Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.3, с. 46-70

УДК 519
ББК 32.81

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ НЕАНОНИМНЫХ ПРИОРИТЕТНЫХ МЕХАНИЗМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Николай А. Коргин *
Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН
Москва
e-mail: nkorgin@ipu.ru

В статье вводится аналитическая запись неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов. Известная эквивалентность анонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов распространяется на неанонимные механизмы - доказывается, что для произвольного механизма прямых приоритетов можно предъявить эквивалентный механизм обратных приоритетов, но не наоборот. Определяются классы механизмов обратных приоритетов, для которых можно предъявить эквивалентный механизм прямых приоритетов.

Ключевые слова: механизмы распределение ресурсов, неманипулируемые механизмы, теория игр, механизмы планирования.

* Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 09-07-00093-а

1. Введение

Задача распределения ограниченных ресурсов является актуальной задачей *теории управления организационными системами* (ТУОС) [3], математической экономики [4], микроэкономической теории [9], теории игр и теории выбора [5]. Кратко эта проблема может быть сформулирована следующим образом. Для каждого *агента* существует наилучшее с его точки зрения количество ресурсов (точка пика), которое он хотел бы получить, и сумма точек пика превышает количество ресурсов, имеющегося в системе. Управляющему органу – *центру* – необходимо распределить ресурсы между агентами, обеспечив при этом *эффективность* их использования в соответствии с теми или иными критериями. Процедура принятия решений центром, ставящая в соответствие вектору *заявок* агентов количество ресурсов, выделяемое тому или иному агенту, называется *механизмом распределения ресурсов.* Если агенты сообщают непосредственно требуемое им количество ресурсов, то механизм называется *прямым.* В классификации ТУОС механизмы распределения ресурсов принадлежат классу механизмов планирования, для которых помимо эффективности, важным свойством является их *манипулируемость/неманипулируемость.* При фиксированном механизме распределения ресурсов агенты являются вовлеченными в игру – количество ресурсов, получаемое каждым из агентов, зависит, в общем случае, от заявок всех агентов. При этом в равновесии этой игры не всем агентам может быть выгодно честно сообщать информацию о своих точках пика. Механизм называется неманипулируемым, если при его использовании в равновесии всем агентам выгодно сообщать достоверную информацию.

Для *монотонных* по заявкам агентов механизмов распределения ресурсов было доказано [2], что для любого из них существует *эквивалентный* (для фиксированного набора агентов дающий тоже результирующее распределение ресурсов) прямой механизм – неманипулируемый *механизм последовательного распределения ресурсов.* То есть поиск эффективных механизмов распределения ресурсов можно ограничить классом прямых неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов.

Важным свойством механизмов распределения ресурсов является *анонимность*. Механизм является анонимным, если он симметричен относительно перестановок агентов – итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов. В [1] было доказано, что при заданном количестве ограниченных ресурсов все анонимные монотонные по заявкам агентов механизмы эквивалентны, и, как следствие, обладают одинаковой эффективностью. То есть, если в дополнение к свойствам, описанным выше, от механизма распределения ресурсов требуется анонимность, то достаточно использовать «простейший» механизм - *пропорционального* распределения ресурсов, в котором ресурсы, выделяемые агенту прямо пропорциональны его заявке.

Упомянутые выше результаты исследования механизмов распределения ресурсов считаются «классическими» в ТУОС [3, 6]. Однако, эти результаты, как правило, ограничиваются только классом анонимных механизмов, причем до сих пор не была получена аналитическая запись механизма последовательного распределения ресурсов. В зарубежной литературе, посвященной данной проблематике, основной акцент делался также на анонимные механизмы. Наиболее полный обзор полученных результатов можно найти в [8]. Особо следует выделить работу [10], в которой был получен общий вид аналитической записи анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов. Данный результат был распространен на неанонимные механизмы в [7], где был получен общий вид записи любого неманипулируемого и неанонимного механизма распределения ресурсов и было доказано, что все такие механизмы являются механизмами последовательного распределения ресурсов.

На практике широко распространены и достаточно хорошо изучены с теоретической точки зрения так называемые *приоритетные механизмы* [6], в которых решение о том, как должен быть распределен ресурс между агентами, определяется на основании их *функций приоритета*, аргументом которых являются заявки агентов на ресурс. Выделяют три класса приоритетных механизмов – *прямых приоритетов*, в которых функция приоритета каждого агента является возрастающей функцией его заявки на ресурс; *обратных приоритетов*, в которых функция приоритета убывает с ростом заявки агента на ресурс; и *абсолютных приоритетов*, в которых функция приоритета каждого агента не зависит от его заявки. Приоритетный механизм является анонимным, если все агенты имеют одинаковые функции приоритета.

В рамках настоящей работы акцент сделан на исследование неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов. Приводится аналитическая запись прямого неманипулируемого механизма последовательного распределения ресурсов, эквивалентного заданному приоритетному механизму. На основе данного результата исследуется эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов. Доказывается, что все механизмы прямых приоритетов сводятся к механизму *взвешенного пропорционального* распределения ресурсов, в котором количество ресурсов, выделяемое агенту пропорционально его заявке, умноженной на его приоритет. Среди всего класса механизмов обратных приоритетов выделяется подкласс механизмов - *с постоянными весами агентов*, для которых существуют эквивалентные механизмы прямых приоритетов.

В разделе 2 формализованы основные понятия, приведены определения и предварительные результаты. Раздел 3 посвящен построению прямых неманипулируемых механизмов, эквивалентных неанонимным приоритетным механизмам распределения ресурсов. Раздел 4 – исследованию эквивалентности механизмов прямых и обратных приоритетов.

