Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.3, с. 31-45

УДК 519.833
ББК 22.18

ИГРА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА ДВУХ ОБЪЕКТОВ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Анна А. Ивашко*
Учреждение Российской академии наук
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
Петрозаводск
e-mail: afalco@krc.karelia.ru

В данной работе рассматривается игровая модель выбора двух секретарей с полной информацией и критерием оптимальности в виде максимума суммы ожидаемых значений качеств претендентов. Данная задача исследована в двух вариантах: игра m лиц с возможностью отказа претендента от предложения и игра двух лиц с доминирующим игроком. Получены оптимальные стратегии игроков. Доказано, что в задаче с возможностью отказа претендента от предложения выигрыш каждого игрока не зависит от общего числа игроков.

Ключевые слова: задача наилучшего выбора, оптимальная стратегия, многошаговая игра, многократная остановка.

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-98801-р-север-а) и гранта ОМН РАН (программа «Математические и алгоритмические проблемы информационных систем нового поколения»).

1. Введение

В данной работе рассматривается игровая модель выбора двух секретарей в двух вариантах: игра m лиц с возможностью отказа претендента от предложения и игра двух лиц с доминирующим игроком.

Пусть имеется m фирм, каждая из которых хочет нанять на работу двух секретарей. Всего имеется N претендентов на свободное место, и качество каждого определяется равномерно распределенной на отрезке [0,1] случайной величиной. Директора фирм (игроки) по очереди беседуют с каждым претендентом, и после этого выносят решение принять его на место секретаря или отвергнуть. Если j-ый игрок решает предложить претенденту работу, то претендент соглашается принять предложение с вероятностью p_j, $j = 1, 2, ..., m$, $p_1 + p_2 + ... + p_m \leq 1$. Если j-ый игрок принимает двух секретарей, то он выходит из игры. При этом его выигрыш равен сумме значений качеств выбранных секретарей. Если все игроки отвергают текущего претендента, то рассматривается следующий, причем, отвергнув претендента, к нему нельзя будет вернуться в дальнейшем. Если фирма не приняла ни одного секретаря, то она терпит убытки C, $C \in [0, 1]$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Во второй части статьи рассматривается постановка задачи с двумя игроками, каждый из которых хочет выбрать двух секретарей из множества N претендентов. Исследуется вариант задачи, в которой один из игроков имеет преимущество при принятии претендента.

Данная задача относится к классу задач наилучшего выбора, исследуемых теорией оптимальной остановки и теорией игр. В зависимости от имеющейся у наблюдателя информации о значениях качеств поступающих объектов различают задачи с отсутствием информации, частичной и полной информацией. Неигровые постановки задачи наилучшего выбора двух объектов с различной информированностью о значениях качества поступающих объектов были рассмотрены в работах [2,3,5,10]. Игровые задачи, в которых необходимо выбрать одного секретаря, исследованы в [1,7,8,11,13,14,16]. Постановки с возможностью отказа претендента от предложения рассмотрены в работах [4,9,15,17]. В работе [12] решена задача с арбитром, в которой два игрока хотят совместно выбрать двух секретарей.

2. Игра m лиц наилучшего выбора одного секретаря с возможностью отказа от предложения

Имеется m фирм, каждая из которых хочет нанять секретаря из множества N претендентов. Качество каждого претендента – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0,1]. Директора фирм (игроки) по очереди беседуют с каждым претендентом, и после этого выносят решение принять его на место секретаря или отвергнуть. Если j-ый игрок решает предложить претенденту работу, то претендент соглашается принять предложение с вероятностью p_j, $j = 1, 2, ..., m$, $p_1 + p_2 + ... + p_m \leq 1$. Если j-ый игрок принимает претендента, то он выходит из игры. При этом его выигрыш равен ожидаемому среднему значению качества выбранного секретаря. Если все игроки отвергают текущего претендента, то рассматривается следующий, причем, отвергнув претендента, к нему нельзя будет вернуться в дальнейшем. Если фирма не приняла секретаря, то она терпит убытки C, $C \in [0, 1]$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

В работе [9] был исследован сценарий выбора одного секретаря для одного и двух игроков. В случае с одним игроком каждый претендент имеет качество x, которое определяется равномерно распределенной на отрезке [0, 1] случайной величиной. Вероятность того, что претендент согласится принять предложение равна p, $p \leq 1$. Тогда $\bar{p} = 1 - p$ – вероятность отказа от предложения. Если на шаге i игрок отказывает претенденту, то он переходит к собеседованию с $(i + 1)$-ым претендентом. Обозначим $v_i^1(p)$ – ожидаемый выигрыш игрока на шаге i , $i = 1, 2, ..., N$.

