

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ



ТОМ 1

ВЫПУСК 4

2009

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Ответственный редактор

Л.А. ПЕТРОСЯН

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Зам. ответственного редактора

В.В. МАЗАЛОВ

Институт Прикладных

Математических Исследований

Карельский Научный Центр РАН

Ответственный секретарь

Н.А. ЗЕНКЕВИЧ

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Технический редактор

А.Н. РЕТТИЕВА

Институт Прикладных

Математических Исследований

Карельский Научный Центр РАН

Редакционная коллегия

В.А. ВАСИЛЬЕВ

Институт Математики

им. С.Л. Соболева СО РАН

Ю.С. ОСИПОВ

Математический Институт

им. В.А. Стеклова РАН

А.А. ВАСИН

Московский

Государственный Университет

Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ

Южный

Федеральный Университет

А.Ф. КЛЕЙМЕНОВ

Институт математики

и механики УрО РАН

И.И. ШЕВЧЕНКО

Дальневосточный

Государственный Университет

А.В. КРЯЖИМСКИЙ

Математический Институт

им. В.А. Стеклова РАН

Д. ЯНГ

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Д.А. НОВИКОВ

Институт Проблем

Управления РАН

Е.Б. ЯНОВСКАЯ

Санкт-Петербургский Экономико-

Математический Институт РАН

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук

Институт Прикладных Математических Исследований

Карельского Научного Центра РАН,

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления

Санкт-Петербургский Государственный Университет

© Редакция журнала "Математическая Теория Игр и её Приложения"

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.

e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: <http://mgta.krc.karelia.ru>

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 1

ВЫПУСК 4

2009

УДК 519.837.4, 517.977.8

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОЭТАПНЫХ И ДВУХЭТАПНЫХ АУКЦИОНОВ ОДНОРОДНОГО ТОВАРА*

АЛЕКСАНДР А. ВАСИН

АНТОН Г. ГУСЕВ

АГАТА А. ШАРИКОВА

факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

Москва

e-mail: vasin@cs.msu.su,

vmik@hotbox.ru, Agatha.Sharikova@ubs.com

Проблема повышения эффективности рынков однородных товаров (электроэнергии, газа и др. ресурсов) представляет значительный интерес. Один из возможных путей снижения “рыночной власти” компаний – это введение возможности заключения форвардных контрактов. На примере симметричной олигополии с постоянными предельными издержками рассматривается модель функционирования спотового и форвардного рынков электроэнергии, организованных как аукционы Курно. При этом производители стремятся максимизировать свою

©2009 А.А. Васин, А.Г. Гусев, А.А. Шарикова

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-00249 и гранта НШ 693.2008.1

прибыль, используя стратегии, соответствующие совершенноному подыгровому равновесию (СПР) рассматриваемой двухэтапной игры. В первой части данной статьи мы развиваем модель Бушнелла (Bushnell, 2005), рассматривая двухэтапную модель торгов при условии отсутствия арбитража и с учетом ограниченности производственных мощностей. Результаты исследования показывают, что оптимальная форма организации рынка в такой модели зависит от соотношения между максимальным уровнем производства и уровнем спроса по цене, равной предельным издержкам. Во второй части статьи рассматривается двухэтапная модель с пропорциональным правилом rationирования потребителей (в отличие от приоритета богатых потребителей в модели Бушнелла). Анализ показывает, что в такой модели существует равновесие в смешанных коррелированных стратегиях, а поведение производителей определяется эндогенной случайной величиной, определяющей разные ситуации на спотовом рынке: “рынок быков” или “рынок медведей”. СПР этой модели сравниваются с равновесиями по Нэшу для одноэтапных моделей.

Ключевые слова: форвардный рынок, олигополия Курно, рыночная власть, совершенное подыгровое равновесие.

1. Введение

Проблема использования рыночной власти крупными компаниями и связанного с этим отклонения рынка от состояния конкурентного равновесия имеет важное теоретическое и практическое значение. Рынок электроэнергии, характеризующийся значительной концентрацией производства, барьерами для входа на рынок и высокими требованиями к надежности компаний, предоставляет производителям реальные возможности получения сверхприбыли за счет использования рыночной власти в ущерб потребителям и суммарному общественному благосостоянию. Дробление рынка производства электроэнергии на мелкие компании нежелательно как с точки зрения издержек производства, так и с точки зрения надежности поставок электроэнергии. Альтернативным способом снижения рыночной власти является развитие рынка форвардных контрактов.

Начиная с работы [1], в ряде статей рассматривалось влияние рынка форвардных контрактов на уровень конкуренции в условиях олигополии. Большинство этих работ рассматривали рынок электроэнергии.

В работе [2] рассматривается рынок двух производителей с постоянными предельными издержками. Производители конкурируют по Курно на N последовательных рынках форвардных контрактов, а затем на одном спотовом рынке. Авторы предполагают, что активность арбитражеров уравнивает цены на всех $N + 1$ этапах, а неопределенность, связанная с будущим, отсутствует. В работе показано, что наличие возможности торговать на форвардном рынке увеличивает конкуренцию среди производителей, и что при увеличении числа этапов форвардных торгов N объем выпуска на таком рынке стремится к конкурентному состоянию. В последующей работе [6] показано, что такой результат возможен только в ситуации, когда форвардные позиции фирм являются общедоступной информацией, и что в противном случае возникает исход Курно.

Newbery [9] и Green [5] рассматривают равновесия на аукционах функций предложения на спотовом рынке, в духе модели [7]. Newbery анализирует случайные гладкие монотонные заявки производителей на спотовом рынке и показывает, что при условии отсутствия ограничений по входу на рынок и риск-нейтральных потребителях, в ситуации СПР в данной модели любому генератору невыгодно предлагать ненулевой объем. Green [4] анализирует аукцион с линейными функциями предложения. Автор показал, что коалиция пары крупных генераторов может поднять цены на спотовом рынке существенно выше уровня предельных издержек. В случае конкуренции по Бертрану-Эджворту производители реализуют большую часть произведенного ими товара. Тогда как в случае конкуренции по Курно в СПР производителям невыгодно продавать произведенный товар.

В работе [8] показано, что в случае конкуренции по Бертрану-Эджворту на спотовом рынке возможность заключения форвардных контрактов может увеличить рыночную власть производителей и снизить суммарное общественное благосостояние. Авторы установили, что в равновесии в такой модели каждый производитель будет покупать форвардные контракты на весь объем собственного произ-

водства, поднимая тем самым цену на спотовом рынке.

James Bushnell [4] рассматривает двухэтапную модель симметричной олигополии на рынке электроэнергии с аукционом Курно на спотовом и форвардном рынках в условиях отсутствия арбитража. В работе показано, что в случае постоянных предельных издержек введение форвардного рынка с известными форвардными стратегиями производителей снижает рыночную власть последних (оцениваемую индексом Лернера) так же, как увеличение числа производителей в модели с n до n^2 .

В указанной модели некоторые предположения не соответствуют реальности, а именно: 1) ограничение производственных мощностей не является существенным; 2) на форвардном рынке товар покупают потребители наиболее высокими резервными ценами. В реальности ограниченность производственных мощностей имеет существенное значение при ценообразовании (например, на рынках электроэнергии в пиковые периоды), а потребители обычно имеют равные возможности при покупке товара на форвардном рынке. Поэтому в рамках данного исследования рассматривается влияние указанных ограничений на равновесия. Спотовый рынок организован как аукцион Курно, при этом спрос на спотовом рынке соответствует остаточному спросу после торгов на форвардном рынке. Мы сравниваем цену конкурентного равновесия (Вальраса), равновесные по Нэшу цены одноэтапной модели Курно и одноэтапной модели Бертрана-Эджворта и цену СПР двухэтапного аукциона Курно. Отметим, что самый распространенный способ организации спотового рынка электроэнергии - это аукцион функций предложения единой цены, причем допустимые функции предложения – кусочно-постоянные. В работе [10] показано, что для этого аукциона исход, соответствующий устойчивым равновесиям Нэша, совпадает с исходом Курно. Аукцион оплаты по заявкам, применяемый в Великобритании, соответствует в этом смысле аукциону Бертрана-Эджворта (см. [12]).

В данной работе мы рассматриваем случай симметричной олигополии с постоянными предельными издержками. При заданной доле продаж наиболее крупной компании достигается максимальная разница между ценой Курно и ценой Вальраса ([10]). В разделе 2 данной работы представлены результаты касательно существования и харак-

теристик равновесий по Нэшу для одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджвортса. В разделе 3 анализируются две двухэтапные модели конкуренции по Курно.

Первый вариант отличается от модели Бушнелла лишь ограниченностью производственных мощностей. Найдены СПР, в зависимости от которых и указана область параметров, в которой СПР не существует. В зависимости от соотношения максимальной мощности и параметров функции спроса проведен сравнительный анализ равновесия двухэтапного аукциона и равновесий одноэтапных аукционов Курно и Бертрана-Эджвортса.

В случае равенства цен на форвардном и спотовом рынках естественно предположить, что любой потребитель, чья резервная цена превосходит рыночную цену, может с равной вероятностью купить товар на любом из этих рынков. В этом случае остаточный спрос, реализующийся на спотовом рынке соответствует правилу пропорционального рационирования потребителей (см. [3]). Мы покажем, что СПР в чистых стратегиях для такой модели не существует. В то же время обосновано существование СПР в коррелированных смешанных стратегиях. Вводится случайная величина, определяющая стратегии игроков на спотовом рынке и принимающая два значения. При реализации первого значения, на спотовом рынке устанавливается низкая цена и высокие объемы продажи (“медвежий рынок”). Для второго значения случайной величины на спотовом рынке реализуется высокая цена и низкие объемы (“бычий рынок”). Определены условия существования такого СПР и дана оценка отклонения соответствующей цены от цены конкурентного равновесия, близкая к полученной в работе [4].

2. Анализ одноэтапных моделей

Рассмотрим рынок однородного товара с конечным числом производителей A . Каждый производитель a характеризуется функцией затрат $C^a(q)$ с неубывающими предельными издержками. Поведение потребителей характеризуется функцией спроса $D(p)$, которая непрерывно дифференцируема, убывает по p и известна всем агентам. Напомним известные модели принятия решений для такого рынка. Функция предложения Вальраса определяет оптимальный объем

производства фирмы a в зависимости от цены p : $S^a(p) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} \max_q (pq - C^a(q))$. Цену, при которой достигается равенство функции спроса на рынке с суммарной функцией предложения Вальраса, назовем *ценой Вальраса* \tilde{p} . В модели олигополии Курно, стратегией производителя a является его объем производства $q_a \in [0, Q_a]$. Производители устанавливают свои объемы одновременно. Рыночная цена $p(\vec{q})$ уравнивает спрос и существующее предложение: $p(\vec{q}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} q_a)$. Функция выигрыша производителя a имеет вид $f^a(\vec{q}) = q_a p(\vec{q}) - C^a(q_a)$. Васин, Васина [10] установили следующее условие первого порядка для существования равновесия по Нэшу в данной модели. Пусть $(q_a^*, a \in A)$ – набор равновесных по Нэшу объемов производства, а $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} q_a^*)$ – цена, соответствующая этим объемам (цена Курно). Тогда

$$(p^* - C'_-(q_a^*))|D'(p^*)| \leq q_a^* \leq (p^* - C'_+(q_a^*))|D'(p^*)|, \quad \text{если } C^{a'}(0) < p^*, \quad (2.1)$$

$$q_a^* = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p^*. \quad (2.2)$$

Цена Курно определяется из уравнения $\sum_a S_C^a(p^*) = D(p^*)$, где функция предложения Курно $S_C^a(p)$ определяется как решение системы (2.1), (2.2).

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами-производителями и постоянными предельными издержками c . Пусть максимальная производственная мощность каждой фирмы ограничена: $q_a \leq \bar{q}$, $a = 1, \dots, n$, а суммарный спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0, \bar{D} - dp\}$. Тогда цена Вальраса $\tilde{p} = c$ при $0 \leq D(c) \leq n\bar{q}$, и $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ при $D(c) > n\bar{q}$.

Утверждение 2.1. Для данной симметричной олигополии при $Q^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{n+1}(\bar{D} - cd) \leq n\bar{q}$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D} + cnd}{d(n+1)}$, суммарный объем производства равен Q^* . При $n\bar{q} < Q^*$ цена Курно равна $p^* = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем производства равен $n\bar{q}$.

Доказательство. Из системы (2.1), (2.2) суммарная функция предложения Курно равна $\sum_a S_C^a = \min\{(p - c)nd, n\bar{q}\}$, $p > c$. На рис. 1 показаны два возможных варианта пересечения суммарной функции предложения Курно с суммарной функцией спроса.

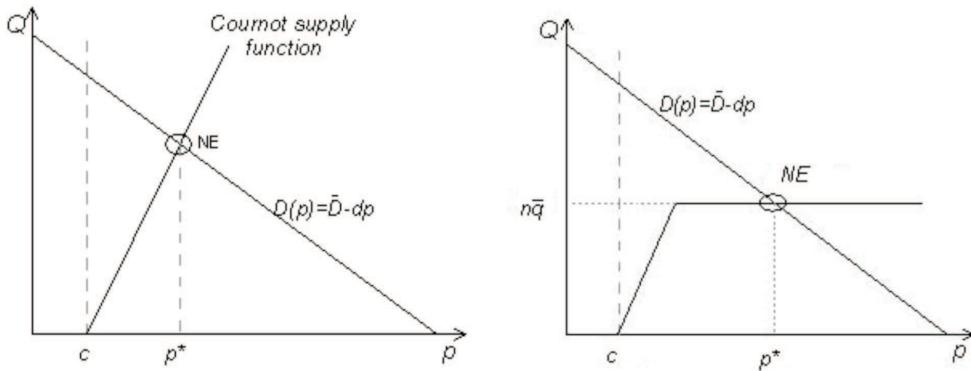


Рисунок 1.

a) Неактивное ограничение производственной мощности

b) Активное ограничение производственной мощности

В первом случае $Q^* \leq n\bar{q}$, суммарная функция предложения Курно равна суммарному спросу при $p^* = \frac{\bar{D} + cnd}{d(n+1)}$, а суммарный объем производства равен Q^* . Во втором случае $n\bar{q} < Q^*$, суммарное предложение равно суммарному спросу при $p^* = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, а суммарный объем производства равен $n\bar{q}$. \square

Рассмотрим теперь аналогичную олигополию с конкуренцией по Берtrandу - Эджворту. Стратегией производителя a в такой модели является цена s_a . Набор $s = (s_a, a \in A)$ определяет фактическое предложение $\hat{Q}(s) = (\hat{Q}_p(s), p \in P(s))(s)$, где $\hat{Q}_p(s) = n(p)\bar{q}$, $n(p)$ – количество производителей, назначающих цену $s_a = p$, $P(s)$ – вектор установленных производителями цен, а \hat{Q}_p – количество товара, предлагаемого по цене p . Потребители становятся в очередь и покупают товар в порядке возрастания цены на него, учитывая свои резервные цены. Функция остаточного спроса $D(p, \hat{Q})$ показывает, сколько товара потребители готовы купить по цене p при фактическом предложении \hat{Q} , после того, как весь товар по ценам $p' < p$ будет распродан. При условии приоритета богатых потребителей эта функция имеет вид $D(p, \hat{Q}) = \max\{0, \bar{D} - \sum_{p' < p} \hat{Q}_{p'}\}$. В случае пропорционального правила рационирования, функция остаточного спроса при этом имеет

вид $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum_{p' < p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. По функции остаточного спроса для любых стратегий производителей однозначно определяется максимальная продажная цена $R(s) = \max\{p \in P(s) | D(p, \hat{Q}(s)) > 0\}$ максимальная цена, при которой остаточный спрос еще положительный. В качестве выигрышей производителей рассмотрим их прибыли:

$$f^a(s) = \begin{cases} 0, & s_a > R(s), \\ (s_a - c)\bar{q}, & s_a < R(s), \\ (s_a - c) \min\{\bar{q}, D(R(s), \hat{Q}(s))/n(R(s))\}, & \text{другое} \end{cases}$$

где $n(R(s))$ – количество производителей, назначающих $s_a = R(s)$.

Следующее утверждение характеризует равновесия Нэша рассматриваемой одноэтапной игры:

Утверждение 2.2. *При $(n-1)\bar{q} > \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = c, a \in A)$ является равновесием Нэша в данной модели, соответствующим конкурентному равновесию. При $(n+1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ набор стратегий $(s_a = \tilde{p} = \frac{\bar{D}-n\bar{q}}{d}, a \in A)$ является равновесием Нэша при условии приоритета богатых потребителей. При $\frac{\bar{D}-cd}{(n+1)} < \bar{q} < \frac{\bar{D}-cd}{n-1}$ равновесий Нэша в рассматриваемой модели не существует. В условиях пропорционального правила последний набор стратегий является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \geq 2n\bar{q}$.*

Доказательство. См. Приложение. □

3. Анализ двухэтапных моделей

3.1. Обозначения

Рассмотрим симметричную олигополию с n фирмами - производителями с постоянными предельными издержками c . Производители участвуют в торгах на форвардном рынке, а затем в торгах на спотовом рынке, организованных в форме аукциона Курно. Стратегией производителя a является пара $q_a = (q_a^f, q_a^s(q^f))$, где q_a^f - объем предложения фирмы a на форвардном рынке, $\sum_a q_a^f = q^f$ - суммарный объем товара, проданного на форвардном рынке, а q_a^s - объем

предложения фирмы a на спотовом рынке, зависящий от q^f . Суммарный объем производства каждой фирмы ограничен: $q_a^f + q_a^s(q_a^f) \leq \bar{q}$, $a = 1, \dots, n$. Каждая фирма стремится максимизировать свою суммарную прибыль. Активность арбитражеров при любых стратегиях q_a , $a \in A$, обеспечивает равенство цен на форвардном и спотовом рынках: $p^s = p^f = p$.

3.2. Модель с приоритетом богатых потребителей

Пусть предлагаемый на форвардном рынке объем достается потребителям с наиболее высокими резервными ценами. При таком правиле рационаирования функция остаточного спроса по итогам форвардных торгов имеет вид $D(p, q^f) = \max\{0, D(p) - q^f\}$. Для любого набора стратегий $(q_a, a \in A)$, цена на спотовом рынке удовлетворяет соотношению $D(p) - q^f = \sum_a q_a^s(q^f)$. В СПР цена $p^s(q^f)$ на спотовом рынке определяется из равенства функции остаточного спроса функции остаточного предложения Курно: $D(p^s) - q^f = \min\{nd(p^s - c), n\bar{q} - q^f\}$.

Обозначим через \hat{p} и \hat{q} соответственно цену и суммарный объем предложения в СПР. Следующее утверждение описывает три типа СПР, которые существуют в рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между суммарной максимальной производственной мощностью $n\bar{q}$ и значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$. Как и ранее, через \tilde{p} и p^* обозначены соответственно цена Вальраса и цена Курно для одноэтапной модели аукциона.

Утверждение 3.1. а) Если максимальная производственная мощность фирмы удовлетворяет соотношению $(n+1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$, то для любого $q_a^f \leq \bar{q}$, $a \in A$ в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с активным ограничением производственных мощностей такое, что $\hat{p} = \tilde{p} = p^*$, $q_a^f + q_a^s = \bar{q}$, $a \in A$.

б) Если $n\bar{q} < \bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$, то существует локальное СПР с аналогичными характеристиками, но $p^* > \hat{p} = \tilde{p}$. Однако это локальная СПР не является истинным равновесием, так как производитель с максимальным объемом предложения на форвардном рынке может увеличить свою прибыль путем переброски всего объема своего предложения на спотовый рынок.