2. Основные определения и предварительные результаты

2.1. Основные определения

Формально, задача распределения ресурсов записывается следующим образом. *Организационная система* состоит из одного *центра* и множества $N = \{1, \dots, n\}$ *агентов.* У центра имеются ресурсы в ограниченном количестве – $R \in \Re^1_+$, которые должны быть распределены между агентами. Предпочтения каждого агента $i \in N$ относительно количества выделяемого ему ресурсов $x_i \in [0, R]$ определяются однопиковой функцией $u_i(x_i)$: $\Re^1 \to \Re^1$:

1. Существует единственная точка пика $\tau_i = \arg\max\limits_{x\in\Re^1_+} u_i(x)\ \forall i \in N$;
2. $\forall z, z' \in \Re^1$, если $\tau_i \geqslant z > z'$, то $u(z) \geqslant u(z')$, если $z > z' \geqslant \tau_i$, то $u(z) \leqslant u(z')$.

В случае, когда $\sum\limits_{i \in N} \tau_i > R$, имеет место *дефицит ресурсов*. Считается, что значения точек пика не известны центру, но являются общим знанием для агентов.

Для распределения ресурсов центр использует механизм планирования $x = \pi(s)$, определяя итоговое распределение ресурсов $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \geq 0$, $\sum\limits_{i \in N} x_i \in [0, R]$ на основании сообщений (*заявок*) агентов $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i \in S_i$, $i \in N$, где S_i – множество допустимых заявок i-го агента. Если в качестве сообщения агента просят сообщить значение своей точки пика, то такой механизм является *прямым*.

Так как выделяемые каждому агенту центром ресурсы зависят от заявок всех агентов (которые они сообщают одновременно), то между агентами возникает *игра в нормальной форме*:

$$\Gamma_0 = (N,\ \{u_i(\pi_i(s))\}_{i \in N},\ \{S_i\}_{i \in N}),$$

где $\pi_i(s)$ - количество ресурсов, выделяемое в соответствии с механизмом $\pi(s)$ агенту $i \in N$.

Если для механизма планирования $\pi(s)$ можно для каждого возможного вектора точек пика агентов $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ определить *равновесные по Нэшу* заявки[1] – $s^*_\pi(\tau)$, то для него можно предъявить соответствующий прямой механизм $h(\tau)$:

$$x_i = h_i(\tau) = \pi_i(s^*_\pi(\tau)).$$

Прямой механизм планирования $h(\tau)$ называется неманипулируемым, если доминантной стратегией каждого агента является сообщение своей истинной точки пика:

$$\tau_i \in \mathrm{A}rg \max_{s_i} u_i(h_i(s_i, s_{-i})),\ \forall s_{-i},\ \forall i \in N,$$

где s_{-i} обозначает сообщения всех агентов, кроме i-го. Механизмы $\pi(s)$ и $\varphi(s)$ считаются *эквивалентными*, если при заданном количестве ресурсов R для любого вектора точек пика агентов эти механизмы в равновесии дают одинаковое распределение ресурсов –

[1] Следует отметить, что равновесия может не быть вообще, или их может быть несколько. Если равновесий несколько, то необходимо ввести правило отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбирать единственное.

$\pi(s^*_\pi(\tau)) = \varphi(s^*_\varphi(\tau))$. Соответствующий $\pi(s)$ прямой механизм $h(\tau)$ является эквивалентным $\pi(s)$, если он неманипулируем. Традиционно в ТУОС рассматриваются механизмы планирования (распределения ресурсов), удовлетворяющие следующим требованиям [2, 3]:

P1. процедура планирования непрерывна и монотонна по заявкам агентов (монотонность означает, что чем больше просит агент ресурсов, тем больше он получает и наоборот);

P2. если агент получил некоторое количество ресурсов, то, изменяя свою заявку, он может получить любое меньшее количество ресурсов;

P3. если количество ресурсов, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы получит не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

Достаточно широким и популярным классом механизмов распределения ресурсов, удовлетворяющим требованиям P1-P3, является класс *приоритетных* механизмов, в которых решение о том, как должен быть распределен ресурс между агентами, определяется на основании их *функций приоритета*, аргументом которых являются заявки агентов на ресурс. Формально приоритетный механизм распределения ресурсов записывается следующим образом [2, 6]:

$$\pi_i\left(s\right) = \begin{cases} s_i, & \sum\limits_{i\in N} s_i \leqslant R \\ min\left\{s_i,\ \gamma\,\eta_i\left(s_i\right)\right\}, & \sum\limits_{i\in N} s_i > R \end{cases}, \qquad (2.1)$$

где $\eta_i(s_i)_{i\in N}$ - функции приоритета агентов, γ- некоторый нормировочный параметр, обеспечивающий выполнение условия $\sum\limits_{i\in N} x_i = R$.

Приоритетные механизмы делятся на три класса [6]:

1. *механизмы прямых приоритетов*, для которых $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) \geqslant 0\, \forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$;

2. *механизмы обратных приоритетов* - $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) \leqslant 0\ \forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$;

3. *механизмы абсолютных приоритетов* - $\frac{\partial \eta_i}{\partial s_i}(s_i) = 0 \ \forall s_i \in S_i$ и $\forall i \in N$.

Для механизма прямых приоритетов множество допустимых заявок для каждого агента обычно ограничивается максимально возможным количеством ресурсов - $s_i \in [0, R]$, $\forall i \in N$. Для механизмов обратных и абсолютных приоритетов подобных ограничений обычно не накладывается.

Механизм распределения ресурсов является *анонимным*, если он симметричен относительно перестановок агентов - итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов. Для приоритетных механизмов это означает, что $\forall i \in N \ \eta_i(s_i) = \eta(s_i)$. Например, механизм *пропорционального* распределения ресурсов $\pi_i = R\dfrac{s_i}{\sum\limits_{j \in N} s_j}$ является анонимным механизмом распределения ресурсов прямых приоритетов. Введя основные понятия, перейдем к изложению известных на сегодняшний день фактов, предваряющих результаты настоящей работы.

