Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.3, с. 87-106

УДК 519.837.3
ББК 22.18

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ИГРЫ

Анна В. Тур
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: markovkina86@mail.ru

Рассмотрены линейно-квадратичные неантагонистические дискретные игры. Введены необходимые и достаточные условия существования равновесия по Нэшу. Получены различные кооперативные решения. Исследовано условие Д.В.К. Янга в линейно-квадратичных дискретных играх. В качестве примера рассмотрена модель планирования производства в условиях конкуренции.

Ключевые слова: линейно-квадратичные дискретные игры, равновесие по Нэшу, кооперативные игры, условие Д.В.К. Янга.

1. Введение

Систематические исследования решений линейно-квадратичных дифференциальных игр обычно связывают с выходом работы [5]. В этой работе большое внимание уделено формализму бескоалиционных линейно-квадратичных дифференциальных игр многих лиц, получены условия существования решений бескоалиционных игр в различных классах стратегий. Однако во многих приложениях сама постановка задач диктует необходимость объединения игроков в коалиции. Поэтому исследование кооперативных дифференциальных игр является актуальной задачей. В данной работе рассматривается кооперативный вариант линейно-квадратичных дискретных игр с бесконечным временем окончания.

Рассмотрим дискретную линейно-квадратичную неантагонистическую игру n лиц, состояние которой в каждый момент времени характеризуется вектором $x(k)$, изменяющимся во времени в соответствии с системой уравнений

$$\begin{gathered} x(k+1) = A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)u_i(k), \\ k \geq k_0, \quad k_0 \in \mathcal{T}_+, \quad x(k_0) = x_0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x \in R^m$ – вектор-столбец, $u_i \in R^r$ – вектор-столбец управления игрока i, $i = 1, \ldots, n$; $A(k), B_i(k) \in Z(\mathcal{T}_+)$ – $(m \times m)$ и $(m \times r)$ – матрицы соответственно, $x(k_0) = x_0$ – начальное состояние, $\mathcal{T}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $Z(\mathcal{T}_+)$ – множество ограниченных на $\mathcal{T}_+$ матриц.

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество всех игроков. Выигрыш игрока $i \in N$ обозначим через $J_i(k_0, x_0, u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Будем предполагать, что выигрыш игрока i имеет вид:

$$J_i(k_0, x_0, u) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k)P_i(k)x(k) + u^T(k)R_i(k)u(k)), \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $P_i(k) = P_i^T(k)$, $\quad R_i(k) = R_i^T(k) \in Z(\mathcal{T}_+)$ – $(m \times m)$ и $(r \times r)$ – матрицы соответственно, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.1. *Набор стратегий вида*

$$\{u_i(k, x) = M_i(k)x(k), \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

будем называть допустимым, если выполняются условия:

1)$M_i(k) \in Z(\mathcal{T}_+)$, $\quad i = 1, \ldots, n$;

2) Система (1.1)*, замкнутая набором стратегий* (1.3)*, т. е. система*

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)M_i(k))x(k)$$

равномерно асимптотически устойчива (при $k \to \infty$)[4].

Предполагается, что игроки выбирают только допустимые стратегии вида $u_i(k,x) = M_i(k)x(k)$, $k \geq k_0$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим построенную выше игру $\Gamma(k_0,x_0)$. Это обозначение показывает, что игра началась в момент времени $k = k_0$ из состояния $x(k_0) = x_0$.

2. Теорема о существовании равновесия по Нэшу

Найдем решение бескоалиционной игры $\Gamma(k_0,x_0)$. В качестве принципа оптимальности будем рассматривать равновесие по Нэшу [6].

Определение 2.1. *Набор стратегий*

$$\{u_i^{NE}(k,x) = M_i^{NE}(k)x(k), i = 1,\ldots,n\}$$

будем называть равновесием по Нэшу, если этот набор допустим в смысле определения 1.1 *и имеет место*

$$J_i(k_0,x_0,u^{NE}) \geq J_i(k_0,x_0,u^{NE}/u_i), \quad i = 1,\ldots,n,$$

где u_i – произвольная стратегия игрока i, такая что набор стратегий $\{u^{NE}/u_i\}$ принадлежит классу допустимых.

Здесь $\{u^{NE}/u_i\}$ обозначает такой набор стратегий, что все игроки $j \neq i$ используют стратегии u_j^{NE}, а игрок i – стратегию u_i.

В теореме 2.1 приведены необходимые и достаточные условия для существования равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(k_0,x_0)$. Пусть $Q_+(\mathcal{T}_+) \subset Z(\mathcal{T}_+)$ – множество положительных ограниченных на $\mathcal{T}_+$ матриц.