в) СПР с неактивным ограничением производственных мощностей существует в том и только том случае, когда $\bar{D} - cd \leq \frac{n^2+1}{n}\bar{q}$. В этом случае $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. Объемы предложения каждой фирмы равны $\hat{q}_a^f = \frac{(n-1)(\bar{D}-cd)}{n^2+1}$, $\hat{q}_a^s = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}$.

Доказательство. См. Приложение. \square

Рис. 2 показывает типы СПР рассматриваемой модели в зависимости от соотношения между значением спроса по цене, равной предельным издержкам $\bar{D} - cd$, и суммарного максимального объема предложения $n\bar{q}$.

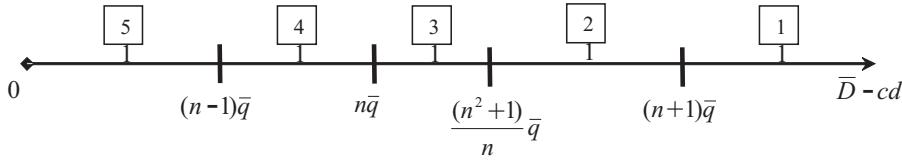


Рисунок 2. Виды СПР для двухэтапной модели с ограниченными производственными мощностями

- При $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ в модели существует равновесие Нэша, которому соответствует конкурентное равновесие одноэтапной модели с ценой $\hat{p} = \frac{\bar{D}-Q}{d}$ равной цене Вальраса. При этом ограничения производственных мощностей являются активными: $q_a^* = \bar{q}$. Для любого $\hat{q}_a^f < \bar{q}$, $a \in A$, аналогичное СПР с $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ существует для двухэтапной модели.
- При $\frac{n^2+1}{n}\bar{q} \leq \bar{D} - cd < (n + 1)\bar{q}$ существует локальное равновесие соответствующее конкурентному исходу. Однако это равновесие не является устойчивым в данной модели, а всем производителям оказывается при этом выгодно покинуть форвардный рынок. Таким образом, СПР в данном случае не существует.
- При $n\bar{q} \leq \bar{D} - cd < \frac{(n^2+1)}{n}\bar{q}$ существует описанное выше локальное СПР. Кроме того, в этой области существует равновесие Бушнелла (с неактивными ограничениями производствен-

ной мощности): суммарный объем предложения каждого производителя a равен $\hat{q}_a = \frac{n(\bar{D}-cd)}{n^2+1}$, равновесная цена равна $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)} < p^*$.

4. При $(n - 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd < n\bar{q}$ существует равновесие Бушнелла (см. выше).
5. При $0 \leq \bar{D} - cd < (n - 1)\bar{q}$ также существует равновесие Бушнелла. Однако в этом случае двухэтапный аукцион Курно оказывается неоптимальным способом организации торгов, поскольку аукцион Бертрана-Эджвортса дает равновесие, совпадающее с конкурентным.

3.3. Модель с пропорциональным правилом рационирования

При равенстве цен $p^s = p^f = p$, естественно предположить, что любой производитель с резервой ценой $p^r > p^f$ с равной вероятностью, не зависящей от p^s , покупает товар на форвардном рынке. Производители с более низкими резервыми ценами ($p^r < p^f$) товар покупать не будут. Рис. 3 иллюстрирует остаточную функцию спроса, которая возникает при таком правиле рационирования потребителей. Для данной функции остаточного спроса в игре описывающей спотовый рынок, существуют два локальных равновесия. Первое из этих равновесий соответствует области крутого наклона функции остаточного спроса (“рынок медведей”). Суммарная функция предложения Курно при этом равна $S_1(p) = nd(p - c)$, а остаточный спрос равен $D_{pr}^0(p, q^f) = \max\{0, \bar{D} - dp - q^f\}$. (В этом разделе рассматривается модель без ограничений на производственные мощности). Равновесная цена в этом случае равна

$$p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n + 1)} \quad (3.1)$$

Объем предложения по цене p_1 равен

$$q^{s_1} = nd(\Delta p - \frac{q^f}{d(n + 1)}), \text{ где } \Delta p = p - c. \quad (3.2)$$

Второе равновесие соответствует области пологого наклона функции остаточного спроса: $D_{pr}^2(p, q^f) = D(p)(1 - \frac{q^f}{D(p^f)})$. Равновесная цена и соответствующий объем предложения в этом случае равны:

$$p_2 = p^* > p_1, \quad q^{s2} = nd\Delta p \left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}} \right) < q^{s1} \quad (3.3)$$

(“рынок быков”, см. рис. 3).

Эти результаты следуют из необходимого условия (2.1), (2.2) существования равновесия Курно. Следующее утверждение устанавливает важную особенность рассматриваемого двухэтапного рынка.

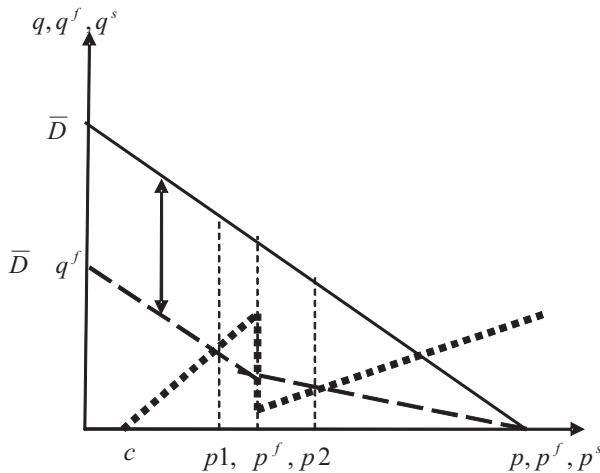


Рисунок 3. Функция предложения Курно на спотовом рынке для двухэтапной модели с правилом пропорционального рационирования

Утверждение 3.2. В данной модели СПР в чистых стратегиях не существует.

Доказательство. От противного, предположим, что существует СПР со стратегиями $(q_a^f, q_a^s(q^f)), a \in A$. Тогда ситуация $(q_a^s(q^f), a \in A)$ соответствует локальному равновесию Нэша на “бычьем рынке” или локальному равновесию Нэша на “медвежьем рынке”. Либо $q^s = 0$,

что возможно, если остаточный спрос при $p = c$ равен 0. Но набор $q_a^f, a \in A$, для которого $\sum q_a^f \geq D(c)$, не является равновесием Нэша одноэтапного аукциона Курно. Учитывая условие отсутствия арбитража, получим $p^f = p^s = p_1$ в первом случае, и $p^f = p^s = p_2$ во втором случае. Заметим, что такие стратегии не являются СПР, так как любой производитель с $q_a^s(p^f) > 0$ может увеличить свою прибыль, уменьшив свой объем предложения q_a^s на спотовом рынке в первом случае, и увеличив q_a^s во втором случае. (Это следует из условий первого порядка для существования локального равновесия Нэша и из-за разного наклона функции остаточного спроса справа и слева от точки $p^f = p^s$). \square

Какого рода равновесия существуют для такой модели? Равновесие в смешанных стратегиях. Однако, практика показывает, что независимые смешанные стратегии не применяются на подобных рынках. Другая интересная возможность – это попытаться найти СПР в смешанных коррелированных стратегиях.

Предположим, что при известном объеме предложения на форвардном рынке q^f , стратегии производителей на спотовом рынке определяются случайной величиной, которая может принимать два значения: $\omega = 0$ и $\omega = 1$ с вероятностями w и $1 - w$ соответственно, $w \in (0, 1)$. Пусть при $\omega = 0$ реализуется равновесие с низкой ценой, а при $\omega = 1$ – равновесие с высокой ценой. Тогда при условии рискнейтральности арбитражеров условие отсутствия арбитража означает, что $p^f = wp_1 + (1 - w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)}$, $w \in (0, 1)$.

Теперь найдем равновесие на форвардном рынке при условии, что стратегии производителей на спотовом рынке уже известны. Суммарная прибыль производителя a равна $\pi_a = \pi_a^f + \omega\pi_a^{s1} + (1 - \omega)\pi_a^{s2}$, где $\pi_a^f = (p^f - c)q_a^f = \frac{\bar{D} - dc - \omega q^f}{d(n+1)}q_a^f = (\Delta p - \frac{wq^f}{d(n+1)})q_a^f$,

$$\pi_a^{s1} = (p_1 - c)q_a^{s1} = \frac{(\bar{D} - dc - q^f)^2}{d(n+1)^2} = d\left(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)}\right)^2,$$

$$\pi_a^{s2} = (p_2 - c)q_a^{s2} = \left(\frac{\bar{D} - dc}{d(n+1)}\right)^2 d\left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\right) =$$

$$= d(\Delta p)^2 \left(1 - \frac{q^f}{nd\Delta p + \frac{wq^f}{n+1}}\right).$$

Условия первого порядка для нахождения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = \Delta p \left(1 - \frac{2w}{n+1}\right) + \frac{wq^f}{d(n+1)} \left(\frac{2}{n+1} - 1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(1-w)n\Delta p^3}{(n\Delta p + \frac{w}{d(n+1)}q^f)^2} = 0 \quad (3.4)$$

Утверждение 3.3. В рассматриваемой двухэтапной модели СПР в смешанных коррелированных стратегиях существует при $w \in (w_1(n), w_2(n))$, при этом нижние и верхние границы интервала указаны в табл. 1. Для любого w из найденного интервала СПР определяется из (3.1)-(3.3), а равновесный объем предложение каждого производителя на форвардном рынке \hat{q}_a^f находится как максимальный корень уравнения (3.4). Значение суммарного предложения на форвардном рынке составляет $\hat{q}^f = \frac{d}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)} \right)$ с точностью $O((1-w)^2)$.

Доказательство. См. Приложение. □

Таблица 1.

n	w_1	w_2
2	0.687	0.793
3	0.772	0.863
5	0.866	0.917
7	0.907	0.940
10	0.937	0.957

В табл. 2 представлены соотношения равновесных цен для исследуемой и классической моделей олигополии по Курно. Видно, что возможность заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей. В табл. 3 показано соответствующее этому факту увеличение суммарного предложения для случая двухэтапной модели по сравнению с одноэтапной моделью.

Таблица 2.

n	$\frac{p^f - c}{p^* - c}$	$\frac{p^f - c}{p^* - c} _{w_1}$	$\frac{p^f - c}{p^* - c} _{w_2}$
2	$\frac{13 + 23w}{60}$	0.480	0.520
3	$\frac{7 + 29w}{90}$	0.326	0.367
5	$\frac{19 + 206w}{975}$	0.202	0.213
7	$\frac{37 + 747w}{4900}$	0.146	0.150
10	$\frac{301 + 11799w}{111100}$	0.102	0.104

Таблица 3.

n	$\frac{q}{q^*} _{w_1}$	$\frac{q}{q^*} _{w_2}$
2	1.333	1.276
3	1.273	1.228
5	1.18	1.169
7	1.133	1.128
10	1.095	1.093

Таким образом, результаты о соотношении равновесных цен и объемов оказались близки к результатам Бушнелла. Отличие в том, что в двухэтапной модели с правилом пропорционального rationирования существует неопределенность: ожидаемая (а не фактическая) цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке, при этом, как правило, на спотовых торгах реализуется цена более низкая, чем цена на форвардных торгах.

4. Заключение

Для симметричной олигополии с постоянными предельными издержками и ограниченными производственными мощностями были найдены условия, при которых введение возможности заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей и увеличивает суммарное общественное благосостояние. В частности:

- 1) В случае, когда суммарная производственная мощность существенно превосходит спрос по цене равной предельным издержкам, т.е. когда даже уход с рынка производителей не способен повлиять на равновесную цену, оптимальным является проведение аукциона Бертрана-Эджвортса, в котором реализуется конкурентное равновесие с ценой, равной предельным издержкам. При этом введение форвардного рынка может только увеличить рыночную власть производителей.
- 2) В случае, когда спрос по цене, равной предельным издержкам, существенно превосходит суммарную производственную мощность (так что ограничение производственной мощности является активным), введение форвардного рынка никак не влияет на цены и уже исход одноэтапного аукциона Курно (и аукциона функций предложения единой цены) является конкурентным равновесием.
- 3) В ситуации, когда ограничение производственной мощности неактивно, получаются результаты, подобные работе [4], т.е. введение форвардного рынка ограничивает рыночную власть производителей примерно так же, как увеличение числа производителей на рынке с n до n^2 . Имеет место понижение цен и повышение выпуска. В случае пропорционального рационирования потребителей в модели существует СПР в коррелированных смешанных стратегиях, а на спотовом рынке имеет место эндогенная неопределенность: как правило, на спотовых торгах реализуется “рынок медведей” с более низкими ценами, реже – “рынок быков” с более высокими ценами.
- 4) В промежуточной области, близкой к 2), в двухэтапном аукционе Курно СПР не существует.

Так как на рынке электроэнергии соотношение между функцией предложения Вальраса и суммарной производственной мощностью

часто меняется, оптимальным с точки зрения увеличения суммарного благосостояния может оказаться применение различных типов аукционов для организации торгов в пиковые и непиковые периоды.

Одной из важных задач для дальнейшего исследования является обобщение полученных результатов на случай, когда существует несколько типов производственных мощностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allaz B., Vila J.-L. *Cournot competition, forward markets and efficiency*// mimeo, Center HEC-ISA and Stern School of Business, NY University. 1989.
2. Allaz B., Vila J.-L. *Cournot competition, futures markets and efficiency*// J. of Economic Theory. 1993. N. 1. P. 1–16.
3. Allen B., Hellwig M. *Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets*// Review of Economic Studies. 1986. V. 53. P. 175–204.
4. Bushnell J. *Oligopoly equilibria in electricity contract markets*// CSEM Working Paper, University of California Energy Institute. 2005. WP-148.
5. Green R. *The Electricity contract market in England and Wales*// J. of Industrial Economics. 1999. V. XLII. P. 107–124.
6. Hughes J.S., Kao J.L. *Strategic forward contracting and observability*// Int. J. of Industrial Organization. 1997. P. 121–133.
7. Klemperer P.D., Meyer M.A. *Supply function equilibrium in oligopoly under uncertainty*// Econometrica. 1989. V. 57. P. 1243–1277.
8. Mahenc P., Salanie F. *Softening competition through forward trading*// J. of Economic Theory. 2004. N. 2. P. 282–293.
9. Newbery D.M. *Competition, contracts, and entry in the electricity spot market*// RAND J. of Economics. 1998. V. 29. N. 4. P. 726–749.

10. Vasin A.A., Vasina P.A. *Models of supply functions competition with application to the network auctions.* Moscow: EERC, 2005.
11. Vasin A.A., Vasina P.A. *Electricity Markets Analysis and Design//* Working paper # 2006/053, Moscow, New Economic School. 2006. 23 p.
12. Wolfram C. *Electricity Markets: Should the Rest of the World Adopt the United Kingdom's Reforms?// Regulation.* 1999. V. 22(4). P. 48–53.
13. Васин А.А., Васина П.А. *Рынки и аукционы однородного товара.* /Препринт # 2005/047. -М.: Российская Экономическая Школа, 2005. 51 с.

5. Приложение

5.1. Доказательство утверждения 2.2.

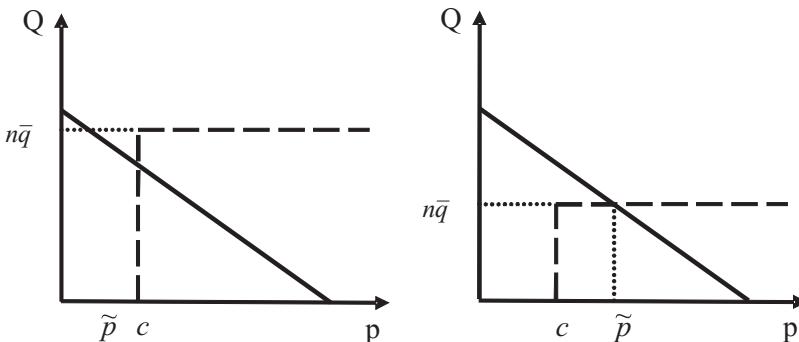


Рисунок 4.

а) Неактивное ограничение производственной мощности

б) Активное ограничение производственной мощности

Из необходимого условия для существования равновесия в модели Бертрана-Эджвортта $s_a = \tilde{p}$, $a \in A$ в ситуации равновесия для модели симметричной олигополии. Таким образом, могут реализовываться две возможные ситуации, показанные на рис. 4. В случае

a) $\bar{D} - cd \leq n\bar{q}$ - ограничения производственных мощностей являются неактивными, и $\tilde{p} = c$. В этом случае, равновесие существует тогда и только тогда, когда $\bar{D} - cd \leq (n - 1)\bar{q}$. В такой ситуации увеличение цены одним из производителей порождает ситуацию, в которой остальные производители полностью покрывают весь спрос на рынке по цене c – таким образом, назначение более высокой цены оказывается производителю невыгодно. И наоборот, при $n\bar{q} \geq \bar{D} - cd > (n - 1)\bar{q}$ любой производитель может увеличить свой выигрыш назначая цену $s_a > c$, так как остаточный спрос положителен в некоторой окрестности c .

Если $\bar{D} - cd > n\bar{q}$, то $\tilde{p} = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d}$ (рис. 4b). Набор стратегий $(\bar{s}_a = \tilde{p}, a \in A)$ будет равновесным по Нэшу в случае, когда ни одному из производителей не выгодно увеличивать заявленную им цену, т.е.

$$(\tilde{p} - c)\bar{q} \geq (s_a - c)D(s_a, \hat{Q}(\bar{s})) = \begin{cases} ((n - 1)\bar{q}(s_a - c)) \text{ при } p = \tilde{p}, \\ \bar{q} \text{ при } s_a > p \end{cases} =$$

$$(s_a - c)(\bar{D} - ds_a - (n - 1)\bar{q}) \text{ для любого } s_a > \tilde{p} \Leftrightarrow (s_a - p)\bar{q} \leq d(s_a - p)(s_a - c) \quad \forall s_a \geq \tilde{p} \Leftrightarrow \bar{q} \leq d(\tilde{p} - c) = \bar{D} - n\bar{q} - cd \Leftrightarrow (n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd.$$

При пропорциональном правиле рационирования остаточный спрос равен $D_{pr}(p, \hat{Q}) = D(p)(1 - \sum_{p' < p} \frac{\hat{Q}_{p'}}{D(p')})$. Отсюда условие существования равновесия Нэша имеет вид: $(\tilde{p} - c)\bar{q} \geq \frac{1}{n}(s_a - c)(n\bar{q} + d\tilde{p} - ds_a) \Leftrightarrow (\tilde{p} - c)\bar{q} \geq (s_a - c)\bar{q} - \frac{d(s_a - c)(s_a - \tilde{p})}{n} \Leftrightarrow \frac{d(s_a - c)}{n}(s_a - \tilde{p}) \geq (s_a - \tilde{p})\bar{q} \quad \forall s_a \geq \tilde{p} \Leftrightarrow d(\tilde{p} - c) \geq n\bar{q} \Leftrightarrow \bar{D} - cd \geq 2n\bar{q}$.

5.2. Доказательство утверждения 3.1.