Если $i = N$, то игрок должен предложить претенденту работу независимо от его качества, так как в противном случае он потерпит убытки. Тогда, учитывая, что значение качества равномерно распределено на [0, 1], получим

$$v_N^1(p) = \int\limits_0^1 px\, dx + \int\limits_0^1 \bar{p}(-C)dx = \frac{p}{2} - \bar{p}C.$$

На шаге i игрок примет текущего претендента с качеством x, тогда и только тогда, когда $x \geq v_{i+1}^1(p)$. Следовательно,

$$v_i^1(p) \ = \int\limits_0^{v_{i+1}^1(p)} v_{i+1}^1(p)\,dx + \int\limits_{v_{i+1}^1(p)}^1 (px + \bar{p}v_{i+1}^1(p))\,dx.$$

Получим выражение для вычисления выигрыша игрока

$$v_i^1(p) = \frac{p}{2}(1 - v_{i+1}^1(p))^2 + v_{i+1}^1(p), v_{N+1}^1(p) = -, i = 1, 2, ..., N. \qquad (2.1)$$

Если на каком-нибудь шаге $v_{i+1}^1(p) < 0$, то

$$v_i^1(p) = \int\limits_0^1 (px + \bar{p}v_{i+1}^1(p))dx = \frac{p}{2} + \bar{p}v_{i+1}^1(p).$$

Далее будем рассматривать случай, когда все функции выигрыша неотрицательны, т.е. при $0 \leq C \leq \frac{p}{2(1-p)}$.

Рассмотрим случай двух игроков. Вероятность того, что претендент согласится принять предложение игрока j, равна p_j, где $j = 1, 2$, $p_1 + p_2 \leq 1$, $\bar{p}_j = 1 - p_j$.

Обозначим выигрыш j-го игрока на i-том шаге в случае двух игроков $v_i^{2,j}, j = 1, 2, i = 1, ..., N$. Заметим, что $v_N^{2,j} = v_N^1(p_j), j = 1, 2$, т.к. каждый игрок заинтересован принять последнего претендента.

Пусть $p_1 \geq p_2$, тогда $v_i^{2,1} \geq v_i^{2,2}$. Стратегия Принять доминирует стратегию Отклонить для игрока $j, j = 1, 2$ тогда и только тогда, когда $x \geq v_{i+1}^{2,j}$.

В работе [6] доказано, что $v_i^{2,j} = v_i^1(p_j); j = 1, 2$. Докажем, что в игре m лиц справедлива аналогичная формула.

В игре m лиц обозначим ожидаемый выигрыш j-го игрока на i-ом шаге $v_i^{m,j}$, $j = 1, 2, ..., m$, и пусть $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_m$.

Предположим, что $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j); j = 1, 2, ..., m$. Докажем, что $v_i^{m+1,j} = v_i^1(p_j); j = 1, 2, ..., m + 1$.

На последнем шаге $v_N^{m+1,j} = v_N^1(p_j); j = 1, 2, ..., m + 1$.

На шаге $N - 1$ получим, что j-ый игрок примет претендента, если $x \geq v_N^{m+1,j}$. Например, в игре трех лиц в ситуации $\Pi_1 O_2 \Pi_3$, где стратегиями игрока j являются Π_j – принять, O_j – отклонить $(j = 1, 2, 3)$, первый игрок получит $p_1 x + p_3 v_N^{m,1} + (1 - p_1 - p_3) v_N^{m+1,1} = p_1 x + \bar{p}_1 v_N^{m+1,1}$, а в ситуации $O_1 O_2 \Pi_3$ его выигрыш равен $p_3 v_N^{m,1} + (1 - p_3) v_N^{m+1,1} = v_N^{m+1,1}$. Следовательно первый игрок примет претендента, если $x \geq v_N^{m+1,1}$.