Теорема 2.1. *Для того чтобы в игре $\Gamma(k_0,x_0)$ существовало равновесие по Нэшу необходимо и достаточно, чтобы:*

1. *Система матричных уравнений*

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k) + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k)) - \\ -\Theta_i(k) - P_i(k) - M_i^{NE}(k)^T R_i(k) M_i^{NE}(k) = 0, \\ M_i^{NE}(k) = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)\times \\ \times\,(A(k) + \sum\limits_{j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

была разрешима относительно $\{M_i^{NE}(k),\ \Theta_i(k)\} \in Z(\mathcal{T}_+)$, *в виде вещественных, ограниченных матриц размерности* $r \times m$ *и* $m \times m$ *соответственно, где* $\Theta_i(k)$ *– симметричны для любого* $i \in N$.

2. *Набор стратегий*

$$\{u_i^{NE} = M_i^{NE}(k)x(k), \quad i = 1, \dots, n\} \tag{2.1}$$

был бы допустимым в смысле определения 1.1.

3. $(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+), \quad i = 1, \dots, n.$

Тогда набор стратегий (2.1) будет являться равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(k_0, x_0)$, *при этом выигрыш игрока* i *в равновесии равен*

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}) = -x_0^T\Theta_i(k_0)x_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ситуация

$$u^{NE} = (u_1^{NE}, \dots, u_n^{NE})$$

является равновесием по Нэшу. Тогда для любых $i = 1, \dots, n$, и u_i имеет место неравенство:

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}/u_i) \le J_i(k_0, x_0, u^{NE}).$$

Ясно, что u_i^{NE} является оптимальным управлением в следующей задаче:

$$x(k+1) = (A(k) + \sum_{j \ne i} B_j(k)M_j^{NE}(k))x(k) + B_i(k)u_i(k)$$

с начальным условием $x(k_0) = x_0$ и функционалом $J_i(k_0, x_0, u^{NE}/u_i)$. В [4] выведены условия для существования единственного оптимального управления в такого рода задаче. Согласно [4]

$$\{u_i^{NE} = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)(A(k)+$$

$$+\sum_{j \ne i} B_j(k)M_j^{NE}(k))x(k), \quad i = 1, \dots, n\},$$

где $\Theta_i(k)$ – симметричные ограниченные матрицы m-го порядка, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} (A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))- \\ -\Theta_i(k)-P_i(k)-M_i^{NE}(k)^TR_i(k)M_i^{NE}(k)=0, \\ M_i^{NE}(k)=-(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)\times \\ \times(A(k)+\sum\limits_{j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i=1,\ldots,n, \end{cases}$$

$$(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))\in Q_+(\mathcal{T}_+).$$

Откуда и следует необходимость теоремы.

Достаточность. Доказательство достаточности также следует из [4]. Для этого нужно отметить, что при замыкании системы (1.1) набором допустимых управлений $\{u^{NE}/u_i\}$, она превратится в систему с одним управлением:

$$x(k+1)=(A(k)+\sum_{j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k))x(k)+B_i(k)u_i(k). \tag{2.2}$$

Для u_i существуют такие $M_i^{NE}(k)$ и $\Theta_i(k)$ – симметричная, что для них выполняется

$$\begin{cases} (A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))- \\ -\Theta_i(k)-P_i(k)-M_i^{NE}(k)^TR_i(k)M_i^{NE}(k)=0, \\ M_i^{NE}(k)=-(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)\times \\ \times(A(k)+\sum\limits_{j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i=1,\ldots,n, \end{cases}$$

$$(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))\in Q_+(\mathcal{T}_+).$$

Тогда согласно [4], $u_i^{NE}(k)$ – оптимальное управление для системы (2.2) с функционалом J_i, то есть

$$J_i(k_0,x_0,u^{NE}/u_i)\leq J_i(k_0,x_0,u^{NE}), \quad i=1,\ldots,n.$$

Поэтому набор управлений (2.1) будет являться равновесием по Нэшу.

