Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.4, с. 111-124

УДК 517.977

ББК 22.18

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ВЫИГРЫША В БЕСКОНЕЧНЫХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ

Игорь М. Прудников
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: pim_10@hotmail.com

В работе рассматриваются бесконечные коалиционные игры. Изучаются коалиции с точки зрения риска и конфликтности. Произвольная коалиционная игра отожествляется с сопоставимой ей цепью Маркова. Тем самым, изучение коалиционных игр сводится к изучению цепей Маркова, соответствующих этим играм. Определяется средний выигрыш произвольной коалиционной игры и алгоритм его вычисления.

*Ключевые слова*: коалиционные игры, бесконечные игры, риски и конфликты в коалиционных играх, супераддитивные оболочки, математическое ожидание выигрыша, цепи Маркова.

## 1. Введение

Рассматриваются коалиционные игры с точки зрения теории цепей Маркова. Многие политические события, экономическая конкуренция и другие явления могут быть описаны с помощью теории коалиционных игр. Если определить возможные коалиции игроков и выигрыши каждой коалиции, а также вероятности перехода игроков из одной коалиции в другую, то, оказывается, можно спрогнозировать среднюю величину выигрыша бесконечной коалиционной игры в целом и каждой коалиции в отдельности.

Конечно, вероятности перехода игроков из одной коалиции в другую могут зависеть от времени, но это не мешает делать прогнозы. Используя вычислительную технику и несложный алгоритм расчета выигрыша в каждый момент времени, можно спрогнозировать ход развития политической или экономической ситуации в мире или в отдельном регионе.

Кроме того, в статье вводится понятие конфликтной, а также самой рискованной коалиции, что может заинтересовать менеджеров предприятий и государственных служащих. Определяется алгоритм нахождения конфликтных коалиций и "построение" новых неконфликтных коалиций.

## 2. Риски и коалиции

Рассмотрим коалиционную игру $V_N$ с $N$ игроками и функцией выигрышей $v(\cdot) : S \to R$ (характеристическая функция) , где $S$ – коалиция, состоящая из $\mid S \mid$ игроков, $\mid S \mid < N$, и $v(S)$ – выигрыш коалиции $S$. По определению коалиция – это группа игроков, договорившихся играть сообща.

Введем функцию $\bar{v}(\cdot)$, определенную на подмножестве векторов пространства $R^N$. Точке $x_S = (x_1, x_2, ..., x_N)$ с координатой $x_i = 1$ или $x_i = 0$ в зависимости от того, принадлежит ли $i$-ый игрок $S$-ой коалиции или нет, ставим в соответствие значение функции $\bar{v}(\cdot)$, равное $v(S)$, т.е. $\bar{v}(x_S) = v(S)$. При таком сопоставлении коалиции точке пространства $R^N$ естественным образом определяется расстояние между коалициями $S_1$ и $S_2$, например,

$$\varrho(S_1, S_2) = \|x_{S_1} - x_{S_2}\| = \sum_{i=1}^{N} \mid x_{S_{1_i}} - x_{S_{2_i}} \mid$$

Среди всех коалиций существуют *самые рискованные.*

**Определение 2.1.** *По определению самой рискованной коалицией с шагом риска $h_{max}$ назовем такую коалицию, для которой при сдвиге из точки в $R^N$, соответствующей этой коалиции, на малое расстояние, не превосходящее $h_{max}$, значение функции $\bar{v}(\cdot)$ уменьшается на наибольшее значение.*

Нетрудно видеть, что самые рискованные коалиции соответствуют тем точкам пространства $R^N$, где отношение приращения функции выигрыша к величине смещения в одну из ближайших точек дискретного множества в $R^N$, соответствующих возможным коалициям, – наименьшее. Для определения самой рискованной коалиции предлагается находить эти отношения, т.е. решать следующую оптимизационную задачу для всех коалиций $S$ и возможных приращений $h$ с целочисленными координатами (не обязательно положительными), удовлетворяющих неравенству $0 <|| h ||\leq h_{max}$,

$$\min \psi(S, h) \longrightarrow_{S,h}, \tag{2.1}$$

где

$$\psi(S, h) = \frac{\bar{v}(x_S + h) - \bar{v}(x_S)}{|| h ||}$$

при условии, что $x_S + h$ – существующая коалиция.

