Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.3, с. 16-30

УДК 519.83
ББК 22.18

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНЫХ ПОМЕХ

Андрей Ю. Гарнаев
Антон О. Торицын
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: agarnaev@rambler.ru, toxru@inbox.ru

В данной работе рассматриваются задача справедливого распределения ресурсов базовой станцией между пользователями при наличии активных помех с учетом стоимости. Задача моделируется неантагонистической игрой между базовой станцией и источником активных помех. В качестве выигрыша базовой станции взят обобщенный критерий α-полезности (включающий в себя как частный случай критерий Шенона) минус стоимость сигнала. Выигрыш активного источника помех равен сумме обобщенного критерия α-полезности и стоимости установки помех взятой с обратным знаком. Доказана единственность равновесия по Нэшу в данной задаче и, кроме того, само решение представлено в явном виде. Проведено численное моделирование равновесных стратегий.

Ключевые слова: справедливое распределение ресурсов, беспроводные сети, помехи, игра с ненулевой суммой.

1. Введение

Аспект справедливости распределения ресурсов играет центральную роль в сетевых технологиях. В стандарте ATM (Asynchronous Transfer Mode) [6] на максимальной справедливости и ее взвешенных вариантах основывается распределение имеющейся пропускной способности по каналам с использованием ABR (Available Bit Rate) сервиса наилучшей попытки. Пропорциональная справедливость была введена в [3, 4] и реализована, например, в беспроводной связи компанией Qualcomm в технологии HDR (High Data Rate) для доступа пользователей в Интернет и электронным почтовым ящикам с помощью мобильных телефонов. Унифицированная математическая формулировка для справедливого распределения ресурсов была предложена в [5]. В данной работе используется концепция α-справедливости для распределения мощности между пользователями при наличии пользователя, создающего помехи. Целью базовой станции является максимизация функции α-справедливости, построенной на основе функции SINR со смещением, а целью пользователя, устанавливающего помехи, наоборот, является минимизация данной функции. При этом как на базовую станцию, так и на пользователя, создающего помехи, накладывается стоимость за использование мощности. Поэтому данная проблема может быть рассмотрена как игра с ненулевой суммой. Целью данной работы является обобщение результатов [1] на случай, когда игроки должны учитывать стоимость используемых ресурсов. Отметим, что для частного случая обобщенного критерия справедливости, а именно, критерия Шенона, при одинаковых стоимостях задача была решена в [2].

2. Постановка задачи

Перейдем к математической формулировке проблемы. Будем рассматривать базовую станцию, которой требуется распределить мощность $\bar{P}$ между n пользователями. Предполагаем, что каждому пользователю выделен отдельный канал, а так же предполагаем наличие интерференции между каналами. Чистой стратегией базовой станции является $P = (P_1, \ldots, P_n)$, где $P_i \geqslant 0$ для $i \in [1, n]$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = \bar{P}$ и $\bar{P} > 0$. Компонент P_i может быть интерпретирован как уровень мощности выделенный пользователю i. Чистой стратегией активного источника помех является $J = (J_1, \ldots, J_n)$, где $J_i \geqslant 0$ для $i \in [1, n]$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} = \bar{J}$, где $\bar{J} > 0$ – общая мощность помех. Функцией выигрыша базовой станции являются обобщенный критерий α-справедливости [1] (причем, $\alpha \in [0, 1]$) минус стоимость сигналов, а выигрыш активного источника помех равен сумме обобщенного критерия α-полезности и стоимости установки помех взятой с обратным знаком:

$$v_P(P, J) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] - \sum_{i=1}^{n} c_P^i P_i, \qquad (2.1)$$

$$v_J(P, J) = -\frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] - \sum_{i=1}^{n} c_J^i J_i. \qquad (2.2)$$

В случае, если $\alpha = 1$, функции выигрыша превращаются в критерий Шенона минус соответствующие стоимости:

$$v_P(P, J) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} c_P^i P_i, \qquad (2.3)$$

$$v_J(P, J) = -\sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{g_i P_i}{N_i^0 + h_i J_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} c_J^i J_i, \qquad (2.4)$$

где N_i^0 – уровень неконтролируемого шума в канале i; g_i, h_i – коэффициенты искажения сигнала, а c_J^i, c_P^i – стоимости использования единицы мощности сигнала игроками. Будем предполагать, что коэффициенты искажения сигнала g_i и h_i, стоимости использования единицы мощности сигнала c_J^i, c_P^i, уровень неконтролируемого шума N_i^0 для $i \in [1, n]$, а так же общая мощность $\bar{P}$ базовой станции и общий уровень шума $\bar{J}$ фиксированы и известны обоим игрокам.