Простые вычисления показывают, что выигрыши игроков в ситуации равновесия по Нэшу будут равны:

$$J_i(k_0, x_0, u^{NE}) = -x_0^T \Theta_i(k_0) x_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\square$

3. Теоремы о существовании набора стратегий, доставляющего максимум произвольной сумме функционалов

Пусть $S \subset N$, $s = |S|$, $i_1, \dots, i_s$ – игроки, входящие в коалицию S. Введем обозначение

$$J^S(k_0, x_0, u) = \sum_{i \in S} J_i(k_0, x_0, u), \quad \text{где} \quad u = (u_1, \dots, u_n),$$

$$u_S(k) = \begin{pmatrix} u_{i_1} \\ u_{i_2} \\ \dots \\ u_{i_s} \end{pmatrix}, \quad B_S = (B_{i_1}, \dots, B_{i_s}),$$

$$P_S = \sum_{i \in S} P_i, \quad R_S = \begin{pmatrix} R_{i_1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & R_{i_2} & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & R_{i_s} \end{pmatrix}.$$

Тогда $J^S = \sum\limits_{i \in S} J_i = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k) P_S(k) x(k) + u_S^T(k) R_S(k) u_S(k)).$

Теорема 3.1. *Для того чтобы существовал единственный набор стратегий*

$$\{u_i^0 = M_i^0(k) x, \quad i \in S\},$$

доставляющий максимум $J^S(k_0, x_0, u)$ при фиксированном наборе стратегий

$$\{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k) x, \quad j \notin S\}$$

необходимо и достаточно, чтобы:

1. *Система матричных уравнений*

$$\begin{cases} (A(k)+\sum\limits_{j\notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)+B_S(k)M_S^0(k))^T\Theta_S(k+1)(A(k)+ \\ +\sum\limits_{j\notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)+B_S(k)M_S^0(k))-\Theta_S(k)-P_S(k)- \\ -M_S^0(k)^T R_S(k)M_S^0(k)=0, \\ M_S^0(k)=-(-R_S(k)+B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k))^{-1}B_S^T(k)\Theta_S(k+1)\times \\ \times(A(k)+\sum\limits_{j\notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)) \end{cases}$$

была разрешима относительно $\{M_S^0(k),\Theta_S(k)\}$*, в виде вещественных, ограниченных матриц размерности* $rs\times m$ *и* $m\times m$ *соответственно, где* $\Theta_S(k)$ *– симметрична.*

2. *Набор стратегий*

$$u^0(k)=\{\bar{u}_j=\bar{M}_j(k)x,\quad j\notin S,\quad u_i^0=M_i^0(k)x(k),\quad i\in S\}, \tag{3.1}$$

где $M_i^0(k)$ *–* i*-й блок матрицы* $M_S^0(k)=\begin{pmatrix} M_{i_1}^0(k)\\ M_{i_2}^0(k)\\ \dots\\ M_{i_s}^0(k)\end{pmatrix}$*, был бы допустимым в смысле определения* 1.1.

3. $(-R_S(k)+B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k))\in Q_+(\mathcal{T}_+)$.

Тогда набор стратегий (3.1) доставляет максимум $J^S(k_0,x_0,u)$ *и* $J^S(k_0,x_0,u^0)=-x_0^T\Theta_S(k_0)x_0$.

Доказательство. Замкнем систему (1.1) допустимым набором управлений $u(k)=\{\bar{u}_j=\bar{M}_j(k)x,\quad j\notin S,\quad u_i=M_i(k)x(k),\quad i\in S\}$:

$$x(k+1)=(A(k)+\sum_{j\notin S}B_j(k)\bar{M}_j(k))x(k)+\sum_{i\in S}B_i(k)u_i(k)$$

или

$$x(k+1)=(A(k)+\sum_{j\notin S}B_j(k)\bar{M}_j(k))x(k)+B_S(k)u_S(k), \tag{3.2}$$

где

$$u_S(k) = \begin{pmatrix} M_{i_1}(k) \\ M_{i_2}(k) \\ \dots \\ M_{i_s}(k) \end{pmatrix} x(k).$$

Тогда систему (3.2) можно рассмотреть как систему с одним управлением $u_S(k)$ и функционалом J^S. Согласно [4], чтобы у этой системы существовало единственное управление, доставляющее максимум J^S, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Система матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k))^T \Theta_S(k+1)(A(k)+ \\ + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k) + B_S(k)M_S^0(k)) - \Theta_S(k) - P_S(k)- \\ - M_S^0(k)^T R_S(k) M_S^0(k) = 0, \\ M_S^0(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k))^{-1} B_S^T(k)\Theta_S(k+1)\times \\ \times (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k)\bar{M}_j(k)) \end{cases}$$

   была разрешима относительно$\{M_S^0(k), \Theta_S(k)\}$, в виде вещественных, ограниченных матриц размерности $rs \times m$ и $m \times m$ соответственно, где $\Theta_S(k)$ – симметрична.

2. Управление $u_S^0(k) = M_S^0(k)x(k)$ было бы допустимым в смысле определения 1.1.