Пусть торги на форвардном рынке завершились, и суммарный объем товара, проданный на форвардной рынке составил $q^f = \sum_a q_a^f$, $a = \overline{1, n}$. Тогда остаточный спрос на спотовом рынке равен $D(p, q^f) = \bar{D} - dp - q^f$, а функция суммарного предложения Курно на спотовом рынке равна $S_C(p, q^f) = \begin{cases} nd(p - c), c \leq p \leq p_0 \\ n\bar{q} - q^f, p > p_0 \end{cases}, p_0 = \frac{n\bar{q} + ncd - q_f}{nd}$.

a) Пусть $(n + 1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$. Найдем значение объема q^f продаж на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса на

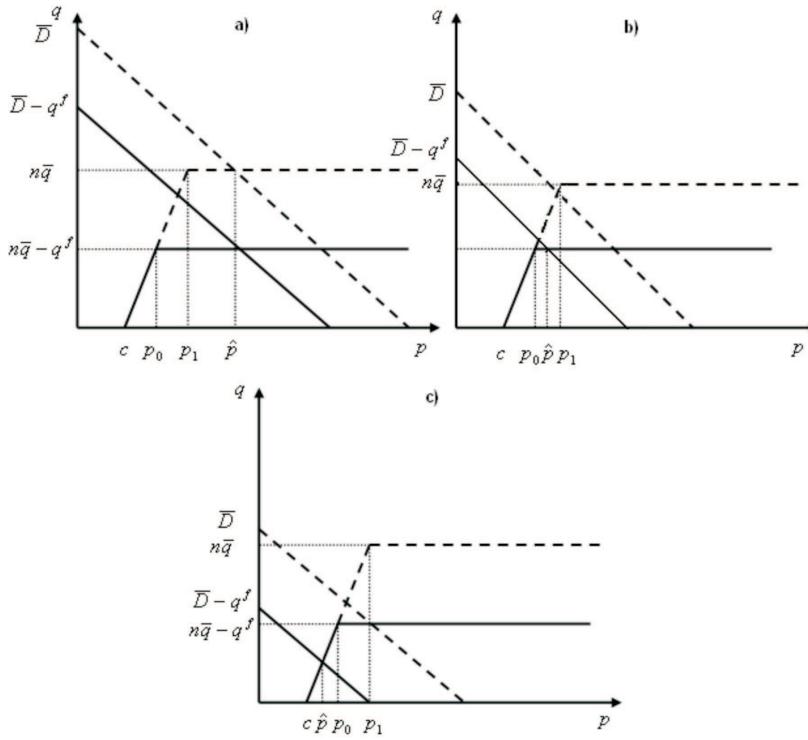


Рисунок 5.

спотовом рынке пересекает функцию суммарного остаточного предложения Курно на горизонтальном участке. В этом случае цена на спотовом рынке совпадает с ценой на форвардном рынке (рис. 5а): $\hat{p} = p^s = p^f = \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} = \tilde{p}$, суммарный объем товара, проданного на спотовом рынке равен $\hat{q}^s = n\bar{q} - q^f$. Так как $D(p_1) = n\bar{q}$, производители продадут весь предложенный ими объем на рассматриваемом двухэтапном аукционе. Заметим, что цена p_1 не зависит от объема q^f продаж на форвардном рынке. Поэтому, производителю a невыгодно изменять объем q_a^f своего предложения на форвардном рынке, так как такое отклонение не изменит равновесную цену. При этом прибыль производителя $\hat{\pi}_a = (\hat{p} - c)(q_a^f + q_a^s) = \frac{\bar{D} - cd - n\bar{q}}{d}\bar{q}$ остается неизменной, так как $\frac{\partial \pi_a}{\partial q_a^f} = 0 \forall q_a^f \in [0, \bar{q}]$. Таким образом, при $(n+1)\bar{q} \leq \bar{D} - cd$ для любого значения q^f в рассматриваемой двухэтапной модели существует СПР с исходом, соответствующим равновесию в одноэтап-

ной модели Курно при активном ограничении на производственные мощности: $\hat{q}_a^f + \hat{q}_a^s = \bar{q}$ для любого $a \in A$.

6) Пусть $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$. Найдем суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на горизонтальном участке последней. При $\bar{D} - cd < (n+1)\bar{q}$ такое пересечение возможно при $p_0 \leq \hat{p} \leq p_1$ (рис. 5б) \Leftrightarrow

$$\frac{n\bar{q} + ncd - q_f}{nd} \leq \frac{\bar{D} - n\bar{q}}{d} \leq \frac{\bar{q} + cd}{d} \Leftrightarrow (n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd) \leq q^f. \quad (5.1)$$

Учитывая, что $q^f \leq n\bar{q}$, получим следующее условие существования СПР: $n\bar{q} \leq D - cd \leq (n+1)\bar{q}$.

Не ограничивая общности, предположим, что производитель a предлагает на форвардном рынке максимальный объем товара q_a^f , $q_a^f > \frac{q^f}{n}$. Рассмотрим ситуацию, когда все производители, кроме производителя a выбирают локально равновесные стратегии, найденные выше, а производитель a перебрасывает весь объем своего предложения на форвардном рынке на спотовый рынок таким образом, что неравенство (5.1) не выполнено: $\sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f < (n+1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$. В этом

случае функция остаточного предложения Курно на спотовом рынке имеет вид (рис. 6):

$$S^C(p) = \begin{cases} 0, & p < c \\ (p - c)nd, & p \in [c; p_0) \\ (p - p_0)d + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f, & p \in [p_0; p_1) \\ n\bar{q} - \sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f, & p \geq p_1, \end{cases}$$

где $p_0 = c + \frac{n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f}{nd}$, $p_1 = c + \frac{\bar{q}}{d}$. Тогда новая равновесная цена p' удовлетворяет соотношению: $(p' - p_0)d + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' - \sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p'd - cd - \bar{q} + \frac{\sum_b \hat{q}_b^f}{n} + n\bar{q} - \sum_b \hat{q}_b^f = \bar{D} - dp' - \sum_{b \neq a} \hat{q}_b^f$. Учитывая, что $\sum_b \hat{q}_b^f = n\hat{q}_a^f$, получаем новую равновесную цену p' и новый объем q_a суммарного предложения производителя a : $p' = \frac{1}{2d} (\bar{D} + cd - (n-1)\bar{q})$,

$q_a = \frac{1}{2}((\bar{D} - cd) - (n - 1)\bar{q})$. При этом прибыль производителя a составит: $\pi'_a(q_a) = (p' - c)q_a = \frac{(\bar{D} - cd - (n - 1)\bar{q})^2}{4d}$. Если $\pi'_a(q_a^f) > \hat{\pi}_a$, то производителю выгодно изменить объем своего предложения на форвардном рынке тогда и только тогда, когда

$$\frac{(\bar{D} - cd - (n - 1)\bar{q})^2}{4d} > \frac{\bar{D} - cd - n\bar{q}}{d}\bar{q}. \quad (5.2)$$

При $\bar{D} - cd < (n + 1)\bar{q}$ неравенство (5.2) выполнено, и производитель a имеет возможность увеличить свою прибыль. Таким образом, при $n\bar{q} \leq \bar{D} - cd \leq (n + 1)\bar{q}$ найденное локальное равновесие является неустойчивым в рассматриваемой модели.

Заметим, что в случае отклонения одного из производителей, прибыль остальных производителей возрастает.

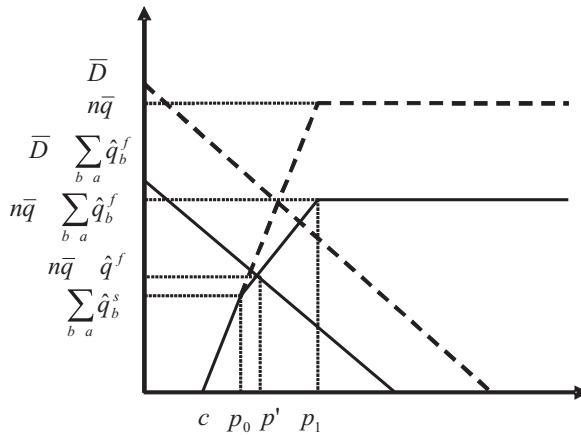


Рисунок 6.

в) Пусть теперь $\bar{D} - cd < n\bar{q}$. Суммарный объем q^f предложения на форвардном рынке, при котором функция остаточного спроса пересекает функцию суммарного предложения Курно на спотовом рынке на наклонном участке, удовлетворяет неравенству: $\hat{p} < p_0 \Leftrightarrow \frac{\bar{D} + ncd - q^f}{d(n+1)} < \frac{n\bar{q} + ncd - q^f}{nd} \Leftrightarrow q^f < (n + 1)n\bar{q} - n(\bar{D} - cd)$.

Объемы предложения на спотовом рынке при цене \hat{p} равны: $\hat{q}_a^s = d(\hat{p} - c) = \frac{\bar{D} - cd - q^f}{n+1}$, $a \in A$. Эта ситуация соответствует двухэтапной модели, рассмотренной Бушнеллом. Определим оптимальный объем

предложения q_a^f : предположим, что все производители, кроме производителя a выбирают свои форвардные стратегии q_b^f , $b \neq a$, а производитель a предлагает объем q_a^f на форвардном рынке. Прибыль производителя a равна:

$$\pi_a(\hat{p}, q_a) = (q_a^s + q_a^f)(\hat{p} - c) = \left(\frac{\bar{D} + ncd - q_a^f - \sum_{b \neq a} q_b^f}{d(n+1)} - c \right) \left(q_a^f + \frac{\bar{D} - cd - q_a^f - \sum_{b \neq a} q_b^f}{n+1} \right).$$

Производитель a выбирает стратегию q_a^f так, чтобы максимизировать свою прибыль. Тогда условие первого порядка имеет вид: $\frac{\partial \pi_a(\hat{p}, q_a^f, q_a^s(q_a^f))}{\partial q_a^f} = 0$. Так как мы рассматриваем случай симметричной олигополии, то:

$$-\frac{1}{d(n+1)} \left(q_a^f + \frac{\bar{D} - cd - nq_a^f}{n+1} \right) + \left(\frac{\bar{D} + ncd - nq_a^f}{d(n+1)} - c \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$-q_a^f - (\bar{D} - cd) + n(\bar{D} - cd) - n^2 q_a^f = 0 \Rightarrow \hat{q}_a^f = \frac{n-1}{n^2+1}(\bar{D} - cd)$, $\hat{q}_a^s(q_a^f) = \frac{\bar{D}-cd}{n^2+1}$, $\hat{p} = \frac{\bar{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$. Так как $q_a = q_a^f + q_a^s \leq \bar{q}$, то при $\bar{D} - cd \leq \frac{(n^2+1)\bar{q}}{n}$ существует равновесия Бушнелла.

5.3. Доказательство утверждения 3.3.

Произведем замену $\frac{wq^f}{d(n+1)} + n\Delta p = z$. Тогда условие первого порядка (3.4) принимает вид кубического уравнения:

$$\Phi(z) = -z^3 \left(\frac{1+n^2}{n(n+1)} \right) + z^2 \Delta p \left(2 + n - \frac{2(w+n)}{n+1} \right) - (1-w)n\Delta p^3 = 0 \quad (5.3)$$

Проанализируем поведение этой функции, изучая ее производную $\Phi'(z) = -3z^2 \left(\frac{1+n^2}{n(n+1)} \right) + 2z\Delta p \left(2 + n - \frac{2}{n+1}(w+n) \right)$. Локальный минимум функции достигается при $z_1 = 0$, локальный максимум – при $z_2 = \frac{2}{3}n\Delta p \left(\frac{n^2+n+2(1-w)}{1+n^2} \right)$, а функция $\Phi(z)$ имеет вид, показанный на рис. 7. Из логических ограничений на объемы предложения q^f, q_a^{s1}, q_a^{s2} (должны быть неотрицательными) имеем в пересчете для z следующие ограничения:

$$n\Delta p \leq z \leq n\Delta p \frac{n+1}{n+1-w}. \quad (5.4)$$

Заметим, что $\Phi(n\Delta p) = \frac{\Delta p(n^2-nw+w-1)}{n} > 0$ для любого $n > 1$ и $\Delta p > 0$, $\Phi'(n\Delta p) = \frac{-n^2+2n+4(1-w)-3}{n+1} < 0$ на найденном выше интервале. Таким образом, единственное подходящее нам решение (3.1) –

это максимальный корень рассматриваемого кубического уравнения, при условии, что этот корень удовлетворяет второму неравенству из (5.4).

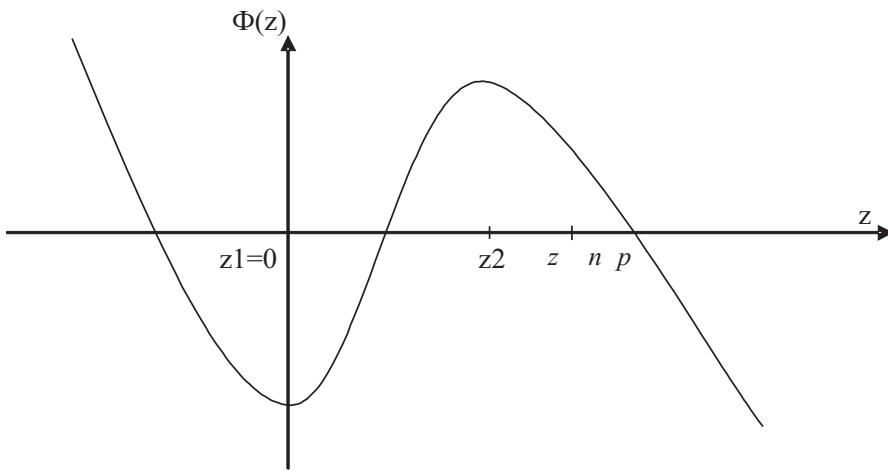


Рисунок 7. График функции $\Phi(z)$

Необходимо определить интервал значений w , при которых решение кубического уравнения существует и является равновесием. При $w = 1$ получим $\Phi((n + 1)\Delta p) = \frac{-n^2 - 2n - 1}{n} < 0$. Отсюда, верхняя граница для w - это 1. Нижняя граница допустимого интервала может быть определена с помощью итерационного метода, или разложением функции $\Phi(z)$ в ряд Тейлора, учитывая что $\varepsilon = 1 - w$. В результате вычислений, с точностью до 10^{-3} получены следующие нижние граничные значения для w в зависимости от n :

$$\underline{w}(2) = 0.637; \underline{w}(3) = 0.742; \underline{w}(5) = 0.832; \underline{w}(7) = 0.875; \underline{w}(10) = 0.909$$

При фиксированном w из допустимого интервала, аналогичными методами можно найти $z(w, n)$, учитывая что $\Phi(z)$ - гладкая монотонная функция на интервале (5.4). Суммарный объем предложения q^f на форвардном рынке, цены p^f и p_1 , объемы предложения на спотовом рынке q^{s_1} , q^{s_2} определяются по следующим формулам:

$$\hat{p}^f = p^s = wp_1 + (1 - w)p_2 = p^* - \frac{wq^f}{d(n + 1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= p^* - \Delta p \left(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)(n+1)} \right) \\
p_1 &= p^* - \frac{1}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)(n+1)} \right), \quad p_2 = p^*, \\
\hat{q}^f &= \frac{d}{w} \Delta p \left(\frac{n^5 + (1-w)(n^4 - 2n^2 - 1) + n^3(1-2w)}{n^2(1+n^2)} \right), \\
q^{s_1} &= nd \left(\Delta p - \frac{q^f}{d(n+1)} \right), \\
q^{s_2} &= nd \Delta p \left(1 - \frac{q^f}{nd \Delta p + \frac{wq^f}{n+1}} \right).
\end{aligned}$$

На спотовом рынке из-за существования двух разных участков функции спроса, образовавшихся в результате пропорционального рационирования потребителей, для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденных нами выше локально равновесных стратегий и изменить свой объем производства таким образом, что новая цена будет отвечать другому участку функции спроса. Вообще говоря, найденные нами выше равновесия могут оказаться локальными, но не глобальными. Ниже мы рассматриваем оба возможных варианта отклонения и исследуем равновесия на устойчивость к большим отклонениям.

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации низкой цены на спотовом рынке. Для производителя может оказаться выгодным отклониться от найденной нами выше стратегии – объема q^{s_1} . Он может начать сокращать свой объем, тем самым увеличивая равновесную цену. Для линейной функции спроса необходимое условие равновесия является достаточным. Поэтому сокращение объема предложения данного игрока, недостаточное для того, чтобы новая цена превзошла форвардную цену, не позволит производителю увеличить свою прибыль. Но заметим, что правый участок функции спроса у нас более пологий, следовательно, на этом участке сокращение объема приводит к более значительному увеличению цены. Таким образом найденная ранее пара (равновесные объемы, равновесная цена) может не быть равновесие в рассматриваемой модели.

Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Прибыль производителя в случае использования найденной локально равновесной стратегии составит $\pi_I = q_1(p_1 - c) = d(p_1 - c)^2$, так как $q_1 = d(p_1 - c)$. В случае вышеописанного отклонения, новые локально равновесные объемы могут быть получены из условий первого порядка, и равны $v_1^{new} = Kd(p_1^{new} - c) = \frac{K}{2}(\bar{D} - dc) - \frac{n-1}{2}q_1$, где $K = 1 - \frac{q^f}{D(p^f)}$ доля неудовлетворенного спроса после проведения форвардных торгов. Ожидаемый выигрыш в данной ситуации равен $\tilde{\pi}_{II} = Kd(p_1^{new} - c)^2$. Отсюда условие устойчивости равновесия имеет вид: $d(p_1 - c)^2 \geq Kd(p_1^{new} - c)^2$. Локальное равновесие с низкой ценой является равновесием в рассматриваемой модели, если $w \in (w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$, где $w_1^1(n), w_2^1(n)$ определяются из следующего неравенства:

$$f_1(q^f, n, w) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}\right) \left(1 - \frac{(n-1)(1-q^f)}{(n+1)(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f})}\right)^2 - \left(\frac{1-q^f}{n+1}\right)^2 \leq 0,$$

где $q^f = q^f(w)$.

Приблизительные значения $w_1^1(n), w_2^1(n), \underline{w}(n)$ для $n = 2, 3, 5, 7$ и 10 приведены в табл. 4. Без ограничения общности, положим $\bar{D} - dc = 1$. Так как $n - q^f(n+1-w) > 0$, достаточно проверить выполнение неравенства $\phi_1(q^f, n, w) = (q^f)^2((n-3)w^2 + 4w) + q^f(4w^2 - 6(n+1)w + 4n) + 4nw - 3n + 1 \leq 0$. При $w = 1$ это неравенство для q^f не выполнено, так как $Discrim\phi_1 = 16(n^2 - w)(1 - w)^3 \geq 0 \quad \forall w \in [0, 1]$, $Discrim\phi_1 = 0$ при $w = 1$. Численное решение неравенства: $q^f(w, n) \in \left(\frac{-2w^2 + 3w(n+1) - 2n - 2\sqrt{(n^2 - w)(1 - w)^3}}{w((n-3)w+4)}, \frac{-2w^2 + 3w(n+1) - 2n + 2\sqrt{(n^2 - w)(1 - w)^3}}{w((n-3)w+4)}\right)$ определяет интервал значений $(w_1^1(n), w_2^1(n)) \subset (\underline{w}(n), 1)$ величины w , при которых рассматриваемое локальное равновесие для случая $\omega = 0$ является устойчивым равновесием (см. табл. 4).