3. Решение задачи

В этом разделе выигрыш будет рассматриваться как функция α-справедливости от функции SINR со смещением (2.1) и (2.2). Одним из достоинств этой функции является тот случай, что при $\alpha = 1$ она соответствует пропускной способности Шенона. В данном разделе будет рассмотрен случай, когда $\alpha > 0$. Случай $\alpha = 0$ исследован в разделе 5.

Нетрудно проверить, что $v_P(P,J)$ вогнуто по P при любых α, а $v_J(P,J)$ вогнуто по J при $\alpha \leqslant 2$ так как

$$\frac{\partial^2 v_P}{\partial P_i^2} = -\alpha g_i^2 \frac{(N_i^0 + h_i J_i)^{\alpha-1}}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^{\alpha+1}}$$

и

$$\frac{\partial^2 v_J}{\partial J_i^2} = -\alpha P_i g_i h_i^2 \frac{(N_i^0 + h_i J_i)^{\alpha-3}}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^{\alpha+1}} \times (2N_i^0 + 2h_i J_i + (2-\alpha) g_i P_i).$$

Поэтому будет рассматриваться случай $\alpha \leqslant 1$. Можно показать, что в таком случае у игры будет единственное равновесие по Нэшу [7]. Применяя теорему Куна-Такера, получаем следующий результат.

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha \leqslant 1$, тогда (P,J) будет равновесием тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные ω и ν (множители Лагранжа) такие, что*

$$\frac{g_i}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^\alpha (N_i^0 + h_i J_i)^{1-\alpha}} \begin{cases} = \omega, \text{ если } P_i > 0, \\ \leqslant \omega, \text{ если } P_i = 0, \end{cases}$$

$$\frac{g_i h_i P_i}{(N_i^0 + h_i J_i + g_i P_i)^\alpha (N_i^0 + h_i J_i)^{1-\alpha}} \begin{cases} = \nu, \text{ если } J_i > 0, \\ \leqslant \nu, \text{ если } J_i = 0. \end{cases}$$

Применяя лемму 3.1 можно получить структуру оптимального решения более точно, а именно, она описывается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Каждое равновесие по Нэшу имеет вид $(P(\omega,\nu), J(\omega,\nu))$ для некоторых положительных ω и ν, причем,*

$$P_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \left[\dfrac{(\omega + c_P^i) h_i}{(\omega + c_p^i) h_i + (\nu + c_J^i) g_i}\right]^\alpha \dfrac{(\nu + c_J^i) g_i}{(\omega + c_P^i)^2 h_i}, & i \in I_{11}(\omega,\nu), \\ \dfrac{N_i^0}{g_i}\left[\left(\dfrac{g_i}{(\omega + c_P^i) N_i^0}\right)^{1/\alpha} - 1\right], & i \in I_{10}(\omega,\nu), \\ 0, & i \in I_{00}(\omega,\nu), \end{cases}$$

$$J_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{h_i}\left[\dfrac{1}{\omega + c_P^i}\left(\dfrac{(\omega + c_P^i) h_i}{(\omega + c_p^i) h_i + (\nu + c_J^i) g_i}\right)^\alpha - \dfrac{N_i^0}{g_i}\right], & i \in I_{11}(\omega,\nu), \\ 0, & i \in I_{10}(\omega,\nu) \cup \\ & \cup I_{00}(\omega,\nu) \end{cases}$$

и

$$I_{00}(\omega,\nu) = \left\{ i \in [1,n] : \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant \omega + c_P^i \right\},$$

$$I_{10}(\omega,\nu) = \Bigg\{ i \in [1,n] : \omega + c_P^i < \frac{g_i}{N_i^0} \leqslant (\omega + c_P^i)\left(\frac{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}{(\omega + c_P^i)h_i}\right)^{\alpha} \Bigg\},$$

$$I_{11}(\omega,\nu) = \left\{ i \in [1,n] : (\omega + c_P^i)\left(\frac{(\omega + c_p^i)h_i + (\nu + c_J^i)g_i}{(\omega + c_P^i)h_i}\right)^{\alpha} < \frac{g_i}{N_i^0} \right\}$$