2.2. Предварительные результаты

В работе [2], было показано, что для любого механизма распределения ресурсов, удовлетворяющего условиям P1-P3, существует эквивалентный прямой механизм – *механизм последовательного распределения ресурсов*. Это позволило при поиске эффективных механизмов распределения ресурсов ограничиться классом механизмов последовательного распределения ресурсов. Был предложен алгоритм построения данных механизмов. Приведем здесь его. Пусть задан *исходный* механизм распределения ресурсов $\pi(s)$. Тогда соответствующий ему прямой механизм $h(\tau)$ строится следующим образом:

Алгоритм 1.

Шаг 0. Все агенты сообщают τ_i, множество агентов - *диктаторов* $K_0 = \emptyset$, множество «неудовлетворенных» агентов - *не-диктаторов* $N_0 = N$, доступные к распределению ресурсы $R_0 = R$. Номер шага $l = 1$.

Шаг l_1. Всем агентам из $N_l = N_{l-1} \backslash K_{l-1}$ вычисляется, исходя из доступного к распределению ресурсов R_{l-1}, равновесный по Нэшу вектор заявок $s^{l*}(\tau)$. Например, как было показано в [2], для всех механизмов прямых приоритетов каждый агент из множества N_l будет сообщать максимально возможную заявку. Для механизма обратных приоритетов этот вектор является решением системы уравнений, определяющей равновесные по Нэшу заявки [2]:

$$s_i^{l*} = \frac{\eta_i(s_i^{l*})}{\sum\limits_{j \in N_l} \eta_j(s_j^{l*})} R_{l-1}, \ i \in N_l \, .$$

Шаг l_2. Определяется подмножество агентов, чьи заявки могут быть удовлетворены на текущем шаге l - $K_l : \{i \in N_l, \tau_i \leqslant \pi_i(s^{l*}(\tau))\}$. Если $K_l = \emptyset$, то алгоритм останавливается.

Шаг l_3. Определяется доступное к распределению количество ресурсов $R_l = R - \sum\limits_{i \in K_l} s_i$. Переход к следующем шагу – $l := l + 1$.

Было доказано [2], что данный алгоритм завершает свою работу не более, чем за n шагов ($l \leqslant n$). Агенты, не попавшие в K_l на l -том шаге, получают $\pi_i(s^{l*}(\tau))$ ресурсов. Агенты из множества $\bigcup\limits_{j \leqslant n} K_j$ называются *диктаторами*, так как только от сообщаемых ими своих точек пика зависит, сколько ресурсов получат остальные агенты, в то время, как сами они получают в точности то, что просят. Остальные агенты называются *не-диктаторами*, так как от их сообщений равновесное распределение ресурсов не зависит.

Так же, в [2] доказано, что прямой механизм $h(\tau)$, построенный в соответствии с приведенным выше алгоритмом, является неманипулируемым, т.е. эквивалентным исходному механизму $\pi(s)$. Приведем пример работы алгоритма 1.

Пример 2.1. $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Покажем, как должен функционировать механизм последовательного распределения ресурсов, порожденный пропорциональным механизмом (функция приоритетов $\eta_i = A_i s_i$) с вектором приоритетов $A = \{3, 2, 10, 1, 17\}$. На первом шаге каждому агенту будет предложено $x_i^1 = \frac{10}{33} A_i$. Для агентов 3 и 5 эти величины будут больше, чем τ_3 и τ_5, и эти агенты переходят в множество диктаторов. Соответственно, на второй шаг останется количество ресурсов $R_1 = 2$ для распределения между агентами 1, 2, 4. Соответственно, им будет предложено $x_i^2 = \frac{2}{6}A_i$. Для агента 1 эта величина совпадает с τ_1. На третий шаг останется $R_2 = 1$ для распределения между агентами 2 и 4. Для них $x_i^3 = \frac{1}{3}A_i$, что не превышает значений их точек пика. Соответственно, алгоритм 1 остановится на третьем шаге, агенты 1, 3 и 5 будут диктаторами (получат нужное им количество ресурсов), а равновесное распределение ресурсов будет $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$.

Однако, до сих пор не было предъявлено аналитической записи механизма распределения ресурсов, получаемого в результате действия алгоритма 1, хотя это существенно облегчило бы поиск эффективных по заданному критерию (например, максимуму суммарной полезности всех агентов) механизмов из этого класса. Отчасти, данная ситуация была обусловлена следующим результатом.

В [1] было доказано, что все анонимные механизмы распределения ресурсов эквивалентны. Данный результат был получен на основе исследования алгоритма 1 построения механизма последовательного распределения ресурсов, эквивалентного произвольному анонимному механизму распределения ресурсов, удовлетворяющему Р1-Р3. Это означает, что все анонимные механизмы обладают одинаковой эффективностью. Однако, отказ от анонимности делает актуальной задачу поиска эффективного по заданному критерию (например, максимума суммарной полезности всех агентов) механизма из класса механизмов последовательного распределения ресурсов (эквивалентных неанонимным механизмам). Представление механизмов последовательного распределения ресурсов в аналитическом виде позволит упростит решение данной задачи.

Кроме того, изучение механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов, может помочь в ответе на вопрос, существует ли эквивалентность между неанонимными механизмами прямых и обратных приоритетов. То есть найдется ли для произвольного механизма прямых приоритетов эквивалентный механизм обратных приоритетов и наоборот. Установление такой связи так же упростит задачу поиска эффективных механизмов распределения ресурсов из класса приоритетных (точнее эквивалентных им механизмов последовательного распределения ресурсов), т.к. позволит сузить область поиска. К сожалению, ответить на данный вопрос с помощью исследования алгоритма 1 крайне затруднительно. Поэтому, представляется перспективным изучение механизмов последовательного распределения ресурсов, эквивалентных механизмам прямых и обратных приоритетов, записанных в аналитическом виде.