Решение оптимизационной задачи (2.1) даст нам наиболее рискованные коалиции и область риска для заданного изначально шага риска $h_{max}$.

Для уменьшения риска надо использовать имеющиеся в наличии методы изменения функции $v(\cdot)$. Один из методов – это построение функции $\tilde{v}(\cdot)$, описанный в следующем параграфе.

## 3. Конфликтные коалиции

Конфликты в коалиции возникают из-за того, что сумма выигрышей коалиций $S$ и $T$ больше, чем прибыль коалиции $S \cup T$, т.е.

$$v(S) + v(T) > v(S \cup T),$$

где $S \cap T = \emptyset$.

**Определение 3.1.** *Назовем коалицию $S$ конфликтной, если существует такое ее разбиение на подкоалиции $S_1, S_2 \subset S, S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , для которых*

$$v(S_1) + v(S_2) > v(S)\,.$$

Для нахождения конфликтных коалиций сделаем следующее.

Вычтем из значения функции $\bar{v}(\cdot)$ в точке $x_{S\cup T}$ значения функции $\bar{v}(\cdot)$ в точке $x_S$ либо $x_T$. Если

$$\bar{v}(x_T) > \bar{v}(x_{S\cup T}) - \bar{v}(x_S),$$

то коалиция $S \cup T$ конфликтная, и ее надо рассматривать как потенциально нестабильную, способную распасться на коалиции $S$ и $T$.

Спрашивается, как находить конфликтные коалиции?

Рассмотрим произвольную функцию $\nu(\cdot)$, определенную на коалициях $S$.

Будем называть функцию $\nu(\cdot)$ *супераддитивной* [2], если

$$\nu(S) + \nu(T) \le \nu(S \cup T) \tag{3.1}$$

для любых коалиций $S$ и $T$, $S \cap T = \emptyset$. По определению $\nu(\emptyset) = 0$.

*Замечание* 3.1. Нетрудно видеть, что для супераддитивной функции $\nu(\cdot)$ неравенство (3.1) должно выполняться для любых коалиций $S_1$,$S_2$,...,$S_k$, $S_i \cap S_j = \emptyset, i \ne j$, т.е.

$$\nu(S_1) + \nu(S_2) + ... + \nu(S_k) \le \nu(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... \cup S_k).$$

Построим *наименьшую супераддитивную оболочку* функции выигрыша $v(\cdot)$, которую обозначим через $\tilde{v}(\cdot)$.

Определим $\tilde{v}(\cdot)$ следующим образом

$$\tilde{v}(S) = \max_{S_1,S_2,...,S_k} (v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k)), \tag{3.2}$$

где максимум берется по всем подкоалициям $S_i \subset S, S_i \cap S_j = \emptyset, i \ne j$, $i, j \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел. Здесь объединение коалиций $S_i$ не обязательно дает все множество $S$. Но если функция $v(\cdot)$ неотрицательная и определенная для всех возможных коалиций, то, очевидно, максимум будет достигаться для тех $S_i$, объединение которых есть все множество $S$.

*Замечание* 3.2. Заметим, что $\tilde{v}(\cdot) \geq v(S)$, поскольку $S \cap \emptyset = \emptyset$, $S \cup \emptyset = S$ и $v(\emptyset) = 0$.

Из неравенства

$$\max_{S_1, S_2} (v(S_1) + v(S_2)) \leq \max_{S_1, S_2, \ldots, S_k} (v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k)),$$

где $S_i$ определены выше, следует, что при увеличении числа дроблений коалиции $S$ на все большее число подкоалиций значение максимума, стоящего в правой части (3.2), может только увеличиваться.