Теорема 3.1 сводит проблему нахождения оптимального решения к задаче нахождения двух параметров ω и ν, таких что выполняются следующие соотношения

$$H_P(\omega,\nu) = \bar{P}, \qquad H_J(\omega,\nu) = \bar{J}, \tag{3.1}$$

где

$$H_P(\omega,\nu) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\omega,\nu), \qquad H_J(\omega,\nu) = \sum_{i=1}^{n} J_i(\omega,\nu).$$

Стратегии $P(\omega,\nu), J(\omega,\nu)$ обладают важными свойствами непрерывности и монотонности, которые сформулированы в следующей лемме, позволяющие получить достаточно простой алгоритм нахождения оптимального решения

Лемма 3.2. *Стратегии $P(\omega,\nu), J(\omega,\nu)$ обладают следующими свойствами монотонности и непрерывности:*

1. *Стратегии $J_i(\omega,\nu)$ для $i \in [1,n]$, а поэтому и $H_J(\omega,\nu)$, строго убывают по ν до тех пор, пока они остаются положительными.*

2. *Если $\alpha < 1$, то стратегии $J_i(\omega,\nu)$ для $i \in [1,n]$, а поэтому и $H_J(\omega,\nu)$, строго убывают по ω до тех пор, пока они остаются положительными.*

3. *Стратегии $P_i(\omega,\nu)$ для $i \in [1,n]$, а поэтому и $H_P(\omega,\nu)$, строго убывают по ω, пока они положительны.*

4. *Если $\alpha \leqslant 1$, то стратегии $P_i(\omega, \nu)$ для $i \in [1, n]$, а поэтому и $H_P(\omega, \nu)$, строго возрастают по ν, пока они положительны.*

5. *Функции $H_P(\omega, \nu)$ и $H_J(\omega, \nu)$ являются непрерывными по ω и ν.*

Из перечисленных свойств монотонности получаются следующие две теоремы представляющие равновесие по Нэшу при $0 < \alpha < 1$ в соответствующих подслучаях:

Теорема 3.2. *Если $H_J(0,0) \leqslant \bar{J}$, то единственным равновесием по Нэшу является пара (P, J), где*

1) *если $H_P(0,0) \leqslant \bar{P}$, то $(P, J) = (P(0,0), J(0,0))$,*

2) *если $H_P(0,0) > \bar{P}$, то $(P, J) = (P(\omega^*, 0), J(\omega^*, 0))$, где ω^* единственный корень уравнения $H_P(\omega^*, 0) = \bar{P}$.*

Перейдем к рассмотрению случая, когда $H_J(0,0) > \bar{J}$. В следующей лемме показано, что существует строгая монотонная зависимость между параметрами ω и ν в (3.1), что позволяет понизить размерность задачи.

Лемма 3.3. *Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то для каждого $\omega \in [0, \bar{\omega}]$ существует единственное неотрицательное $\nu(\omega)$ такое, что $H_J(\omega, \nu(\omega)) = \bar{J}$, где $\bar{\omega} > 0$ – единственное решение уравнения $H_J(\bar{\omega}, 0) = \bar{J}$.*

Из леммы 3.2, следует, что $\nu(\omega)$ является непрерывной строго убывающей функцией при $\omega \in [0, \bar{\omega}]$, поэтому решение двухпараметрической системы уравнений (3.1) эквивалентно решению однопараметрического нелинейного уравнения

$$H_P(\omega, \nu(\omega)) = \bar{H}_P(\omega) = \bar{P}. \tag{3.2}$$

Полученный результат, дает возможность найти явный вид равновесных стратегий для случая $H_J(0,0) > \bar{J}$, который представлен в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то единственным равновесием по Нэшу является пара (P, J), где*

1) *если* $H_P(0,\nu_{01}^*) \leqslant \bar{P}$, *где* ν_{01}^* *единственный корень уравнения* $H_J(0,\nu_{01}^*) = \bar{J}$, *то* $(P,J) = (P(0,\nu_{01}^*), J(0,\nu_{01}^*))$,