Учитывая, что x равномерно распределено на отрезке [0,1] и $v_N^{m+1,j} = v_N^1(p_j); j = 1, 2, ..., m + 1$, получим

$$\begin{aligned} v_{N-1}^{m+1,j} &= \int\limits_0^{v_N^{m+1,j}} v_N^{m,j}\, dx + \int\limits_{v_N^{m+1,j}}^1 (p_j x + \bar{p}_j v_N^{m+1,j})\, dx = \\ &= v_N^1(p_j); \;\; j = 1, 2, ..., m + 1. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично для $v_i^{m+1,j}$, $j = 1, 2, ..., m + 1$, получим, что для j-го игрока оптимально принять i-го претендента, если $x \geq v_{i+1}^{m+1,j}$, $i = 1, 2, ..., N - 1$. Справедлива следующая теорема

Теорема 2.1. *В игре m лиц наилучшего выбора с возможностью отказа претендента от предложения каждый игрок ведет себя независимо от числа игроков в игре, т.е. $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j), j = 1, 2, ..., m; i = 1, ..., N; v_i^1(p_j) = \frac{p_j}{2}(1 - v_{i+1}^1(p_j))^2 + v_{i+1}^1(p_j), v_{N+1}^1(p_j) = -C$.*

3. Игра m лиц наилучшего выбора двух секретарей с возможностью отказа от предложения

В данном разделе рассматривается игровая модель выбора двух секретарей с возможностью отказа претендента от предложения игрока.

Пусть сначала в игре присутствуют два игрока. Если оба игрока сделали предложение претенденту, то претендент согласится принять предложение первого игрока с вероятностью p_1, а предложение второго – с вероятностью p_2, $p_1 + p_2 \leq 1$. Если один игрок уже выбрал себе двух специалистов, то другой игрок остается один. В этом случае претендент примет предложение игрока с вероятностью p_j, $\bar{p}_j = 1 - p_j$, $j = 1, 2$. Найдем выигрыш игрока. Обозначим $v_i^1(p_j)$ – ожидаемый выигрыш игрока на шаге i, если он выбирает первого претендента, $v_{i,r}^1(p_j)$ – ожидаемый выигрыш игрока на шаге r, если он выбирает второго претендента при условии, что первого он уже выбрал на шаге i.

Тогда ожидаемые выигрыши игрока удовлетворяют следующим выражениям:

$$\begin{array}{l}
v_i^1(p_j) = \mathbf{E}\left(\max\left\{p_j(x+v_{i,i+1}^1(p_j))+\bar{p}_j v_{i+1}^1(p_j); v_{i+1}^1(p_j)\right\}\right), i=1,2,...,N,\\
v_{N+1}^1(p_j) = -C;\\
v_{i,r}^1(p_j) = \mathbf{E}\left(\max\left\{p_j x+\bar{p}_j v_{i,r+1}^1(p_j); v_{i,r+1}^1(p_j)\right\}\right), r=i+1,...,N,\\
v_{i,N+1}^1(p_j) = -C.
\end{array}$$

Игрок примет претендента на шаге r (при условии, что он уже выбрал первого секретаря), если значение качества претендента $x \geq v_{i,r+1}^1(p_j)$. Аналогично, игрок примет первого претендента на шаге i, если значение качества претендента $x \geq v_{i+1}^1(p_j) - v_{i,i+1}^1(p_j)$.

Вычислим значения выигрышей

$$\begin{aligned}
v_i^1 &= v_{i,i+1}^1 + \int\limits_0^{v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1} (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)dx + \int\limits_{v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1}^1 (p_j x + \bar{p}_j(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1))dx\\
&= v_{i,i+1}^1 + (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2 + p_j\frac{1-(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2}{2}\\
&+(1-p_j)(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1 - (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)^2) = v_{i+1}^1 + \tfrac{p_j}{2}(1-(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1))^2;\\
v_{i,r}^1 &= \int\limits_0^{v_{i,r+1}^1} v_{i,r+1}^1 dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^1}^1 (p_j x + (1-p_j)v_{i,r+1}^1)dx = v_{i,r+1}^1 + \tfrac{p_j}{2}(1-v_{i,r+1}^1)^2;\\
v_{i,N}^1 &= \tfrac{p_j}{2} - \bar{p}_j C;\\
v_{i,r}^1 &= v_{i,r}^1(p_j); v_i^1 = v_i^1(p_j), i=1,...,N-1, r=i+1,...,N.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Теперь перейдем к игре двух лиц. Обозначим ожидаемые выигрыши j-го игрока при выборе первого секретаря на i-ом шаге $v_i^{2,j}$, и при выборе второго на r-ом шаге – $v_{i,r}^{2,j}$, $j=1,2$. Найдем выигрыши по индукции с последнего шага. На последнем шаге каждый игрок заинтересован в принятии последнего претендента, поэтому $v_N^{2,j} = v_N^1(p_j)$ и $v_{i,N}^{2,j} = v_{i,N}^1(p_j)$, $j=1,2$. На шаге $N-1$ получим

