Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.4, с. 31-40

УДК 518.9
ББК В18

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА КОМИТЕТОВ

Анастасия М. Калугина
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
имени Н.Г. Чернышевского
Чита
e-mail: kaluginam82@yandex.ru

В статье описаны процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета, предложенные Brams S.F., Steven J., D. Marc Kilgour, M.Remzi Sanver. Представлен метод производящих функций для этих процедур, открывающий возможность использования в решении задачи большой размерности пакет символьных вычислений Mathematica.

Ключевые слова: производящая функция, процедура минимакса, процедура минисуммы.

1. Введение

Процедура принятия решений выборным органом обычно происходит путем голосования. Процедура голосования применяется также и при выборе комитета. Комитеты могут избираться как в выборных органах, так и в административном аппарате различных учреждений; например, выборы совета факультета, выборы аудиторской комиссии и др. В [2] были предложены процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета. Рассмотрим их.

2. Процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета

Пусть дано n избирателей и k кандидатов. Каждый избиратель в своем бюллетене может проголосовать за стольких кандидатов, сколько соответствуют его предпочтениям. Такой вид голосования называется голосованием одобрения. При голосовании одобрения каждый избирательный бюллетень - это бинарный k-вектор, $(p_1, ..., p_k)$, где p_i равно 0 или 1. Эти бинарные векторы указывают одобрение или неодобрение каждого кандидата избирателем. Для обозначения выбранных комитетов мы будем пользоваться подобными бинарными векторами.

Чтобы упростить запись, мы запишем избирательный бюллетень такой, как, например, (1,1,0), в виде 110. Это означает, что избиратель одобряет первого и второго кандидата и не одобряет третьего.

Число различных избирательных бюллетеней или, что то же самое, число возможных результатов выбора, равно 2^k.

Пример 2.1.

Пусть $q = 2$ и 4 избирателя заполняют бюллетени для трех кандидатов следующим образом:

1 избиратель: 100

1 избиратель: 110

2 избирателя: 101

Видно, что кандидат № 1 получил одобрение от всех 4-х избирателей, кандидат № 2 - от 1-го, и кандидат № 3 - от 2-х. То есть кандидаты № 1 и №3 избраны, а №3 - нет.

Определение 2.1. *Расстоянием Хемминга между двумя избирательными бюллетенями p и q, называется $d(p, q)$, равное число компонент, которыми они отличаются.*

Например, для избирательного бюллетеня 110 расстояния Хемминга будут следующими (табл. 1):

Таблица 1.

Избирательный бюллетень	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
110	110	100 010 111	000 101 011	001

Теперь обратим внимание не на индивидуальные избирательные бюллетени, а на различные избирательные бюллетени и число раз, которое каждый из них был учтен. Например, комитеты 100 и 101 минимизируют сумму расстояний Хемминга для всех избирателей в нашем примере, это эквивалентно тому, что сумма растояний Хемминга всех различных избирательных бюллетеней имеет вес числа избирателей, заполнивших каждый из них.

Определение 2.2. *Индексным весом бюллетеня называется число его повторений.*

Процедура минисуммы состоит в определении минимума среди суммарных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней. *Процедура минимакса* состоит в определении минимума среди максимальных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней.

Табл. 2 показывает индексные веса бюллетеней примера 2.1. во всех восьми возможных случаях создания комитета. (* отмечены минимальные значения)

Таблица 2.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Число повторов	1	1	2		
000	1	2	4	7	4
100	0	1	2	3*	2*
010	2	1	6	9	6
001	2	3	2	7	3
110	1	0	4	5	4
101	1	2	0	3*	2*
011	3	2	4	9	4
111	2	1	2	5	2*

Ясно, что здесь два комитета-победителя: 100 и 101, чьи суммы минимизируют сумму расстояний Хемминга. В нашем примере такой комитет всегда содержит кандидата № 1, и может содержать или не содержать кандидата № 3.

Рассмотрим другой способ определения комитета, представляющего интересы большинства слоев электората. Вместо поиска комитета, который минимизирует сумму индексных весов по всем избирательным бюллетеням, найдем комитет(ы), который(е) минимизирует(ют) максимум индексных весов. В нашем примере это три комитета: 100, 101 и 111.

Помимо индексного веса, каждый бюллетень обладает весом близости.