2) *если* $H_P(0,\nu_{01}^*) > \bar{P}$, *то*

   a) *если* $H_P(\hat{\omega},0) > \bar{P}$, *где* $\hat{\omega}$ *является решением уравнения* $H_J(\hat{\omega},0) = \bar{J}$, *то* $(P,J) = (P(\omega_{10}^*,0), J(\omega_{10}^*,0))$, *где* ω_{10}^* *является решением уравнения* $H_P(\omega_{10}^*,0) = \bar{P}$,

   b) *если* $H_P(\hat{\omega},0) \leqslant \bar{P}$, *то равновесием по Нэшу будет точка* $(P,J) = (P(\omega_{11}^*,\nu(\omega_{11}^*)), J(\omega_{10}^*,\nu(\omega_{11}^*)))$, *где* ω_{11}^* *является решением уравнения (3.2).*

Таким образом, получаем следующий результат единственности равновесия.

Теорема 3.4. *При* $0 < \alpha < 1$ *описанная игра имеет единственное равновесие по Нэшу, которое можно найти с помощью Теорем 3.2 и 3.3.*

4. Частный случай: критерий Шенона

Следует отметить, что в случае, когда функция выигрыша записывается формулой пропускной способности Шенона (2.3)–(2.4) (т.е в случае, когда $\alpha = 1$), равновесные стратегии будут иметь более простую структуру, а именно:

$$P_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{(\omega+c_p^i)h_i + (\nu+c_J^i)g_i}\dfrac{\nu+c_J^i}{\omega+c_P^i}, & i \in I_{11}(\omega,\nu),\\ \dfrac{1}{(\omega+c_P^i)} - \dfrac{N_i^0}{g_i}, & i \in I_{10}(\omega,\nu),\\ 0, & i \in I_{00}(\omega,\nu), \end{cases}$$

$$J_i(\omega,\nu) = \begin{cases} \dfrac{g_i}{(\omega+c_p^i)h_i + (\nu+c_J^i)g_i} - \dfrac{N_i^0}{h_i}, & i \in I_{11}(\omega,\nu),\\ 0, & i \in I_{10}(\omega,\nu) \cup I_{00}(\omega,\nu) \end{cases}$$

и

$$I_{00}(\omega,\nu)=\left\{i\in[1,n]:\frac{g_i}{N_i^0}\leqslant\omega+c_P^i\right\},$$

$$I_{10}(\omega,\nu)=\left\{i\in[1,n]:\omega+c_P^i<\frac{g_i}{N_i^0}\leqslant\frac{(\omega+c_p^i)h_i+(\nu+c_J^i)g_i}{h_i}\right\},$$

$$I_{11}(\omega,\nu)=\left\{i\in[1,n]:\frac{(\omega+c_p^i)h_i+(\nu+c_J^i)g_i}{h_i}<\frac{g_i}{N_i^0}\right\}.$$

5. Частный случай: линейная функция выигрыша

В этом разделе будет рассмотрен случай линейного выигрыша по P, а именно, когда $\alpha=0$. Тогда функции выигрышей имеют вид:

$$v_P(P,J)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g_iP_i}{N_i^0+h_iJ_i}-\sum_{i=1}^{n}c_P^iP_i,$$

$$v_P(P,J)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{g_iP_i}{N_i^0+h_iJ_i}-\sum_{i=1}^{n}c_J^iJ_i.$$

В следующей теореме приведен вид, который должны иметь равновесные стратегии соответствующие линейному случаю.

