Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.2, с. 66-81

УДК 519.837.2 + 519.834
ББК 22.18

МНОГОШАГОВЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Л. А. Петросян
А. А. Седаков
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: spbuoasis7@peterlink.ru, formail@list.ru

В статье рассматриваются многошаговые сетевые игры с полной информацией. В каждый момент игры задается текущая сетевая структура, связывающая игроков. Предполагается, что любое ребро сети имеет полезность (полезность одного игрока от связи со вторым), и игроки вправе изменять структуру сети на каждом шаге. Предлагается способ нахождения оптимального поведения игроков в играх такого типа.

Ключевые слова: сеть, сетевые игры, функция полезности, характеристическая функция, вектор Шепли, равновесие по Нэшу.

1. Построение многошаговой сетевой игры с полной информацией

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков. Построим дерево игры — конечный древовидный граф $K = (X, F)$ с начальной вершиной x_0 [2, 6]. Множество X есть множество вершин графа K, а $F : X \mapsto X$ есть точечно-множественное отображение, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие множество F_x вершин графа, следующих непосредственно за вершиной x. Вершины x древовидного графа K, для которых $F_x = \emptyset$ будем называть окончательными (терминальными). Множество X вершин древовидного графа K представим стандартным образом в виде объединения $n+1$ непересекающихся множеств: $X = P_1 \cup \ldots \cup P_n \cup P_{n+1}$, где множество P_i — множество личных позиций игрока i, $i \in N$, а множество P_{n+1} — множество окончательных позиций древовидного графа K. В дальнейшем через $i(x)$ будем обозначать игрока, который делает ход в вершине x в игре на древовидном графе K.

Опишем пошаговое развитие игрового процесса.

1.1. Построение древовидного графа многошаговой сетевой игры

Начальный шаг. В начальной вершине x_0 древовидного графа K определена сеть $G_{x_0} = (N, \theta(x_0))$. Через g^{x_0} обозначим множество ребер сети G_{x_0}. Множество узлов N совпадает со множеством игроков (узел сети отождествляем с игроком), и $\theta(x_0) : g^{x_0} \mapsto R$ — числовая функция, которую мы будем интерпретировать как *функцию полезности.*

Шаг 1. Игрок $i(x_0)$ имеет следующие n альтернатив в вершине x_0:
- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{11} \in F_{x_0}$;
- разорвать связь с одним игроком $j \in N$, $j \neq i(x_0)$, если ребро $(i(x_0), j) \in g^{x_0}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{1j} \in F_{x_0}$;
- предложить игроку k, $k \neq i(x_0)$ установить связь $(i(x_0), k)$, если ребро $(i(x_0), k) \notin g^{x_0}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{1k} \in F_{x_0}$.

Таким образом каждая из n вершин y_{11}, $\{y_{1j}\}_j$, $\{y_{1k}\}_k$ принадлежит множеству F_{x_0}. В зависимости от выбора игроком $i(x_0)$ альтернативы, в вершинах множества F_{x_0} начальная сеть изменяется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ll}
g^{y_{11}} = g^{x_0}, & \text{если игрок } i(x_0) \text{ не предпринимает} \\
 & \text{никаких действий;} \\
g^{y_{1j}} = g^{x_0} \setminus (i(x_0), j), & \text{если игрок } i(x_0) \text{ разрывает связь} \\
 & \text{с игроком } j; \\
g^{y_{1k}} = g^{x_0} \cup (i(x_0), k), & \text{если игрок } i(x_0) \text{ устанавливает связь} \\
 & \text{с игроком } k.
\end{array}
$$

Следовательно, для вершины $x_1 \in F_{x_0} = \{y_{11}, \{y_{1j}\}_j, \{y_{1k}\}_k\}$ множество ребер g^{x_1} однозначно определено. Если $x_1 \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению шага 2 для каждой вершины $x_1 \in F_{x_0}$. Этот шаг полностью аналогичен шагу 1, поэтому опуская изложение второго шага игры, рассмотрим некоторый шаг t.