Веса́ близости отражают число избирателей, заполнивших каждый из различных избирательных бюллетеней. Но они также включают информацию о близости избирательного бюллетеня ко всем остальным избирательным бюллетеням, основанную на расстояниях Хемминга.

Чем бюллетень ближе к большему числу избирательных бюллетеней, тем большее влияние он имеет при определении комитета.

Определение 2.3. *Вес близости избирательного бюллетеня* q^j *есть*

$$w_j = \frac{m_j}{\sum\limits_{h=1}^{t} m_h d(q^j, q^h)}, \tag{2.1}$$

где m_j *- число избирателей, заполнивших избирательный бюллетень* $q^j = (q_1^j, ..., q_n^j)$ *и* t *- число различных заполненных избирательных бюллетеней. Знаменатель дроби - сумма расстояний Хемминга между избирательным бюллетенем* j *и всеми остальными избирательными бюллетенями (включая* j*).*

Процедуру минисуммы с весами близости проиллюстрируем на примере 2.1. Расстояние Хемминга избирательного бюллетеня 100 с ним самим, со 110 и с 101 равно 0, 1 и 1, соответственно. Поскольку эти избирательные бюллетени заполнены одним, одним и двумя избирателями, то избирательный бюллетень имеет вес

$$\frac{1}{[(1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (2 \cdot 1)]} = \frac{1}{3}$$

Числитель здесь отражает тот факт, что один избиратель заполнил этот избирательный бюллетень.

Точно также, избирательные бюллетени 110 и 101 имеют веса $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{[(1 \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (2 \cdot 2)]} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{2}{[(1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (0 \cdot 2)]} = \frac{2}{3}.$$

Избавимся для удобства от знаменателей, умножив их на 15; получим, что веса́ близости бюллетеней равны 5, 3, и 10, соответственно.

Таким образом, получим табл. 3, отличающуюся от предыдущей тем, что она основана на весах близости, а не на индексных весах.

Таблица 3.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Вес близости	5	3	10		
000	5	6	20	31	20
100	0	3	10	13	10
010	10	3	30	43	30
001	10	9	10	29	10
110	5	0	20	25	20
101	5	6	0	11*	6*
011	15	6	20	41	20
111	10	3	10	23	10

Заметим, что только комитет 101 минимизирует и сумму и максимум весов близости, в то время, как комитет 101 - также один из комитетов, выделенных критериями минисуммы и минимакса, основанных на индексных весах. Это совпадение не обязательно будет нормой. В [2] показано, что результаты разных процедур могут быть антиподами.

3. Производящие функции для процедур минисуммы и минимакса

Пусть n избирателей голосуют за k кандидатов; избиратели заполняют n бюллетеней. Некоторые заполненные бюллетени могут повторяться. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1,\dots,t}\,, t \le n$ - множество заполненных избирательных бюллетеней. Пусть $u_i = u(a_i)$ число повторов избирательного бюллетеня a_i, $\sum\limits_{i=1}^{t} u_i = n$.

Используем для обозначения кандидатов метки γ_j, $j = 1, ..., k$. Метки могут быть сокращены, если одновременно находятся в числителе и знаменателе одной дроби. Так, в примере 2.1. запись $\gamma_1\gamma_3$ означает комитет 101, а 1 соответствует комитету 000.

Опишем процедуру выбора комитета в терминах производящих функций.

Составим последовательность всевозможных бюллетеней

$$\{\underbrace{00...0}_{k\ \text{раз}}, \underbrace{10...0}_{k\ \text{раз}}, ..., \underbrace{1...1}_{k\ \text{раз}}\}. \tag{3.1}$$

Последовательности бюллетеней (3.1) поставим в соответствие последовательность меток

$$\{1, \gamma_1, ..., \gamma_k, \gamma_1\gamma_2, ..., \gamma_1...\gamma_k\}. \tag{3.2}$$

Разобьем последовательность (3.2) на группы по количеству меток. То есть

$$\kappa_j = \{\kappa_j^l\}_{l=1}^{C_k^j},\ \text{где}\ \left|\kappa_j^l\right| = j.$$

Каждой такой группе можно поставить в соответствие последовательность меток

$$\kappa_j \to \{\prod_{t=1}^{j} \gamma_{s_t}\}_1^{C_k^j},\ \ s_t \in \overline{1,k} \tag{3.3}$$

или

$$\{\{1\}, \{\gamma_1, ..., \gamma_k\}, \{\gamma_1\gamma_2, ..., \gamma_{k-1}\gamma_k\}, ..., \{\gamma_1...\gamma_k\}\}$$

