Математическая Теория Игр и её Приложения, т.1, в.4, с. 78-92

УДК УДК 517.9

ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ АРБИТРАЖНАЯ ПРОЦЕДУРА С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Александр Э. Менчер
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
имени Н.Г. Чернышевского
Чита
e-mail: MentcherAE@zabspu.ru

Рассматривается антагонистическая игра, связанная с арбитражной схемой Фарбера. Для случаев, когда предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках с неравномерным распределением вероятностей, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: арбитражная схема, дискретное распределение, смешанные стратегии, равновесие.

1. Введение

Рассмотрим бескоалиционную игру с нулевой суммой, связанную с моделью арбитражной процедуры с конечным числом предложений. Игроки L и M, именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x, а игрок M — предложение y; x и y — произвольные действительные числа.

Для достижения соглашения между игроками используется арбитражная схема Фарбера [1]. Если $x \leq y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A. Обозначим решение арбитра через z. Тогда из предложений x и y выбирается то, которое ближе к точке z. В такой игре функция выигрыша есть математическое ожидание случайной величины $H_z(x,y) : H(x,y) = EH_z(x,y)$, где

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > y,\ |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y,\ |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y,\ |x-z| = |y-z|. \end{cases}$$

Пусть $-\infty < y \leq 0 \leq x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина. Если $z = 0$ с вероятностью, равной 1, то, очевидно, что точкой равновесия в игре является пара чистых стратегий $(0,0)$. В статьях [2], [3] для случаев, когда z с равной вероятностью принимает значения -1 и 1, либо -1, 0 и 1, соответственно, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

В настоящей работе рассматриваются ситуации, в которых предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках и имеют неравномерное распределение. В обоих рассматриваемых случаях будем искать равновесие в игре среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M, соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = 1; g(y) \geq 0, \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L.

2. Оптимальные стратегии при трех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из трех значений: -1, 0, 1, соответственно, с вероятностями $\dfrac{1-p}{2}$, p, $\dfrac{1-p}{2}$. Случаи $p = 1$, $p = 0$ и $p = \dfrac{1}{3}$ отмечены во введении.

Мы будем искать равновесие в игре в общем случае: $0 < p < 1$.

Теорема 2.1. *Если $p \in [p_0, 1)$, где p_0 – положительный корень уравнения $p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1 = 0$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < c, \\ \dfrac{1+p}{4p}\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \le x < +\infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $c = \dfrac{(1-p)^2}{2p}$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \le x < +\infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (2.2) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и $H(f(x), y) \ge 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1-p}{2}y + p\left[\int\limits_c^{-y} xf(x)dx + \int\limits_{-y}^{c+2} yf(x)dx\right] + \frac{1-p}{2}\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx. \tag{2.3}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (2.3) получаем

$$H(f(x), -c-0) = -\frac{1+p}{2}c + \frac{1-p}{2}\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

$$H(f(x), -(c+2)+0) = -\frac{1-p}{2}(c+2) + \frac{1+p}{2}\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

откуда следуют соотношения для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int\limits_c^{c+2} xf(x)dx = \frac{1-p}{1+p}(c+2) = \frac{1+p}{1-p}c = \sqrt{c(c+2)}. \qquad (2.4)$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2} + p\left[2yf(-y) + \int\limits_{-y}^{c+2} f(x)dx\right], \qquad (2.5)$$

$$H''(f(x), y) = p(3f(-y) - 2yf'(-y)), \qquad (2.6)$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Положим $x = -y$, тогда $x \in (c, c+2)$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^3}}. \qquad (2.7)$$

Определим константы c и α. Из (2.5) получаем

$$0 = H'(f, -c-0) = \frac{1+p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c}},$$

$$0 = H'(f, -(c+2)+0) = \frac{1-p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+2}}.$$

Тогда

$$c = \frac{(1-p)^2}{2}, \alpha = \frac{1+p}{4p}\sqrt{c}. \tag{2.8}$$

Из (2.2), (2.7) и (2.8) следует, что $f(x)$ имеет вид (2.1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$, $H'(f(x), -c-0) = 0$ и $H(f(x), -c-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+2), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда $-y \in [(c+4), +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int\limits_{c}^{c+2} xf(x)dx = \sqrt{c(c+2)} = \frac{1-p^2}{2p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1-p}{2}\left[\int\limits_{c}^{-2-y} xf(x)dx + \int\limits_{-2-y}^{c+2} yf(x)dx\right] + \frac{1+p}{2}\int\limits_{c}^{c+2} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2}\left[2(1+y)f(-2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+2} f(x)dx\right] =$$

$$= -\frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(-2-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right].$$

Так как $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H'(f(x), y) < 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$.

Пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2 - y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2}\left[\int\limits_{c}^{2-y} xf(x)dx + \int\limits_{2-y}^{c+2} yf(x)dx\right],$$

$$H'(f(x), y) = \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2}\left[2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{2-y}^{c+2} f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right].$$

.

Далее, так как $H(f(x), -c+0) = 0$, а функция $H'(f(x), y)$ является строго возрастающей, то, если $H'(f(x), -c+0) \geq 0$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, -(c-2)] \cap (-c, 0]$.

Имеем:

$$H'(f(x), -c+0) = \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p}\left[\frac{1}{\sqrt{(c+2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right] =$$

$$= \frac{p^2+4p-1}{4p} + \frac{(1-p)^2}{2(1+p)^2} = \frac{p^4+8p^3+4p^2+4p-1}{4p(1+p)^2}.$$

Для дальнейшего исследования заметим, что функция $c = c(p) = \dfrac{(1-p)^2}{2p}$ строго убывает в интервале $(0, 1)$.

Если $p^2 + 4p - 1 \geq 0$, то $p \geq \sqrt{5} - 2$, $0 < c \leq \sqrt{5} - 1 < 2$, $H'(f(x), -c+0) > 0$ и исследование условий оптимальности окончено.

Пусть теперь $p^2 + 4p - 1 < 0$. Рассмотрим функцию $F(p) = p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1$ на отрезке $[0, 1]$. Так как $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 16 > 0$ и $F'(p) = 4p^3 + 24p^2 + 8p + 4 > 0$, то существует единственная точка $p_0 \in (0, 1)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in (0, p_0)$ и $F(p) > 0$ при $p \in (p_0, 1)$.

Уточним границы для констант p_0 и c. В самом деле, если $c \geq 2$, то $p \leq 3 - 2\sqrt{2}$. Имеем: $F(3 - 2\sqrt{2}) = 1448 - 1024\sqrt{2} \approx -0,15468786 < 0$.

Так как, очевидно, что $F(\sqrt{5}-2)>0$, то $p_0 \in (3-2\sqrt{2}, \sqrt{5}-2)$ и $c \in (0,2)$ при $p \in (p_0, 1)$.

Таким образом, $[-c, -(c-2)] \cap [-c, 0] = [-c, 0]$. Легко проверить, что $p_0 \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}) \subset (3-\sqrt{2}, \sqrt{5}-2)$. Окончательно заключаем, что $H(f(x), y) > 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$ и теорема доказана. $\square$

3. Оптимальные стратегии при четырех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из четырех значений: -3, -1, 1, 3, соответственно, с вероятностями $\dfrac{1}{2}-p$, p, p, $\dfrac{1}{2}-p$. Ясно, что $0 \le p \le \dfrac{1}{2}$. Случай $p=\dfrac{1}{2}$ отмечен во введении, а случай $p=0$ приводит к аналогичным результатам, так что мы будем искать равновесие в игре в ситуации, где $0<p<\dfrac{1}{2}$.

Теорема 3.1. *Если $p \in \left(p_0, \dfrac{1}{2}\right)$, где p_0 – положительный корень уравнения $32p^5+16p^4+24p^3+8p^2-8p+1=0$ из интервала $\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{5}\right)$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < c,\\ \dfrac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{если } c < x < c+2,\\ \dfrac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{если } c+2 < x < c+4,\\ 0, & \text{если } c+4 \le x < +\infty, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $c=\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}-2$.

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < c,\\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2,\\ \psi(x), & \text{если } c+2 < x < c+4,\\ 0, & \text{если } c+4 \le x < +\infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы в соответсвующих интервалах. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (3.2) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+4), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, \, -(c+4)) \cup (-c, 0]$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) y + p \left(\int\limits_{c}^{-2-y} x f(x) dx + \int\limits_{-2-y}^{c+4} y f(x) dx \right) +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{c}^{c+4} x f(x) dx. \tag{3.3}$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (3.3) получаем

$$H(f(x), -(c+2)-0) = -\left(\frac{1}{2} - p\right)(c+2) - p(c+2) + \frac{1}{2} \int\limits_{c}^{c+4} x f(x) dx = 0,$$

откуда следует равенство для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int\limits_{c}^{c+4} x f(x) dx = c + 2. \tag{3.4}$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$. Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} - p + p \left(2(1+y) f(-2-y) + \int\limits_{-2-y}^{c+4} f(x) dx \right), \tag{3.5}$$

$$H''(f(x), y) = p(3 f(-2-y) - 2(1+y) f'(-2-y)), \tag{3.6}$$

откуда приходим к уравнению

$$3 f(-2-y) - 2(1+y) f'(-2-y) = 0.$$

Положим $x = -2 - y$, тогда $x \in [c, c+2]$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2(x+1)\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x+1)^3}}. \tag{3.7}$$