Теорема 5.1. *Если $\alpha=0$, то каждое равновесие имеет вид $(P(\omega,\nu),$ $J(\omega,\nu))$ для некоторых положительных ω и ν, где*

$$P_i(\omega,\nu)=\begin{cases}\dfrac{g_i}{h_i}\dfrac{\nu+c_J^i}{(\omega+c_P^i)^2}, & i\in I\left(\omega\right),\\ 0, & i\notin I\left(\omega\right),\end{cases}$$

$$J_i(\omega)=\frac{g_i}{h_i}\left[\frac{1}{\omega}-\frac{N_i^0}{g_i}\right]_+,$$

где

$$I(\omega)=\left\{i\in[1,n]:J_i(\omega)>0\right\}.$$

Теорема сводит проблему нахождения оптимального решения к задаче нахождения двух параметров ω и ν таких, что выполняются следующие соотношения:

$$H_P(\omega,\nu)=\bar{P},\quad H_J(\omega)=\bar{J},$$

где

$$H_P(\omega,\nu)=\sum_{i=1}^{n} P_i(\omega,\nu), \quad H_J(\omega)=\sum_{i=1}^{n} J_i(\omega).$$

Очевидно, что функция $H_J(\omega)$ строго убывает по ω пока $J_i(\omega)$ положительна. Из этого свойства легко получить следующую теорему представляющую равновесные стратегии.

Теорема 5.2. *Если $\alpha = 0$, то равновесные стратегии единственны и имеют следующий вид:*

1) если $H_J(0) \leqslant \bar{J}$, то

a) если $H_P(0,0) > \bar{P}$, то равновесием по Нэшу будет точка $(P(\omega^*,0), J(\omega^*))$, где ω^* является решением уравнения $H_P(\omega^*,0)=\bar{P}$;

b) если $H_P(0,0) \leqslant \bar{P}$, то равновесием по Нэшу будет точка $(P(0,\nu^*), J(0))$, где ν^* это решение уравнения $H_P(0,\nu^*) = \bar{P}$,

2) если $H_J(0) > \bar{J}$, то точка $(P(\bar{\omega},\bar{\nu}), J(\bar{\omega}))$ будет равновесием по Нэшу, где $\bar{\omega}$ является решением уравнения $H_J(\bar{\omega}) = \bar{J}$, а $\bar{\nu}$ это решение уравнения $H_P(\bar{\omega},\bar{\nu}) = \bar{P}$.

6. Алгоритм нахождения равновесия по Нэшу

В данном разделе приведен алгоритм нахождения равновесных стратегий основанный на теоремах 3.2 и 3.3.

Шаг 1. Если $H_J(0,0) \leqslant \bar{J}$ и $H_P(0,0) \le \bar{P}$, тогда $\omega = \nu = 0$ и пара $(P(0,0), J(0,0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 2. Если $H_J(0,0) \leqslant \bar{J}$ и $H_P(0,0) > \bar{P}$, то находим $\omega^* = BS_P^1(0)$ и тогда пара $(P(\omega^*,0), J(\omega^*,0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 3. Если $H_J(0,0) > \bar{J}$, то находим $\nu_{01}^* = BS_J^2(0)$.

Шаг 4. Если $H_P(0,\nu_{01}^*) \leqslant \bar{P}$, то пара $(P(0,\nu_{01}^*), J(0,\nu_{01}^*))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 5. Находим $\bar{\omega} = BS_J^1(0)$.

Шаг 6. Если $H_P(\bar{\omega}, 0) > \bar{P}$, то находим $\omega_{10}^* = BS_P^1(0)$ и тогда пара $(P(\omega_{10}^*, 0), J(\omega_{10}^*, 0))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 7. Устанавливаем $\omega_1^0 = 0, \omega_1^1 = \bar{\omega}$.

Шаг 7a. Определяем $\tilde{\omega} = (\omega_1^1 + \omega_1^0)/2$.

Шаг 7b. $\tilde{\nu} = BS_J^2(\tilde{\omega})$.

Шаг 7c. Если $\omega_1^1 - \omega_1^0 \leqslant \epsilon$ или $H_P(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) = \bar{P}$, то $\omega_{11}^* = \tilde{\omega}$, $\nu_{11}^*(\omega_{11}^*) = \tilde{\nu}$ и пара $(P(\omega_{11}^*, \nu_{11}^*(\omega_{11}^*)), J(\omega_{11}^*, \nu_{11}^*(\omega_{11}^*)))$ является равновесием по Нэшу. Алгоритм завершается.

Шаг 7d.

- если $H_P(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) < \bar{P}$, то $\omega_1^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_P(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) > \bar{P}$, то $\omega_1^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 7e. Переходим к шагу 7a.

Построение функции $\omega = BS_P^1(\nu)$:

Шаг 1. Пусть $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = \max_i \left\{ \frac{g_i}{N_i^0} - c_P^i \right\}$.