Кроме того, функция $\tilde{v}(\cdot)$ может определяться для коалиций $S$, для которых функция $v(\cdot)$ не определена.

Докажем супераддитивность функции $\tilde{v}(\cdot)$.

**Теорема 3.1.** *Функция* $\tilde{v}(\cdot)$ *- супераддитивна.*

*Доказательство.* Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что существуют такие коалиции $S$ и $T$, для которых $S \cap T = \emptyset$, что неравенство (3.1) не выполняется, т.е.

$$\tilde{v}(S) + \tilde{v}(T) > \tilde{v}(S \cup T). \qquad (3.3)$$

Из определения функции $\tilde{v}(\cdot)$ следует, что существуют такие $S_i, T_i, S_i \cap S_j = \emptyset, T_i \cap T_j = \emptyset \ i \neq j, i, j \in \mathcal{N}$, и

$$\bigcup_i S_i \subset S, \ \ \bigcup_i T_i \subset T, \ \ S_i \cap T_j = \emptyset \ \ \forall i, j,$$

для которых

$$\tilde{v}(S) = \max_{S_1, S_2, \ldots, S_k} (v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k)) = v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k)$$

и

$$\tilde{v}(T) = \max_{T_1, T_2, \ldots, T_m} (v(T_1) + v(T_2) + \ldots + v(T_m)) = v(T_1) + v(T_2) + \ldots + v(T_m).$$

Из определения функции $\tilde{v}(\cdot)$ следует, что

$$\tilde{v}(S \cup T) \geq \max_{S_i, T_i} (v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k) + v(T_1) + v(T_2) + ... + v(T_m)), \tag{3.4}$$

где коалиции $S_i$ и $T_i$ определены выше.

Из (3.4) имеем

$$\tilde{v}(S \cup T) \geq \max_{S_i, T_i} (v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k) + v(T_1) + v(T_2) + ... + v(T_m)) =$$

$$= \max_{S_i} (v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k)) + \max_{T_j} (v(T_1) + v(T_2) + ... + v(T_m)) =$$

$$= \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T),$$

что противоречит (3.3). Пришли к противоречию с предположением. Лемма доказана. □

Процедуру построения наименьшей супераддитивной оболочки функции $v(\cdot)$ легко алгоритмизировать и написать программу расчета функции $\tilde{v}(\cdot)$ на вычислительной машине. Для этого достаточно сопоставить каждой коалиции $S$ вектор $x_S$ из $R^N$, как это делалось ранее, и рассматривать векторы $x_{S_i}$ взаимно перпендикулярные друг к другу, для которых их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(x_{S_i}, x_{S_j}) = 0$. Функцию $\tilde{v}(\cdot)$ можно определить так

$$\tilde{v}(S) = \max_{x_{S_1}, x_{S_2}, ..., x_{S_k}} (\bar{v}(x_{S_1}) + \bar{v}(x_{S_2}) + ... + \bar{v}(x_{S_k})),$$

где максимум берется по всем взаимно перпендикулярным векторам $x_{S_i}, k \in \mathcal{N}$, и $x_S = x_{S_1} + x_{S_2} + ... + x_{S_k}$.

Нахождение конфликтных коалиций не представляет труда. Для этого надо построить наименьшую супераддитивную оболочку $\tilde{v}(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ и найти те коалиции $S$, где значение функции $\tilde{v}(S) > v(S)$. Такие коалиции будут неустойчивыми, и на них надо обратить внимание в первую очередь руководителям предприятий и менеджерам. Кроме того, с помощью функции $\tilde{v}(\cdot)$ можно определять новые неконфликтные коалиции $S$ на основе формулы (3.2).