Исследование устойчивости локального равновесия по Нэшу в случае реализации высокой цены на спотовом рынке проводится аналогично вышеизложенному случаю: нужно рассмотреть ситуацию, когда при фиксированных стратегиях остальных игроков, производитель увеличивает объем своего предложения

столь существенно, равновесная цена резко уменьшается и имеет место равновесие с низкой ценой (имеет место переход на крутой участок функции остаточного спроса). Сравнивая ожидаемые выигрыши в случае применения найденной локально равновесной стратегии и в случае вышеописанного отклонения, можно найти условия существования равновесия в рассматриваемой модели. Новый локальный максимум в этом случае равен $v_2^{new} = d(p_2^{new} - c) = \frac{1}{2}(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1}(1 - \frac{q^f}{n+wq^f}))$, соответствующая прибыль равна $\tilde{\pi}_I = v_2^{new}(p_2^{new} - c) = \frac{1}{4d}(1 - q^f - \frac{n-1}{n+1}(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2$, в то время как прибыль без отклонения от локального равновесия равна $\pi_{II} = q_2(p^* - c) = \frac{1}{d(n+1)^2}(1 - \frac{q^f}{n+wq^f})$. Отсюда, локальное равновесие будет равновесием в рассматриваемой модели тогда и только тогда, когда $\frac{1}{4}((1 - q^f)(n + 1) - (n - 1)(1 - \frac{(n+1)q^f}{n+wq^f}))^2 - (1 - \frac{q^f}{n+wq^f}) \leq 0$, где $q^f = q^f(w)$. Это неравенство определяет нижнюю границу $w_1^2(n)$ интервала допустимых значений w , $w \in (w_1^2(n), 1)$, при которых существует равновесие Нэша в рассматриваемой модели (см. табл. 1). Пересечение полученных допустимых интервалов для каждого конкретного n дает интервал $(w_1(n), w_2(n))$ значений w при котором рассматриваемые локальные равновесия образуют СПР для двухэтапной модели (см. табл. 4).

Таблица 4.

n	w	w_1^1	w_2^1	w_1^2
2	0.637	0.655	0.793	0.687
3	0.742	0.722	0.863	0.764
5	0.832	0.866	0.917	0.840
7	0.875	0.907	0.940	0.879
10	0.909	0.937	0.957	0.911

GAME-THEORETIC ANALYSIS OF ONE-STAGE AND TWO-STAGE HOMOGENEOUS GOOD AUCTIONS

Alexander A. Vasin, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., professor (vasin@cs.msu.su),

Anton G. Gusev, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (vmik@hotbox.ru),

Agata A. Sharikova, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (Agatha.Sharikova@ubs.com).

Abstract: Forward market is a known instrument for reduction of market power of large producers. This paper examines a two-stage oligopoly environment with constant marginal cost. The outcome at both the forward and the spot market is a Cournot outcome dependent on correspondent demand and supply at the market. Producers aim to maximize their profits via choosing subgame perfect equilibrium of the two-stage game as their strategies. In the first part of the current research we extend the model by Bushnell(2005) considering a capacity constraint. Our results show that the optimal way of market organization in such a model strongly depends on the difference between the maximal production volume and the demand volume at price equal to the marginal cost. In the second part of the paper we consider proportional rationing instead of surplus maximizing rationing at the forward market. We show that for such a model there exists only an SPE in correlated mixed strategies. Producers' behavior should depend on some random variable that determines one of two possibilities for spot market: either "bear market or "bull market". We compare this SPE with Nash equilibria of one-stage markets.

Keywords: forward market, Cournot oligopoly, market power, subgame perfect equilibrium.

УДК 518.9

ББК В18

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА КОМИТЕТОВ

АНАСТАСИЯ М. КАЛУГИНА

Забайкальский государственный

гуманитарно-педагогический университет

имени Н.Г. Чернышевского

Чита

e-mail: kaluginam82@yandex.ru

В статье описаны процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета, предложенные Brams S.F., Steven J., D. Marc Kilgour, M.Remzi Sanver. Представлен метод производящих функций для этих процедур, открывающий возможность использования в решении задачи большой размерности пакет символьных вычислений Mathematica.

Ключевые слова: производящая функция, процедура минимакса, процедура минисуммы.

1. Введение

Процедура принятия решений выборным органом обычно происходит путем голосования. Процедура голосования применяется также и при выборе комитета. Комитеты могут избираться как в выборных органах, так и в административном аппарате различных учреждений; например, выборы совета факультета, выборы аудиторской комиссии и др. В [2] были предложены процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета. Рассмотрим их.

2. Процедуры минисуммы и минимакса для выбора комитета

Пусть дано n избирателей и k кандидатов. Каждый избиратель в своем бюллетене может проголосовать за стольких кандидатов, сколько соответствуют его предпочтениям. Такой вид голосования называется голосованием одобрения. При голосовании одобрения каждый избирательный бюллетень - это бинарный k -вектор, (p_1, \dots, p_k) , где p_i равно 0 или 1. Эти бинарные векторы указывают одобрение или неодобрение каждого кандидата избирателем. Для обозначения выбранных комитетов мы будем пользоваться подобными бинарными векторами.

Чтобы упростить запись, мы запишем избирательный бюллетень такой, как, например, $(1,1,0)$, в виде 110. Это означает, что избиратель одобряет первого и второго кандидата и не одобряет третьего.

Число различных избирательных бюллетеней или, что то же самое, число возможных результатов выбора, равно 2^k .

Пример 2.1.

Пусть $q = 2$ и 4 избирателя заполняют бюллетени для трех кандидатов следующим образом:

1 избиратель: 100

1 избиратель: 110

2 избирателя: 101

Видно, что кандидат № 1 получил одобрение от всех 4-х избирателей, кандидат № 2 - от 1-го, и кандидат № 3 - от 2-х. То есть кандидаты № 1 и №3 избраны, а №3 - нет.

Определение 2.1. Расстоянием Хемминга между двумя избирательными бюллетенями p и q , называется $d(p, q)$, равное число компонент, которыми они отличаются.

Например, для избирательного бюллетеня 110 расстояния Хемминга будут следующими (табл. 1):

Таблица 1.

Избирательный бюллетень	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
110	110	100 010 111	000 101 011	001

Теперь обратим внимание не на индивидуальные избирательные бюллетени, а на различные избирательные бюллетени и число раз, которое каждый из них был учтен. Например, комитеты 100 и 101 минимизируют сумму расстояний Хемминга для всех избирателей в нашем примере, это эквивалентно тому, что сумма расстояний Хемминга всех различных избирательных бюллетеней имеет вес числа избирателей, заполнивших каждый из них.

Определение 2.2. *Индексным весом бюллетеня называется число его повторений.*

Процедура минисуммы состоит в определении минимума среди суммарных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней. *Процедура минимакса* состоит в определении минимума среди максимальных значений произведения расстояния Хемминга и весов всевозможных бюллетеней.

Табл. 2 показывает индексные веса бюллетеней примера 2.1. во всех восьми возможных случаях создания комитета. (* отмечены минимальные значения)

Таблица 2.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Число повторов	1	1	2		
000	1	2	4	7	4
100	0	1	2	3*	2*
010	2	1	6	9	6
001	2	3	2	7	3
110	1	0	4	5	4
101	1	2	0	3*	2*
011	3	2	4	9	4
111	2	1	2	5	2*

Ясно, что здесь два комитета-победителя: 100 и 101, чьи суммы минимизируют сумму расстояний Хемминга. В нашем примере такой комитет всегда содержит кандидата № 1, и может содержать или не содержать кандидата № 3.

Рассмотрим другой способ определения комитета, представляющего интересы большинства слоев избирателей. Вместо поиска комитета, который минимизирует сумму индексных весов по всем изби-

рательным бюллетеням, найдем комитет(ы), который(е) минимизирует(ют) максимум индексных весов. В нашем примере это три комитета: 100, 101 и 111.

Помимо индексного веса, каждый бюллетень обладает весом близости.

Веса близости отражают число избирателей, заполнивших каждый из различных избирательных бюллетеней. Но они также включают информацию о близости избирательного бюллетеня ко всем остальным избирательным бюллетеням, основанную на расстояниях Хемминга.

Чем бюллетень ближе к большему числу избирательных бюллетеней, тем большее влияние он имеет при определении комитета.

Определение 2.3. *Вес близости избирательного бюллетеня q^j есть*

$$w_j = \frac{m_j}{\sum_{h=1}^t m_h d(q^j, q^h)}, \quad (2.1)$$

где m_j - число избирателей, заполнивших избирательный бюллетень $q^j = (q_1^j, \dots, q_n^j)$ и t - число различных заполненных избирательных бюллетеней. Знаменатель дроби - сумма расстояний Хемминга между избирательным бюллетенем j и всеми остальными избирательными бюллетенями (включая j).

Процедуру минисуммы с весами близости проиллюстрируем на примере 2.1. Расстояние Хемминга избирательного бюллетеня 100 с ним самим, со 110 и с 101 равно 0, 1 и 1, соответственно. Поскольку эти избирательные бюллетени заполнены одним, одним и двумя избирателями, то избирательный бюллетень имеет вес

$$\frac{1}{[(1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (2 \cdot 1)]} = \frac{1}{3}$$

Числитель здесь отражает тот факт, что один избиратель заполнил этот избирательный бюллетень.

Точно также, избирательные бюллетени 110 и 101 имеют веса $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{[(1 \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (2 \cdot 2)]} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{2}{[(1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (0 \cdot 2)]} = \frac{2}{3}.$$

Избавимся для удобства от знаменателей, умножив их на 15; получим, что веса близости бюллетеней равны 5, 3, и 10, соответственно.

Таким образом, получим табл. 3, отличающуюся от предыдущей тем, что она основана на весах близости, а не на индексных весах.

Таблица 3.

Бюллетень	100	110	101	Сумма	Максимум
Вес близости	5	3	10		
000	5	6	20	31	20
100	0	3	10	13	10
010	10	3	30	43	30
001	10	9	10	29	10
110	5	0	20	25	20
101	5	6	0	11*	6*
011	15	6	20	41	20
111	10	3	10	23	10

Заметим, что только комитет 101 минимизирует и сумму и максимум весов близости, в то время, как комитет 101 - также один из комитетов, выделенных критериями минисуммы и минимакса, основанных на индексных весах. Это совпадение не обязательно будет нормой. В [2] показано, что результаты разных процедур могут быть антиподами.

3. Производящие функции для процедур минисуммы и минимакса

Пусть n избирателей голосуют за k кандидатов; избиратели заполняют n бюллетеней. Некоторые заполненные бюллетени могут повторяться. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1,\dots,t}$, $t \leq n$ - множество заполненных избирательных бюллетеней. Пусть $u_i = u(a_i)$ число повторов избирательного бюллетеня a_i , $\sum_{i=1}^t u_i = n$.

Используем для обозначения кандидатов метки γ_j , $j = 1, \dots, k$. Метки могут быть сокращены, если одновременно находятся в числите и знаменателе одной дроби. Так, в примере 2.1. запись $\gamma_1\gamma_3$ означает комитет 101, а 1 соответствует комитету 000.

Опишем процедуру выбора комитета в терминах производящих функций.

Составим последовательность всевозможных бюллетеней

$$\underbrace{00\dots 0}_{k \text{ раз}}, \underbrace{10\dots 0}_{k \text{ раз}}, \dots, \underbrace{1\dots 1}_{k \text{ раз}}. \quad (3.1)$$

Последовательности бюллетеней (3.1) поставим в соответствие последовательность меток

$$\{1, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_1\dots\gamma_k\}. \quad (3.2)$$

Разобьем последовательность (3.2) на группы по количеству меток. То есть

$$\kappa_j = \{\kappa_j^l\}_{l=1}^{C_k^j}, \text{ где } |\kappa_j^l| = j.$$

Каждой такой группе можно поставить в соответствие последовательность меток

$$\kappa_j \rightarrow \left\{ \prod_{t=1}^j \gamma_{st} \right\}_1^{C_k^j}, s_t \in \overline{1, k} \quad (3.3)$$

или

$$\{\{1\}, \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}, \{\gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}\gamma_k\}, \dots, \{\gamma_1\dots\gamma_k\}\}$$

Для последовательности групп (3.3) составим производящую функцию:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{j=0}^k \kappa_j x^j = 1 + (\gamma_1 + \dots + \gamma_k)x + (\gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_{k-1}\gamma_k)x^2 + \dots + \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k x^k = \\ &= \prod_{j=1}^k (1 + \gamma_j x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, для каждого избирательного бюллетеня $a_i \in A$ найдем

$$G_i(x) = \frac{G(x)}{a_i}. \quad (3.5)$$

После раскрытия скобок и сокращения получим сумму дробей. Составим последовательность, в которую по порядку запишем все элементы суммы (3.5).

$$\left\{ \frac{1}{\gamma_{t_1}\dots\gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_1 x}{\gamma_{t_1}\dots\gamma_{t_l}}, \frac{\gamma_2 x}{\gamma_{t_1}\dots\gamma_{t_l}}, \dots, \frac{\gamma_1\dots\gamma_k x^k}{\gamma_{t_1}\dots\gamma_{t_l}} \right\} \quad (3.6)$$

Каждому элементу b_r , $r = 1, \dots, 2^k$ последовательности (3.6) поставим в соответствие число $g(b_r)$, равное числу меток в b_r . Это число определяет расстояние Хемминга между избирательными бюллетенями, находящимися в числите и знаменателе дроби. Получим последовательности чисел

$$g_i = \{g_{i1}, \dots, g_{i2^k}\}. \quad (3.7)$$

Теперь составим новую последовательность, умножив все элементы последовательности (3.7) для бюллетеня a_i на u_i - индексный вес этого бюллетеня.

$$g_i u_i = \{g_{i1} u_i, \dots, g_{i2^k} u_i\}. \quad (3.8)$$

Для процедуры минисуммы составим последовательность W - сумму последовательностей вида (3.8) для всех $a_i \in A$.

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^t g_{ij} u_i \right\}_{j=1}^{2^k}. \quad (3.9)$$

Для процедуры минимакса сравним поэлементно последовательности вида (3.8), и из максимумов составим последовательность M .

$$M = \left\{ \max_{a_i \in A} g_{ij} u_i \right\}_{j=1}^{2^k}. \quad (3.10)$$

Определим для последовательностей W и M процедуру $MinNo(\{c\}) = (c_m; \{m\})$, где c_m - значение минимального элемента последовательности, $\{m\}$ - последовательность порядковых номеров элемента.

После применения этой процедуры мы, определив элемент(ы) с номером m из (3.4), получим обозначение комитета-победителя выборов.

Вернемся к примеру 2.1.

Количество кандидатов $k = 3$, избирателей $n = 4$, различных избирательных бюллетеней $t = 3$, $a_1 = 100$, $u_1 = 1$, $a_2 = 110$, $u_2 = 1$, $a_3 = 101$, $u_3 = 2$.

Составим производящую функцию.

$$G = (1 + \gamma_1 x)(1 + \gamma_2 x)(1 + \gamma_3 x) = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x + \gamma_3 x + \gamma_1 \gamma_2 x^2 + \gamma_1 \gamma_3 x^2 + \gamma_2 \gamma_3 x^2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 x^3.$$

Определим последовательности расстояний Хемминга и последовательности индексных весов для a_1, a_2, a_3 .

$$\begin{aligned} \frac{G}{\gamma_1} &= \frac{1}{\gamma_1} + x + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}x + \frac{\gamma_3}{\gamma_1}x + \gamma_2x^2 + \gamma_3x^2 + \frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}x^2 + \gamma_2\gamma_3x^3, \\ g_1 &= \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}, u_1g_1 = \{1, 0, 2, 2, 1, 1, 3, 2\}. \\ \frac{G}{\gamma_1\gamma_2} &= \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2}x + \frac{1}{\gamma_1}x + \frac{\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2}x + x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1}x^2 + \gamma_3x^3, \\ g_2 &= \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}, u_2g_2 = \{2, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 1\}. \\ \frac{G}{\gamma_1\gamma_3} &= \frac{1}{\gamma_1\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3}x + \frac{\gamma_2}{\gamma_1\gamma_3}x + \frac{1}{\gamma_1}x + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}x^2 + x^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^2 + \gamma_2x^3, \\ g_3 &= \{2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 1\}, u_3g_3 = \{4, 2, 6, 2, 4, 0, 4, 2\}. \end{aligned}$$

Тогда,

$$W = \{7, 3, 9, 7, 5, 3, 9, 5\}, M = \{4, 2, 6, 3, 4, 2, 4, 2\}.$$

$\text{MinNo}(W) = (3; 2, 6)$, то есть комитеты 100 и 101.

$\text{MinNo}(M) = (2; 2, 6, 8)$, то есть комитеты 100, 101 и 111.

Теперь рассмотрим процедуры минисуммы и минимакса, основанные на весах близости.

Разобьем $G(x)$ на две части: $G(x) = G'(x) + G''(x)$ - где $G'(x)$ состоит из слагаемых, соответствующих бюллетеням из A , а $G''(x)$ содержит все остальные.

Для определения веса близости бюллетеней будем действовать таким же образом, что и для определения индексного веса, а именно: найдем $\frac{G'(x)}{a_i}$, составим последовательности из слагаемых и далее определим последовательности g'_i так же, как и последовательности (3.10).

Теперь найдем веса близости, используя формулу (2.1):

$$w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^t g'_{ij} u_j}. \quad (3.11)$$

Определив веса близости, так же, как и в [2], избавимся для удобства от знаменателя, переобозначив веса близости через u'_i . Далее действуем по вышеописанному алгоритму, используя вместо индексных весов u_i веса близости u'_i . Найдем последовательность W' путем поэлементного суммирования последовательностей типа (3.8). Последовательность M' определим путем поэлементного сравнения последовательностей типа (3.8) и определения максимума. Применим к W' и M' процедуру MinNo и определим комитеты-победители выборов.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере 2.1.

$$G'(x) = \gamma_1 x + \gamma_1\gamma_2 x^2 + \gamma_1\gamma_3 x^2.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1} = x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3, \quad g'_1 = \{0, 1, 1\}, \quad w_1 = \frac{u_1}{\sum_{j=1}^3 g'_{1j} u_j} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{1}{\gamma_2} x + x^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} x^3, \quad g'_2 = \{1, 0, 2\}, \quad w_2 = \frac{u_2}{\sum_{j=1}^3 g'_{2j} u_j} = \frac{1}{5}.$$

$$\frac{G'(x)}{\gamma_1 \gamma_3} = \frac{1}{\gamma_3} x + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} x^2 + x^3, \quad g'_3 = \{1, 2, 0\}, \quad w_3 = \frac{u_3}{\sum_{j=1}^3 g'_{3j} u_j} = \frac{2}{3}.$$

Избавившись от знаменателей, получим $u'_1 = 5$, $u'_2 = 3$, $u'_3 = 10$.

Далее, $u'_1 g_1 = \{5, 0, 10, 10, 5, 5, 15, 10\}$, $u'_2 g_2 = \{6, 3, 3, 9, 0, 6, 6, 3\}$, $u'_3 g_3 = \{20, 10, 30, 10, 20, 0, 20, 10\}$.

$W' = \{31, 13, 43, 29, 25, 11, 41, 23\}$, $M' = \{20, 10, 30, 10, 20, 6, 20, 10\}$.

$\text{MinNo}(W') = (11; 6)$, $\text{MinNo}(M') = (6; 6)$. Обе процедуры указывают на комитет 101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bilbao J.M., Fernandez J.R., Jimenes A., Lopez J.J. *Generating functions for computing power indices efficiently* // Top. 2000. V. 8. N 2. P. 191–213.
2. Brams S.F., Steven J., Marc Kilgour D., Remzi Sanver M. *A Minimax Procedure for Negotiating Multilateral Treaties* // In Matti Wiberg (ed.), *Reasoned Choices: Essays in Honor of Hannu Nurmi*. Turku, Finland: Finnish Political Science Association. 2004. P. 255–274.