Шаг 2. Определяем $\tilde{\omega} = (\omega^1 + \omega^0)/2$.

Шаг 3. Если $\omega^1 - \omega^0 \leqslant \epsilon$ или $H_P(\tilde{\omega}, \nu) = \bar{P}$, то вернуть $\tilde{\omega}$

Шаг 4.

- если $H_P(\tilde{\omega}, \nu) < \bar{P}$, то $\omega^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_P(\tilde{\omega}, \nu) > \bar{P}$, то $\omega^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 5. Возвращаемся к Шагу 2.

Построение функции $\omega = BS_J^1(\nu)$:

Шаг 1. Пусть $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = \max_i \left\{ \frac{g_i}{N_i^0} - c_P^i \right\}$.

Шаг 2. Определяем $\tilde{\omega_1} = (\omega^1 + \omega^0)/2$.

Шаг 3. Если $\omega^1 - \omega^0 \leqslant \epsilon$ или $H_J(\tilde{\omega}, \nu) = \bar{J}$, то вернуть $\tilde{\omega}$

Шаг 4.

- если $H_J(\tilde{\omega}, \nu) < \bar{J}$, то $\omega^1 = \tilde{\omega}$.
- если $H_J(\tilde{\omega}, \nu) > \bar{J}$, то $\omega^0 = \tilde{\omega}$.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

Построение функции $\nu = BS_J^2(\omega)$:

Шаг 1. Пусть $\nu^0 = 0$, $\nu^1 = \max_i \left\{\frac{1}{g}\left[\left(\frac{g}{N(w + c_P^i)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - h\right](w + c_P^i) - c_J^i\right\}$.

Шаг 2. Определяем $\tilde{\nu} = (\nu^0 + \nu^1)/2$.

Шаг 3. Если $\nu^1 - \nu^0 \leqslant \epsilon$ или $H_J(\omega, \tilde{\nu}) = \bar{J}$, то вернуть $\tilde{\nu}$.

Шаг 4.

- если $H_J(\omega, \tilde{\nu}) < \bar{J}$, то $\nu^1 = \tilde{\nu}$.
- если $H_J(\omega, \tilde{\nu}) > \bar{J}$, то $\nu^0 = \tilde{\nu}$.

Шаг 5. Переходим к шагу 2.

7. Результаты численного моделирования

В данном разделе приведем результаты численного моделирования. Будем считать, что имеется пять пользователей ($n = 5$), а качество каналов ухудшается от первого к последнему по степенному закону $g_i = k^{i-1}$, где $k = 0.87$. Пусть уровень неконтролируемого шума и коэффициенты искажения сигнала будут одинаковым для всех каналов, а именно, $N_i = h_i = 1, i \in [1, 5]$. Ниже на четырех численных примерах показано, как изменяется мощности назначаемые базовой станцией пользователям при изменении стоимости сигнала первого пользователя, т.е. $c_P^1 \in [0.1, 0.15, 0.25, 0.7]$, $c_P^i = 0.1, i \in [2, 5]$, $c_J^i = 0.1, i \in [1, 5]$.

При наименьшем значении $c_P^1 = 0.1$, которое совпадает со стоимостями передачи сигналов другими пользователями, первый пользователь получает максимальный уровень сигнала из всех пользователей в силу того, что качество используемого им канала является

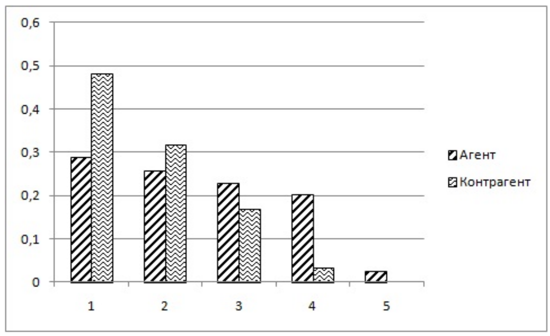

Рисунок 1. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0.1$.