3. $(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S(k+1)B_S(k)) \in Q_+(\mathcal{T}_+)$.

Тогда управление $u_S^0(k)$ доставляет максимум функционалу J^S и $J^S(k_0, x_0, u^0) = -x_0^T \Theta_S(k_0) x_0$, где $u^0(k) = \{\bar{u}_j = \bar{M}_j(k)x, \quad j \notin S, \quad u_i^0 = M_i^0(k)x(k), \quad i \in S,\}$, что и требовалось доказать.

$\square$

4. Кооперативный случай дискретной игры

Перейдем теперь к рассмотрению кооперативного варианта игры. Для этого предположим, что игроки имеют возможность образовать максимальную коалицию с целью обеспечения максимального суммарного выигрыша. На основе теоремы 3.1 построим решения дискретной кооперативной игры.

4.1. Пропорциональное решение

Предположим, что игроки, договорились совместно достичь максимального суммарного выигрыша:

$$J^N(k_0, x_0, u(k)) = \sum_{i=1}^{N} J_i(k_0, x_0, u(k)).$$

Пусть набор стратегий $u^N = (u_1^N, \ldots, u_n^N)$, где $u_i^N(k) = M_i^N(k)x(k)$, $i = 1, \ldots, n$, доставляет максимум J^N, т.е.

$$u^N = \arg \max_{u_i, i=1,\ldots,n} J^N(k_0, x_0, u(k)).$$

Тогда согласно теореме 3.1 можем найти $M_N(k) = \begin{pmatrix} M_1^N(k) \\ M_2^N(k) \\ \ldots \\ M_n^N(k) \end{pmatrix}$ из системы

$$\begin{cases} (A(k) + B_N(k)M_N(k))^T \Theta_N(k+1)(A(k) + B_N(k)M_N(k)) - \\ -\Theta_N(k) - P_N(k) - M^N(k)^T R_N(k) M^N(k) = 0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k) + B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1} B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Максимальное значение J^N будет

$$J^N(k_0, x_0, u^N(k)) = -x_0^T \Theta_N(k_0) x_0.$$

Пусть u_i^{prop} – стратегия игрока i, максимизирующая его выигрыш при условии, что остальные игроки используют стратегии u_j^N, т.е.

$$u_i^{prop} = \arg \max_{u_i} J_i(u^N/u_i), i = 1, \ldots, n.$$

Если управление u_i^{prop} существует, то согласно теореме 3.1 можем найти $M_i^{prop}(k)$ из системы

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k) + B_i(k)M_i^{prop})^T\Theta_{i,prop}(k+1)(A(k)+ \\ + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k)B_i(k)M_i^{prop}) - \Theta_{i,prop}(k) - P_i(k)- \\ - M_i^{prop}(k)^T R_i(k) M_i^{prop}(k) = 0, \\ M_i^{prop}(k) = -(-R_i(k) + B_i^T(k)\Theta_{i,prop}(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_{i,prop}(k+1)\times \\ \times (A(k) + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^N(k)), \quad i\in N. \end{cases}$$

При этом

$$J_i(k_0, x_0, u^N/u_i^{prop}) = -x_0^T\Theta_{i,prop}x_0.$$

Введем обозначения

$$\lambda_i = J_i(k_0, x_0, u^N/u_i^{prop}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Тогда, согласно определению пропорционального решения игры [8], выигрыш каждого игрока будет определяться следующим образом:

$$\alpha_i^{prop} = \frac{\lambda_i}{\Lambda} J^N(k_0, x_0, u^N).$$

Вектор

$$\alpha^{prop} = (\alpha_1^{prop}, ..., \alpha_n^{prop})$$

будем называть пропорциональным решением дискретной игры.

4.2. Решения, основанные на построении характеристической функции

Решения кооперативных дискретных игр, основанные на построении характеристической функции, в достаточной степени объективно отражают вклад каждого игрока в достижение коалициями максимального суммарного результата.

Для определенной линейно-квадратичной дискретной игры $\Gamma(k_0, x_0)$ характеристическую функцию

$$v(S, x_0) : 2^N \to R$$

будем строить по следующему правилу (см., например, [7]):

$$v(S, x_0) = \max_{u_i, i \in S} J^S(u^{NE}/u^S).$$

где $(u^{NE}/u^S) = \{u_j^{NE}, j \notin S, \quad u_i, i \in S\}$. Заметим, что в общем случае построенная таким образом характеристическая функция не является супераддитивной.