В зарубежной литературе исследовался вопрос о том, как должны выглядеть прямые неманипулируемые механизмы распределения ресурсов. В работе [10] было доказано, что любой прямой неманипулируемый анонимный механизм распределения ресурсов может быть записан в виде:

$$\pi_i(\tau) = \min[\tau_i, \lambda(\tau)], \tag{2.2}$$

если $\sum\limits_{i \in N} \tau_i \geqslant R$, где $\lambda(\tau)$ - «балансировочная» константа, своя для каждого τ, определяемая из условия $\sum\limits_{i \in N} \pi_i(\tau) = R$. В работе [7] данный результат был обобщен на неанонимные механизмы, то есть было показано, что любой прямой неманипулируемый анонимный механизм распределения ресурсов может быть записан в виде:

$$\pi_i(\tau) = \min[\tau_i, \lambda_i(\tau_{-i})], \tag{2.3}$$

если $\sum\limits_{i \in N} \tau_i \geqslant R$, где $\lambda_i(\tau_{-i})$ определяется из условия $\sum\limits_{i \in N} \pi_i(\tau) = R$. Кроме того, в [7] было доказано, что неанонимный неманипулируемый механизм распределения ресурсов должен обязательно быть механизмом последовательного распределения, т.е. строиться в соответствии с алгоритмом 1. Однако, ни в одной из работ не приводилось конструктивного алгоритма определения $\lambda_i(\tau_{-i})$. Таким образом, аналитическая запись механизмов последовательного распределения ресурсов актуальна. В данной работе эта задача решается для механизмов последовательного распределения ресурсов эквивалентных механизмам прямых или обратных приоритетов.

3. Аналитическая запись механизмов последовательного распределения ресурсов

Из алгоритма 1 построения механизма последовательного распределения ресурсов видно, что количество ресурсов, выдаваемое агентам не-диктаторам, должно зависеть от того, сколько ресурсов осталось после того, как были удовлетворены запросы диктаторов, и от того, насколько «сильны» возможности агента в борьбе за ресурсы в рамках исходного механизма (условно говоря, от того, насколько высок «относительный приоритет» агента). Рассмотрим произвольное множество агентов $S \subseteq N$. Будем считать, что все агенты из $N \backslash S$ - диктаторы. Очевидно, что для любых механизмов остатки ресурсов, которые могут быть распределены между агентами из S, всегда будут записываться одинаково:

$$R(S) = R - \sum_{j \in N \backslash S} \tau_j. \tag{3.1}$$

Для того, чтобы оценить, как эти остатки могут быть распределены между агентами из S, необходимо более детальное изучение исходного механизма $\pi(s)$.

3.1. Механизмы прямых приоритетов

В соответствии с [2], в механизмах прямых приоритетов, любой агент при фиксированных заявках остальных агентов получает максимально возможное количество ресурсов, сообщая максимальную свою заявку. То есть для некоторого шага l алгоритма 1, $\forall i \in N_l$ $s^*_{il} = R$ и каждый агент из множества N_l может получить ресурсы в количестве, не большем чем:

$$x_{il} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in N_l} \eta_j(R)} R(N_l). \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый механизмом прямых приоритетов с функциями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, имеет вид:*

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N : i \in S} \{R(S) d_i(S)\}\}, \; i \in N, \tag{3.3}$$

где

$$d_i(S) = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in S} \eta_j(R)}, \; i \in S \tag{3.4}$$

может трактоваться как «относительный приоритет» агента i в множестве S, а $R(S)$ определяется выражением (3.1).

Доказательство теоремы 3.1 и других утверждений вынесено в приложение к статье. Легко видеть, что выражение (3.3) не противоречит выражению (2.3), так как $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}$ не зависит от τ_i. Кроме того, полученный механизм последовательного распределения ресурсов является механизмом абсолютных приоритетов, так как выражение (3.3) может рассматриваться как запись приоритетного механизма, в котором функция приоритета каждого агента не зависит от его сообщения: $\forall \eta_i \; \eta_i(\tau_i) = \max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\}$.

Пример 3.1. Пусть по аналогии с примером 2.1 $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и используется пропорциональный механизм (функция приоритетов $\eta_i = A_i s_i$) с вектором приоритетов $A = \{3, 2, 10, 1, 17\}$.

Для агента 1 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1, 2, 4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = 3.125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 5 $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S)d_i(S)\} \approx 5.17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1, 2, 4, 5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а недиктаторами - 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в примере 1: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$.

Из аналитической записи неанонимного механизма последовательного распределения ресурсов как частный случай можно получить аналитическую запись для анонимного механизма.

Следствие 3.1. *Пусть агенты упорядочены по сообщаемым точкам пика: $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$. Тогда механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый анонимным механизмом распределения ресурсов, записывается следующим образом:*

$$x_i = \min\{\tau_i, \frac{R - \sum\limits_{j<i} x_j}{n-(i-1)}\}, \; i \in N. \tag{3.5}$$

Из аналитической записи механизма последовательного распределения ресурсов видно, что для его построения не важен конкретный вид функций приоритетов $\eta_i(s_i)$, а важно ее значение при сообщении максимально возможной заявки $\bar{s}_i = R : \eta_i(R)$.

Определение 3.1. *Механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов - механизм прямых приоритетов с функциями приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$.*

Теорема 3.2. *Для любого механизма прямых приоритетов, задаваемого функциями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, при заданном количестве распределяемых ресурсов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов, задаваемый следующими функциями приоритетов: $\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, где*

$$A_i = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j \in N} \eta_j(R)}, \; i \in N.$$

Если механизм прямых приоритетов анонимен, то в соответствии с теоремой 3.2 он эквивалентен механизму пропорционального распределения ресурсов (функции приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = s_i$), что полностью соответствует результатам, полученным в [1].