Для последовательности групп (3.3) составим производящую функцию:

$$G(x) = \sum_{j=0}^{k} \kappa_j x^j = 1+(\gamma_1+...+\gamma_k)x+(\gamma_1\gamma_2+...+\gamma_{k-1}\gamma_k)x^2+...+\gamma_1\gamma_2...\gamma_k x^k =$$

$$= \prod_{j=1}^{k}(1+\gamma_j x). \tag{3.4}$$

Далее, для каждого избирательного бюллетеня $a_i \in A$ найдем

$$G_i(x) = \frac{G(x)}{a_i}. \tag{3.5}$$

После раскрытия скобок и сокращения получим сумму дробей. Составим последовательность, в которую по порядку запишем все элементы суммы (3.5).

$$\left\{\frac{1}{\gamma_{t_1}...\gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_1 x}{\gamma_{t_1}...\gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_2 x}{\gamma_{t_1}...\gamma_{t_l}}, ..., \frac{\gamma_1...\gamma_k x^k}{\gamma_{t_1}...\gamma_{t_l}}\right\} \tag{3.6}$$

Каждому элементу $b_r,\ r = 1, ..., 2^k$ последовательности (3.6) поставим в соответствие число $g(b_r)$, равное числу меток в b_r. Это число определяет расстояние Хемминга между избирательными бюллетенями, находящимися в числителе и знаменателе дроби. Получим последовательности чисел

$$g_i = \{g_{i1}, ..., g_{i2^k}\}. \tag{3.7}$$

Теперь составим новую последовательность, умножив все элементы последовательности (3.7) для бюллетеня a_i на u_i - индексный вес этого бюллетеня.

$$g_i u_i = \{g_{i1}u_i, ..., g_{i2^k}u_i\}. \tag{3.8}$$

Для процедуры минисуммы составим последовательность W - сумму последовательностей вида (3.8) для всех $a_i \in A$.

$$W = \{\sum_{i=1}^{t} g_{ij}u_i\}_{j=1}^{2^k}. \tag{3.9}$$

Для процедуры минимакса сравним поэлементно последовательности вида (3.8), и из максимумов составим последовательность M.

$$M = \{\max_{a_i \in A} g_{ij}u_i\}_{j=1}^{2^k}. \tag{3.10}$$

Определим для последовательностей W и M процедуру $MinNo(\{c\}) = (c_m; \{m\})$, где c_m - значение минимального элемента последовательности, $\{m\}$ - последовательность порядковых номеров элемента.

После применения этой процедуры мы, определив элемент(ы) с номером m из (3.4), получим обозначение комитета-победителя выборов.

Вернемся к примеру 2.1.

Количество кандидатов $k = 3$, избирателей $n = 4$, различных избирательных бюллетеней $t = 3,\ a_1 = 100,\ u_1 = 1,\ a_2 = 110,\ u_2 = 1,\ a_3 = 101,\ u_3 = 2$.

Составим производящую функцию.

$G = (1 + \gamma_1 x)(1 + \gamma_2 x)(1 + \gamma_3 x) = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x + +\gamma_3 x + \gamma_1\gamma_2 x^2 + +\gamma_1\gamma_3 x^2 + \gamma_2\gamma_3 x^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 x^3$.

Определим последовательности расстояний Хемминга и последовательности индексных весов для a_1, a_2, a_3.

$\dfrac{G}{\gamma_1} = \dfrac{1}{\gamma_1} + x + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}x + \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}x + +\gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^2 + \dfrac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}x^2 + \gamma_2\gamma_3 x^3,$
$g_1 = \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}, u_1 g_1 = \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}.$
$\dfrac{G}{\gamma_1\gamma_2} = \dfrac{1}{\gamma_1\gamma_2} + \dfrac{1}{\gamma_2}x + \dfrac{1}{\gamma_1}x + \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2}x + x^2 + \dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}x^2 + \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}x^2 + \gamma_3 x^3,$
$g_2 = \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}, u_2 g_2 = \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}.$
$\dfrac{G}{\gamma_1\gamma_3} = \dfrac{1}{\gamma_1\gamma_3} + \dfrac{1}{\gamma_3}x + +\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1\gamma_3}x + \dfrac{1}{\gamma_1}x + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}x^2 + x^2 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}x^2 + \gamma_2 x^3,$
$g_3 = \{2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 1\}, u_3 g_3 = \{4, 2, 6, 2, 4, 0, 4, 2\}.$

Тогда,

$W = \{7, 3, 9, 7, 5, 3, 9, 5\}, M = \{4, 2, 6, 3, 4, 2, 4, 2\}.$

$MinNo(W) = (3; 2, 6)$, то есть комитеты 100 и 101.