Обозначим

$$\{u_i^*\}_{i \in S} = \arg\max_{u_i, i \in S} J^S(u^{NE}/u^S).$$

Тогда, если набор стратегий

$$\{u_i^* = M_i^*(k)x, i \in S\}$$

существует, то согласно теореме 3.1, $M_S^*(k) = \begin{pmatrix} M_{i_1}^*(k) \\ M_{i_2}^*(k) \\ \cdots \\ M_{i_s}^*(k) \end{pmatrix}$ можно найти из системы

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k) + B_S(k) M_S^*(k))^T \Theta_S^*(k+1)(A(k) + \\ + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k) + B_S(k) M_S^*(k)) - \Theta_S^*(k) - P_S(k) - \\ - M_S^*(k)^T R_S(k) M_S^*(k) = 0, \\ M_S^*(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_S^*(k+1)B_S(k))^{-1} B_S^T(k)\Theta_S^*(k+1) \times \\ \times (A(k) + \sum\limits_{j \notin S} B_j(k) M_j^{NE}(k)). \end{cases}$$

При этом

$$J^S(k_0, x_0, u^{NE}/u_S^*) = -x_0^T \Theta_S^* x_0.$$

Согласно определению характеристической функции получаем

$$v(S, x_0) = -x_0^T \Theta_S^* x_0.$$

После определения значения характеристической функции для каждой коалиции мы можем воспользоваться любым из известных кооперативных принципов оптимальности, таких как вектор Шепли, С-ядро и другие.

5. Условие Д.В.К. Янга для линейно-квадратичных дискретных игр

Конкретизируем условие Д.В.К. Янга [10] для линейно-квадратичных дискретных игр. Тем самым мы получим условие, страхующее игроков от распада максимальной коалиции N.

Пусть набор стратегий $u^N = (u_1^N, \dots, u_n^N)$ доставляет максимум J^N. Траекторию $x^*(k)$, которая реализуется при замыкании системы (1.1) набором стратегий u^N, будем называть оптимальной.

Определим множество дележей в дискретной кооперативной игре:

$$C = \{\varphi(k_0, x_0) = (\varphi_1(k_0, x_0), \dots, \varphi_n(k_0, x_0)) : \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(k_0, x_0) = v(N, x_0),$$
$$\varphi_i(k_0, x_0) \geq v(i, x_0), \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через $M \subset C$ – кооперативный принцип оптимальности.

Пусть $\Gamma(k, x^*(k))$ подыгра игры $\Gamma(k_0, x_0)$, которая начинается в момент времени k из состояния $x^*(k)$. В этой подыгре введем характеристическую функцию $v(S, x^*(k))$ таким же образом, как она была введена в игре $\Gamma(k_0, x_0)$. Тогда множество дележей подыгры равно

$$C(x^*(k)) = \{\varphi(k, x^*(k)) = (\varphi_1(k, x^*(k)), \dots, \varphi_n(k, x^*(k))) :$$
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(k, x^*(k)) = v(N, x^*(k)), \quad \varphi_i(k, x^*(k)) \geq v(i, x^*(k)), \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через $M(x^*(k)) \subset C(x^*(k))$ принцип оптимальности $M \subset C$, реализуемый в подыгре $\Gamma(k, x^*(k))$.

Определение 5.1. *Пусть $\varphi(k_0, x_0) \in M$, тогда вектор-функцию $\beta(k) = (\beta_1(k), \dots, \beta_n(k))$, $k \geq k_0$ назовем процедурой распределения дележа (ПРД) если,*

$$\varphi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_i(k), \quad i = 1, \dots, n.$$

Интерпретация ПРД следующая: $\beta_i(k)$ – выплата игроку i на шаге k.

Определение 5.2. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \dots, \beta_n(k))$ называется состоятельной во времени ПРД, если при любом $l \geq k_0$ выполняется следующее равенство*

$$\varphi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{l} \beta_i(k) + \varphi_i(l+1, x^*(l+1)), i = 1, \dots, n,$$

где $\varphi_i(k_0, x_0) \in M$, $\varphi_i(l+1, x^*(l+1) \in M(x^*(l+1))$.

Эти понятия впервые введены в [2], [3]. В определении 5.2 значение $\varphi_i(k_0, x_0)$ представляет собой сумму двух слагаемых. Первое является «накопленным выигрышем» игрока i к моменту времени $l+1$, если выплаты сделаны согласно ПРД $\beta(k)$, а второе является выигрышем игрока i в подыгре $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ при условии, что при решении подыгры $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ используется тот же принцип оптимальности, что и при решении игры $\Gamma(k_0, x_0)$.