Пусть $S$ – неконфликтная коалиция, т.е. $\tilde{v}(S) = v(S) = \bar{v}(x_S)$. Тогда из формулы (2.1) видно, что для уменьшения риска для коалиции $S$ надо увеличивать значения $\bar{v}(x_S + h)$, где $0 < \| h \| \leq h_{max}$ для заданного изначально шага риска $h_{max}$. Кроме того, увеличивать значения $\bar{v}(x_S+h)$ надо таким образом, чтобы сохранить существующие неконфликтные коалиции. Этим требованиям мы удовлетворим, если заменим функцию $v(\cdot)$ на функцию $\tilde{v}(\cdot)$. Из формулы (3.2) видно, что $\tilde{v}(S) \geq v(S)$. Поэтому такая замена приведет только к увеличению функции $\psi(\cdot)$, а значит и к уменьшению риска для коалиции $S$.

## 4. Средний выигрыш в бесконечных коалиционных играх

Рассмотрим как и ранее игру с $N$ участниками и функцией выигрыша $v(\cdot) : S \to R$, определенной на коалициях $S$. В процессе игры некоторые коалиции могут распадаться, и игроки из одной коалиции будут переходить в другие коалиции с некоторыми вероятностями. Нас будут интересовать среднее значение выигрыша, вычисленного по всем возможным коалициям, если игра продолжается бесконечно долго. Помимо функции выигрыша $v(\cdot)$ определим матрицу вероятностей участия игроков в той или иной коалиции. Каждой такой матрице соответствует определенный средний выигрыш по коалициям. Этот средний выигрыш может рассматриваться как определяющим фактор для долгосрочного прогнозирования. Действительно, если есть коалиция с большим выигрышем, но которая почти никогда не создается участниками игры, то вряд ли стоит рассчитывать на такую коалицию, на что указывает маленький средний выигрыш такой коалиции в бесконечной игре.

Пусть известна вероятность $p_i$, с которой $i$-ый участник принимает участие в игре, $i \in 1 : N$. Можно рассматривать более общий случай, когда вероятности участия игроков зависят от коалиции. Обозначим вероятность участия $i$-ого игрока в коалиции M через $p_i(M)$, а не участия – через $q_i(M), p_i(M) + q_i(M) = 1$. По предположению будем считать, что игроки принимают решение независимо друг от друга.

Пусть задана коалиция M с выигрышем $v(M)$. Вычислим вероятность перехода от коалиции $M_2$ к коалиции $M_1$ (см. рис. 1). Коалиция $M_1$ состоит из $\mid M_1 \mid$ участников, а коалиция $M_2$ – из $\mid M_2 \mid$ участников.

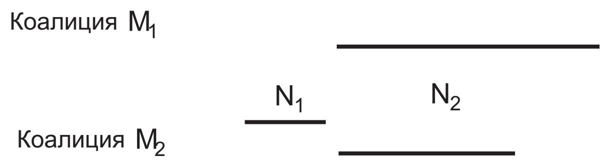


Рисунок 1.

Переход от коалиции $M_2$ к коалиции $M_1$ возможен *тогда и только тогда*, когда все игроки коалиции $M_2$, которые не принадлежат коалиции $M_1$, перейдут в любые другие коалиции, кроме $M_1$, а игроки коалиции $M_2$, которые принадлежат коалиции $M_1$, перейдут в $M_1$.

Вероятность того, что $N_2$ участников коалиции $M_2$ не перейдут в коалицию $M_1$, а перейдут в произвольные другие коалиции, согласно правилу умножения вероятностей равна

$$p_{i_1,i_2,...,i_{N_2}} = q_{i_1}(M_1)q_{i_2}(M_1)...q_{i_{N_2}}(M_1),$$

где $i_1, i_2, ..., i_{N_2}$ - номера $N_2$ участников коалиции $M_2$, не входящих в коалицию коалиции $M_1$.

Вероятность участия $N_1$ игроков (новых или старых) с номерами $j_1, j_2, ..., j_{N_1}$ в коалиции $M_1$ согласно правилу умножения вероятностей равна

$$p_{j_1,j_2,...,j_{N_1}} = p_{j_1}(M_1)p_{j_2}(M_1)...p_{j_{N_1}}(M_1),$$

где $j_1, j_2, ..., j_{N_1}$ номера игроков коалиции $M_2$, входящих в коалицию коалиции $M_1$.