Проиллюстрируем, как теорема 3.2 работает для неанонимных механизмов.

Пример 3.2. Все приоритетные механизмы распределения ресурсов, задаваемые функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = A_i s_i^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $i \in N$ эквивалентны приоритетному механизму с функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$.

Однако, в общем случае одному и тому же механизму прямых приоритетов при одном и том же составе агентов для разного количества ресурсов, доступного к распределению будут эквивалентны разные механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов.

Пример 3.3. Пусть n = 2 и $\eta_1(s_1) = B_1 s_1^2$, $\eta_2(s_2) = B_2 s_2^3$. Тогда этому механизму эквивалентен механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов $\tilde{\eta}_1(s_1) = B_1 s_1$, $\tilde{\eta}_2(s_2) = B_2 R s_2$, где R – доступное к распределению количество ресурсов.

Перейдем к рассмотрению механизмов обратных приоритетов.

3.2. Механизмы обратных приоритетов

В отличие от механизмов прямых приоритетов, для механизмов обратных приоритетов равновесные заявки агентов в алгоритме построения механизма последовательного распределения ресурсов на каждом шаге l (см. алгоритм 1) могут меняться, так как они определяются из решения следующей системы уравнений [2]:

$$s_i^{l*} = \frac{\eta_i(s_i^{l*})}{\sum\limits_{j \in N_l} \eta_j(s_j^{l*})} R_{l-1},\ i \in N_l.$$

Одновременно s_i^{l*} является тем максимальным количеством ресурсов, которое агент i может получить на шаге l.

Теорема 3.3. *Механизм последовательного распределения ресурсов, порождаемый механизмом обратных приоритетов с функциями приоритетов $\eta_i(s_i)$, $i \in N$, имеет вид:*

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N : i \in S}\{s_i^*(S)\}\},\ i \in N, \tag{3.6}$$

где $s_i^*(S)$ определяется из решения системы уравнений

$$s_i^*(S) = \frac{\eta_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j \in S} \eta_j(s_j^*(S))} R(S), i \in S, \tag{3.7}$$

а $R(S)$ определяется выражением (3.1).

В системе уравнений (3.7) не фигурируют точки пиков агентов, поэтому $\forall i \in N$ $\max\limits_{S : i \in S}\{s_i^*(S)\}$ не зависит от τ_i, следовательно (3.6) не противоречит (2.3). По аналогии с (3.3), механизм, определяемый (3.6), является механизмом абсолютных приоритетов.

Пример 3.4. $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, функции приоритетов: $\eta_i = B_i/s_i$, вектор приоритетов $B = \{9, 4, 100, 1, 289\}$

Для агента 1 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1, 2, 4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 3.125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 5 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} \approx 5.17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1, 2, 4, 5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а недиктаторами - 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в примерах 2.1 и 3.1: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$.

Пример 3.5. Пусть $R = 10$, $n = 5$, $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, функции приоритетов: $\eta_i = B_i - s_i$, вектор приоритетов $B = \{3, 2, 10, 1, 17\}$.

Для агента 1 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 1 = \tau_1$ и достигается при $S = \{1, 2, 4\}$.

Для агента 2 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{2}{3} < \tau_2$ и достигается при $S = \{2, 4\}$.

Для агента 3 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = 3.125 > \tau_3$ и достигается при $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Для агента 4 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} = \frac{1}{3} < \tau_4$ и достигается при $S = \{2, 4\}$. Для агента 5 $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\} \approx 5.17 > \tau_5$ и достигается при $S = \{1, 2, 4, 5\}$.

Соответственно, диктаторами являются агенты 1, 3 и 5, а недиктаторами - 2 и 4. Итоговое распределение ресурсов аналогично полученному в предыдущем примере и примерах 2.1 и 3.1: $x^* = \{1, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{3}, 5\}$.

Из примеров 3.4 и 3.5 видно, что механизм прямых приоритетов и различные механизмы обратных приоритетов дают одинаковый результат при идентичных начальных условиях, что позволяет выдвинуть гипотезу о возможной эквивалентности механизмов прямых и обратных приоритетов.

4. Эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов

Для того, чтобы в общем виде доказать эквивалентность механизмов прямых и обратных приоритетов, необходимо показать, что для произвольного набора функций прямых приоритетов $\eta\uparrow = \{\eta\uparrow_1, \ldots, \eta\uparrow_n\}$ найдется набор функций обратных приоритетов $\eta\downarrow = \{\eta\downarrow_1, \ldots, \eta\downarrow_n\}$ (и наоборот), такой, что разрешима систем уравнений:

$$d_i(S)R(S) = s_i^*(S),\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N.$$

Или

$$\frac{\eta\uparrow_i(R)}{\sum\limits_{j\in S}\eta\uparrow_j(R)} = \frac{\eta\downarrow_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j\in S}\eta\downarrow_j(s_j^*(S))},\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N. \tag{4.1}$$

Однако, в общем не существует набора функций приоритетов, удовлетворяющих условию (4.1). Определим условия, которым должен удовлетворять механизм обратных приоритетов для того, чтобы для него существовал эквивалентный механизм прямых приоритетов. Из теоремы 3.2 следует, что для всех механизмов прямых приоритетов величины $d_i(S)$ могут быть представлены в виде:

$$d_i(S) = \frac{A_i}{\sum\limits_{j\in S}A_j},\ i \in N,$$

где A_i не зависит от S для $\forall i \in N$ при каждом фиксированном R. Соответственно, выражение (4.1) может быть преобразовано в

$$\frac{A_i}{\sum\limits_{j\in S}A_j} = \frac{\eta\downarrow_i(s_i^*(S))}{\sum\limits_{j\in S}\eta\downarrow_j(s_j^*(S))},\ \forall i \in S,\ \forall S \subset N. \tag{4.2}$$

Обозначим $B_i(S) = \eta\downarrow_i(s_i^*(S))$.