Шаг t $(1 < t \leqslant l)$. Предположим, мы построили древовидный граф до вершин, которые можно достичь из начальной вершины x_0 не более чем за $t-1$ шагов. Пусть $\{x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}\}$ — некоторая траектория из x_0 построенного древовидного графа в вершину x_{t-1}, в которую можно попасть из x_0 за $t-1$ шаг. По построению во всех позициях $x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}$ соответствующие множества ребер g^{x_0}, $g^{x_1}, \ldots$, $g^{x_{t-1}}$ однозначно определены. Определим множество g^{x_t}.

В вершине x_{t-1} у игрока $i(x_{t-1})$ имеются следующие n альтернатив:

- не предпринимать никаких действий, при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{t1} \in F_{x_{t-1}}$;
- разорвать связь с одним игроком $j \in N$, $j \neq i(x_{t-1})$, если ребро $(i(x_{t-1}), j) \in g^{x_{t-1}}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{tj} \in F_{x_{t-1}}$;
- предложить игроку k, $k \neq i(x_{t-1})$ установить связь $(i(x_{t-1}), k)$, если ребро $(i(x_{t-1}), k) \notin g^{x_{t-1}}$; при этом игровой процесс переходит в вершину $y_{tk} \in F_{x_{t-1}}$.

Таким образом каждая из n вершин y_{t1}, $\{y_{tj}\}_j$, $\{y_{tk}\}_k$ принадлежит множеству $F_{x_{t-1}}$. В зависимости от выбора игроком $i(x_{t-1})$ альтернативы, в вершинах множества $F_{x_{t-1}}$ текущая сеть изменяется, соответственно множество ребер новой сети имеет следующий вид:

$g^{y_{t1}} = g^{x_{t-1}}$,	если игрок $i(x_{t-1})$ не предпринимает никаких действий;
$g^{y_{tj}} = g^{x_{t-1}} \setminus (i(x_{t-1}), j)$,	если игрок $i(x_{t-1})$ разрывает связь с игроком j;
$g^{y_{tk}} = g^{x_{t-1}} \cup (i(x_{t-1}), k)$,	если игрок $i(x_{t-1})$ устанавливает связь с игроком k.

Следовательно, для вершины $x_t \in F_{x_{t-1}} = \{y_{t1}, \{y_{tj}\}_j, \{y_{tk}\}_k\}$ множество ребер g^{x_t} однозначно определено. Если $x_t \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению очередного шага построения древовидного графа для каждой вершины $x_t \in F_{x_{t-1}}$. Если в вершине x_t игровой процесс не заканчивается, т.е. если $x_t \notin P_{n+1}$, то мы переходим к рассмотрению следующего шага игры, и построение игры на древовидном графе продолжается аналогичным образом. При $t = l$ построение древовидного графа K закончено.

1.2. Определение индивидуальных выплат игрокам

Определение 1.1. *Пусть $S \subseteq N$. Вещественную функцию $v : X \times 2^N \mapsto R$, заданную на декартовом произведении множества X и множества всех подмножеств множества N и определенную по правилу*

$$v(y, S) = \sum_{(i,j) \in g^y:\ i,j \in S} \theta_{ij}(y), \tag{1.1}$$

где $y \in X$, будем называть характеристической функцией. Здесь $\theta_{ij}(y)$ — значение функции полезности $\theta(y)$, определенной сетевой игрой $G_y = (N, \theta(y))$, которое представляет собой полезность игрока i от связи с игроком j в вершине y.

Задав конечное множество игроков N и функцию $v(y, \cdot)$, определенную по правилу (1.1), можно построить игру в форме характеристической функции, в которой для каждого игрока определены лишь полезности связей с другими игроками. Определим выплаты игрокам в сети. С этой целью выбираем некоторый принцип оптимальности теории кооперативных игр. Для простоты в качестве такого принципа оптимальности выберем вектор Шепли [9], и с его помощью определим дележ $\gamma(y) = (\gamma_1(y), \ldots, \gamma_n(y))$, компоненты которого вычисляются по формуле:

$$\gamma_k(y) = \sum_{\{S\colon S \subseteq N,\, k \in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[v(y,S) - v(y, S \setminus k) \right]. \qquad (1.2)$$

Здесь s — число элементов множества S, $v(y,S)$ — характеристическая функция, определенная по правилу (1.1).