Пусть число всех коалиций равно $K$. Возможно, что все они имеют одинаковый приоритет и в этом смысле равновероятны, т.е. вероятность выбора любой из них равна $\frac{1}{K}$. Но может быть ситуация, когда некоторые из них имеют больший приоритет, чем другие. Обозначим вероятность выбора построения коалиции $M_1$ из коалиции $M_2$ через $p(M_2, M_1)$. Как только выбрана коалиция $M_1$, то тем самым фиксировано число возможных добавлений к коалиции $M_2$, и вероятность добавления новых участников более этого числа равна нулю.

Тогда вероятность перехода от коалиции $M_2$ к коалиции $M_1$ равна

$$P_{j_1,j_2,\ldots,j_{N_1},i_1,i_2,\ldots,i_{N_2}} = p_{j_1,j_2,\ldots,j_{N_1}}\, p_{i_1,i_2,\ldots,i_{N_2}}. \tag{4.1}$$

Игру с характеристической функцией $v(M)$ можно представить в виде графа $\Gamma_V$, у которого вершины есть возможные коалиции, а вероятность перехода от одной вершины-коалиции $M_2$ к другой вершине-коалиции $M_1$ равна $p_{j_1,j_2,\ldots,j_{N_1},i_1,i_2,\ldots,i_{N_2}}$. Заметим, что в общем случае вероятность перехода от $M_2$ к $M_1$ не равна вероятности перехода от $M_1$ к $M_2$, т.е. граф $\Gamma_V$ – направленный.

Вероятность остаться в коалиции $M_2$ равна дополнению до единицы суммы вероятностей переходов из $M_2$ в другие, отличные от $M_2$, коалиции.

Граф $\Gamma_V$ имеет матрицу вероятностей переходов $P$, элементами которой являются числа $p_{j_1,j_2,\ldots,j_{N_1},i_1,i_2,\ldots,i_{N_2}}$.

Если рассмотрены все коалиции со всеми вероятностями переходов, то должна получиться цепь Маркова $M$, которую будем изучать и искать среднее значение выигрыша для бесконечной коалиционной игры $V_N$. Цепи Маркова удобно представлять в виде графов.

Обозначим граф, соответствующий построенной цепи Маркова $M$, через $\Gamma_V$, а вероятности перехода от $i$-ой вершины к $j$-ой – через $p_{ij}$. $i, j \in 1 :\mid \Gamma_V \mid$, где $\mid \Gamma_V \mid$ – число вершин графа $\Gamma_V$.

Пусть $p_{ij}^{(n)}$ – вероятность перехода от $i$-ой вершины к $j$-ой за $n$ шагов. Вершины графа $\Gamma_V$ соответствуют всем возможным коалициям игры.

Очевидно, что существует взаимно однозначное соответствие между игрой $V_N$, цепью Маркова $M$ и ее графом $\Gamma_V$. Назовем $\Gamma_V$ *графом коалиционной игры* $V_N$.

Рассмотрим сперва случай, когда цепь Маркова, соответствующая построенному графу $\Gamma_V$, состоит из одного класса смежности.

Тогда, если этот класс непериодический, а значит регулярный, или эргодический, то, как известно, у вероятностей перехода $p_{ij}^{(n)}$ есть предельные значения при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j, \ \ \sum_{j=1}^{N} p_j = 1.$$

Вероятности $p_j$ называются предельными стационарными (эргодическими) вероятностями. В этом случае можно определить средний выигрыш в игре как сумму произведений вероятностей $p_j$ попадания в вершину $j$ на выигрыш, соответствующий этой вершине, т.е.

$$v_m = \sum_j^N p_j v(S_j), \tag{4.2}$$

где коалиция $S_j$ соответствует вершине $j$.