Определим константу α. Из (3.5) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c+2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+1}},$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\sqrt{c+1}}{4p}. \tag{3.8}$$

Далее, пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$, $2 - y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1}{2}y + p\left(\int\limits_{c}^{2-y} xf(x)dx + \int\limits_{2-y}^{c+4} yf(x)dx\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2} - p\right)\int\limits_{c}^{c+4} f(x)dx. \tag{3.9}$$

Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} + p\left(2(-1+y)f(2-y) + \int\limits_{2-y}^{c+4} f(x)dx\right), \tag{3.10}$$

$$H''(f(x), y) = p(3f(2-y) - 2f(-1+y)f'(2-y)), \tag{3.11}$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(2-y) - 2(-1+y)f'(2-y)) = 0.$$

Положим $x = 2 - y$, тогда $x \in [c+2, c+4]$, $f(x) = \psi(x)$ и

$$3\psi(x) + 2(x-1)\psi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(x) = \frac{\beta}{\sqrt{(x-1)^3}}. \tag{3.12}$$

Определим константу β. Из (3.10) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c+2)-0) = \frac{1}{2} - \frac{2p\beta}{\sqrt{c+3}},$$

тогда

$$\beta = \frac{\sqrt{c+3}}{4p}. \tag{3.13}$$

Найдем константу c. Имеем:

$$1 = \int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx = \int\limits_{c}^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x-4)^3}}dx + \int\limits_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}dx,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{c+3}{c+1}} - \sqrt{\frac{c+1}{c+3}} = 2p.$$

Полагая $t = \sqrt{\dfrac{c+1}{c+3}}$, приходим к квадратному уравнению $t^2 + 2pt - 1 = 0$, положительный корень которого равен $\sqrt{p^2+1} - p$. Наконец,

$$c = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} - 2. \tag{3.14}$$

Отметим, что функция $c = c(p)$ строго убывает на полуоси $(0, +\infty)$. Так как по условию задачи $p < \dfrac{1}{2}$, то $c(p) > c(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{5} - 2 > 0$.

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, $H'(f(x), -(c+2)-0) = 0$ и $H(f(x), -(c+2)-0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Аналогично приходим к выводу, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x),y)$ вне отрезка $[-(c+4),-c]$.

Пусть $y\in(-\infty,-(c+10)]$, тогда $-y\in[c+10,+\infty)$ и

$$H(f(x),y)=\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx=c+2=\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}>0.$$

Пусть $y\in[-(c+10),-(c+8)]$, тогда $-y\in[c+8,c+10]$, $-6-y\in[c+2,c+4]$ и

$$H(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[\int\limits_{c}^{-6-y} xf(x)dx+\int\limits_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx\right]+\left(\frac{1}{2}+p\right)\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[2(3+y)f(-6-y)+\int\limits_{-6-y}^{c+4} f(x)dx\right]=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-p\right)\frac{\sqrt{c+3}}{2p}\left(\frac{4}{\sqrt{(-7-y)^3}}+\frac{1}{\sqrt{c+3}}\right)<0.$$

Пусть $y\in[-(c+8),-(c+6)]$, тогда $-y\in[c+6,c+8]$, $-6-y\in[c,c+2]$ и

$$H(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[\int\limits_{c}^{-6-y} xf(x)dx+\int\limits_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx\right]+\left(\frac{1}{2}+p\right)\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[2(3+y)f(-6-y)+\int\limits_{-6-y}^{c+4} f(x)dx\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-p\right)\frac{1}{2p}\left[(2p-1)-\frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(-5-y)^3}}\right]<0.$$

Пусть $y\in[-(c+6),-(c+4)]$, тогда $-y\in[c+4,c+6]$, $-2-y\in[c+2,c+4]$ и

$$H(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)y+p\left[\int\limits_{c}^{-2-y} xf(x)dx+\int\limits_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{c}^{c+4} xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}-p\right)+p\left[2(1+y)f(-2-y)+\int\limits_{-2-y}^{c+4}f(x)dx\right]=$$

$$=-p-\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-3-y)^3}}<0.$$

Так как $H(f(x),-(c+4)-0)=0$, то функция $H(f(x),y)>0$ на полуоси $(-\infty,-(c+4))$.

Далее, пусть $y\in[-c,-(c-2)]\cap[-c,0]$, тогда $-y\in[c-2,c]\cap[0,c]$, $2-y\in[c,c+2]\cap[2,c+2]$ и

$$H(f(x),y)=\frac{1}{2}y+p\left[\int\limits_{c}^{2-y}xf(x)dx+\int\limits_{2-y}^{c+4}yf(x)dx\right]+\left(\frac{1}{2}-p\right)\int\limits_{c}^{c+4}xf(x)dx,$$

$$H'(f(x),y)=\frac{1}{2}+p\left[2(-1+y)f(2-y)+\int\limits_{2-y}^{c+4}f(x)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[(2p-1)+\frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}}\right]=p+\frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}}>0.$$

Если $c\leq 2$, то исследование окончено; при этом $p\in\left[\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{2}\right)$.