Теорема 5.1. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \dots, \beta_n(k))$, где*

$$\beta_i(k) = \varphi_i(k, x^*(k)) - \varphi_i(k+1, x^*(k+1)), \quad i = 1, \dots, n \tag{5.1}$$

является состоятельной во времени ПРД.

Доказательство. Покажем сначала, что вектор $\beta_i(k)$, определенный в (5.1), является ПРД. Из равномерной асимптотической устойчивости системы (1.1) имеем:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_i(k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (\varphi_i(k, x^*(k)) - \varphi_i(k+1, x^*(k+1))) = \varphi_i(k_0, x_0) - \\ - \varphi_i(\infty, x^*(\infty)) = \varphi_i(k_0, x_0),$$

где $\varphi_i(\infty, x^*(\infty)) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_i(k, x^*(k)) = 0$.

Покажем теперь, что $\beta_i(k)$ является состоятельной во времени ПРД:

$$\sum_{k=k_0}^{l} \beta_i(k) + \varphi_i(l+1, x^*(l+1)) = \sum_{k=k_0}^{l} (\varphi_i(k, x^*(k)) - \varphi_i(k+1, x^*(k+1))) + \\ + \varphi_i(l+1, x^*(l+1)) = \varphi_i(k_0, x_0) - \varphi_i(l+1, x^*(l+1)) + \varphi_i(l+1, x^*(l+1)) = \\ = \varphi_i(k_0, x_0).$$

Теорема доказана. □

Предположим, что если на шаге k происходит распад максимальной коалиции, то игроки узнают об этом до выбора ими стратегий $u_i(k)$.

Определение 5.3. *Дележ $\varphi(k_0,x_0)=(\varphi_1(k_0,x_0),\dots,\varphi_n(k_0,x_0))$ удовлетворяет условию Д.В.К. Янга [10], если выполнено неравенство*

$$\sum_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)+v(i,x^*(l+1))\geq v(i,x_0),\quad i=1,\dots,n \tag{5.2}$$

при любом $l\geq k_0$, где $\beta(k)=(\beta_1(k),\dots,\beta_n(k))$ состоятельная во времени ПРД, соответствующая дележу $\varphi(k_0,x_0)$.

Интерпретировать (5.2) можно следующим образом: до момента $l+1$ игроки образуют максимальную коалицию и используют стратегии, максимизирующие суммарный выигрыш, получают при этом «накопленные выигрыши» $\sum\limits_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)$ согласно ПРД $\beta(k)$. В момент $l+1$ происходит распад максимальной коалиции, и в подыгре $\Gamma(l+1,x^*(l+1))$ игрок i, играя индивидуально, получает выигрыш $v(i,x^*(l+1))$. Таким образом, условие (5.2) гарантирует, что в случае распада максимальной коалиции в момент $l+1$, игроки получат не меньше, чем если бы играли индивидуально изначально.

Выведем достаточное условие для выполнения условия Д.В.К. Янга в линейно-квадратичных дискретных играх. Заметим, что

$$\sum_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)+v(i,x^*(l+1))-v(i,x_0)=\sum_{k=k_0}^{l}(\beta_i(k)+v(i,x^*(k+1))-v(i,x^*(k))).$$

Тогда для выполнения условия Янга достаточно, чтобы

$$\beta_i(k)+v(i,x^*(k+1))-v(i,x^*(k))\geq 0\quad i=1,\dots,n,\quad k\geq k_0.$$

В разделе 4.2. было показано, что в линейно-квадратичной дискретной игре $v(i,x^*(k))$ можно определить по следующему правилу

$$v(i,x^*(k))=-x^{*T}(k)\Theta_i^*(k)x^*(k),$$

где $\Theta_i^*(k)$ – решение системы матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k) + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k) + B_i(k)M_i^*(k))^T\Theta_i^*(k+1)(A(k)+ \\ + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k) + B_i(k)M_i^*(k)) - \Theta_i^*(k) - P_i(k)- \\ - M_i^*(k)^T R_S(k) M_i^*(k) = 0, \\ M_i^*(k) = -(-R_S(k) + B_S^T(k)\Theta_i^*(k+1)B_S(k))^{-1}B_S^T(k)\Theta_i^*(k+1)\times \\ \times (A(k) + \sum\limits_{j\in N, j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)). \end{cases}$$

Тогда

$$\beta_i(k) + v(i,k+1) - v(i,k) = \beta_i(k) + x^{*T}(k)\Theta_i^*(k)x^*(k)- \\ - x^{*T}(k+1)\Theta_i^*(k+1)x^*(k+1) = \beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i^*(k)- \\ - (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T\Theta_i^*(k+1)(A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k),$$