Теорема 4.1. *При фиксированных распределяемых ресурсах и множестве агентов для механизма обратных приоритетов эквивалентный механизм прямых приоритетов существует тогда и только тогда, когда*

$$\frac{B_i(N)}{B_i(S)} = D(S), \forall S \subseteq N, \forall i \in S, \tag{4.3}$$

где $D(S)$ зависит только от множества S и количества ресурсов $R(S)$. При этом эквивалентным исходному механизму обратных приоритетов механизмом прямых приоритетов является взвешенный пропорциональный механизм с функциями приоритетов $\eta_i(s_i) = B_i(N)s_i$, $i \in N$.

Определение 4.1. *Механизм обратных приоритетов с постоянными весами агентов - механизм обратных приоритетов, удовлетворяющий условию (4.3).*

Приведем примеры механизмов обратных приоритетов, удовлетворяющих (4.3).

Пример 4.1. *Степенной механизм обратных приоритетов.* Пусть функции приоритетов - $\eta\downarrow_i = B_i s_i^{\alpha}$, $\alpha < 0$, $i \in N$. Тогда $\forall S \subseteq N, \forall i \in S$

$$s_i^*(S) = \frac{B_i^{1/(1-\alpha)}}{\sum\limits_{j \in S} B_j^{1/(1-\alpha)}} R(S).$$

Следовательно, $\forall R \geqslant 0$ данный механизм эквивалентен механизму пропорционального распределения ресурсов с функциями приоритетов $\eta\uparrow_i = A_i s_i$, где $A_i = B_i^{1/(1-\alpha)}$, $i \in N$.

Приведем пример механизма обратных приоритетов, который в зависимости от значений параметров функций приоритетов может удовлетворять или не удовлетворять (4.3).

Пример 4.2. *Линейный механизм обратных приоритетов.* Пусть функции приоритетов: $\eta\downarrow_i = B_i - \alpha_i s_i$, $\alpha_i > 0$, $i \in N$. Тогда $\forall i \in N$:

$$s_i^*(S) = \frac{B_i/(1+\gamma(S)\alpha_i)}{\sum\limits_{j \in S} B_j/(1+\gamma(S)\alpha_j)} R(S),$$

где $\gamma(S)$ определяется из условия $\sum\limits_{i \in S} s_i^*(S) = R(S)$. Если $\forall i \in N$ $\alpha_i = \alpha$, то

$$s_i^*(S) = \frac{B_i}{\sum\limits_{j \in S} B_j} R(S).$$

Следовательно, $\forall R \geqslant 0$ данный механизм эквивалентен механизму взвешенного пропорционального распределения ресурсов с $\eta\uparrow_i = B_i s_i$, $i \in N$.

Однако, если показатели степени α_i – разные, условие (4.3) выполняется, только если $\forall S \subseteq N$, $\forall i, j \in S$ выполняется равенство

$$(\gamma(N) - \gamma(S))(\alpha_i - \alpha_j) = 0.$$

Иными словами, для выполнения (4.3) необходимо, чтобы $\forall R \geqslant 0$ $\forall S \subseteq N$ $\gamma(S) = const$, что невыполнимо, так как $\gamma(S)$ – «балансировочная» константа, зависящая от величины $R(S)$, которая может в общем случае произвольно меняться в пределах $[0, R]$.

Таким образом, не для всех механизмов обратных приоритетов существуют эквивалентные механизмы прямых приоритетов.

5. Заключение

В данной статье получены аналитические записи прямых неманипулируемых механизмов последовательного распределения ресурсов, соответствующих исходным механизмам прямых (теорема 3.1) и обратных (теорема 3.3) приоритетов. Это позволило показать, что для всех механизмов прямых приоритетов (теорема 3.2) и механизмов обратных приоритетов с постоянными весами агентов (теорема 4.1) существуют эквивалентные механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов (которые являются механизмами прямых приоритетов). В тоже время, существуют механизмы обратных приоритетов, для которых не существует эквивалентных механизмов прямых приоритетов.

Данные об эквивалентности разных классов приоритетных механизмов приведены в таблице 1.

Полученные результаты могут облегчить решение задачи поиска эффективных по заданному критерию (например, максимума суммарной полезности всех агентов) механизмов распределения ресурсов. Так, нет смысла рассматривать «сложные» механизмы прямых приоритетов или механизмы обратных приоритетов с постоянными весами агентов. Без потери эффективности (так как результаты равновесного распределения будут те же) можно использовать «простые» механизмы взвешенного пропорционального распределения ресурсов. Вопрос о том, когда целесообразно использование механизмов обратных приоритетов без постоянных весов агентов, представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Таблица 1. Отношение эквивалентности между приоритетными механизмами.

Механизм → эквивалентен механизму ↓	Прямых приоритетов	Обратных приоритетов
Прямых приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов.	Для любого механизма обратных приоритетов с постоянными весами агентов существует эквивалентный механизм взвешенного пропорционального распределения ресурсов обратных приоритетов.
Обратных приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм обратных приоритетов.	Соотношения эквивалентности могут быть установлены между различными механизмами обратных приоритетов с постоянными весами агентов.
Абсолютных приоритетов	Для любого механизма прямых приоритетов существует эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов.	Для любого механизма обратных приоритетов существует эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов.