$$v_{i,N-1}^{2,j} = \int\limits_0^{v_{i,N}^{2,j}} v_{i,N}^{2,j}\,dx + \int\limits_{v_{i,N}^{2,j}}^1 (p_j x + (1-p_j)v_{i,N}^{2,j})\,dx = v_{i,N}^1(p_j), j=1,2$$

независимо от того, выбрал ли другой игрок первого секретаря. Продолжая рассуждения аналогично для произвольного шага r, получим $v_{i,r}^{2,j} = v_{i,r}^1(p_j)$, $j=1,2$. Если оба игрока уже выбрали по одному секретарю, то задача сводится к рассмотренной в разделе 2.

Далее $v^{2,j}_{N-1} = v^1_{N-1}(p_j), j = 1, 2$, так как каждый игрок заинтересован принять двух последних претендентов независимо от поведения другого.

На шаге $N-2$ в случае, если первый игрок еще не выбрал первого секретаря, а второй уже выбрал на шаге i, матрица игры будет иметь вид:

$$M^2_{N-2}(x) = \begin{array}{c} \\ \Pi_1 \\ \mathrm{O}_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\Pi_2 \quad & \quad \mathrm{O}_2 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (m^1_{11}, m^2_{11}) & (m^1_{12}, m^2_{12}) \\ (m^1_{21}, m^2_{21}) & (m^1_{22}, m^2_{22}) \end{pmatrix} \end{array},$$

где

$$\begin{aligned}
&m^1_{11} = p_1(x+v^{2,1}_{N-2,N-1}) + p_2 v^1_{N-1}(p_1) + (1-p_1-p_2)v^{2,1}_{N-1} \\
&= p_1(x+v^{2,1}_{N-2,N-1}) + (1-p_1)v^1_{N-1}(p_1); \\
&m^2_{11} = p_2 x + p_1 v^{2,2}_{i,N-1} + (1-p_1-p_2)v^{2,2}_{i,N-1} = p_2 x + \bar{p}_2 v^1_{i,N-1}(p_2); \\
&m^1_{12} = p_1(x + v^{2,1}_{N-2,N-1}) + (1-p_1)v^{2,1}_{N-1}; \\
&m^2_{12} = p_1 v^1_{i,N-1}(p_2) + \bar{p}_1 v^{2,2}_{i,N-1}; \\
&m^1_{21} = p_2 v^1_{N-1}(p_1) + \bar{p}_2 v^{2,1}_{N-1}; \\
&m^2_{21} = p_2 x + \bar{p}_2 v^{2,2}_{i,N-1}; \\
&m^1_{22} = v^{2,1}_{N-1}; \\
&m^2_{22} = v^{2,2}_{i,N-1}.
\end{aligned}$$

Из матрицы видно, что первый игрок примет претендента, если значение качества претендента $x \geq v^1_{N-1}(p_1) - v^1_{N-2,N-1}(p_1)$, а второй игрок примет претендента, если $x \geq v^1_{i,N-1}(p_2)$.

Продолжая рассуждения аналогично для произвольного шага i, получим, что при выборе секретаря каждый игрок ведет себя независимо от поведения другого.

Для игры m лиц обозначим ожидаемые выигрыши j-го игрока $v^{m,j}_i$, $v^{m,j}_{i,r}$ $(j = 1, 2, ..., m,\ i = 1, 2, ..., N-1,\ r = i+1, ..., N)$ для выбора первого и второго секретаря соответственно. На двух последнем шагах каждый игрок заинтересован в принятии двух последних претендентов, поэтому $v^{m,j}_{i,N} = v^1_{i,N}(p_j)$, $v^{m,j}_{N-1} = v^1_{N-1}(p_j)$, $j = 1, 2, ..., m$. Продолжая рассуждения аналогично для произвольного шага r, получим $v^{m,j}_{i,r} = v^1_{i,r}(p_j)$, $j = 1, 2, ..., m$.