Распишем более подробно выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (1.2). Подставив значения характеристической функции $v(y,\cdot)$ из (1.1) для любого $y \in X$ и $k \in N$, имеем:

$$\begin{aligned} v(y,S) - v(y, S \setminus k) &= \sum_{(i,j) \in g^y\colon\ i,j \in S} \theta_{ij}(y) - \sum_{(i,j) \in g^y\colon\ i,j \in S \setminus k} \theta_{ij}(y) = \\ &= \sum_{(i,k) \in g^y\colon\ i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum_{(k,j) \in g^y\colon\ j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y). \end{aligned}$$

С учетом полученного компоненты вектора Шепли записываются в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_k(y) = \sum_{\{S\colon S \subseteq N,\, k \in S\}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \Bigg[& \sum_{(i,k) \in g^y\colon\ i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \\ & + \sum_{(k,j) \in g^y\colon\ j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y) \Bigg], \quad (1.3) \end{aligned}$$

где $y \in X$, $k \in N$.

Величина $\sum\limits_{(i,k) \in g^y\colon\ i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y) + \sum\limits_{(k,j) \in g^y\colon\ j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y)$ представляет собой вклад игрока k, если тот, присоединившись к коалиции $S \setminus k$, приведет к образованию коалиции S. Здесь первое слагаемое $\sum\limits_{(i,k) \in g^y\colon\ i \in S \setminus k} \theta_{ik}(y)$ представляет собой дополнительную полезность игроков коалиции $S \setminus k$, внесенную игроком k. Второе слагаемое $\sum\limits_{(k,j) \in g^y\colon\ j \in S \setminus k} \theta_{kj}(y)$ представляет собой дополнительную полезность игрока k, получаемую при присоединении к игрокам коалиции $S \setminus k$.

Пусть в игре реализовался путь $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$. Тогда выигрыш игрока $i \in N$ вдоль этого пути определяется следующим образом:

$$\sum_{x \in \{x_0, \ldots, x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N,$$

где $\gamma_i(x)$ представляет собой i-ю компоненту вектора Шепли, вычисленного по правилу (1.3) в сетевой игре $G_x = (N, \theta(x))$.

1.3. Формальное определение многошаговой сетевой игры с полной информацией

Определение 1.2. *Многошаговой сетевой игрой n лиц с полной информацией называется древовидный граф K, на котором:*

- *задано разбиение множества вершин X на $n+1$ множество P_1,*
  $P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$, где P_i, $i \in N$ есть множество личных позиций игрока i, множество $P_{n+1} = \{x : F_x = \emptyset\}$ есть множество окончательных вершин;

- *в каждой вершине $x \in X$ однозначным образом задана сеть $G_x = (N, \theta(x))$: множество узлов сети N (множество игроков) и функция полезности $\theta : g^x \mapsto R$.*

Определение 1.3. *Стратегией $u_i(\cdot)$ игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждой вершине $x \in P_i$ ставит в соответствие вершину $y \in F_x$ либо вероятностное распределение p^x на множестве F_x*

$$p^x = \{p^x(y)\},\ y \in F_x,\ p^x(y) \geqslant 0,\ \sum_{y \in F_x} p^x(y) = 1.$$

Для каждого набора стратегий (ситуации) $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ в игре на древовидном графе K определим функции выигрыша игроков следующим образом. Пусть в ситуации $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ реализовался некоторый путь $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$ из начальной вершины x_0 в окончательную x_l. Тогда функция выигрыша игрока i:

$$H_i(u(\cdot)) = \sum_{x \in \{x_0, \ldots, x_l\}} \gamma_i(x), \quad i \in N.$$

Здесь $\gamma_i(x)$ есть выплата игроку i, которая получена как i-ая компонента вектора Шепли, рассчитанного по характеристической функции $v(x, \cdot)$ для сетевой игры $G_x = (N, \theta(x))$, заданной в вершине x (см. (1.3)).

Определение 1.4. *Набор стратегий* $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \ldots, u_i^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ *называется равновесием по Нэшу в многошаговой сетевой игре на древовидном графе* K *с начальной вершиной* x_0, *если*

$$H_i(u^*(\cdot)||u_i(\cdot)) \leqslant H_i(u^*(\cdot))$$

для любых $i \in N$ *и любых допустимых* u_i.

2. Построение ситуации равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре

Предположим, что длина игры равна $l+1$. Для определения оптимального поведения игроков будем использовать концепцию абсолютного равновесия в конечношаговой игре с полной информацией.