где $M_N(k) = \begin{pmatrix} M_1^N(k) \\ M_2^N(k) \\ \dots \\ M_n^N(k) \end{pmatrix}$ согласно разделу 4.1 находятся из системы:

$$\begin{cases} (A(k) + B_N(k)M_N(k))^T\Theta_N(k+1)(A(k) + B_N(k)M_N(k))- \\ - \Theta_N(k) - P_N(k) - M^N(k)^T R_N(k) M^N(k) = 0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k) + B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1}B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Получаем, что если

$$\beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i^*(k) - (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T\Theta_i^*(k+1)(A(k)+ \\ + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) \geq 0$$

выполнено для всех $i = 1,\dots,n$ и при всех $k \geq k_0$, то дележ будет удовлетворять условию Д.В.К. Янга.

6. Пример

Рассмотрим пример планирования производства в условиях конкуренции. Решение данного примера для случае непрерывного времени можно найти в [1]. Предполагаем, что функция спроса имеет вид:

$$g(k) = a - [q_1(k) + q_2(k)], \tag{6.1}$$

где a – положительная постоянная и $q_i(k), i \in \{1, 2\}$ – скорость роста производства фирмы i. Пусть для рыночной цены имеет место следующее уравнение

$$p(k+1) = s(a - [q_1(k) + q_2(k)] - p(k)); \quad p(0) = p_0 > 0.$$

Здесь $s \in [0, \infty)$ – заданный параметр. Доход фирмы i полагаем равным $p(k)q_i(k)$. Для простоты будем предполагать, что производственные затраты обеих фирм описываются одной и той же функцией

$$C(q_i) = cq_i + \frac{1}{2}q_i^2,$$

где $c > 0$ – заданный параметр. Пусть $\rho > 0$ – параметр дисконтирования.

Цель фирмы i заключается в нахождении такого программного управления $q_i \geq 0$, которое доставляет максимум функционалу

$$J_i(q_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k (p(k)q_i(k) - C(q_i(k))),$$

при условии, что система развивается в соответствии с динамикой (6.1) и $q_i(k) \geq 0$ для всех $k \geq 0$. После замены

$$x_1(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}} (p(k) - c),$$

$$x_2(k) = (s(a-c) - c) \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k+1}{2}},$$

$$u_1(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}} (q_1(k) - p(k) + c),$$

$$u_2(k) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{k}{2}} (q_2(k) - p(k) + c)$$

задача сводится к виду (1.1)-(1.2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -3s\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} -s\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} p_0 - c \\ \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}}(s(a-c)-c) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2.1 для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему

$$\begin{cases} (A(k)+B_1(k)M_1^{NE}(k)+B_2(k)M_2^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k)+B_1(k)M_1^{NE}(k)+ \\ +B_2(k)M_2^{NE}(k))-\Theta_i(k)-P_i(k)-M_i^{NE}(k)^T R_i(k)M_i^{NE}(k)=0, \\ M_i^{NE}(k) = -(-R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\Theta_i(k+1)\times \\ \times(A(k)+B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad i=1,2, \quad j\neq i. \end{cases}$$

Тогда ситуация $u^{NE}=(u_1^{NE},u_2^{NE})$ является равновесием по Нэшу, где $u_i^{NE}(k,x)=M_i^{NE}(k)x(k)$. Выигрыши равны

$$J_i = -x_0^T\Theta_i(k_0)x_0.$$

Непосредственной проверкой можно показать, что при $s=1$, $\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{15}$

$$u_1^{NE}(k,x) = \begin{pmatrix} 0.014026995 & -0.06919932097 \end{pmatrix} x(k),$$
$$u_2^{NE}(k,x) = \begin{pmatrix} 0.014026995 & -0.06919932097 \end{pmatrix} x(k),$$

и соответствующие выигрыши равны

$$J_1 = J_2 = -x_0^T \begin{pmatrix} -0.5211388670 & 0.1042843108 \\ 0.1042843108 & -0.5166690544 \end{pmatrix} x_0.$$

Перейдем к рассмотрению кооперативного варианта. Для нахождения J^N можем пользоваться теоремой 3.2. Тогда необходимо решить систему

$$\begin{cases} (A(k)+B_1M_1^N+B_2M_2^N)^T\Theta_N(k+1)(A(k)+B_1M_1^N+B_2M_2^N)- \\ -\Theta_N(k)-P_N(k)-M^N(k)^T R_N(k)M^N(k)=0, \\ M_N(k) = -(-R_N(k)+B_N^T(k)\Theta_N(k+1)B_N(k))^{-1}B_N^T(k)\Theta_N(k+1)A(k). \end{cases}$$