METHOD OF GENERATING FUNCTIONS FOR PROCEDURE OF COMMITTEE' ELECTING

A.M. Kalugina, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc. (kaluginam82@yandex.ru).

Abstract: In this paper we consider minimax procedure and minisum procedure for electing committee. These procedures were proposed by Brams S.F., Steven J., Kilgour D.M., Sanver M.R. We introduce method of generating functions for these procedures. This method can be used for electing with large number of candidates. For calculating with our method we can use the system Mathematica.

Keywords: generation function, minimax procedure, minisum procedure.

СТРАТЕГИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ В ИГРЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА СФЕРЕ. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ СБЛИЖЕНИЕ.

АЛЕКСАНДР М. КОВШОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург
e-mail: petinv@ya.ru

Рассматривается дифференциальная игра простого преследования на сфере двух лиц с нулевой суммой. Вводится стратегия геодезического сближения, обладающая некоторыми свойствами стратегии параллельного сближения на плоскости, доказывается её существование и единственность в общем случае, рассматриваются все особые случаи. Доказывается наискорейшее свойство этой стратегии.

Ключевые слова: дифференциальные игры, простое движение, преследование на сфере.

1. Введение

Дифференциальные игры преследования с простым движением достаточно хорошо исследованы для плоскости и пространств больших размерностей с нулевой гауссовой кривизной. В данной работе делается попытка исследовать некоторые свойства подобных игр на сфере, обладающей иными геометрическими и топологическими свойствами.

Среди множества стратегий преследования значимое место занимает стратегия параллельного преследования (Π -стратегия), являющаяся наилучшей стратегией для широкого класса дифференциальных игр преследования. В работах Л. А. Петросяна впервые показана оптимальность Π -стратегии для игр простого преследования с линией жизни [2], в игре с двумя преследователями и одним убегающим [1] и в игре простого преследования в полуплоскости Петросян (1969).

Однако, как правило, исследования ограничивались играми на линейных многообразиях, либо на многообразиях, имеющих нулевую гауссову кривизну. Было бы интересно попробовать распространить результаты, полученные для игр на линейных многообразиях, на многообразие, имеющее ненулевую кривизну, в частности, на сферу. В данной работе описывается попытка построить стратегию сближения на сфере, обладающей некоторыми свойствами Π -стратегии на плоскости. Так Π -стратегия, при движении убегающего по прямолинейной траектории, предписывает преследователю двигаться тоже по некоторой прямой линии. На сфере отрезки прямых заменяются геодезическими отрезками, которыми являются дуги больших окружностей. Будет построена геодезическая стратегия сближения на сфере (Π_1 -стратегия), доказаны её существование и единственность для общего случая, а также рассмотрены особые случаи и доказано наискорейшее свойство.

2. Стратегия геодезического сближения (Π_1 -стратегия)

2.1. Игра простого преследования на сфере

Пусть на сфере единичного радиуса находятся две подвижные точки E и P . Точка E — убегающий, точка P — догоняющий. Будем называть P и E игроками. Оба игрока могут двигаться по сфере в любом направлении и мгновенно менять направление движения, при этом убегающий двигается со скоростью σ , а догоняющий — со скоростью ρ , причем $\sigma < \rho$. Будем рассматривать игру, в которой целью догоняющего является поимка убегающего, а целью убегающего является избежание его поимки догоняющим. При этом будем считать,

что догоняющий поймал убегающего в момент времени t , если в этот момент времени координаты догоняющего совпали с координатами убегающего.

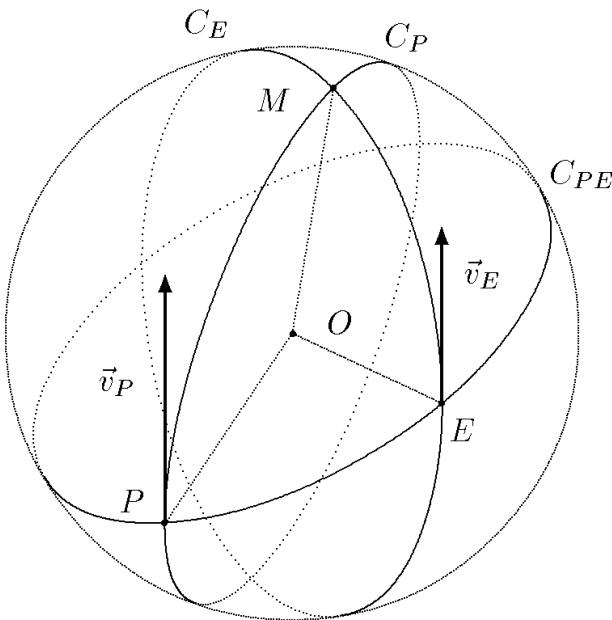


Рисунок 1. Положение игроков на сфере

Во время игры и догоняющий, и убегающий знают координаты друг друга в каждый текущий момент времени, то есть, можно сказать, что игроки видят друг друга, кроме того, догоняющему всегда известна скорость его противника в текущий момент времени. Другими словами — это игра с дискриминацией по отношению к убегающему. В дальнейших рассуждениях мы не будем упоминать о том, что игра происходит на сфере именно единичного радиуса, однако это всегда будет подразумеваться.

Обозначим вектор скорости убегающего за \vec{v}_E , а догоняющего — за \vec{v}_P . Очевидно, что эти векторы являются касательными к сфере в точках E и P соответственно. Поставим в соответствие каждому вектору скорости по большой окружности C_E и C_P (радиус большой окружности совпадает с радиусом сферы), таким образом, чтобы большие окружности проходили соответственно через точки E и P ,

а векторы \vec{v}_E и \vec{v}_P были бы, соответственно, касательными векторами этих окружностей в этих точках. Еще одну большую окружность C_{PE} проведем через две точки P и E . Эта большая окружность является пересечением сферы с плоскостью, проведенной через три точки P , E и центр сферы O . Эту плоскость можно однозначно построить, только если точки P , E и O не лежат на одной прямой, то есть, в тех случаях, когда точки P и E не совпадают или не являются диаметрально противоположными точками на сфере. Если хотя бы одна из больших окружностей C_E и C_P не совпадает с большой окружностью C_{PE} , то C_E и C_P пересекаются ровно в двух точках на сфере (рис. 1).

Как известно, большие окружности на сфере являются геодезическими линиями. Будем называть *геодезической дугой* любую дугу большой окружности, длина которой не превосходит π . Понятно, что такая дуга является кратчайшей линией на сфере, соединяющей свои крайние точки, и длина этой дуги равна *геодезическому расстоянию* между этими точками.

2.2. Существование и единственность центра преследования

Пусть убегающий и догоняющий движутся соответственно вдоль C_E и C_P , причем C_E не совпадает с C_{PE} . И пусть в некоторый момент времени t они оба окажутся в одной из двух точек пересечения больших окружностей C_E и C_P . Обозначим эту точку за M . Докажем следующее предложение.

Предложение 2.1. (Существование). *При любом расположении игроков на сфере в разных точках, не являющихся диаметрально противоположными, и при любом направлении движения убегающего вдоль произвольной большой окружности C_E , не совпадающей с большой окружностью C_{PE} , существует такая большая окружность C_P , что двигаясь вдоль нее в определенном направлении, догоняющий окажется одновременно с убегающим в точке M , являющейся одной из двух точек пересечения больших окружностей C_E и C_P , причем дуги PE , EM и PM образуют сферический треугольник, то есть длины этих дуг и углы между ними не превосходят π .*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим некоторый сфе-

рический треугольник, изображенный на рис. 2, с боковыми сторонами EM и PM , длины которых соотносятся как $\sigma : \rho$. Обозначим длину основания PE за λ , а длины боковых сторон EM и PM выразим в виде $\sigma\tau$ и $\rho\tau$ соответственно, где τ — время движения игроков до точки встречи. Углы при вершинах P , E и M обозначим соответственно за ϕ , ψ и μ . Мы покажем, что сферический треугольник существует для любых λ и ψ , принадлежащих открытому отрезку вещественной оси $]0, \pi[$, то есть, что существует τ , такое что $\rho\tau \leq \pi$.

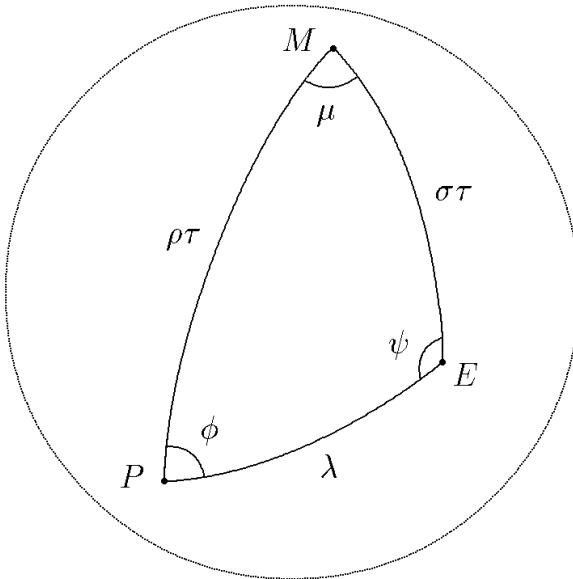


Рисунок 2. Сферический треугольник

Воспользуемся известной формулой косинусов для сторон сферического треугольника:

$$\cos \rho\tau = \cos \lambda \cos \sigma\tau + \sin \lambda \sin \sigma\tau \cos \psi, \quad (2.1)$$

и перепишем ее в виде:

$$\cos \psi = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}. \quad (2.2)$$

Определим, для каких ψ и λ из $]0, \pi[$ уравнение (2.1) разрешимо относительно τ . Рассмотрим знаменатель правой части уравнения (2.2).

Поскольку $\sigma < \rho$ и $\rho\tau \leq \pi$, как сторона сферического треугольника, то $\sigma\tau < \pi$. С другой стороны, из (2.1) видно, что τ , а вместе с ним и $\sigma\tau$ могут равняться нулю лишь при $\lambda = 0$. Следовательно, знаменатель правой части уравнения (2.2) в нуль не обращается.

Поскольку $|\cos \psi| < 1$, из (2.2) получим неравенства:

$$1 > \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}, \quad (2.3)$$

$$-1 < \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}. \quad (2.4)$$

Из (2.3), умножая обе части на знаменатель и перенося члены, не содержащие $\rho\tau$, в правую часть, получим:

$$\cos \rho\tau < \cos \lambda \cos \sigma\tau + \sin \lambda \sin \sigma\tau,$$

а после свертки правой части в косинус разности:

$$\cos \rho\tau < \cos(\lambda - \sigma\tau),$$

откуда в силу $\rho\tau \leq \pi$ и $\lambda - \sigma\tau < \pi$ следует $\rho\tau > \lambda - \sigma\tau$, то есть

$$\tau > \frac{\lambda}{\rho + \sigma}. \quad (2.5)$$

Точно так же из (2.4) будем иметь:

$$\cos \rho\tau > \cos(\lambda + \sigma\tau).$$

Это неравенство имеет два решения: одно — при $\lambda + \sigma\tau \leq \pi$, другое — при $\lambda + \sigma\tau \geq \pi$.

Для $\lambda + \sigma\tau \leq \pi$, то есть $\tau \leq (\pi - \lambda)/\sigma$, получим $\rho\tau < \lambda + \sigma\tau$, откуда

$$\tau < \frac{\lambda}{\rho - \sigma}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что такая запись решения имеет смысл при таких λ , что выполняется неравенство $\lambda/(\rho - \sigma) \leq (\pi - \lambda)/\sigma$, то есть $\lambda \leq \pi(\rho - \sigma)/\rho$. Если же $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, то решением будет весь рассматриваемый промежуток и оно запишется в виде:

$$\tau \leq \frac{\pi - \lambda}{\sigma}. \quad (2.7)$$

Для $\lambda + \sigma\tau \geq \pi$, то есть $\tau \geq (\pi - \lambda)/\sigma$, получим $2\pi - \rho\tau > \lambda + \sigma\tau$, откуда

$$\frac{\pi - \lambda}{\sigma} \leq \tau < \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}. \quad (2.8)$$

Ясно, что это решение имеет место только при таких λ , которые удовлетворяют неравенству $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma) > (\pi - \lambda)/\sigma$, то есть $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, ибо в противном случае это решение (2.8) не пересекается с рассматриваемым промежутком.

Объединяя решения (2.6)–(2.8) неравенства (2.4), и пересекая их с решением (2.5) неравенства (2.3), получим область допустимых значений для τ в уравнении (2.2):

$$\frac{\lambda}{\rho + \sigma} < \tau < \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, \quad \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi, \quad (2.9)$$

$$\frac{\lambda}{\rho + \sigma} < \tau < \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}, \quad \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi < \lambda < \pi. \quad (2.10)$$

В (2.9) и (2.10) к своей нижней границе величина τ стремится при $\cos\psi \rightarrow 1$, а к своей верхней границе величина τ стремится при $\cos\psi \rightarrow -1$.

Заметим, что при $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$ области допустимых значений τ , задаваемые неравенствами (2.9) и (2.10), совпадают, поскольку равны друг другу верхние границы τ . Действительно

$$\left. \frac{\lambda}{\rho - \sigma} \right|_{\lambda=\frac{\rho-\sigma}{\rho}\pi} = \left. \frac{\pi}{\rho} \right|_{\lambda=\frac{\rho-\sigma}{\rho}\pi} = \left. \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma} \right|_{\lambda=\frac{\rho-\sigma}{\rho}\pi}.$$

Поэтому, если рассматривать верхнюю границу τ , как функцию от λ , то верхняя граница будет непрерывна по λ на промежутке $]0, \pi[$, что, несомненно, относится и к нижней границе.

Кроме того, очевидно, что на промежутке от 0 до $\pi(\rho - \sigma)/\rho$ верхняя граница τ возрастает, а от $\pi(\rho - \sigma)/\rho$ до π — убывает, откуда следует что при всех λ выполняется неравенство:

$$\tau < \frac{\pi}{\rho}, \quad \text{что эквивалентно } \rho\tau < \pi.$$

В неравенствах (2.9)–(2.10) нижняя граница области изменения τ получена из неравенства (2.3), а верхняя — из неравенства (2.4). Поскольку правая часть уравнения (2.2) непрерывна относительно τ , то при пробегании τ всех значений из открытого промежутка (2.9)–(2.10) правая часть уравнения (2.2) пробегает все значения из открытого промежутка $] -1, 1 [$. Находящаяся в левой части уравнения (2.2) функция косинуса монотонна на промежутке $] 0, \pi [$, следовательно для любого $\psi \in] 0, \pi [$ существует такое τ из (2.9) или (2.10), что правая часть уравнения (2.2) при этом значении τ равна $\cos \psi$. При этом $0 < \sigma\tau < \rho\tau < \pi$, то есть геодезические дуги длинами λ , $\sigma\tau$ и $\rho\tau$ образуют сферический треугольник с углом ψ между первыми двумя сторонами. Другие два угла μ и ϕ при вершинах M и P соответственно выражаются по формуле косинусов через стороны следующим образом:

$$\cos \phi = \frac{\cos \sigma\tau - \cos \lambda \cos \rho\tau}{\sin \lambda \sin \rho\tau}, \quad (2.11)$$

$$\cos \mu = \frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau}. \quad (2.12)$$

Знаменатели правых частей уравнений (2.11) и (2.12) в нуль не обращаются, поскольку $0 < \sigma\tau < \rho\tau < \pi$ и $0 < \lambda < \pi$, поэтому уравнения (2.11) и (2.12) справедливы при всех τ . А так как уравнения (2.11) и (2.12) задают не углы, а их косинусы, то нужно определить промежутки, из которых берутся углы, удовлетворяющие этим уравнениям. Будем считать, что углы ϕ и μ берутся из промежутка $[0, \pi]$. Очевидно, что угол ϕ является углом между плоскостью большой окружности C_{PE} и вектором скорости догоняющего \vec{v}_P так же, как угол ψ является углом между той же плоскостью и вектором скорости убегающего \vec{v}_E .

Мы рассматриваем углы ψ , ϕ и μ из промежутка $[0, \pi]$. Но убегающий может выбирать любое направление движения, а промежуток $[0, \pi]$ охватывает лишь половину возможных направлений. Дело в том, что сферический треугольник всегда целиком лежит только в одной полусфере, определяемой большой окружностью, которая содержит любую из сторон этого сферического треугольника. В частности, сферический треугольник PEM всегда целиком помещается в одной из полусфер, на которые делит сферу большая окружность

C_{PE} . Поэтому мы можем считать, что положительные значения углов ψ и ϕ задают сферический треугольник в “правой” полусфере, а отрицательные — в “левой”. При этом очевидно, что углы ψ и ϕ имеют всегда один и тот же знак. Следовательно, достаточно рассматривать только неотрицательные значения углов, считая при этом, что при отрицательных значениях углов получается такой же результат, как и при равных им по абсолютной величине положительных значениях, с точностью до зеркального отражения от плоскости большой окружности C_{PE} .

Поскольку геодезическое расстояние между двумя точками на единичной сфере не превосходит π , причем равенство π достигается только при диаметрально противоположном расположении точек, то можно говорить, что каково бы ни было геодезическое расстояние $\lambda \in]0, \pi[$ между игроками и при любом выборе убегающим вектора скорости \vec{v}_E , не являющегося касательным вектором в точке E к большой окружности C_{PE} , догоняющий может выбрать такое направления вектора скорости \vec{v}_P , что соответствующие большие окружности C_E , C_P и C_{PE} составят сферический треугольник с отношением боковых сторон $\sigma : \rho$. Предложение доказано. \square

Предложение 2.2. (Единственность). Уравнение (2.2) задает взаимнооднозначное соответствие между ψ из $]0, \pi[$ и τ из (2.9)–(2.10).

Доказательство. В предыдущем предложении мы доказали, что каждому ψ соответствует свое τ . Докажем, что каждому ψ соответствует единственное τ .

Поскольку $\cos \psi$ непрерывная ограниченная монотонная на $]0, \pi[$ функция, и правая часть уравнения (2.2) ограничена и непрерывна по τ на ограниченном промежутке (2.9)–(2.10), то для доказательства достаточно показать монотонность правой части уравнения (2.2) на промежутке (2.9)–(2.10). Возьмем производную от правой части уравнения (2.2) по τ и, приравняв ее к нулю, попробуем найти корни.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau} \right) = \\ & = \frac{\sin \lambda \sin \sigma\tau (-\rho \sin \rho\tau + \sigma \cos \lambda \sin \sigma\tau)}{\sin^2 \lambda \sin^2 \sigma\tau} - \end{aligned}$$

$$-\frac{\sigma(\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau) \sin \lambda \cos \sigma\tau}{\sin^2 \lambda \sin^2 \sigma\tau} = 0,$$

↓

$$\begin{aligned} & -\rho \sin \lambda \sin \sigma\tau \sin \rho\tau + \sigma \sin \lambda \sin^2 \sigma\tau \cos \lambda - \\ & - \sigma \cos \rho\tau \sin \lambda \cos \sigma\tau + \sigma \cos \lambda \cos^2 \sigma\tau \sin \lambda = 0, \end{aligned}$$

↓

$$\sigma \cos \lambda \sin \lambda - \sin \lambda (\sigma \cos \rho\tau \cos \sigma\tau + \rho \sin \rho\tau \sin \sigma\tau) = 0,$$

↓

$$\sigma \cos \lambda - \sigma \cos \rho\tau \cos \sigma\tau - \rho \sin \rho\tau \sin \sigma\tau = 0,$$

↓

$$\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau} \right) = 1,$$

откуда в силу (2.12) следует

$$\cos \mu = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Последнее выражение содержит противоречие, ибо $\rho > \sigma > 0$ и значит, $\rho/\sigma > 1$, а косинус не может превосходить единицу.