Введем функцию Беллмана [1, 5] φ_i^t как выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу в игре за $l-t$ шагов (положим $\varphi_i^{l+1} = 0$). Значения функции Беллмана φ во всех вершинах древовидного графа K определяются стандартным образом методом обратной индукции (решая уравнение Беллмана от окончательных вершин графа K к начальной при граничном условии).

В данном случае для любой окончательной вершины $x_l \in P_{n+1}$ граничное условие выглядит следующим образом:

$$\varphi_i^l(x_l) = \gamma_i(x_l), \quad i \in N.$$

В промежуточной вершине x_t древовидного графа K функция Беллмана удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} \varphi_{i(x_t)}^t(x_t) &= \max_{y \in F_{x_t}} \Big(\gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)\Big) = \\ &= \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \max_{y \in F_{x_t}} \Big(\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)\Big) = \\ &= \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\bar{y}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для игрока $j \neq i(x_t)$ значения функции Беллмана определяются по правилу:

$$\varphi_j^t(x_t) = \gamma_j(x_t) + \varphi_j^{t+1}(\bar{y}). \tag{2.2}$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения φ_i^t, $t = 0, \ldots, l$, $i \in N$. При $t = 0$ уравнение решено. Вектор $(\varphi_1^0(x_0), \ldots, \varphi_n^0(x_0))$ назовем *значением многошаговой сетевой игры с полной информацией.*

Вместе с нахождением значения многошаговой сетевой игры определяются и оптимальные стратегии игроков, которые по построению образуют ситуацию абсолютного равновесия в игре: в каждой вершине $x \in X$ древовидного графа K игрок $i(x)$ выбирает вершину $y \in F_x$ согласно правилу (2.1). В ситуации абсолютного равновесия реализуется некоторый путь в графе из начальной вершины в окончательную. Такой путь будем называть *оптимальным путем* в многошаговой сетевой игре.

На основании приведенного алгоритма имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Построенная ситуация $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$, в которой для каждой вершины $x \notin P_{n+1}$, стратегия $u_i^*(x)$ игрока i определяется по правилу*

$$u_i^*(x) = \bar{y},$$

где $\bar{y}$ находится из соотношения (2.1), образует ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе K.

Однако, не всегда гарантируется единственность абсолютного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре.

Замечание 2.1. Пусть наряду с вершиной $\bar{y} \in F_{x_t}$, доставляющей максимальное значение функции $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$ в (2.1), вершина $\tilde{y} \in F_{x_t}$ также является точкой максимума этой функции. Тогда с очевидностью выполняется следующее равенство:

$$\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\bar{y}) = \varphi_{i(x_t)}^{t+1}(\tilde{y}),$$

которое, в свою очередь, приводит к одному и тому же значению $\varphi_{i(x_t)}^{t}(x_t)$. Следовательно, игроку, принимающему решение в вершине x_t (игроку $i(x_t)$), можно выбрать любую вершину $y \in F_{x_t}$, доставляющую максимум функции $\varphi_{i(x_t)}^{t+1}(y)$ в (2.1).

В тех же вершинах $\bar{y}$ и $\tilde{y}$ для отличных от $i(x_t)$ игроков $j \in N$, $j \neq i(x_t)$ в общем случае справедливо следующее соотношение:

$$\varphi_j^{t+1}(\bar{y}) \neq \varphi_j^{t+1}(\tilde{y}).$$

Данное обстоятельство означает, что выбор игроком $i(x_t)$ вершины из множества

$$I(x_t) = \arg\max_{y \in F_{x_t}} \varphi^{t+1}_{i(x_t)}(y) \tag{2.3}$$

влияет на решения последующих игроков (в силу различия значений функции Беллмана этих игроков в точках множества $I(x_t)$). Таким образом в общем случае в многошаговой сетевой игре имеет место неединственность оптимального пути с различными значениями функции выигрыша.