*Замечание* 4.1. Известно [3], что если коэффициент эргодичности

$$k(n_0) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m \mid p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0) \mid$$

для некоторого $n_0$ положителен, то

$$\sup_{p_i^0} \mid p_{ij}(n) - p_j^* \mid \leq C\, e^{-Dn},$$

где $p_i^0$ - начальное распределение вероятностей,

$$D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1 - k(n_0)}.$$

Поэтому, исходя из приведенных формул, можно делать оценку времени и точности достижения среднего значения выигрыша игры.

Перейдем к рассмотрению случая, когда цепь Маркова $M$, соответствующая графу $\Gamma_V$, периодическая с периодом $d$. Тогда средний выигрыш для этого случая равен

$$v_m = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d v(S_j).$$

Здесь при нахождении среднего выигрыша $v_m$ учитывается, что вероятность попадания в любую вершину периодической неразложимой цепи Маркова равна $\frac{1}{d}$.

Усложним ситуацию. Пусть цепь Маркова $M$ игры $V_N$ состоит из нескольких регулярных (эргодических) классов $\Gamma_1$,$\Gamma_2$,...,$\Gamma_k$, так что

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i.$$

Тогда средний выигрыш вычисляется по следующему алгоритму.

1. Вычисляем средний выигрыш для каждого класса $\Gamma_i$ по указанной выше формуле

$$v_m(i) = \sum_{j=1}^{n_i} p_j(i) v(S_j(i)),$$

где $p_j(i)$ – предельные эргодические вероятности для класса $\Gamma_i$, $j \in 1 : n_i$, $S_j(i)$ – коалиции класса $\Gamma_i$, $n_i$ – число вершин класса $\Gamma_i$.

2. Затем вычисляем средний выигрыш всей марковской цепи $\Gamma_V$.

$$v_m = \sum_{i=1}^{k} p_i v_m(i), \tag{4.3}$$

где $p_i$ – вероятность попадания в класс $\Gamma_i$, которая вычисляется как суммарная предельная вероятность попадания в любую вершину класса $\Gamma_i$. Правило расчета вероятности $p_i$ следующее:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_j^{(i)}, \tag{4.4}$$

где $p^{(0)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, ..., p_{n_1}^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, ..., p_{n_2}^{(2)}, ..., p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_{n_k}^{(k)})$ – начальное распределение вероятности. В (4.4) суммирование идет для $n_i$ элементов $i$-ого класса.

Выбор формулы (4.3) объясняется тем, что эргодические классы $\Gamma_i$, $i \in 1 : k$, в данном случае изолированные (см. рис. 2) и конечный выигрыш будет определяться тем, в каком классе мы находимся. Есть, как бы, несколько вариантов выбора с различными вероятностями и различными значениями функции выигрыша. После такой трактовки далее применяем известную формулу для математического ожидания.

Если цепь Маркова $\Gamma$ состоит из $k$ регулярных (эргодических) классов и $l$ периодических классов, то средний выигрыш бесконечной коалиционной игры будет вычисляться следующим образом.

1. Вычисляем средний выигрыш для каждого из $k + l$ классов по формулам, данным выше. Обозначим эти выигрыши через $v_{m_i}, i \in 1 : (k + l)$.

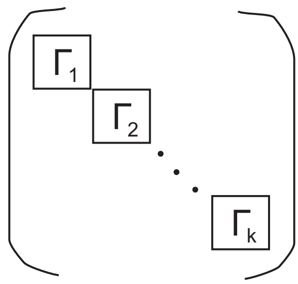


Рисунок 2.

2. Вычисляем средний выигрыш всей игры

$$v_m = \sum_{i=1}^{k+l} p_i v_{m_i}, \tag{4.5}$$

где $p_i$ – вероятность попадания в класс $\Gamma_i$, вычисляемая по формуле (4.4).