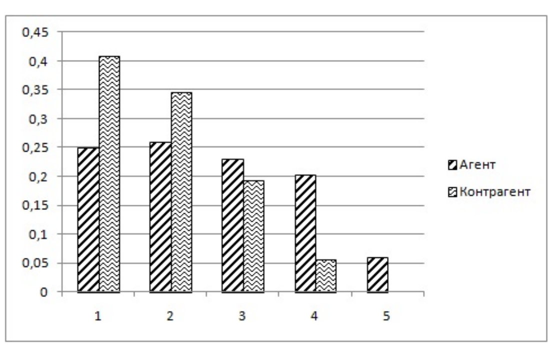

Рисунок 2. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0.15$.

наилучшим (рис. 1). При увеличении стоимости c_P^1 в 1,5 раза до 0.15 пользователь получает второй по уровню сигнал (рис. 2), а при 2,5-кратном увеличении пользователь получает четвертый (рис. 3) по уровню сигнал. Если же $c_P^1 = 0.7$, то первый пользователь лишается возможности передачи сигнала из-за высокой стоимости, несмотря на то, что в его распоряжении находится лучший по качеству канал.

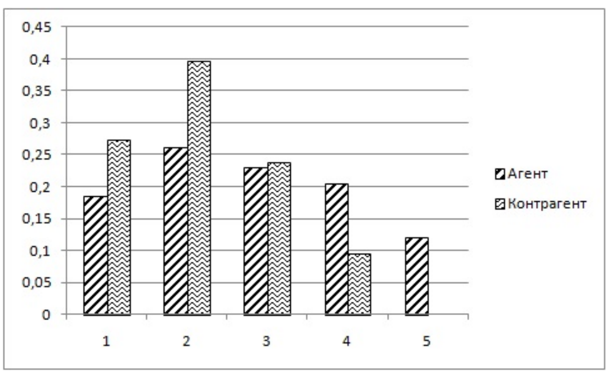

Рисунок 3. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0.25$.

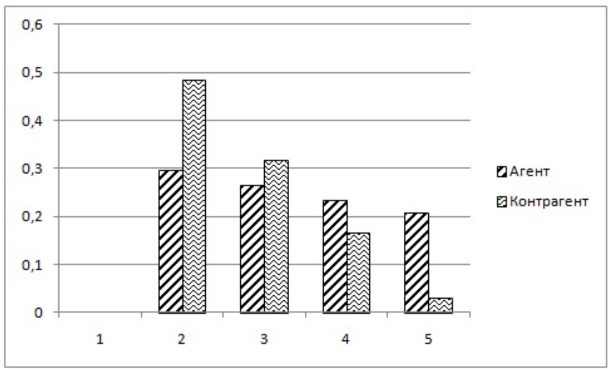

Рисунок 4. Распределение мощностей между пользователями при $c_P^1 = 0.70$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Altman E., Avrachenkov K., Garnaev A. *Fair resource allocation in wireless networks in the presence of a jammer* // Performance Evaluation. 2009.

2. Altman E., Avrachenkov K., Garnaev A. *Jamming game in wireless networks with transmission cost*// Lecture Notes in Computer Science. 2007. V. 4465. P. 1-12.

3. Kelly F., Tan D. *Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability*// Journal of the Operational Research Society. 1998. V. 49. P. 237-252.

4. Kelly F. *Charging and rate control for elastic traffic*// European Trans. on Telecom. 1998. V. 8. P. 33-37.

5. Mo J., Walrand J. *Fair end-to-end window-based congestion control*// IEEE A CM Trans. on Networking. 2000. V. 8. P. 556-567.

6. *Traffic management specification*/ In the ATM forum technical cometee, April 1996. P. 84-89.

7. Rosen J. *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n- person games* // Econometrica. 1965. V. 22. P. 520-534.

FAIR RESOURCE ALLOCATION IN THE PRESENCE OF A JAMMER

Andrey Garnaev, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Doctor of Science, professor (agarnaev@rambler.ru).
Anton Toticin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, post-graduate student (toxru@inbox.ru).

Abstract: A game-theoretical model between a base station distributing power among users and a jammer trying to harm the base station is considered. The goal of the base station is to distribute the power among users fairly taking into account its cost. The goal of the jammer is to harm the work of the base station also taking into account the cost of the employed power. The existence and uniqueness of Nash equilibrium are proved and its properties are investigated.

Keywords: fairness, wireless network, jamming, non-zero-sum-game.