Случай неединственности оптимального пути легко обходится введением понятия индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой игре с полной информацией [8]. Поскольку в общем случае $|I(x_t)| \geqslant 1$, предполагается, что игроку $i(x_t)$ безразличен выбор вершины из множества $I(x_t)$. Предпишем $i(x_t)$ выбирать эти вершины с одинаковыми вероятностями, т. е. $p^{x_t}(y) = 1/|I(x_t)|$, для любого $y \in I(x_t)$. Тогда в промежуточной вершине x_t древовидного графа K функция φ^t_i удовлетворяет аналогичному (2.1) рекуррентному соотношению:

$$\varphi^t_{i(x_t)}(x_t) = \gamma_{i(x_t)}(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi^{t+1}_{i(x_t)}(y). \tag{2.4}$$

Для игрока $j \neq i(x_t)$ значения функции φ определяются по правилу:

$$\varphi^t_j(x_t) = \gamma_j(x_t) + \frac{1}{|I(x_t)|} \cdot \sum_{y \in I(x_t)} \varphi^{t+1}_j(y). \tag{2.5}$$

Решая уравнение Беллмана, находим значения φ^t_i, $t = 0, \ldots, l$, $i \in N$. При $t = 0$ уравнение решено. Вектор $(\varphi^0_1(x_0), \ldots, \varphi^0_n(x_0))$ также назовем *значением многошаговой сетевой игры с полной информацией.*

По аналогии с теоремой 2.1 справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Построенная ситуация $u^{IE}(\cdot) = (u^{IE}_1(\cdot), \ldots, u^{IE}_n(\cdot))$, в которой для каждой вершины $x \notin P_{n+1}$, стратегия $u^{IE}_i(x)$ игрока i определяется по правилу*

$$u^{IE}_i(x) = \{p^x(y)\}, y \in I(x), p^x(y) = \frac{1}{|I(x)|},$$

где вершины y находятся с использованием соотношений (2.3)–(2.4), образует ситуацию индифферентного равновесия по Нэшу в многошаговой сетевой игре, заданной на древовидном графе K.

3. Численный пример многошаговой сетевой игры с полной информацией

Для иллюстрации алгоритма построения решения сетевой игры приведем контрольный пример.

Рассмотрим трехшаговую сетевую игру. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ есть множество игроков. Построим древовидный граф K с начальной вершиной в x_0.

Пусть в x_0 задана сеть, представленная на рис. 1.

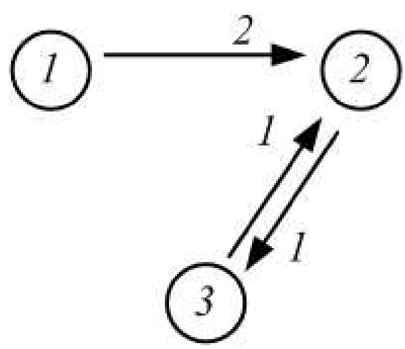

Рисунок 1. Сеть G_{x_0}

Множество ребер $g^{x_0} = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$. Зададим функцию полезности $\theta(x_0)$ в виде матрицы $\Theta(x_0)$:

$$\Theta(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в начальной вершине ходит игрок 1, у которого есть три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_1), (2) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину x_2), (3) наладить связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину x_3). В зависимости от выбора альтернативы игроком 1 имеем:

$g^{x_1} = g^{x_0}$, если игрок 1 выбирает первую альтернативу в вершине x_0;
$g^{x_2} = g^{x_0} \setminus (1,2)$, если игрок 1 выбирает вторую альтернативу в вершине x_0;
$g^{x_3} = g^{x_0} \cup (1,3)$, если игрок 1 выбирает третью альтернативу в вершине x_0.

Пусть функции полезностей $\theta(x_1)$, $\theta(x_2)$ и $\theta(x_3)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_2) = \Theta(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_1 и x_3 являются окончательными, а вершина x_2 является личной позицией игрока 2. В x_2 второй игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_4), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину x_5), (3) разорвать связь с игроком 3 (при этом игра переходит в вершину x_6). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$g^{x_4} = g^{x_2}$, если игрок 2 выбирает первую альтернативу в вершине x_2;
$g^{x_5} = g^{x_2} \cup (2,1)$, если игрок 2 выбирает вторую альтернативу в вершине x_2;

$g^{x_6} = g^{x_2} \setminus (2,3)$, если игрок 2 выбирает третью альтернативу в вершине x_2.