Таким образом, производная корней не имеет, что доказывает монотонность правой части уравнения (2.2), а, следовательно, и все предложение. \square

Замечание 2.1. Доказаны существование и единственность \vec{v}_P , однозначно определяемого углом ϕ , зависящим от расстояния λ и угла ψ , а угол ψ задается вектором скорости убегающего \vec{v}_E , то есть можно ввести в рассмотрение функцию Π_1 : $\vec{v}_P = \Pi_1(\vec{v}_E, \lambda; \rho, \sigma)$.

Определение 2.1. Выбор догоняющим скорости \vec{v}_P по функции Π_1 мы будем называть параллельной геодезической стратегией преследования на сфере или просто — Π_1 -стратегией.

3. Наискорейшее свойство Π_1 -стратегии

Мы доказали, что для каждого выбранного направления движения убегающего, определяемого углом ψ , Π_1 -стратегия однозначно задает величину τ , являющуюся временем движения игроков от начального положения до точки встречи M , при условии, что убегающий будет все время двигаться вдоль одной и той же большой окружности. Эта точка M будет являться центром преследования Π_1 -стратегии. Докажем одно важное свойство Π_1 -стратегии, заключающееся в том, что не существует стратегии для догоняющего, позволяющей настигнуть убегающего раньше, чем тот достигнет центра преследования, двигаясь по кратчайшему пути.

Предложение 3.1. (Наискорейшее свойство Π_1 -стратегии). *Если убегающий движется вдоль одной и той же большой окружности с постоянной скоростью σ , то догоняющий не сможет догнать его раньше момента времени $t = \tau$, определяемого Π_1 -стратегией.*

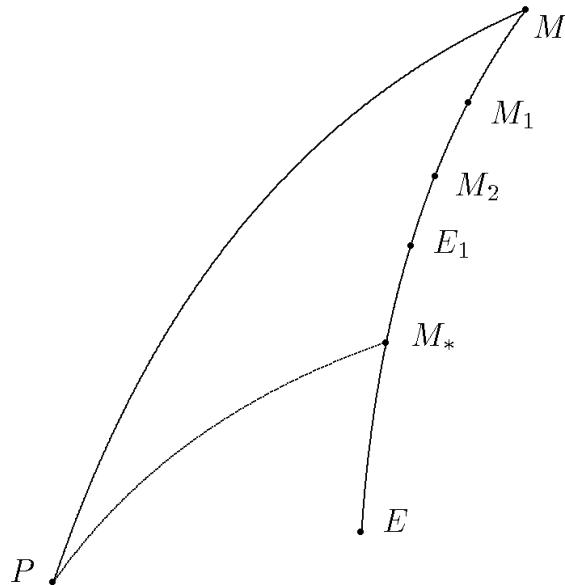


Рисунок 3. К доказательству наискорейшего свойства

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует некоторый другой путь, по которому догоняющий настигает убегающего в некоторой точке M_1 в момент времени τ_1 : $\tau_1 < \tau$ (рис. 3). Этот путь отличен от геодезической дуги в силу единственности, доказанной в предложении 2.2. Очевидно, что точка M_1 лежит внутри дуги EM . Соединим точки P и M_1 геодезической дугой. Поскольку геодезическая дуга короче любой другой линии, соединяющей те же точки, то, двигаясь по этой дуге, догоняющий окажется в точке M_1 в момент времени $\tau'_1 < \tau_1$. В этот момент убегающий будет находиться в некоторой точке E_1 внутри геодезической дуги EM_1 . Если далее догоняющий двинется вдоль дуги EM_1 в сторону точки E_1 , то он встретится с убегающим в некоторой точке M_2 , лежащей внутри дуги E_1M_1 , в момент времени τ_2 . Так как точка M_2 лежит внутри дуги EM_1 , то $\sigma\tau_2 < \sigma\tau_1$, откуда $\tau_2 < \tau_1$. Точно так же, как из τ_1 получили τ_2 , мы можем из τ_2 получить τ_3 и так далее. Получится убывающая ограниченная последовательность $\{\tau_n\}$, заданная на замкнутом отрезке $[0, \tau]$. Она имеет предел τ_* внутри этого отрезка. В момент времени τ_* убегающий окажется в такой точке M_* на геодезической дуге EM , что длина дуги EM_* равна $\sigma\tau_*$. Соответственно длина геодезической дуги PM_* равна $\rho\tau_*$. Следовательно, получили, что и τ , и τ_* удовлетворяют уравнению (2.2) при одном и том же ψ . Это противоречит предложению 2.2, что и доказывает наше предложение. \square

Следствие 3.1. *Если убегающий движется вдоль геодезической дуги EM_1 , а догоняющий вдоль геодезической дуги PM_1 и догоняющий попадает в точку M_1 раньше убегающего, то центр преследования M_* лежит внутри геодезической дуги EM_1 .*

4. Вырожденные случаи

Теперь рассмотрим вырожденные случаи, которые мы не рассматривали в параграфе 2, и для которых Π_1 -стратегия еще не определена. Это те случаи, когда угол ψ принимает крайние значения, равные 0 и π , то есть когда убегающий выбирает направление движения вдоль большой окружности C_{PE} (рис. 4). С другой стороны, вырожденные случаи возникают при крайних значениях λ , которые тоже равны 0 и π , то есть когда игроки располагаются соответственно

в одной и той же общей точке либо в диаметрально противоположных точках. Впрочем случай $\lambda = 0$ мы рассматривать не будем, ибо при нулевом расстоянии между игроками игра не может состояться.

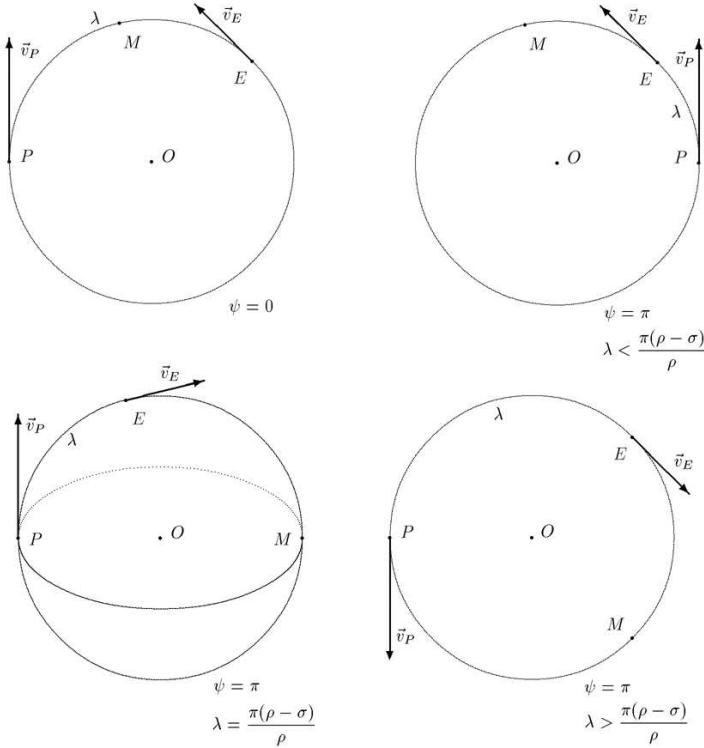


Рисунок 4. Вырожденные случаи при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$,

Угол $\psi = 0$ соответствует движению убегающего навстречу догоняющему, а угол $\psi = \pi$ соответствует движению убегающего прочь от догоняющего. При таких углах ψ сферический треугольник вырождается, хотя из общих соображений понятно, что догоняющий должен тоже двигаться вдоль большой окружности C_{PE} . Подтвердим эти соображения точными выкладками.

4.1. Крайние значения угла убегания

Мы можем легко получить значения τ при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$. Действительно, подставив эти крайние значения ψ в уравнение (2.2), мы

получим два уравнения, правые и левые части которых совпадают с правыми и левыми частями неравенств (2.3) и (2.4), только связаны эти части уже отношениями точного равенства:

$$1 = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}, \quad -1 = \frac{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau}{\sin \lambda \sin \sigma\tau}.$$

Из этих уравнений можно получить, действуя подобно как при доказательстве предложения 2.1, что если $\psi = 0$, то

$$\tau = \frac{\lambda}{\rho + \sigma},$$

а если $\psi = \pi$, то

$$\tau = \begin{cases} \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, & \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi, \\ \frac{2\pi - \lambda}{\rho - \sigma}, & \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi \leq \lambda \leq \pi. \end{cases}$$

Подставляя найденные τ в уравнение (2.11), получим, что

$$\phi = 0, \quad \text{когда } \psi = 0, \quad \text{и}$$

$$\phi = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi, \\ \pi, & \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi \leq \lambda \leq \pi, \end{cases} \quad \text{когда } \psi = \pi.$$

При этом заметим, что в крайних значениях ψ сохраняется непрерывность зависимостей $\tau(\psi)$ и $\phi(\tau)$. В этом просто убедиться, проверив легко вычисляемые пределы ψ и ϕ при стремлении τ к $\lambda/(\rho + \sigma)$, $\lambda/(\rho - \sigma)$ и $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma)$. Для поиска предела $\cos \phi$ воспользуемся формулой (2.11).

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho + \sigma}} \cos \phi = \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho + \sigma} - \cos \lambda \cos \frac{\rho\lambda}{\rho + \sigma}}{\sin \lambda \sin \frac{\rho\lambda}{\rho + \sigma}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho + \sigma} - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right) + \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right) \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right) - \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho + \sigma} \right) \right)} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho+\sigma} - \frac{1}{2} \cos \frac{\sigma\lambda}{\rho+\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho+\sigma} \right)}{\frac{1}{2} \cos \frac{\sigma\lambda}{\rho+\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho+\sigma} \right)} = 1.$$

Точно так же можно найти предел $\cos \psi$, хотя и так очевидно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho+\sigma}} \cos \psi = 1,$$

потому как крайние значения τ в промежутках (2.9)–(2.10) получены из уравнения (2.2) путем подстановки крайних значений ψ . Мы доказали, что уравнение (2.2) задает взаимно-однозначное непрерывное соответствие между ψ и τ , поэтому мы имеем право написать

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \tau = \frac{\lambda}{\rho + \sigma},$$

а, следовательно, и

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \phi = 0.$$

Теперь рассмотрим предел ϕ , когда ψ стремится к π . Здесь нужно рассмотреть два случая. Первый случай, когда $\lambda < (\rho - \sigma)\pi/\rho$, и второй случай, когда $\lambda > (\rho - \sigma)\pi/\rho$. Возможен еще и третий случай, когда $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$, но он является особым случаем, который мы рассмотрим отдельно.

В первом случае нетрудно убедиться, приводя те же доводы, что и при нахождении предела τ при $\psi \rightarrow 0$, что при ψ , стремящемся к π , время τ стремится к $\lambda/(\rho - \sigma)$. Найдем предел $\cos \phi$ при $\tau \rightarrow \lambda/(\rho - \sigma)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \frac{\lambda}{\rho-\sigma}} \cos \phi = \\ & = \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \cos \lambda \cos \frac{\rho\lambda}{\rho-\sigma}}{\sin \lambda \sin \frac{\rho\lambda}{\rho-\sigma}} = \\ & = \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) + \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda - \rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) - \cos \left(\frac{\lambda + \rho\lambda}{\rho-\sigma} \right) \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \frac{\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \frac{-\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right)}{\frac{1}{2} \cos \frac{-\sigma\lambda}{\rho-\sigma} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\lambda+\rho\lambda}{\rho-\sigma} \right)} = 1.$$

Отсюда можно заключить, что $\phi \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow \pi$, когда выполнено неравенство $\lambda < (\rho - \sigma)\pi/\rho$.

Во втором случае из тех же соображений, что и в первом, мы имеем, что при ψ , стремящемся к π , τ стремится к $(2\pi - \lambda)/(\rho - \sigma)$. Прежде, чем искать предел $\cos \phi$ приведем числитель правой части уравнения (2.11) к более удобному виду.

$$\begin{aligned} \cos \sigma\tau - \cos \lambda \cos \rho\tau &= \cos \sigma\tau - \frac{1}{2} \cos(\lambda - \rho\tau) - \frac{1}{2} \cos(\lambda + \rho\tau) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \sigma\tau - \cos(\lambda - \rho\tau) \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \sigma\tau - \cos(\lambda + \rho\tau) \right) = \\ &= - \sin \left(\frac{\sigma\tau + \lambda - \rho\tau}{2} \right) \sin \left(\frac{\sigma\tau - \lambda + \rho\tau}{2} \right) - \\ &\quad - \sin \left(\frac{\sigma\tau + \lambda + \rho\tau}{2} \right) \sin \left(\frac{\sigma\tau - \lambda - \rho\tau}{2} \right) = \\ &= - \sin \left(\frac{\lambda + \tau(\sigma - \rho)}{2} \right) \sin \left(\frac{\tau(\sigma + \rho) - \lambda}{2} \right) - \\ &\quad - \sin \left(\frac{\lambda + \tau(\sigma + \rho)}{2} \right) \sin \left(\frac{\tau(\sigma - \rho) - \lambda}{2} \right). \end{aligned}$$

Теперь отыщем предел $\cos \phi$, воспользовавшись только что преобразованным выражением (2.11).

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \rightarrow \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}} \cos \phi = \\ &= \frac{- \sin \left(\frac{\lambda\rho + \lambda\sigma + 2\pi\sigma - 2\pi\rho - \lambda\sigma + \lambda\rho}{2(\rho + \sigma)} \right) \sin \left(\frac{2\pi - 2\lambda}{2} \right)}{\sin \lambda \sin \left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma} \right)} - \\ &\quad - \overbrace{\frac{\sin \left(\frac{\lambda + 2\pi - \lambda}{2} \right) \sin \left(\frac{(2\pi - \lambda)(\sigma - \rho)}{2(\rho + \sigma)} - \frac{\lambda}{2} \right)}{\sin \lambda \sin \left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma} \right)}}^{=0} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\lambda\rho + \pi\sigma - \pi\rho}{\rho + \sigma}\right) \sin\lambda}{\sin\lambda \sin\left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right)}.$$

Сократив $\sin\lambda$, заметим, что сумма углов, являющихся аргументами функции синуса в числителе и знаменателе, равна π :

$$\left(\frac{\lambda\rho + \pi\sigma - \pi\rho}{\rho + \sigma}\right) + \left(\frac{2\pi\rho - \lambda\rho}{\rho + \sigma}\right) = \frac{\pi\rho + \pi\sigma}{\rho + \sigma} = \pi.$$

А если сумма двух углов равна π , то их синусы равны:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi \cos\alpha - \cos\pi \sin\alpha = \sin\alpha$, откуда заключаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \frac{2\pi-\lambda}{\rho+\sigma}} \cos\phi = -1.$$

Это означает, что ϕ стремится к π при ψ , стремящемся к π , когда $\lambda > (\rho - \sigma)\pi/\rho$.

4.2. Случай, когда путь преследования равен π

Особым случаем является случай, когда $\lambda = (\rho - \sigma)\pi/\rho$. При ψ , стремящемся к π , τ будет стремиться к π/ρ . Это было отмечено, в частности, в замечании к (2.9) и (2.10). Если мы попытаемся найти предел $\cos\phi$, подставляя это значение τ в выражение (2.11), то получим неопределенность вида $0/0$. Этого следовало ожидать, поскольку при таких значениях λ и ψ точка встречи M будет диаметрально противоположна точке P , и длина пути, пройденного догоняющим до точки встречи, будет равна π при любом значении угла f . Тем не менее этот предел существует, и его можно найти воспользовавшись правилом Лопитала.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \frac{\pi}{\rho}} \cos\phi &= \lim_{\tau \rightarrow \frac{\pi}{\rho}} \frac{\frac{d}{d\tau} \left(\cos\sigma\tau - \cos\frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi \cos\rho\tau \right)}{\frac{d}{d\tau} \left(\sin\frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi \sin\rho\tau \right)} = \\ &= \frac{-\sigma \sin\frac{\sigma}{\rho}\pi + \rho \cos\frac{\rho - \sigma}{\rho}\pi \underbrace{\sin\frac{\rho}{\rho}\pi}_{=0}}{\rho \sin\left(\pi - \frac{\sigma}{\rho}\pi\right) \cos\underbrace{\frac{\rho}{\rho}\pi}_{=-1}} = \frac{-\sigma \sin\frac{\sigma}{\rho}\pi}{-\rho \sin\frac{\sigma}{\rho}\pi} = \frac{\sigma}{\rho}. \end{aligned}$$

4.3. Наискорейшее свойство при крайних значениях угла убегания

Обсудим полученные результаты.

При $\psi = 0$, то есть, когда убегающий движется в сторону догоняющего по кратчайшей дуге, угол ϕ равен 0, то есть догоняющему следует двигаться навстречу убегающему по той же дуге, являющейся частью большой окружности C_{PE} . Наискорейшее свойство в этом случае несомненно выполняется. Более того, в этом случае догоняющий поймает убегающего за время, равное $\lambda/(\rho + \sigma)$, являющимся наименьшим возможным временем игры. Другими словами, даже если и убегающий, и догоняющий стремились бы встретиться как можно раньше, все равно они не смогли бы уменьшить это время, поскольку невозможно достичь большей скорости сближения игроков, чем $\rho + \sigma$. А именно такая скорость сближения наблюдается в нашем случае при движении игроков навстречу друг другу по кратчайшему пути.

При $\psi = \pi$, то есть, когда убегающий движется от догоняющего вдоль большой окружности C_{PE} возможны три случая.

Если догоняющий может настигнуть убегающего, двигаясь ему вслед так, чтобы расстояние, пройденное догоняющим от начальной точки P до точки встречи M с убегающим, было меньше π , то, очевидно, это возможно при $\lambda/(\rho - \sigma) < \pi/\rho$, где в левой части стоит отношение расстояния между игроками в начальный момент времени к скорости их сближения, что равно времени преследования, а в правой — время прохождения догоняющим дуги, длина которой равна π .

Понятно, что в этом случае при таком пути преследования наискорейшее свойство выполняется, поскольку догоняющий движется из точки P в точку M по геодезической дуге и нет других геодезических дуг, соединяющих эти две точки. Таким образом, при $\lambda < \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ наискорейшее свойство обеспечивается углом $\phi = 0$, что равно полученному пределу угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$.

Если же догоняющий, двигаясь вслед убегающему, настигает его в некоторой точке M_1 , пройдя путь, длина которого больше π , то очевидно, что, двигаясь в противоположную сторону по той же большой

окружности, он встретится с убегающим раньше. В самом деле, при движении догоняющего вслед убегающему скорость их сближения равна $\rho - \sigma$, и следовательно время движения игроков до встречи равно $\lambda/(\rho - \sigma)$, которое больше π/ρ . При движении догоняющего в обратную сторону, то есть прочь от убегающего, скорость сближения игроков равна $\rho + \sigma$, а расстояние, которое они вместе должны преодолеть равно $2\pi - \lambda$, значит, время их движения до встречи равно $(2\pi - \lambda)/(\rho + \sigma)$. Из неравенства $\lambda/(\rho - \sigma) > \pi/\rho$ следует, что $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$, откуда получим неравенство для времени движения игроков до встречи при обратном движении догоняющего

$$\frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma} < \frac{2\pi - \pi \frac{\rho - \sigma}{\rho}}{\rho + \sigma} = \frac{\pi \left(\frac{2\rho - (\rho - \sigma)}{\rho} \right)}{\rho + \sigma} = \frac{\pi}{\rho},$$

Таким образом, из тех же соображений, что и в предыдущем случае, при $\lambda > \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ наискорейшее свойство обеспечивается углом $\phi = \pi$, что также равно полученному пределу угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$.