$MinNo(M) = (2; 2, 6, 8)$, то есть комитеты 100, 101 и 111.

Теперь рассмотрим процедуры минисуммы и минимакса, основанные на весах близости.

Разобьем $G(x)$ на две части: $G(x) = G'(x) + G''(x)$ - где $G'(x)$ состоит из слагаемых, соответствующих бюллетеням из A, а $G''(x)$ содержит все остальные.

Для определения веса близости бюллетеней будем действовать таким же образом, что и для определения индексного веса, а именно: найдем $\frac{G'(x)}{a_i}$, составим последовательности из слагаемых и далее определим последовательности g'_i так же, как и последовательности (3.10).

Теперь найдем веса близости, используя формулу (2.1):

$$w_i = \frac{u_i}{\sum\limits_{j=1}^{t} g'_{ij} u_j}. \tag{3.11}$$

Определив веса близости, так же, как и в [2], избавимся для удобства от знаменателя, переобозначив веса близости через u'_i. Далее действуем по вышеописанному алгоритму, используя вместо индексных весов u_i веса близости u'_i. Найдем последовательность W' путем поэлементного суммирования последовательностей типа (3.8). Последовательность M' определим путем поэлементного сравнения последовательностей типа (3.8) и определения максимума. Применим к W' и M' процедуру $MinNo$ и определим комитеты-победители выборов.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере 2.1.

$G'(x) = \gamma_1 x + \gamma_1\gamma_2 x^2 + \gamma_1\gamma_3 x^2.$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1} = x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^2,\ g_1' = \{0, 1, 1\},\ w_1 = \frac{u_1}{\sum\limits_{j=1}^{3} g_{1j}' u_j} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1\gamma_2} = \frac{1}{\gamma_2}x + x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}x^2,\ g_2' = \{1, 0, 2\},\ w_2 = \frac{u_2}{\sum\limits_{j=1}^{3} g_{2j}' u_j} = \frac{1}{5}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1\gamma_3} = \frac{1}{\gamma_3}x + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}x^2 + x^2,\ g_3' = \{1, 2, 0\},\ w_3 = \frac{u_3}{\sum\limits_{j=1}^{3} g_{3j}' u_j} = \frac{2}{3}.$$

Избавившись от знаменателей, получим $u_1' = 5,\ u_2' = 3,\ u_3' = 10$.

Далее, $u_1' g_1 = \{5, 0, 10, 10, 5, 5, 15, 10\}$, $u_2' g_2 = \{6, 3, 3, 9, 0, 6, 6, 3\}$, $u_3' g_3 = \{20, 10, 30, 10, 20, 0, 20, 10\}$.

$W' = \{31, 13, 43, 29, 25, 11, 41, 23\}$, $M' = \{20, 10, 30, 10, 20, 6, 20, 10\}$.

$MinNo(W') = (11; 6)$, $MinNo(M') = (6; 6)$. Обе процедуры указывают на комитет 101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bilbao J.M., Fernandez J.R., Jimenes A., Lopez J.J. *Generating functions for computing power indices efficiently* // Top. 2000. V. 8. N 2. P. 191–213.

2. Brams S.F., Steven J., Marc Kilgour D., Remzi Sanver M. *A Minimax Procedure for Negotiating Multirateral Treaties*// In Matti Wiberg (ed.), Reasoned Choices: Essays in Honor of Hannu Nurmi. Turku, Finland: Finnish Political Science Association. 2004. P. 255–274.

METHOD OF GENERATING FUNCTIONS FOR PROCEDURE OF COMMITTEE' ELECTING

A.M. Kalugina, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc. (kaluginam82@yandex.ru).

Abstract: In this paper we consider minimax procedure and minisum procedure for electing committee. These procedures were proposed by Brams S.F., Steven J., Kilgour D.M., Sanver M.R. We introduce method of generating functions for these procedures. This method can be used for electing with large number of candidates. For calculating with our method we can use the system Mathematica.

Keywords: generation function, minimax procedure, minisum procedure.