Перейдем к шагу $N-2$. Обозначим A множество игроков, которые решили принять $(N-2)$-го претендента, $B \subseteq A$ – множество игроков, которые уже приняли первого секретаря. Выигрыш игрока $j \in A \setminus B$, в ситуации, когда он решил принять претендента равен

$$\begin{aligned} p_j(x + v^{m,j}_{N-2,N-1}) &+ \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A} p_k\right) v^{m,j}_{N-1} = \\ &= p_j(x + v^{m,j}_{N-2,N-1}) + (1-p_j) v^{m,j}_{N-1}, \end{aligned}$$

а в ситуации, когда игрок отказал претенденту –

$$\sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k\right) v^{m,j}_{N-1} = v^{m,j}_{N-1}.$$

Получаем, что игрок j примет $(N-2)$-го претендента, если $x \geq v^{m,j}_{N-1} - v^{m,j}_{N-2,N-1}$.

Ожидаемый выигрыш игрока $j \in A \setminus B$ равен

$$v^{m,j}_{N-2} = \int\limits_0^{v^{m,j}_{N-1} - v^{m,j}_{N-2,N-1}} v^{m,j}_{N-1} dx + \int\limits_{v^{m,j}_{N-1} - v^{m,j}_{N-2,N-1}}^{1} \left(p_j(x + v^{m,j}_{N-2,N-1}) + (1-p_j) v^{m,j}_{N-1}\right) dx = v^1_{N-2}(p_j).$$

Аналогично, выигрыш игрока $j \in B$ в ситуации, когда он решил принять претендента, равен

$$p_j x + \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-2,N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A} p_k\right) v^{m,j}_{N-2,N-1} = p_j x + (1-p_j) v^{m,j}_{N-2,N-1},$$

а в ситуации, когда игрок отказал претенденту –

$$\sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k v^{m-1,j}_{N-2,N-1} + \left(1 - \sum_{k\in A\setminus\{j\}} p_k\right) v^{m,j}_{N-2,N-1} = v^{m,j}_{N-2,N-1}.$$

Следовательно, игрок j примет $(N-2)$-го претендента, если $x \geq v^{m,j}_{N-2,N-1}$.

Ожидаемый выигрыш игрока $j \in B$ равен

$$v^{m,j}_{i,N-2} = \int\limits_0^{v^{m,j}_{i,N-1}} v^{m,j}_{i,N-1} dx + \int\limits_{v^{m,j}_{i,N-1}}^{1} \left(p_j x + (1-p_j) v^{m,j}_{i,N-1}\right) dx = v^1_{i,N-2}(p_j).$$

Рассуждая аналогично для произвольного i, получим, что при выборе первого секретаря на шаге i игрок j примет претендента, если $x \geq v_{i+1}^{m,j} - v_{i,i+1}^{m,j}$, а при выборе второго -, если $x \geq v_{i,i+1}^{m,j}$. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. *В игре m лиц наилучшего выбора двух секретарей каждый игрок ведет себя независимо от числа игроков в игре, т.е. $v_i^{m,j} = v_i^1(p_j)$, $i = 1,...,N-1$; $v_{i,r}^{m,j} = v_{i,r}^1(p_j)$, $r = i+1,...,N$; $v_{i,N}^1(p_j) = \frac{p_j}{2} - \bar{p}_j C$, $j = 1,2,...,m$.*

4. Игра двух лиц с доминирующим игроком

Рассмотрим игру двух лиц, в которой каждая фирма хочет принять на работу двух секретарей. Всего имеется N претендентов, которые поступают последовательно в случайном порядке. Качество каждого претендента определяется случайной величиной, равномерно распределенной на единичном отрезке. Первый игрок доминирует, т.е. на каждом шаге претенденты сначала идут в первую фирму, и только получив отказ, обращаются во вторую. В данной игре каждый игрок стремится максимизировать сумму качеств выбранных секретарей.