То есть, первые два случая, хотя и являются вырожденными, не имеют никаких особенностей, поскольку наискорейшее свойство в этих случаях обеспечивается значениями угла ϕ , совпадающими с пределами угла ϕ при стремлении угла ψ к значениям 0 или π , при которых происходит вырождение

Особым случаем является случай, когда $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$, то есть когда догоняющий, двигаясь вслед убегающему, настигнет его за время, в точности равное π/ρ , пройдя при этом путь, длина которого равна π . В этом случае точка M , в которой происходит встреча игроков, является диаметрально противоположной точкой относительно точки P , где находится догоняющий в начальный момент времени. Поскольку через диаметрально противоположные точки на сфере можно провести сколь угодно много больших окружностей, то двигаясь по любой из них из точки P в точку M , догоняющий пройдет путь одной и той же длины π за одно и то же время, равное π/ρ , подобно тому, как при путешествии из Северного полюса в Южный полюс вдоль меридиана, преодолевается всегда одно и то же расстояние вне зависимости от того, по какому меридиану проходит путешествие.

Таким образом, при $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$ и $\psi = \pi$ любое значение угла ϕ обеспечивает поимку убегающего за время π/ρ , которое не может быть уменьшено. Тем не менее, существует предел угла ϕ при $\psi \rightarrow \pi$, когда $\lambda = \pi(\rho - \sigma)/\rho$, и этот предел равен $\arccos(\sigma/\rho)$. Можно показать, что при изменении угла ψ от 0 до π угол ϕ монотонно возрастает от 0 до $\arccos(\sigma/\rho)$.

На основании сделанных выводов строгие неравенства (2.9) и (2.10) можно записать в виде нестрогих неравенств:

$$\frac{\lambda}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{\lambda}{\rho - \sigma}, \quad \text{при } 0 < \lambda \leq \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi, \quad (4.1)$$

$$\frac{\lambda}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{2\pi - \lambda}{\rho + \sigma}, \quad \text{при } \frac{\rho - \sigma}{\rho} \pi \leq \lambda < \pi. \quad (4.2)$$

4.4. Крайнее значение расстояния λ между игроками

Мы рассмотрели случаи, когда крайние значения принимает угол ψ . Теперь рассмотрим случай, когда крайнее значение принимает λ — геодезическое расстояние между игроками в начальный момент времени. Как мы знаем, наибольшее значение, которое может принимать λ , равно π , что соответствует такому положению игроков в начальный момент времени, при котором они находятся в точках P и E , являющихся диаметрально противоположными друг другу точками. В этом случае нельзя однозначно определить большую окружность C_{PE} , поскольку через диаметрально противоположные точки P и E можно провести сколь угодно много больших окружностей. Однако ничто не мешает произвольно выбрать одну из них в качестве базовой, от которой мы будем отсчитывать углы ψ и ϕ .

Вычислим предел области допустимых значений τ при стремлении λ к π . Для этого достаточно подставить в двойное неравенство (4.2) значение $\lambda = \pi$, после подстановки получим, что

$$\frac{\pi}{\rho + \sigma} \leq \tau \leq \frac{\pi}{\rho + \sigma},$$

откуда следует, что τ при любом значении угла ψ принимает одно и то же единственное значение, равное $\pi/(\rho + \sigma)$. Отсюда можно

сделать вывод, что выбор базовой большой окружности не влияет на результат игры.

При $\lambda = \pi$ нельзя получить значения косинусов углов ϕ и ψ из уравнений (2.11) и (2.2), поскольку в этом случае в знаменателях правых частей этих уравнений будет стоять 0. Это и понятно, поскольку, в частности, уравнение (2.2) получено из уравнения (2.1) в предположении, что сомножители у $\cos \psi$ в уравнении (2.1) отличны от нуля, в противном случае любые значения угла ψ будут удовлетворять уравнению (2.1). Именно этим обусловлен произвол в выборе базовой большой окружности C_{PE} . Однако мы можем рассмотреть предел отношения косинусов углов ϕ и ψ при стремлении λ к π .

Из (2.2) и (2.11) получим, что

$$\frac{\cos \phi}{\cos \psi} = \frac{\cos \sigma\tau - \cos \lambda \cos \rho\tau \sin \sigma\tau}{\cos \rho\tau - \cos \lambda \cos \sigma\tau \sin \rho\tau}.$$

Подставляя в полученное равенство $\lambda = \pi$, увидим, что числитель и знаменатель первой дроби в правой части совпадают. Вторая дробь представляет отношение синусов двух углов, сумма которых при $\tau = \pi/(\rho + \sigma)$ представляет собой $\pi\sigma/(\rho + \sigma) + \pi\rho/(\rho + \sigma)$, что равно π . А мы знаем, что если сумма двух углов равна π , то их синусы равны, откуда следует, что отношение косинусов углов ϕ и ψ равно 1, а это значит, что равны сами углы ϕ и ψ , поскольку оба они изменяются на промежутке $[0, \pi]$. Вычислим также и угол μ , воспользовавшись уравнением (2.12):

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{\cos \lambda - \cos \rho\tau \cos \sigma\tau}{\sin \rho\tau \sin \sigma\tau} = \\ &= \frac{2 \cos \lambda - \cos(\rho - \sigma)\tau - \cos(\rho + \sigma)\tau}{\cos(\rho - \sigma)\tau - \cos(\rho + \sigma)\tau} \Bigg|_{\substack{\lambda=\pi \\ \tau=\frac{\pi}{\rho+\sigma}}} = \frac{1 - \cos \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}\pi}{\cos \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}\pi - 1} = -1, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что $\mu = \pi$. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что когда игроки в начальный момент времени располагаются в диаметрально противоположных точках, то при любом направлении движения убегающего догоняющему следует двигаться навстречу убегающему по той же большой окружности, по

которой движется убегающий. Очевидно, что наискорейшее свойство в этом случае выполняется.

Теперь мы можем сказать, что Π_1 -стратегия определена для всех возможных положений игроков на сфере и для всех возможных направлений движения убегающего. При этом основным свойством Π_1 -стратегии является наискорейшее свойство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1997.
2. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры на выживание со многими участниками* // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161. № 2. С. 285–287.

PARALLEL PURSUIT STRATEGIES IN A SIMPLE MOTION GAME ON THE SPHERE. GEODESIC PURSUIT.

Alexander M. Kovshov, Saint-Petersburg State University,
Saint-Petersburg, Cand.Sc. (petinv@ya.ru).

Abstract: The two-person zero-sum differential simple pursuit game on the sphere is considered. The strategy of geodesic pursuit, having some properties of parallel pursuit strategy on the plane, is defined, unique existence for general position is proved. All singular cases are considered. Fastest property of geodesic pursuit strategy is proved.

Keywords: differential games, simple motion, pursuit on the sphere.

УДК 519.234+519.832+378

ББК 22.172+22.18+ Ч421,6(2)284я8/2

ТЕОРЕТИКО ИГРОВОЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ТЕСТИРОВАНИЯ

Михаил М. Луценко

Петербургский государственный университет

путей сообщения

Санкт-Петербург

e-mail: ML4116@mail.ru

В настоящей работе мы построим несколько игровых моделей тестирования, и укажем их надежность (вероятность правильной оценки тестируемого), оптимальные решающие правила, наихудшее априорное распределение. Задача оценивания формулируется как задача принятия решений и сводится к статистической игре между Статистиком и Природой с пороговой функцией выигрыша. Предлагаемый подход не предполагает нормальности распределения уровней знаний испытуемых и прост в реализации. При построении моделей используются результаты работ автора [1], [2].

Ключевые слова: тестирование, антагонистическая игра, статистическая игра, рандомизированная решающая функция, наихудшее априорное распределение.

1. Введение

Важнейшая задача теории тестирования – оценка уровня знаний испытуемого по результатам теста. Задача становится особенно актуальной, если по результатам теста принимают важные административные решения: выдача аттестата об образовании, зачисление в ВУЗ

и др. Анализу тестов и оценкам их точности посвящена обширная литература (см. например [3]). При этом прямо или косвенно используются интервальные оценки параметра биномиального (гипергеометрического) распределений. Кроме того, все оценки точности (надежности) тестирования проводят в предположении о нормальности распределения уровней знаний испытуемых. Но с этим предположением трудно согласиться. При тестовом контроле уровня знаний учащихся существенная часть процесса обучения посвящена подготовке к прохождению теста. А, зная форму теста, темы и типы задач, учащиеся способны так представить свои знания, что их объективная оценка будет затруднена. Таким образом, мы имеем конфликтную ситуацию (игру), участники которой: испытуемый, стремящийся меньше времени затратить на подготовку к тесту, но при этом получить наивысший балл и лицо, принимающее решение (Статистик), стремящийся наиболее точно оценить уровень знаний испытуемого.

Заметим, что предлагаемая здесь модель оценки уровня знаний испытуемого по результатам тестирования не предполагает каких-либо ограничений на априорное распределение уровней знаний испытуемых.

2. Задачи классификации и оценивания

Сформулируем задачу оценки уровня знаний испытуемого по результатам тестирования более точно. Предположим, что по результатам теста группа учащихся разбита на N классов, и оценка уровня знаний учащегося осуществляется по номеру того класса, в который он попал. Выбор номера класса может осуществляться разными методами, например, по числу правильных ответов на вопросы теста или по числу набранных баллов за решенные задачи, если веса задач были различны. Обозначим через \mathbf{X}_θ номер класса, в который попал учащийся, имеющий уровень знаний θ (тип testируемого). Таким образом, Статистик, наблюдая значение случайной величины \mathbf{X}_θ , должен оценить тип testируемого θ .

Сведем задачу классификации к задаче статистического оценивания. Для этого введем следующие обозначения. Конечное множество возможных уровней знаний учащегося обозначим через $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ (множество параметров); множество возможных значений случайной величины \mathbf{X}_θ обозначим через $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

(множество наблюдений), а через $\{P_\theta(x)\}_{\theta \in \Theta}$ семейство распределений этих величин на множестве X . Множество допустимых оценок знаний учащегося обозначим через $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ (множество решений). Обозначим через $\delta(x)$ решение Статистика в том случае, когда значение случайной величины \mathbf{X}_θ равно x . Функцию $\delta : X \rightarrow D$ называют решающей функцией. Множество решающих функций мы обозначим через $\mathbf{D} = D^X$, то есть \mathbf{D} есть прямое произведение $N = |X|$ экземпляров пространств D . Таким образом, каждую решающую функцию можно представить в виде вектора $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$, у которого $\delta_k = \delta(x_k) \in D$.

В этих обозначениях Статистик, наблюдая случайную величину \mathbf{X}_θ с неизвестным значением параметра θ , должен принять решение $\delta(\mathbf{X}_\theta) \in D$, которое наиболее точно оценивает значение параметра θ или же он должен найти такую решающую функцию δ , значения которой наиболее близки к θ .

В статистике рассматривают две группы оценок: точечные и интервальные. Для построения первых необходимо знать потери Статистика от ошибки при оценке им неизвестного параметра θ , то есть функцию потерь Статистика $L(\theta, d)$. К сожалению, из условий задачи такую функцию построить трудно.

Для построения интервальной оценки мы с каждым решением $d \in D$ свяжем подмножество уровней знаний $\Theta(d) \subseteq \Theta$, приемлемых (допустимых) при этом решении. По заданному семейству подмножеств $\{\Theta(d)\}_{d \in D}$ построим функцию выигрыша Статистика:

$$h(d, \theta) = \mathbf{1}_{\Theta(d)}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta \in \Theta(d), \\ 0, & \text{при } \theta \notin \Theta(d). \end{cases}$$

Таким образом, выигрыш Статистика равен единице лишь в том случае, когда он правильно оценил испытуемого, или тип тестируемого θ оказался во множестве типов $\Theta(d)$ допустимых при данном решении d .

Зафиксируем семейство приемлемых интервалов $\{\Theta(d)\}_{d \in D}$. Каждая решающая функция δ порождает набор $\{\Theta(\delta(x))\}_{x \in X}$ доверительных интервалов.

Для каждого параметра θ и решающей функции $\delta(x)$ найдем вероятность того, что набор доверительных интервалов $\{\Theta(\delta(x))\}_{x \in X}$

накроет неизвестное значение параметра. Для этого воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}(\theta \in \Theta(\delta(\mathbf{X}_\theta))) = \sum_{x \in X} \mathbf{P}(\mathbf{X}_\theta = x) \mathbf{P}(\theta \in \Theta(\delta(x)) | \mathbf{X}_\theta = x).$$

А, используя введенные выше обозначения для функции h и семейства распределений, мы получим:

$$\mathbf{P}(\theta \in \Theta(\delta(\mathbf{X}_\theta))) = \sum_{x \in X} P_\theta(x) h(\delta(x), \theta) = H(\delta, \theta).$$

Функцию $H(\delta, \theta)$ мы будем называть функцией успеха по аналогии с Вальдовской функцией риска.

Наименьшая вероятность того, что набор $\{\Theta(\delta(x))\}_{x \in X}$, порожденный решающей функцией δ , накроет неизвестный параметр θ , называется доверительной вероятностью для этого набора (для решающей функции δ), то есть

$$\gamma = \gamma(\delta) = \min_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}(\theta \in \Theta(\delta(\mathbf{X}_\theta))).$$

Целью Статистика становится определение такой решающей функции δ (такого набора доверительных интервалов), для которой доверительная вероятность будет наибольшей.

С другой стороны предположим, что параметр θ сам является случайной величиной с известным распределением ν , то есть Статистик наблюдает случайную величину \mathbf{X}_ν с априорным распределением ν :

$$P(\mathbf{X}_\nu = x) = \int_{\Theta} P_\theta(x) d\nu(\theta).$$

Средне взвешенная функция успеха при заданных значениях δ и ν равна:

$$\mathbf{H}(\nu, \delta) = \int_{\Theta} H(\theta, \delta) d\nu(\theta) = \sum_x \int_{\Theta} P_\theta(x) h(\delta(x), \theta) d\nu(\theta).$$

И она равна вероятности того, что неизвестный параметр θ попадет в доверительный интервал, порожденный решающей функцией δ , если параметр θ имеет известное распределение ν .

Функция δ_ν , максимизирующая $\mathbf{H}(\nu, \delta)$, называется байесовским решением (байесовской решающей функцией) относительно распределения ν , а величина этого максимума называется байесовским успехом для априорного распределения ν , то есть байесовский успех равен:

$$\mathbf{H}(\nu, \delta_\nu) = \max_{\delta} \mathbf{H}(\nu, \delta).$$

Байесовская решающая функция δ_ν порождает такой набор интервалов, для которого средняя вероятность покрытия была бы наибольшей при данном априорном распределении параметра θ .

В нашем случае множество \mathbf{D} есть прямое произведение N экземпляров множеств D , а функция $\varphi(\delta) = \varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N) = \mathbf{H}(\nu, \delta)$ – сепарабельная функция относительно переменных $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$. Следовательно, байесовский успех может быть найден по формуле:

$$\mathbf{H}(\nu, \delta_\nu) = \sum_{k=1}^N \max_{\delta_k \in D} \left[\int_{\Theta} P_\theta(x) h(\theta, \delta_k) d\nu(\theta) \right], \delta_k = \delta(x_k).$$

Или значение байесовской решающей функции δ_ν в точке x есть максимум слагаемого, зависящего лишь от этого значения. Следовательно, значения δ_ν можно находить в каждой точке независимо от значений в других точках.

Наихудшим для Статистика будет то априорное распределение ν параметра θ , для которого байесовский успех будет наименьшим. В этом случае минимальный байесовский успех равен:

$$\mathbf{H}(\nu^*, \delta_{\nu^*}) = \min_{\nu} \max_{\delta} \mathbf{H}(\nu, \delta)$$

Априорное распределение ν^* , на котором достигается этот минимум, называется наихудшим априорным распределением.

3. Статистическая игра “Тестирование”

Для выше определенной задачи определим статистическую игру “Тестирование” $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ между Статистиком и Природой. В этой игре: $\mathbf{D} = D^X$ – пространство решающих функций Статистика, Θ – множество параметров (стратегии Природы) и функция выигрыша:

$$H(\delta, \theta) = \sum_x P_\theta(x) h(\delta(x), \theta), \quad \delta \in \mathbf{D} = D^X.$$

Статистик (игрок 1) стремится к увеличению своей доверительной вероятности, а Природа (тестируемый) стремится получить наибольший балл, то есть исказить результаты оценивания.

Нижнее значение игры Γ равно максимальной доверительной вероятности, которую может обеспечить себе Статистик независимо от действий Природы

$$\underline{v} = \max_{\delta \in \mathbf{D}} \min_{\theta \in \Theta} H(\delta, \theta) = \max_{\delta \in \mathbf{D}} \gamma(\delta).$$

Решающая функция δ^* , на которой этот максимум достигается, – оптимальный набор доверительных интервалов. Заметим, что верхнее значение игры Γ равно единице:

$$\bar{v} = \min_{\theta \in \Theta} \max_{\delta \in \mathbf{D}} H(\delta, \theta) = 1.$$

Так как верхнее значение игры $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ больше нижнего значения, то ее решение мы будем искать в смешанных стратегиях. Обозначим через $\overline{\mathbf{D}}, \overline{\Theta}$ пространства вероятностных мер (распределений), заданных на соответствующих множествах и содержащие все вырожденные меры, а функцию выигрыша смешанного расширения игры Γ через:

$$\mathbf{H}(\mu, \nu) = \int_{\mathbf{D} \times \Theta} H(\delta, \theta) d\mu(\delta) d\nu(\theta).$$

Если μ^*, ν^* – вырожденные вероятностные меры с носителями δ^*, θ^* , соответственно, то мы будем писать:

$$\mathbf{H}(\delta^*, \nu) = \mathbf{H}(\mu^*, \nu), \mathbf{H}(\mu, \theta^*) = \mathbf{H}(\mu, \nu^*), \mathbf{H}(\delta^*, \theta^*) = \mathbf{H}(\mu^*, \nu^*) = H(\delta^*, \theta^*).$$

Смешанные стратегии (вероятностные меры) $\mu \in \overline{\mathbf{D}}, \nu \in \overline{\Theta}$ задают вероятности с которыми игроки выбирают те или иные чистые стратегии из своих множеств стратегий. Функция выигрыша $\mathbf{H}(\mu, \nu)$ равна математическому ожиданию выигрыша первого игрока, если игроки использовали свои смешанные стратегии μ, ν .

Решением статистической игры $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ в смешанных стратегиях будет решение игры $\bar{\Gamma} = \langle \overline{\mathbf{D}}, \overline{\Theta}, \mathbf{H} \rangle$, то есть тройка $\langle \mu^*, \nu^*, v \rangle$, для которой выполняются неравенства

$$\mathbf{H}(\mu, \nu^*) \leq v \leq \mathbf{H}(\mu^*, \nu) \text{ при всех } \mu \in \overline{\mathbf{D}}, \nu \in \overline{\Theta}.$$

Легко доказать, что для проверки оптимальности тройки $\langle \mu^*, \nu^*, v \rangle$ достаточно ограничиться вырожденными мерами μ, ν , то есть достаточно выполнения следующих неравенств

$$\mathbf{H}(\delta, \nu^*) \leq v \leq \mathbf{H}(\mu^*, \theta) \text{ при всех } \delta \in \mathbf{D}, \theta \in \Theta.$$

Выполнение последних неравенств равносильно равенствам, в которых внешние экстремумы достигаются на μ^* и ν^* , соответственно.

$$v = \min_{\nu} \max_{\delta} \mathbf{H}(\delta, \nu) = \max_{\mu} \min_{\theta} \mathbf{H}(\mu, \theta)$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 1 есть рандомизированная решающая функция μ^* , для которой доверительная вероятность покрытия неизвестного параметра была бы наибольшей.