Пусть теперь $p\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$, тогда $c>2$ и пусть $y\in[-(c-2),-(c-4)]\cap\ [-(c-2),0]$, тогда $-y\in[c-4,c-2]\cap[0,c-2]$, $6-y\in[c+2,c+4)]\cap[6,c+4]$ и

$$H(f(x),y)=\left(\frac{1}{2}+p\right)y+\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[\int\limits_{c}^{6-y}xf(x)dx+\int\limits_{6-y}^{c+4}yf(x)dx\right],$$

$$H'(f(x),y)=\frac{1}{2}+p+\left(\frac{1}{2}-p\right)\left[2(-3+y)f(6-y)+\int\limits_{6-y}^{c+4}f(x)dx\right]=$$

$$=1+p-\frac{1}{4p}+\frac{1-2p}{2p}\frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(5-y)^3}}.$$

Так как $H'(f(x), y)$ строго возрастает в области задания, то $H'(f(x), y) > H'(f(x), -(c-2)+0)$. Имеем:

$$H'(f(x), -(c-2)+0) = \frac{4p^2+4p-1}{4p} + \frac{1-2p}{2p(c+3)}.$$

Пусть $4p^2+4p-1 \geq 0$, тогда $p \geq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, $c \leq c\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$ $-2 = 2\sqrt{2}+1 < 4$, $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0)] = [-(c-2), 0)]$ и исследование окончено.

Рассмотрим случай $p \in \left(0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Решим неравенство

$$H'(f(x), -(c-2)+0) \geq 0.$$

Имеем:

$$1+p-\frac{1}{4p}+\frac{1-2p}{2}\left(\sqrt{p^2-1}-p\right) \geq 0,$$

$$\frac{1-2p}{2}\sqrt{p^2+1} \geq \frac{(1-2p)p}{2}-1-p+\frac{1}{4p},$$

$$(2p(1-2p)\sqrt{p^2+1})^2 \geq [2p^2(1-2p)-4p-4p^2+1]^2$$

и, наконец,

$$-32p^5-16p^4-24p^3-8p^2+8p-1 \geq 0.$$

Исследуем поведение функции $F(p) = -32p^5-16p^4-24p^3-8p^2+8p-1$ на отрезке $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$. Имеем: $F(0) = -1 < 0$, $F\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$,

$$F'(p) = -160p^4-64p^3-72p^2-16p+8,$$

$$F''(p) = -640p^3-192p^2-144p-16 < 0.$$

Следовательно, $F'(p)$ строго убывает на отрезке $[0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}]$ и, если $F'\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$, то $F'(p) > 0$ на этом отрезке и функция $F(p)$ строго возрастает. Имеем: $F'\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = -152+108\sqrt{2} \approx 0,735 > 0$.

Далее, из неравенства $c \le 4$ следует, что $p \ge \dfrac{1}{\sqrt{35}}$. Найдем $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right)$:
$F\left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right) = \dfrac{8928 - 1521\sqrt{35}}{35^2\sqrt{35}} < 0$.

Тогда существует точка $p_0 \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, p_0\right)$ и $F(p) > 0$ при $p \in \left(p_0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

Наконец, заметим, что $F\left(\dfrac{1}{5}\right) > 0$. Таким образом, $p_0 \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{5}\right)$ и, поскольку $c < 4$, то $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и исследование окончено.

Так как $H(f(x), -c+0) = 0$, то для $p \in (p_0, 1)$ функция $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, 0]$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Farber H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. 1980. V. 35. P. 683–705.

2. Mazalov V.V., Zabelin A.A., Karpin A.S. *Equilibrium in arbitration game* // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. 2002. P. 41–46.

3. Mazalov V.V., Mentcher A.E., Tokareva J.S. *On a discrete arbitration procedure in three points*// Game Theory and Applications. 2005. V. XI. P. 87–91.

DISCRETE ARBITRATION PROCEDURE WITH NONUNIFORM DISTRIBUTION

Alexsander Mentcher, Faculty of Physics and Mathematics, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc., Docent (MentcherAE@zabspu.ru)

Abstract: We consider a zero-sum game related with arbitration scheme. The arbitrator's offers are concentrated in three or four points with nonuniform distribution. The equilibrium in mixed strategies is derived.

Keywords: arbitration scheme, discrete distribution, mixed strategies, equilibrium.