Пусть функции полезностей $\theta(x_4)$, $\theta(x_5)$ и $\theta(x_6)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_4) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Theta(x_5) = \Theta(x_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_4 и x_6 являются окончательными, а вершина x_5 является личной позицией игрока 3. В x_5 третий игрок имеет три альтернативы: (1) не предпринимать никаких действий (при этом игра переходит в вершину x_7), (2) наладить связь с игроком 1 (при этом игра переходит в вершину x_8), (3) разорвать связь с игроком 2 (при этом игра переходит в вершину x_9). В зависимости от выбора альтернативы игроком 2 имеем:

$g^{x_7} = g^{x_5}$,	если игрок 3 выбирает первую альтернативу в вершине x_5;
$g^{x_8} = g^{x_5} \cup (3,1)$,	если игрок 3 выбирает вторую альтернативу в вершине x_5;
$g^{x_9} = g^{x_5} \setminus (3,2)$,	если игрок 3 выбирает третью альтернативу в вершине x_5.

Пусть функции полезностей $\theta(x_7)$, $\theta(x_8)$ и $\theta(x_9)$ заданы в виде следующих матриц:

$$\Theta(x_7) = \Theta(x_8) = \Theta(x_9) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что вершины x_7, x_8, x_9 являются окончательными вершинами. Тогда множества личных позиций игроков P_1, P_2, P_3 и множество окончательных вершин P_4 имеют вид: $P_1 = \{x_0\}, P_2 = \{x_2\}, P_3 = \{x_5\}, P_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, а древовидный граф K представлен на рис. 2.

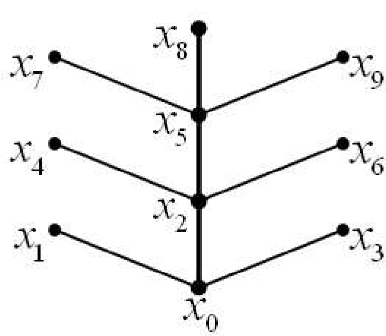

Рисунок 2. Древовидный граф K

Для начала вычислим индивидуальные выплаты игрокам в каждой вершине графа K. Рассмотрим вершину x_0. Построим характеристическую функцию по правилу (1.1):

$$
\begin{aligned}
&v(x_0, \{1, 2, 3\}) = 4,\\
&v(x_0, \{1, 2\}) = 2,\\
&v(x_0, \{1, 3\}) = 0,\\
&v(x_0, \{2, 3\}) = 2,\\
&v(x_0, \{1\}) = v(x_0, \{2\}) = v(x_0, \{3\}) = 0.
\end{aligned}
$$

Индивидуальные выплаты игрокам в x_0 вычисляются в соответствии с вектором Шепли по правилу (1.3). Таким образом получаем вектор:

$$\gamma(x_0) = (1, 2, 1).$$

Аналогичным образом вычисляются индивидуальные выплаты игрокам в остальных вершинах древовидного графа K. Приведем их окончательные значения:

$$
\begin{aligned}
&\gamma(x_1) = (-1.5, 0, 1.5), && \gamma(x_6) = (0, 2, 2),\\
&\gamma(x_2) = (0, 1, 1), && \gamma(x_7) = (1, 2.5, 1.5),\\
&\gamma(x_3) = (0.5, 2.5, 0), && \gamma(x_8) = (3.5, 2.5, 4),\\
&\gamma(x_4) = (0, 1.5, 1.5), && \gamma(x_9) = (1, 2, 1).\\
&\gamma(x_5) = (-0.5, 2.5, 3), &&
\end{aligned}
$$

После определения выплат игрокам в каждой вершине графа K построение ситуации абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре не представляет особых трудностей. Данная процедура полностью аналогична задаче отыскания ситуации абсолютного равновесия в многошаговой игре с полной информацией с той лишь разницей, что в классической постановке выигрыши игроков заданы в окончательных вершинах графа игры, а в промежуточных полагаются равными нулю. Искомая ситуация абсолютного равновесия в многошаговой сетевой игре находится с использованием соотношений (2.1)–(2.2).

Оптимальные стратегии игроков следующие:

$$u_1^*(x_0) = x_2, \quad u_2^*(x_2) = x_5, \quad u_3^*(x_5) = x_8.$$

В ситуации абсолютного равновесия (u_1^*, u_2^*, u_3^*) реализуется оптимальный путь $\{x_0, x_2, x_5, x_8\}$ из начальной вершины x_0 в окончательную x_8. Вдоль оптимального пути игра развивается следующим образом.