6. Приложение

Доказательство теоремы 3.1. Очевидно, что для любого шага l $R(N_l)d_i(N_l)$ совпадает с (3.2). Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}$. Зафиксируем произвольное подмножество агентов $S \subset N$. Покажем, что

$$d_i(S)R(S) \leqslant d_i(S/k)R(S/k) \;\Leftrightarrow\; \tau_k \leqslant d_k(S)R(S)$$

$\forall i, k \in S$:

$$d_i(S)R(S)\,?\,d_i(S/k)R(S/k),$$

$$\Updownarrow$$

$$\eta_i(R)(R-\sum_{j\in S}\tau_j)\sum_{j\in S/k}\eta_j(R)\,?\,\eta_i(R)(R-\sum_{j\in S}\tau_j-\tau_k)\sum_{j\in S}\eta_j(R),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k\sum_{j\in S}\eta_j(R)?(R-\sum_{j\in S}\tau_j)(\sum_{j\in S}\eta_j(R)-\sum_{j\in S/k}\eta_j(R)),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k?\frac{\eta_k(R)}{\sum\limits_{j\in S}\eta_j(R)}(R-\sum_{j\in S}\tau_j),$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_k?d_k(S)R(S).$$

Следовательно, $\forall i\in N\ \max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}$ достигается, когда $\forall k\in S\backslash i\ \tau_k > d_k(S)R(S)$. При этом, если $\tau_i > d_i(S)R(S)$, т.е. все множество S состоит из не-диктаторов, то во множестве $S\backslash i$ так же не возникнет новых диктаторов, так как $\forall j\in S\backslash i$

$$\tau_j > d_j(S)R(S) > d_j(S/i)R(S/i).$$

Следовательно, $\forall S'\subset S$, $\forall j\in S'\ \tau_j > d_j(S')R(S')$, т.е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

Однако, если $\tau_i \leqslant d_i(S)R(S)$, то возможно, что $\exists k\in S\backslash i$, такое, что $\tau_k > d_k(S)R(S)$ но $\tau_k\leqslant d_k(S\backslash i)R(S\backslash i)$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k\notin\bigcup\limits_{j<l}K_j$, но $k\in K_l$ в то время как агент $i\in\bigcup\limits_{j<l}K_j$. То есть для агентов-диктаторов $\max\limits_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}$ может достигаться на таких $S\subset N$, в которые входят другие диктаторы. Однако, так как $\tau_k\leqslant d_k(S\backslash i)R(S\backslash i)$, то $\min\{\tau_k,\max\limits_{S:k\in S}\{R(S)d_k(S)\}\}=\tau_k$, что соответствует работе алгоритма 1. $\square$

Доказательство следствия 3.1. В анонимном механизме приоритеты всех агентов одинаковы, следовательно, $\forall i \in N$ $d_i(S) = \frac{1}{\#S}$, где $\#S$ - число агентов в множестве S. Из упорядочения агентов по возрастанию точек пика следует, что если агент $k \in N$, является диктатором, то любой агент $i < k$ так же является диктатором, если нет, то любой агент $i > k$ так же не является диктатором. То есть, если агент $k \in N$ - диктатор, то все агенты, следующие за ним в упорядочении, могут получить не более $\dfrac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} s_j}{n-k}$ ресурсов. Причем

$$\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k} \geqslant \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k-1} \tau_j}{n-k+1} \Leftrightarrow \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k-1} \tau_j}{n-k+1} \geqslant \tau_k.$$

Следовательно, $\max\limits_{S: i \in S}\{R(S) d_i(S)\} = \max\limits_{k<i}\{\dfrac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k}\}$, а анонимный механизм последовательного распределения ресурсов записывается следующим образом:

$$x_i = \min\{s_i, \max_{k<i}\{\frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} \tau_j}{n-k}\}\}.$$

Пусть $k \in N$ - последний в упорядочении агент, который является диктатором. Тогда $\forall j \leqslant k$ $x_j = \tau_j$, $\forall i > k$ $x_i = \dfrac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k}$. Покажем, что $\forall i > k$ $x_i = \dfrac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k} = \dfrac{R - \sum\limits_{j < i} x_j}{n-(i-1)}$. Для агента $k+2$:

$$x_{k+2} = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j - x_{k+1}}{n-(k+2-1)} = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-(k+1)}(1 - \frac{1}{n-k}) = \frac{R - \sum\limits_{j \leqslant k} x_j}{n-k} = x_{k+1}$$

Следовательно, по рекурсии, получаем, что $\forall i > k$ $x_i = \dfrac{R - \sum\limits_{j < i} x_j}{n-(i-1)}$.

То есть $\forall i \in N$ $x_i = \min\{s_i, \dfrac{R - \sum\limits_{j < i} x_j}{n-(i-1)}\}$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Для механизма, задаваемого функциями приоритетов $\tilde{\eta}_i(s_i) = A_i s_i$, $i \in N$, эквивалентный механизм последовательного распределения ресурсов записывается следующим образом:

$$\forall S \subseteq N,\ \forall i \in S\ x_i = \min\{s_i, \max_{S:i\in S}\{R(S)d_i(S)\}\},$$

где

$$d_i(S) = \frac{A_i R}{\sum\limits_{j\in S} A_i R} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{l\in N}\eta_j(R)} / \sum_{j\in S}\frac{\eta_j(R)}{\sum\limits_{l\in N}\eta_l(R)} = \frac{\eta_i(R)}{\sum\limits_{j\in S}\eta_j(R)}.$$

То есть данный механизм последовательного распределения ресурсов является эквивалентным исходному механизму прямых приоритетов, задаваемому функциями приоритетов $\eta_i(S)$, $i \in N$. □

Доказательство теоремы 3.3. Очевидно, что $s_i^*(S)$ эквивалентно s_i^l* при $S = N\setminus \bigcup\limits_{k<l} K_k$.

Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\}$. Зафиксируем произвольное подмножество агентов $S \subset N$. Покажем, что $\forall i, k \in S$

$$s_i * (S) \leqslant s_i^*(S\setminus k)\ \Leftrightarrow\ \tau_k \leqslant s_k^*(S).$$

Пусть $\tau_k \leqslant s_k^*(S)$. Так как

$$\sum_{i\in S/k} s_i^*(S) + s_k^*(S) = \sum_{i\in S/k} s_i * (S\setminus k) + \tau_k = R(S),$$

то

$$\sum_{i\in S/k} s_i^*(S) \leqslant \sum_{i\in S/k} s_i^*(S\setminus k).$$

Пусть $\exists l, m \in S\setminus k$ такие, что

$$s_m^*(S) \leqslant s_m^*(S\setminus k), \text{ но } s_l^*(S) > s_l * (S\setminus k).$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_m(s_m^*(S)) \geqslant \eta_m(s_m * (S\setminus k)) \text{ и } \eta_l(s_l^*(S)) \leqslant \eta_l(s_l^*(S\setminus k)).$$

При этом

$$\frac{s_l^*(S)}{\eta_l(s_l^*(S))} = \frac{s_m*(S)}{\eta_m(s_m^*(S))} \text{ и } \frac{s_l^*(S\setminus k)}{\eta_l(s_l^*(S\setminus k))} = \frac{s_m^*(S\setminus k)}{\eta_m(s_m^*(S\setminus k))}$$

$$\Downarrow$$

$$s_m^*(S)\frac{\eta_l(s_l^*(S))}{\eta_m(s_m*(S))} > s_m^*(S\backslash k)\frac{\eta_l(s_l^*(S\backslash k))}{\eta_m(s_m^*(S\backslash k))}.$$

$$\Downarrow$$

$$s_m*(S)\frac{\eta_l(s_l^*(S))}{\eta_l(s_l^*(S\backslash k))} > s_m^*(S\backslash k)\frac{\eta_m(s_m^*(S))}{\eta_m(s_m*(S\backslash k))}.$$

$$\Downarrow$$

$$s_m^*(S) > s_m^*(S\backslash k).$$

Получили противоречие.

Пусть $\forall i \in S\backslash k$ $s_i^*(S) \leqslant s_i^*(S\backslash k)$, но $\tau_k > s_k^*(S)$. Тогда

$$R(S) = \sum_{i\in S/k} s_i^*(S) + s_k^*(S) < \sum_{i\in S/k} s_i^*(S\backslash k) + \tau_k,$$

что невозможно.

То есть $\forall i \in N$ $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\}$ достигается, когда $\forall k \in S\backslash i$ $s_k > s_k^*(S)$. При этом, если $\tau_i > s_i^*(S)$ (т.е. все множество S состоит из не-диктаторов), то во множестве $S\backslash i$ так же не возникнет новых диктаторов, так как $\forall j \in S\backslash i$ $\tau_j > s_j^*(S) > s_j^*(S\backslash i)$. Следовательно, $\forall S' \subset S$, $\forall j \in S'$ $\tau_j > s_j^*(S')$, т.е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

Однако, если $\tau_i \leqslant s_i^*(S)$, то возможно, что $\exists k \in S\backslash i$, такое, что $\tau_k > s_k^*(S)$ но $\tau_k \leqslant s_k^*(S\backslash i)$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k \notin \bigcup\limits_{j<l} K_j$, но $k \in K_l$ в то время как агент $i \in \bigcup\limits_{j<l} K_j$. То есть для агентов-диктаторов $\max\limits_{S:i\in S}\{s_i^*(S)\}$ может достигаться на таких $S \subset N$, в которое входят другие диктаторы. Однако, так как $\tau_k \leqslant s_k^*(S\backslash i)$, то $\min\{\tau_k, \max\limits_{S\subset N:k\in S}\{s_k^*(S)\}\} = \tau_k$, что соответствует работе алгоритма 1. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Доказательство следует из того факта, что для двух последовательностей $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ верно следующее утверждение:

$$\forall i \in N\ \frac{a_i}{b_i} = const \Leftrightarrow \forall S \subseteq N, \forall i \in S\ \frac{a_i}{\sum\limits_{j\in S} a_j} = \frac{b_i}{\sum\limits_{j\in S} b_j}.$$

Поэтому, при выполнении (4.3), переобозначив $A_i = B_i(N)$, получаем (4.2) и наоборот. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. *Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике.* М.: ИПУ РАН, 1997. 61 с.

2. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. *Большие системы: моделирование организационных механизмов.* М.: Наука, 1989. 248 с.

3. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. *Введение в теорию управления организационными системами* / Под ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. М.: Либроком, 2009. 264 с.

4. Интриллигатор М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория* - М.: Прогресс, 1975. 606 с.

5. Мулин Э. *Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели:Пер. с англ.* М.: Мир, 1991. 464 с.

6. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами.* 2-е издание. М.: Физматлит, 2007. 584 с.

7. Barbera S., Jackson M., Neme A. *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior. 1997. V. 18. № 1. P. 1-21.

8. Bossert W., Weymark J.A. *Social choice (new developments)* / The New Palgrave Dictionary of Economics. Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan, 2008.

9. Mas-Collel A., Whinston M. D., Green J. R. *Microeconomic theory.* N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. 981 p.

10. Sprumont Y. *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule* // Econometrica. 1991. V. 59. P. 509-519.

EQUIVALENCE AND STRATEGY-PROOFNESS OF NO ANONYMOUS PRIORITY RESOURCE ALLOCATION MECHANISMS

Nikolay Korgin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (nkorgin@ipu.ru).

Abstract: We provide characterizations of strategy-proof mechanisms of sequential resource allocation, which are equivalent to mechanisms of direct and reverse priorities. Previously known equivalency of anonymous priority mechanisms is extended on no anonymous case. Equivalency of all no anonymous mechanisms of direct priorities is shown. We provide characterization of class of mechanisms of reverse priorities, that have equivalent mechanisms of direct priorities.

Keywords: resource allocation mechanisms, strategy-proof mechanisms, game theory, planning mechanisms .