_2, S_3, S_4 следует, что любой вектор x из пред k-ядра $PK(N, v)$ можно представить в виде

$$x = (t, t, t, B - \frac{3t}{2}, B - \frac{3t}{2}, y, y, y, y, 6 - B - 2y, 6 - B - 2y) \qquad (6.5)$$

где $2B = x(N_1) = 12 - x(N_2)$. Проверим, какой может быть коалиция $T \subset N_1$, с максимальным неотрицательным эксцессом $e(T, x) \geq 0$. Так как $x \in PK(N, v)$, по симметрии игроков в коалициях S_1, S_2 для $t > 0$ неравенство $e(T, x) \geq 0$ возможно только для $T = \{4, 5\}, \{i, 4, 5\}$, $i \in S_1$. Игроки $4, 5$ принадлежат всем этим коалициям. Однако по Лемме 6.1 найдется такая коалиция $Q \subset N_1, Q \not\ni 4$, или $Q \not\ni 5$, что $e(Q, x) = e(T, x)$.

Если $t = 0$, то $e(T, x) = 0$, и $e(S, x) = 0 \implies S \subset S_1$. Опять по Лемме 6.1 этот случай невозможен.

Рассмотрим случай $t > 0$. Аналогично выше приведенным рассуждениям мы получаем, что коалиция T может иметь вид только $T = \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, k\}$, где $k \in S_2$, для того чтобы быть кандидатом на коалицию с максимальным эксцессом.

Однако, так как игроки $1, 2, 3$ принадлежат всем таким коалициям, этот случай также невозможен.

2. $x(N_1) < 6$. Тогда $x(N_2) >$, и $e(N_2, x) < 0$. Аналогично случаю 1 мы получаем, что $e(U, x) > 0$ и $B < 3$ в представлении (6.5). В этом случае $e(\{i, j, k\}, x) = B - 3 < 0$ для $i, j \in S_3, k \in S_4$, откуда $\{i, j, k\} \neq$

U. Таким образом, если $y \geq 0$, то $U = S_4$, а если $y < 0$, то $U = S_3$ единственные возможные кандидаты на коалиции с максимальным эксцессом. Однако по Лемме 6.1 оба эти случая невозможны.

Таким образом, мы доказали равенства $x(N_1) = x(N_2) = 6$, и для любой коалиции $S \subset N$, $S = S_1 \cup S_2, S_i \subset N_i, i = 1, 2$ справедливо равенство

$$e_v(S, x) = e_{v_1}(S_1, x) + e_{v_2}(S_2, x),$$

где через $e_{v_i}(\cdot, \cdot), i = 1, 2$ обозначены эксцессы в играх $\langle N_1, v_1\rangle, \langle N_2, v_2\rangle$. Следовательно, из представления 6.1 мы получаем равенства

$$PK(N, v) = PK(N_1, v_1) \times PK(N_2, v_2) =$$

$$\left\{t, t, t, 3 - \frac{3t}{2}, 3 - \frac{3t}{2}, y, y, y, y, 3 - 2y, 3 - 2y\right\}_{t \in [0, \frac{3}{2}], y \in [0, \frac{3}{2}]},$$

из которых следует соотношение $PK(N, v) \subset C(N, v)$ где $C(N, v)$ – с-ядро игры $\langle N, v\rangle$. Следовательно, если $e(S, x) \geq \alpha$, для некоторой коалиции $S \subset N$, то $\alpha \leq 0$ и

$$S \cap N_1 \neq \emptyset, S \cap N_2 \neq \emptyset \implies e(S \cap N_1) \geq \alpha, e(S \cap N_2) \geq \alpha.$$

Из этого соотношения мы можем заключить, что k-сбалансированность наборов $\mathcal{B}_\alpha$ для всех $\alpha \leq 0$ эквивалентна k-сбалансированности наборов $\mathcal{B}^i_\alpha$ для всех $\alpha \leq 0$, где $\mathcal{B}^i_\alpha = \{S \cap N_i, \mid S \in \mathcal{B}_\alpha\}$.