Рассмотрим случай одного игрока. Обозначим ожидаемые выигрыши игрока v_i и $v_{i,r}$ при выборе первого секретаря на шаге i, а второго на шаге r, где $i = 1,2,...,N$, $r = i+1,...,N$. Ожидаемые выигрыши игрока удовлетворяют следующим соотношениями:

$$v_i = \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v_{i,i+1}; v_{i+1}\right\}\right), i = 1,2,...,N, v_{N+1} = 0;$$

$$v_{i,r} = \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v_{i,r+1}\right\}\right), r = i+1,...,N, v_{i,N+1} = 0.$$

Учитывая, что x имеет равномерное распределение на отрезке [0,1], получим

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i,i+1} + \int\limits_0^{v_{i+1}-v_{i,i+1}} (v_{i+1} - v_{i,i+1})dx + \int\limits_{v_{i+1}-v_{i,i+1}}^1 xdx \\ &= v_{i,i+1} + (v_{i+1} - v_{i,i+1})^2 + \tfrac{1-(v_{i+1}-v_{i,i+1})^2}{2} = v_{i,i+1} + \tfrac{1+(v_{i+1}-v_{i,i+1})^2}{2}; \\ v_{i,r} &= \int\limits_0^{v_{i,r+1}} v_{i,r+1}dx + \int\limits_{v_{i,r+1}}^1 xdx = \tfrac{1+(v_{i,r+1})^2}{2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим игру с двумя участниками. Обозначим v_i^1 и $v_{i,r}^1$ – ожидаемые выигрыши первого игрока при выборе первого секретаря на шаге i и второго на шаге r. В силу его преимущества, он будет действовать так, как если бы он делал выбор один, следовательно, $v_{i,r}^1 = v_{i,r}$, $v_i^1 = v_i$. Также $v_{i,r}^1$ и v_i^1 являются выигрышами второго игрока в случае, когда первый игрок выбывает из игры, выбрав себе обоих секретарей.

Обозначим $v_{i,r}^2$ и v_i^2 – ожидаемые выигрыши второго игрока в случае, когда в игре участвуют два игрока. Так как его выигрыш зависит от того, выбрал ли первый игрок первого секретаря, то введем следующие обозначения:

$v_{i,r}^2(B)$ – выигрыш второго игрока в случае, когда оба уже выбрали по одному секретарю;

$v_{i,r}^2(H)$ – выигрыш второго игрока в случае, когда первый игрок еще не выбрал первого секретаря, а второй выбрал;

$v_i^2(B)$ – выигрыш второго игрока в случае, когда первый игрок выбрал первого секретаря, а второй нет;

$v_i^2(H)$ – выигрыш второго игрока в случае, когда оба игрока не выбрали ни одного секретаря.

Последовательно выпишем формулы для вычисления выигрышей второго игрока:

$$\begin{aligned}
v_{i,r}^2(B) &= \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v_{i,r+1}^2(B); v_{i,r+1}^1\right\}\right)\\
&= \int\limits_0^{v_{i,r+1}^2(B)} (v_{i,r+1}^2(B))dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^2(B)}^{v_{i,r+1}^1} x dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^1}^{1} (v_{i,r+1}^1)dx\\
&= (v_{i,r+1}^2(B))^2 + \tfrac{(v_{i,r+1}^1)^2-(v_{i,r+1}^2(B))^2}{2} - v_{i,r+1}^1 v_{i,r+1}^1 + v_{i,r+1}^1\\
&= v_{i,r+1}^1 + \tfrac{(v_{i,r+1}^2(B))^2-(v_{i,r+1}^1)^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,r}^2(H) &= \mathbf{E}\left(\max\left\{x; v_{i,r+1}^2(H); v_{i,r+1}^2(B)\right\}\right)\\
&= \int\limits_0^{v_{i,r+1}^2(H)} (v_{i,r+1}^2(H))dx + \int\limits_{v_{i,r+1}^2(H)}^{v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1} x dx + \int\limits_{v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1}^{1} (v_{i,r+1}^2(B))dx\\
&= (v_{i,r+1}^2(H))^2 + \tfrac{(v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1)^2-(v_{i,r+1}^2(H))^2}{2} - v_{i,r+1}^2(B)(v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1)\\
&\quad + v_{i,r+1}^2(B) = v_{i,r+1}^2(B) + \tfrac{(v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1)^2+(v_{i,r+1}^2(H))^2}{2}\\
&\quad - v_{i,r+1}^2(B)(v_{r+1}^1-v_{r,r+1}^1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_i^2(B) &= \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v_{i,i+1}^2(B); v_{i+1}^2(B); v_{i+1}^1\right\}\right) \\
&= v_{i,i+1}^2(B) + \int\limits_0^{v_{i+1}^2(B)-v_{i,i+1}^2(B)} (v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(B))dx \\
&+ \int\limits_{v_{i+1}^2(B)-v_{i,i+1}^2(B)}^{v_{i,i+1}^1} xdx + \int\limits_{v_{i,i+1}^1}^{1} (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^2(B))dx \\
&= v_{i,i+1}^2(B) + (v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(B))^2 + \tfrac{(v_{i,i+1}^1)^2 - (v_{i+1}^2(B)-v_{i,i+1}^2(B))^2}{2} \\
&- v_{i,i+1}^1(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^2(B)) + v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^2(B) \\
&= v_{i+1}^1 + \tfrac{(v_{i+1}^2(B)-v_{i,i+1}^2(B))^2 + (v_{i,i+1}^1)^2}{2} - v_{i,i+1}^1(v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^2(B)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_i^2(H) &= \mathbf{E}\left(\max\left\{x + v_{i,i+1}^2(H); v_{i+1}^2(B); v_{i+1}^2(H)\right\}\right) \\
&= v_{i,i+1}^2(H) + \int\limits_0^{v_{i+1}^2(H)-v_{i,i+1}^2(H)} (v_{i+1}^2(H) - v_{i,i+1}^2(H))dx \\
&+ \int\limits_{v_{i+1}^2(H)-v_{i,i+1}^2(H)}^{v_{i+1}^1-v_{i,i+1}^1} xdx + \int\limits_{v_{i+1}^1-v_{i,i+1}^1}^{1} (v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(H))dx \\
&= v_{i,i+1}^2(H) + (v_{i+1}^2(H) - v_{i,i+1}^2(H))^2 + \tfrac{(v_{i+1}^1-v_{i,i+1}^1)^2 - (v_{i+1}^2(H)-v_{i,i+1}^2(H))^2}{2} \\
&- (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)(v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(H)) + v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(H) \\
&= v_{i,i+1}^2(H) + \tfrac{(v_{i+1}^1-v_{i,i+1}^1)^2 + (v_{i+1}^2(H)-v_{i,i+1}^2(H))^2}{2} \\
&- (v_{i+1}^1 - v_{i,i+1}^1)(v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(H)) + v_{i+1}^2(B) - v_{i,i+1}^2(H).
\end{aligned}
$$

В таблице 1 представлены значения оптимальных порогов принятия претендента для обоих игроков и $N = 10$.

Таким образом, для $N = 10$ ожидаемый выигрыш первого игрока в начале игры равен $v_1^1 = 1.636$, а выигрыш второго равен $v_1^2(H) = 1.31$.

Таблица 1. Значения оптимальных порогов для $N = 10$

i	$v^1_{i+1}-v^1_{i,i+1}$	$v^1_{i,i+1}$	$v^2_{i+1}(H)-v^2_{i,i+1}(H)$	$v^2_{i+1}(B)-v^2_{i,i+1}(B)$	$v^2_{i,i+1}(H)$	$v^2_{i,i+1}(B)$
1	0.757	0.850	0.584	0.669	0.669	0.757
2	0.735	0.836	0.546	0.639	0.639	0.735
3	0.708	0.820	0.5	0.603	0.603	0.708
4	0.676	0.8	0.442	0.558	0.558	0.676
5	0.634	0.775	0.366	0.5	0.5	0.634
6	0.579	0.742	0.258	0.421	0.421	0.579
7	0.5	0.695	0	0.305	0.305	0.5
8	0.375	0.625	0	0	0	0.375
9	0	0.5	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0

Лемма 4.1. *Для оптимальных порогов принятия претендента справедливы следующие равенства* $v^1_{r+1} - v^1_{i,r+1} = v^2_{i,r+1}(B)$ *и* $v^2_{r+1}(B) - v^2_{i,r+1}(B) = v^2_{i,r+1}(H)$, $r = 2, ..., N$.

Доказательство. Докажем первое равенство по индукции.