В начальный момент задана сеть G_{x_0}, указанная на рис. 1. Далее игрок 1 разрывает связь со вторым игроком, что приводит к сети G_{x_2}, показанной на рис. 3. После этого делает ход игрок 2, который

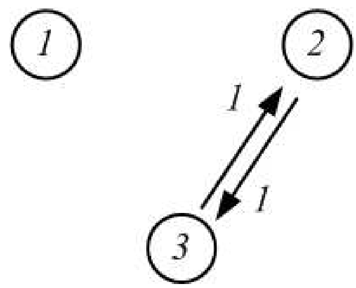

Рисунок 3. Сеть G_{x_2}

за свой ход устанавливает связь с игроков 1, что приводит к сети G_{x_5}, показанной на рис. 4. И, наконец, своим ходом игрок 3 заканчивает игру, установив связь с игроком 1, что приводит к сети G_{x_8}, показанной на рис. 5.

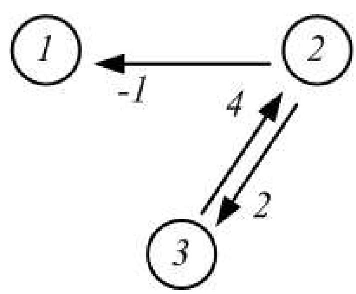

Рисунок 4. Сеть G_{x_5}

Значение многошаговой сетевой игры равно $(4, 8, 9)$, а пошаговые индивидуальные выплаты следующие: $\gamma(x_0) = (1, 2, 1)$, $\gamma(x_2) = (0, 1, 1)$, $\gamma(x_5) = (-0.5, 2.5, 3)$, $\gamma(x_8) = (3.5, 2.5, 4)$.

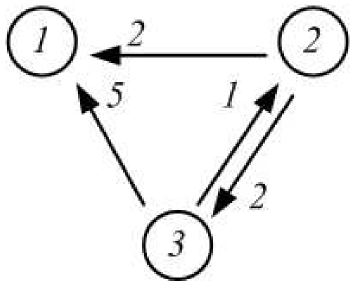

Рисунок 5. Сеть G_{x_8}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. *Динамическое программирование.* М, 1960.

2. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость.* СПб, 2000.

3. Петросян Л.А., Седаков А.А., Сюрин А.Н. *Многошаговые игры с коалиционной структурой* // Вестник СПбГУ. 2006. Т. 10. № 3. С. 97-110.

4. Adjeroh D., Kandaswamy V. *Game-Theoretic Analysis of Network Community Structure* // International Journal of Computational Intelligence Res. 2007. V. 3. № 4. P. 313-325.

5. Bellman R.E. *On the Theory of Dynamic Programming*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952.

6. Kuhn H.W. *Extensive Games and Problem Information* // Ann. Math Studies. 1953. V. 28. P. 193-216.

7. Nash J. *Non-cooperative Games* // Ann. of Math. 1951. V. 54. P. 286-295.

8. Petrosjan L.A., Mamkina S.I. *Value for the Games with Changing Coalitional Structure* // Games Theory and Applications. 2005. V. 10. P. 141-152.

9. Shapley L.S. *A Value for n-Person Games.* Contributions to the Theory of Games II, Princeton: Princeton University Press. 1953. P. 307-317.

10. Vives X. *Nash equilibrium with strategic complementarities* // Journal of Mathematical Economics. 1990. V. 19. № 3. P. 305-321.

11. Vives X. *Strategic Complementarities in Multi-Stage Games.* CEPR Discussion Papers 5583. C.E.P.R. Discussion Papers, 2006.

MULTISTAGE NETWORKING GAMES WITH FULL INFORMATION

Leon Petrosjan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Doctor of Sc., professor (spbuoasis7@peterlink.ru).
Artem Sedakov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, Cand. Sc. (formail@list.ru).

Abstract: Multistage networking games with full information are considered. The network structure which connects the players is defined at every time moment. We assume that each verge has a utility (the player's profit form the connection with another player), and players have a right to change network structure at every stage. The approach to define optimal players' behavior is proposed.

Keywords: network, networking games, utility, Shapley value, Nash equilibrium.