Теперь с помощью теоремы 4.1 мы получаем равенства $PNK_k(N, v) = PNK_k(N_1, v_1) \times PNK_k(N_2, v_2)$ для всех $k = 2, 3, ...$ Итак, для игры-суммы мы получаем следующие решения:

$$PN(N, v) = PNK_2(N, v) = PNK_3(N, v) =$$

$$\left\{t, t, t, 3 - \frac{3x}{2}, 3 - \frac{3x}{2}, y, y, y, y, 3 - 2y, 3 - 2y\right\}_{t \in [0, \frac{3}{2}], y \in [0, \frac{3}{2}]}$$

$$PNK_4(N, v) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, y, y, y, y, 3 - 2y, 3 - 2y\right\}_{y \in [0, \frac{3}{2}]}$$

$$PNK_5(N, v) = PN(N, v) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1, 1, 1\right\}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев А. И. *Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений* // Математические методы в социальных науках. Под ред. Н. Н. Воробьева. 1975. №6. Вильнюс: Институт физики и математики АН Литовской ССР. С. 94-151.

2. Algaba E., Bilbao J. M., Borm P., López J. J. *The Myerson Value for Union Stable Structure* // Mathematical Methods of Operations Research. 2001. V. 54. P. 359-371.

3. Algaba E., Bilbao J. M., van den Brink R., Jiménez-Losada A. *An axiomatizations of the Banzhaf value for cooperative games on antimatroids* // Mathematical Methods of Operations Research. 2004. V. 59. P. 147-166.

4. Borm P., Owen G., Tijs S. *On the position value for communication situations* // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 1992. V. 5. P. 305-320.

5. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. P. 223-259.

6. Kohlberg E. *On the nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1971. V. 20. P. 62-66.

7. Maschler M., Peleg B., Shapley L. S. *Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts* // Mathematics of Operations Research. 1979. V. 4. P. 303-338.

8. Meessen R. *Communication games.* Master's thesis. Department of Mathematics. University of Nijmegen, The Netherlands (in Dutch), 1988.

9. Myerson R. B. *Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. 1977. V. 2. P. 225-229.

10. Myerson R. B. *Conference structures and fair allocation rules* // International Journal of Game Theory. 1980. V. 9. P. 169-182.

11. Orshan G. *The prenucleolus and the reduced game property:equal treatment replaces anonymity* // International Journal of Game Theory. 1993. V. 22. P. 241-248.

12. Orshan G., Sudhölter P. *Reconfirming the prenucleolus* // Mathematics of Operations Research. 2003. V. 28. P. 283-293.

13. Owen G. *Values of games with a priori unions* // In: R. Henn, O. Moeschlin, eds., Mathematical economics and game theory. Essays in honor of Oskar Morgenstern (Lecture Notes Econ. and Math.Syst. 1977. V. 141. Berlin: Springer. P. 76-88.

14. Peleg B. *On the reduced game property and its converse* // Internat. J. Game Theory. 1987. V. 15. P. 187-200, *A correction* // Internat. J. Game Theory. 1987. V. 16. P. 209.

15. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163-1170.

BETWEEN THE PREKERNEL AND THE PRENUCLEOLUS

Ilya Katsev, post-graduate student(economics-hse@yandex.ru).
Elena Yanovskaya, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, St.Petersburg, Doctor of Science, professor (eyanov@emi.nw.ru).

Abstract: A collection of TU games solutions intermediate between the prekernel and the prenucleolus is considered. All these solutions are Davis-Maschler consistent, symmetric and covariant. Each solution from the collection is parametrized by a positive integer k such that for all games with the number of players not greater than k, the solution for parameter k coincides with the prenucleolus, and for games with more than k players it is maximal, i.e. it satisfies the "k-converse consistency". The properties of solutions are described and their characterization in terms of balancedness is given.

Keywords: TU game, prekernel, prenucleolus, consistency.