Для $r + 1 = N - 1$ данное равенство справедливо. Докажем его для r, $r = 2, ..., N - 2$. Получим

$$\begin{aligned} v^2_{i,r}(B) &= v^1_{i,r+1} + \tfrac{(v^2_{i,r+1}(B))^2-(v^1_{i,r+1})^2}{2} \\ &= v^1_{i,r+1} + \tfrac{(v^1_{r+1}-v^1_{i,r+1})^2-(v^1_{i,r+1})^2}{2} = v^1_r - v^1_{i,r}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$\begin{aligned} v^2_{i,r}(H) &= v^2_{i,r+1}(B) + \tfrac{(v^1_{r+1}-v^1_{r,r+1})^2+(v^2_{i,r+1}(H))^2}{2} \\ &-v^2_{i,r+1}(B)(v^1_{r+1} - v^1_{r,r+1}) \\ &= v^2_{i,r+1}(B)+\tfrac{(v^2_{r+1}(B)-v^2_{i,r+1}(B))^2-(v^2_{i,r+1}(B))^2}{2} = v^2_r(B)-v^2_{i,r}(B). \end{aligned}$$

□

С учетом Леммы 4.1, формулу выигрыша $v_i^2(H)$ можно упростить следующим образом:

$$v_i^2(H) \ = v_{i+1}^2(B) - \frac{(v_{i,i+1}^2(B))^2 + (v_{i+1}^2(H) - v_{i+1}^2(B) + v_{i,i+1}^2(B))^2}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Винниченко С.В. *Моменты остановки и управляемые случайные блуждания.* Новосибирск: Наука, 1992. 104 с.

2. Николаев М.Л. *Об одном обобщении задачи наилучшего выбора*// Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22. № 1. С. 191-194.

3. Николаев М.Л. *Оптимальные правила многократной остановки*// Обозрение прикладной и промышленной математики. 1998. Т. 5. № 2. С. 309-348.

4. Фалько А.А. *Игра наилучшего выбора с возможностью отказа от предложения и перераспределением вероятностей*// Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. 2006. № 7. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 87-94.

5. Фалько А.А. *Задача наилучшего выбора двух объектов*// Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. 2007. № 8. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 34-42.

6. Baston V., Garnaev A. *Competition for staff between two department*// Game Theory and Applications. 2005. V. 10. P. 13-20.

7. Enns E.G., Ferenstein E.Z. *On a multiperson time-sequential game with priorities*// Sequential Anal. 1987. V. 6. P. 239-256.

8. Fushimi M. *The secretary problem in a competitive situation*// J. Oper. Res. Soc. Japan. 1981. V. 24. P. 350-358.

9. Garnaev A., Solovyev A. *On a two department multi stage game/* Extended abstracts of International Workshop "Optimal Stopping and Stochastic Control", August 22-26, 2005. Petrozavodsk, Russia. P. 24–37.

10. Sofronov G., Keith J., Kroese D. *An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations//* J. Appl. Prob. 2006. V. 43. P. 454-462.

11. Sakaguchi M. *Non-zero-sum games related to the secretary problem//* J. Oper. Res. Sos. Jap. 1980. V. 23. № 3. P. 287-293.

12. Sakaguchi M. *Non-zero-sum best-choice games where two stops are required//* Scientiae Mathematicae Japonicae/ 2003. V. 58. № 1. P. 137-176.

13. Sakaguchi M. *Optimal stopping games where players have weighted privilege//* Annals of the International Society of Dynamic Games, Advances in Dynamic Games Application to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control. 2005. V. 7. P. 116-131.

14. Sakaguchi M., Mazalov V. *A non-zero-sum no-information best-choice game//* Mathematical Methods of Operation Research. 2004. V. 60. P. 437-451.

15. Smith M. *A secretary problem with uncertain employment//* J. Appl. Probab. 1975. V. 12. № 3. P. 620-624.

16. Szajowski K. *On non-zero-sum game with priority in secretary problem //* Math.Japonica. 1992. V. 37. P. 415-426.

17. Tamaki M. *Minimal expected ranks for the secretary problems with uncertain selection/* Game Theory, Optimal Stopping, Probability and Statistics, ed. Bruss F.T. and Cam L.Le, Institute of Mathematical Statistics, 2000. P. 127-139.

FULL-INFORMATION BEST-CHOICE GAME WITH TWO STOPS

Anna Ivashko, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc.
(afalco@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider a full-information best-choice game in which each player wants to hire two secretaries. The aim of a player is to maximize the sum of expected applicant' quality values. Two models are considered: m-person best-choice game with the possibility of an applicant refusing an offer and two-person best-choice game with dominant player. The optimal strategies are received. We prove that in the best-choice game with the possibility of an applicant refusing an offer the players' payoffs don't depend on total number of players in the game.

Keywords: best-choice game, optimal strategy, multistage game, multiple stopping.