Набор стратегий, доставляющий максимум J^N, имеет вид

$$u_1^N = u_2^N = \begin{pmatrix} 0.02832460 & -0.1397247874 \end{pmatrix} x(k).$$

Для вычисление оптимального дележа с использованием характеристической функции имеем:

$$v(1,2,x_0) = J^N = -x_0^T \begin{pmatrix} -1.042486890 & 0.2095871811 \\ 0.2095871811 & -1.038317865 \end{pmatrix} x_0,$$

$$v(1,x_0) = v(2,x_0) = -x_0^T \begin{pmatrix} -0.5211388670 & 0.1042843108 \\ 0.1042843108 & -0.5166690544 \end{pmatrix} x_0.$$

В случае $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, значения характеристической функции равны $v(1,2,x_0) = 1.661630393$, $v(1,x_0) = v(2,x_0) = 0.82923936$.

Вектор Шепли [9] имеет вид $\varphi^{Sh} = (0.8308151965; 0.8308151965)$.

Проверим теперь выполнение условия Д.В.К. Янга в нашем примере. Имеем

$$v(i,x^*(k)) = -x^{*T}(k) \begin{pmatrix} -0.52124345 & 0.10479359 \\ 0.104793590 & -0.519158933 \end{pmatrix} x^*(k),$$

$$\varphi^{Sh}(k) = -1/2x^{*T}(k) \begin{pmatrix} -0.5211388670 & 0.1042843108 \\ 0.1042843108 & -0.5166690544 \end{pmatrix} x^*(k).$$

Тогда

$$\beta_i(k) + x^{*T}(k)(\Theta_i(k) - (A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T \Theta_i(k+1)(A(k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) = \varphi_i^{Sh}(k) - \varphi_i^{Sh}(k+1) + x^{*T}(k)(\Theta_i(k) -$$

$$-(A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N)^T \Theta_i(k+1)(A(k) + \sum_{i=1}^{n} B_j(k)M_i^N))x^*(k) =$$

$$= x^{*T}(k) \begin{pmatrix} 0.000100235408157 & -0.00049449080455 \\ -0.00049449080455 & 0.0024394701238552 \end{pmatrix} x^*(k) \geq 0,$$

поскольку это выполнено для всех $i = 1, \ldots, n$ и при всех $k \geq k_0$, то дележ будет удовлетворять условию Д.В.К. Янга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А. *Дифференциальные игры в менеджменте*// Научные доклады Научно-исследовательского института менеджмента СПбГУ. 2006. № 38(R). С. 6-8.

2. Петросян Л.А. *Построение сильно динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх*// Вестн. С.-Петерб. ун-та. 1992. № 4. С. 33-38.

3. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами*. Вестн. Ленингр. ун-та. 1979. № 1. С. 46-54.

4. Смирнов Е.Я. *Стабилизация программных движений*, СПб:Изд-во С.-Петербургского университета, 1997.

5. Basar T., Olsder G.J. *Non-cooperative differential games*, Academic Press, 1992.

6. Nash J. *Non-cooperative Games*// Ann. of Math. 1951. V. 54. P. 286-295.

7. Petrosjan L.A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction*// Journal of Economic Dynamic and Control. 2003. V. 27. P. 381-398.

8. Petrosjan L.A., Yeung D.W.K. *Proportional Time-Consistent Solution in Differential Games*// Extended Abstracts Volume of the 2-nd International Conference "Logic, Game Theory and Social Choice". 2001. St Petersburg State University. P. 254-256.

9. Shapley L.S. *A Value for n-Person Games* // Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307-317.

10. Yeung D.W.K. *An Irrational-Behavior-Proof Condition in Cooperative Defferential Games*// IGTR. 2007. V. 9. № 1. P. 5-7.

LINEAR-QUADRATIC NON-ANTAGONISTIC DISCRETE-TIME DYNAMIC GAMES

Anna Tur, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Peterburg State University, post-graduate student (markovkina86@mail.ru).

Abstract: Linear-quadratic discrete-time dynamic games are considered. The necessary and sufficient conditions of the existence of Nash equilibrium in such class of games are presented. Different cooperative solutions are obtained. D.W.K. Yeung's condition for linear-quadratic discrete-time dynamic games is studied. As an example, the model of production planning under competition is examined.

Keywords: linear-quadratic games, Nash equilibrium, cooperative games, D.W.K. Yeung's condition.