Рассмотрим теперь общий случай марковской цепи. Известно, что произвольная цепь Маркова после перенумерации строк и столбцов может быть представлена в виде [1], изображенном на рис. 3, где пустые, незаполненные элементы соответствуют нулевым элементам. $C_0$ – есть класс несущественных состояний, а $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k$ – непересекающиеся классы существенных сообщающихся состояний.

Пусть известно начальное распределение вероятности по состояниям, которое есть вектор-строка $(p_{0,1}, ..., p_{0,n_0}, p_{1,1}, p_{1,2}, ..., p_{1,n_1}, ..., p_{k,1}, ..., p_{k,n_k})$. Здесь $k$- число изолированных классов с матрицами $\Gamma_i$, $i \in 1 : k$, $n_0, n_1, ..., n_k$ – число столбцов матриц $C_0, C_1, C_2, ..., C_k$ соответственно, стоящих в первой строке матрицы переходных вероятностей марковской цепи $M$ (см. рис. 3).

Введем следующие обозначения для вектор-строк $p_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}, ..., p_{0,n_0})$, $p_1 = (p_{1,1}, p_{1,2}, ..., p_{1,n_1})$,...,$p_k = (p_{k,1}, p_{k,2}, ..., p_{k,n_k})$. Вычислим вероятность попадания в первый класс $\Gamma_1$. Нетрудно видеть, что эта вероятность равна

$$\bar{p}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} b_{1j},$$

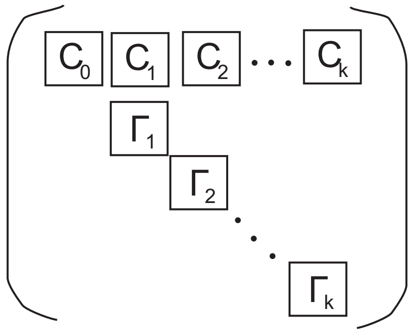


Рисунок 3.

где $b_{1j}$ – элементы вектора-строки $b_1$, вычисляемой по формуле

$$b_1 = p_1\,\Gamma_1 + p_0\,C_1.$$

Аналогично вычисляются вероятности $\bar{p}_i, i \in 1 : k$, попадания во второй и последующие классы.

Тогда для вычисления среднего выигрыша бесконечной коалиционной игры $V_N$ с графом $\Gamma_V$, представленном на рис. 3, надо повторить все описанные выше операции и заменить формулу (4.5) на формулу

$$v_m = \sum_{i=1}^{k+l} \bar{p}_i v_{m_i},$$

где $v_{m_i}, i \in 1 : k$ – средние выигрыши для каждого из $k$ классов.

*Замечание* 4.2. Можно рассматривать ситуацию, когда вероятности перехода $i$-ого участника в $j$-ую коалицию $M_j$ зависит от момента времени $t = n$, т.е. $p_i(M_j) = p_{i,j}(n)$. Все приведенные выше формулы нетрудно переписать с учетом этого факта.

*Замечание* 4.3. Приведенная оценка средней величины выигрыша в игре может быть применена для оценки некоторых реальных политических ситуаций. При этом в качестве игроков могут выступать страны, военные блоки, рынки и т.д.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. *Теория вероятностей*. М: Наука. 1976.

2. Губко М.Б., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организованными системами*. Изд. 2. М.: Наука. 2005.

3. Розанов Ю.А. *Случайные процессы. Краткий курс*. М: Наука. 1971.

# THE AVERAGE VALUE OF PROFIT IN INFINITE COALITION GAMES

**I.M. Prudnikov**, Saint-Peterburg State University, Saint-Peterburg, Cand. Sc. (pim_10@hotmail.com).

*Abstract*: The infinite coalition games are considered in the article. The risk and conflicts of these games are introduced. The algorithm is suggested how to construct games without conflicts. It is shown how to confront any coalition game with a Markov's chain. The study of these games can be reduced to the study of the Markov's chaines. The average value of profit and an algorithm of it's calculation is suggested.

*Keywords*: coalition games, infinite games, risks and conflicts in coalition games, superadditive hulls, the mean value of profit, Markov's chains.