Оптимальная стратегия Природы ν^* (наиудьшее априорное распределение) – это такое распределение, для которого байесовская решающая функция δ^* была бы наименее эффективна.

Значение статистической игры – вероятность того, что наугад выбранный студент будет правильно оценен (точно указан его тип).

4. Решение конечных статистических игр

Хорошо известно (см. например [1]), что при решении игры Г Статистик может ограничиться смешанными стратегиями, имеющими вид $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, где $N = |X|$ – размерность пространства наблюдений (число классов), а $\mu_k, k = \overline{1, N}$ – вероятностные меры на множестве решений D .

Так как множества X, D, Θ – конечны, и их мощности соответственно равны: N, n, m , то Γ – матричная игра с матрицей выигрыша размера $Nn \times m$. Обозначим через $b_{i,j} = h(\theta_i, d_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ – элементы матрицы B ; через $\lambda_{i,i}^k = P_{\theta_i}(x_k)$, $i = \overline{1, m}$ – ненулевые элементы квадратной матрицы Λ^k , $k = \overline{1, N}$; через $\mu_k = (\mu_k^1, \mu_k^2, \dots, \mu_k^n)^t$, $k = \overline{1, N}$ – компоненты рандомизированной решающей функции $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)^t$ вектор априорного распределения параметра θ , через $\mathbf{1}_m$ – m -мерный столбец, все элементы которого единицы.

Для решения матричной игры Γ составим пару взаимно двойственных задач. Из первой (прямой) задачи мы найдем: наилучшую

рандомизированную решающую функцию $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, из второй (двойственной) – наихудшее априорное распределение ν , а общее значение этих игр – значение игры Γ .

Прямая задача:	Двойственная задача:
$v \rightarrow \max,$ $\sum_{k=1}^N \Lambda^k B \mu_k \geq v \mathbf{1}_m; \quad \sum_{j=1}^n \mu_k^j = 1;$ $\mu_k^j \geq 0; \quad k = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, n};$	$v = \sum_{k=1}^N u_k \rightarrow \min,$ $\nu^t \Lambda^k B \leq u_k \mathbf{1}_n^t; \quad k = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1.$

Известно много способов решения задач линейного программирования. Наиболее уместными здесь был бы динамический метод [1], специально разработанный автором для статистических игр с пороговыми функциями выигрыша. Однако в простейших случаях конечную статистическую игру можно решить средствами MS Excel. Хотя эти методы часто не дают точное решение, но они всегда указывают допустимые решения задач и, следовательно, верхнюю и нижнюю оценки матричной игры.

5. Примеры решения статистических игр “Тестирование”

Приведем примеры решения нескольких игр “Тестирование” и проинтерпретируем полученные результаты.

Пример 5.1. Группа учащихся четырех уровней подготовки по результатам тестирования разбита на 10 подгрупп $X = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_9\}$ (пространство наблюдений). Требуется разбить исходную группу на четыре класса так, чтобы в первый класс входили только отличники, во второй только хорошисты, в третий – успевающие и в четвертый – неуспевающие.

Обозначим через $\Theta = \{\text{отл, хор, уд, неуд}\}$ множество типов студентов (пространство параметров). Считаем известными вероятности, с которыми учащиеся разных типов попадут в ту или иную подгруппу по результатам тестирования. Обозначим через $P_\theta(x)$ вероятность того, что учащийся уровня θ попал в подгруппу x по результатам тестирования. Составим следующую таблицу распределений $P_\theta(x)$ (таб. 1), исходя из понимания того, что даже отличник может

ошибиться, а плохо занимающийся может довольно много случайно отгадать.

Таблица 1. Распределение вероятностей $P_\theta(x)$.

$x =$	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9
$\theta = \text{отл}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.9
$\theta = \text{хор}$	0	0	0	0	0	0	0.05	0.8	0.1	0.05
$\theta = \text{уд}$	0	0	0.05	0.1	0.7	0.1	0.05	0	0	0
$\theta = \text{неуд}$	0.1	0.15	0.6	0.1	0.05	0	0	0	0	0

Табл. 1 составлена так, что все типы студентов довольно хорошо отделены друг от друга.

Если считать, что подгруппа Δ_i состоит из учащихся, верно решивших от $10i\%$ до $10(i+1)\%$ задач, то данные таблицы интерпретируются следующим образом. Отличники в 90% случаев решают свыше 90% задач, хорошисты в 80% случаев решают от 70% до 80% задач, успевающие в 70% случаев решают от 40% до 50% задач, неуспевающие в 95% случаев решают менее 40% задач.

Обозначим через $D = \{\text{отл, хор, уд, неуд}\}$ – множество решений Статистика, а функция

$$h(d, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta = d, \\ 0, & \text{при } \theta \neq d \end{cases}$$

задает множество параметров допустимых при данном решении. В данном случае Статистик выигрывает лишь в том случае, когда он правильно назвал тип тестируемого. Иными словами с каждым мы связываем интервал, состоящий из одного элемента.

Элементами множества решающих функций $\mathbf{D} = D^X$ будут вектора $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_9)$, координаты которых будут решениями Статистика при наблюдении им ответа с соответствующим номером. Математическое ожидание выигрыша Статистика при использовании им решающего правила $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_9)$ будет иметь следующий вид:

$$H(\mathbf{d}, \theta) = \sum_{i=0}^9 P_\theta(\Delta_i) h(d_i, \theta),$$

где через θ обозначен оцениваемый тип тестируемого (уровень его подготовки).

Рассмотрим статистическую игру $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ с описанными выше компонентами. У нас получилась матричная игра с матрицей размера 40×4 , которая может быть решена средствами MS Excel.

Запишем теперь решение этой задачи тестирования. Значение этой игры равно 0.900. То есть Статистик будет правильно оценивать испытуемого лишь в 90% случаев. Рандомизированная решающая функция Статистика примет следующий вид. Ему рекомендуется называть “отличником” только испытуемого, правильно решившего свыше 90% задач ($\delta_9 = \text{отл}$); хорошистом испытуемого, решившим от 70% до 90% задач ($\delta_8 = \delta_7 = \text{хор}$); успевающим, решившего от 40% до 70% задач и с вероятностью 0.5 решившего от 30% до 40% задач ($\delta_6 = \delta_5 = \delta_4 = \text{уд}$, $\delta_3 = \text{уд}$ с вероятностью 0.5 и неуд с вероятностью 0.5). В остальных случаях Статистику рекомендуется называть испытуемого неуспевающим ($\delta_2 = \delta_1 = \delta_0 = \text{неуд}$).

В заключении мы приведем оптимальную стратегию Природы (табл. 2).

Таблица 2. Наихудшее априорное распределение параметра θ примера 5.1.

θ_i	отл	хор	уд	неуд
ν_i	0.175	0.275	0.275	0.275

Пример 5.2. Предположим, что тест состоит из 10 вопросов, и Статистик принимает решение по результатам этого теста. Пространство наблюдений X состоит из 11 чисел: от нуля до 10. Вероятность правильного ответа на один вопрос теста равна уровню знаний тестируемого, возможные значения которого составляют множество $\Theta = \{0.95; 0.85; 0.75; 0.65; 0.55; 0.45; 0.35; 0.25; 0.15; 0.05\}$. Тогда вероятность правильно ответить на x вопросов находится по формуле Бернулли: $P_\theta(x) = C_{10}^x \theta^x (1 - \theta)^{10-x}$, $x = \overline{0, 10}$.

Статистик, оценивая уровень знания испытуемого, ставит одну из следующих четырех оценок: {отл, хор, уд, неуд} = D . Причем отличная оценка ставится испытуемым, имеющим 95% и 85% знаний,

хорошая от 55% до 75%, удовлетворительная от 35% до 45% и неудовлетворительная остальным.

Составим статистическую игру $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ и решим ее в смешанных стратегиях. Матрица выигрыша в рассматриваемой игре имеет размер 44×10 . К сожалению, средства MS Excel не позволяют точно решить две взаимно-двойственные задачи. Но мы получаем верхнюю и нижнюю оценки значения игры, рандомизированную решающую функцию и наихудшее априорное распределение параметра θ .

В результате расчетов мы для значения игры получим: нижнюю (0.519) и верхнюю (0.562) оценки значения игры.

Таблица 3. Компоненты рандомизированной решающей функции μ примера 5.2.

		μ_{10}	μ_9	μ_8	μ_7	μ_6	μ_5	μ_4	μ_3	μ_2	μ_1	μ_0
Решение	отл	1.00	0.49	0.75	0	0	0	0	0	0	0	0
	хор	0	0.51	0.24	0.95	0.75	0.70	0	0	0	0	0
	уд	0	0	0	0.05	0.25	0.30	1.00	1.00	0	0	0
	неуд	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00	1.00	1.00

В столбцах табл. 3 указаны вероятности, с которыми Статистик указывает то или иное решение в зависимости от наблюдения.

Итак, вероятность правильного решения Статистика об уровне знаний студента по результатам тестирования лежит в промежутке от 0.52 до 0.56. Таким образом, **примерно в 50% случаев Статистик примет неверное решение об уровне знаний испытуемых.**

Таблица 4. Наихудшее априорное распределение параметра θ примера 5.2.

θ_i	0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
ν_i	0.00	0.11	0.01	0.04	0.25	0.19	0.15	0.26	0.00	0.00

Пример 5.3. Испытуемые, как и в предыдущем примере, отвечают на 10 вопросов теста. При этом каждый испытуемый имеет один из

10 возможных уровней знаний, значения которых изменяются от 5% до 95%. Но в этом примере мы расширим множество возможных решений, и оно будет совпадать с множеством уровней знаний (множеством параметров):

$$\Theta = D = \{ 0.95; 0.85; 0.75; 0.65; 0.55; 0.45; 0.35; 0.25; 0.15; 0.05 \}.$$

В допустимый интервал $\Theta(d)$ войдут лишь те значения параметра θ , которые отклоняются от d на расстояние не большее чем 10%, то есть

$$h(d, \theta) = \mathbf{1}_{\Theta(d)}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{при } |i-j| \leq 0, 1; \\ 0, & \text{при } |i-j| > 0, 1. \end{cases}$$

Составим статистическую игру $\Gamma = \langle \mathbf{D}, \Theta, H \rangle$ и решим ее в смешанных стратегиях. Матрица выигрыша в рассматриваемой игре имеет размер 110×10 . Здесь, как и в предыдущем примере, мы получаем верхнюю и нижнюю оценки значения игры, рандомизированную решающую функцию и наихудшее априорное распределение параметра θ .

В результате расчетов мы для значения игры получим: нижнюю (0.771) и верхнюю (0.788) оценки значения игры.

Таблица 5. Компоненты рандомизированной решающей функции μ примера 5.3.

Таблица 6. Наихудшее априорное распределение параметра θ примера 5.3.

θ_i	0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
ν_i	0.03	0.05	0.12	0.14	0.18	0.11	0.14	0.10	0.08	0.03

Заметим, что единственная наблюдаемая Статистиком случайная величина \mathbf{X}_ν – число правильных ответов на тест одним испытуемым. Распределение этой величины можно построить, по наихудшему априорному распределению ν .

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_\nu = x) = \sum_{i=1}^m P_{\theta_i}(x) \nu_i$$

Как видно из гистограммы распределения случайной величины \mathbf{X}_ν (рис.1) она мало отличается от графика плотности нормального распределения. А при наблюдении Статистиком за величиной \mathbf{X}_ν за нулевую гипотезу, вполне вероятно, будет принята гипотеза о нормальности ее распределения.

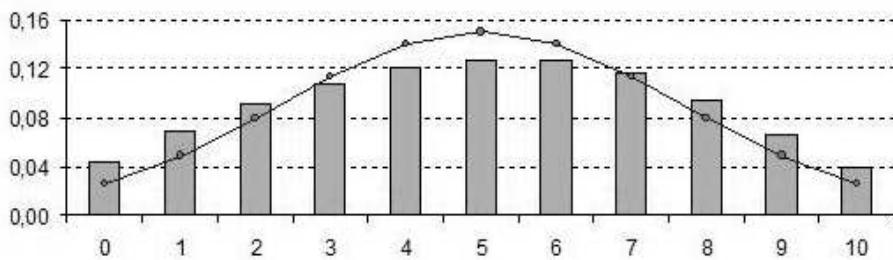


Рисунок 1. Гистограмма распределение числа правильных ответов при наихудшем априорном распределении и ее нормальная аппроксимация.

6. Заключение

Рассматриваемые здесь задачи обычно решаются статистическими методами: строятся доверительные интервалы и т.д. Предлагаемый же здесь метод решения одинаково хорошо работает для любых групп тестируемых (больших и маленьких). Однако, математическая

Таблица 7. Распределение числа правильных ответов при наихудшем априорном распределении.

Число правильных ответов:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вероятность	0.04	0.07	0.09	0.11	0.12	0.13	0.13	0.12	0.09	0.07	0.04

модель (статистическая игра) жестко привязана к процедуре тестирования (принятия решений). И при ее изменении модель существенно изменяется вместе с наихудшим априорным распределением и оптимальной рандомизированной решающей функцией.

Хотя рассмотренные здесь математические модели довольно просты (малое число вопросов в тесте, искусственные семейства распределений), однако, их уточнение мало повлияет на невысокое значение игры.

Некоторые трудности, возникающие при реализации рандомизированных решающих функций, могут быть преодолены, предписывая различные решения для разных групп тестируемых. Например, в сложных случаях в городах оценки занижаются, а в небольших населенных пунктах – оценки завышаются.

К преимуществу данного подхода следует отнести то, что мы не накладываем никаких ограничений на распределение типов тестируемых и то, что решение этих статистических игр получено стандартными методами.

Полученные значения трех игр являются нижними оценками доверительной вероятности, и могут быть улучшены при известном априорном распределении. Кроме того, байесовское решение устойчиво при малых отклонениях априорного распределения от наихудшего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Луценко М.М. *Теоретико игровой метод оценки параметра биномиального закона*// Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35. № 3. С. 471–481.

2. Луценко М.М., Иванов М.А. *Минимаксные доверительные интервалы для параметра гипергеометрического распределения* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 68–76.
3. Нейман Ю.М., Хлебников В.А. *Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов*. М: Издательство, 2000.

GAME-THEORETIC APPROACH TO ACCURACY OF TESTING

Mikhail Lutsenko, St. Petersburg Transport University,
Saint-Peterburg, Dr.Sc., prof. (ML4116@mail.ru).

Abstract: In the paper some game models of test are constructed and their reliability (probability of correct score) is shown. The matters of investigation are statistical games between Nature and Statistician. Solution of the games (the worst priori distribution, optimal decision function) are found. The results of author's work [1] are used.

Keywords: test reliability, antagonistical games, statistical game, randomize decision function, worst priori distribution.

УДК УДК 517.9

ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ АРБИТРАЖНАЯ ПРОЦЕДУРА С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

АЛЕКСАНДР Э. МЕНЧЕР

Забайкальский государственный

гуманитарно-педагогический университет

имени Н.Г. Чернышевского

Чита

e-mail: MentcherAE@zabspu.ru

Рассматривается антагонистическая игра, связанная с арбитражной схемой Фарбера. Для случаев, когда предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках с неравномерным распределением вероятностей, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: арбитражная схема, дискретное распределение, смешанные стратегии, равновесие.

1. Введение

Рассмотрим бескоалиционную игру с нулевой суммой, связанную с моделью арбитражной процедуры с конечным числом предложений. Игроки L и M , именуемые, соответственно, как работник и работодатель, ведут переговоры об установлении заработной платы. Игрок L делает предложение x , а игрок M — предложение y ; x и y — произвольные действительные числа.

Для достижения соглашения между игроками используется арбитражная схема Фарбера [1]. Если $x \leq y$, то конфликта нет и игроки соглашаются на выплату жалованья, равного $\frac{x+y}{2}$. Если же $x > y$, стороны апеллируют к арбитру A . Обозначим решение арбитра через z . Тогда из предложений x и y выбирается то, которое ближе к точке z . В такой игре функция выигрыша есть математическое ожидание случайной величины $H_z(x, y) : H(x, y) = EH_z(x, y)$, где

$$H_z(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{если } x \leq y, \\ x, & \text{если } x > y, |x-z| < |y-z|, \\ y, & \text{если } x > y, |x-z| > |y-z|, \\ z, & \text{если } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases}$$

Пусть $-\infty < y \leq 0 \leq x < +\infty$, а z – дискретная случайная величина. Если $z = 0$ с вероятностью, равной 1, то, очевидно, что точкой равновесия в игре является пара чистых стратегий $(0, 0)$. В статьях [2], [3] для случаев, когда z с равной вероятностью принимает значения -1 и 1 , либо $-1, 0$ и 1 , соответственно, найдено равновесие в смешанных стратегиях.

В настоящей работе рассматриваются ситуации, в которых предложения арбитра сосредоточены в трех и четырех точках и имеют неравномерное распределение. В обоих рассматриваемых случаях будем искать равновесие в игре среди смешанных стратегий. Обозначим через $f(x)$ и $g(y)$ смешанные стратегии игроков L и M , соответственно. Имеем:

$$f(x) \geq 0, \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1; g(y) \geq 0, \int_{-\infty}^0 g(y)dy = 1.$$

Благодаря симметрии, цена игры равна нулю, а оптимальные стратегии симметричны относительно оси ординат, то есть: $g(y) = f(-y)$. Следовательно, достаточно построить оптимальную стратегию только для одного из игроков, например, L .

2. Оптимальные стратегии при трех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из трех значений: $-1, 0, 1$, соответственно, с вероятностями $\frac{1-p}{2}, p, \frac{1-p}{2}$. Случаи $p = 1$, $p = 0$ и $p = \frac{1}{3}$ отмечены во введении.

Мы будем искать равновесие в игре в общем случае: $0 < p < 1$.

Теорема 2.1. *Если $p \in [p_0, 1)$, где p_0 – положительный корень уравнения $p^4 + 8p^3 + 4p^2 + 4p - 1 = 0$, то для игрока L оптимальной является стратегия*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \frac{1+p}{4p} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{где } c = \frac{(1-p)^2}{2p}.$$

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ 0, & \text{если } c+2 \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (2.2)$$

где функция $\varphi(x)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале $(c, c+2)$. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (2.2) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+2), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$, тогда $-y \in [c, c+2]$ и

$$H(f(x), y) = \frac{1-p}{2}y + p \left[\int_c^{-y} xf(x)dx + \int_{-y}^{c+2} yf(x)dx \right] + \frac{1-p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx. \quad (2.3)$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (2.3) получаем

$$H(f(x), -c - 0) = -\frac{1+p}{2}c + \frac{1-p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

$$H(f(x), -(c+2) + 0) = -\frac{1-p}{2}(c+2) + \frac{1+p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx = 0,$$

откуда следуют соотношения для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int_c^{c+2} xf(x)dx = \frac{1-p}{1+p}(c+2) = \frac{1+p}{1-p}c = \sqrt{c(c+2)}. \quad (2.4)$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$. Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1-p}{2} + p \left[2yf(-y) + \int_{-y}^{c+2} f(x)dx \right], \quad (2.5)$$

$$H''(f(x), y) = p(3f(-y) - 2yf'(-y)), \quad (2.6)$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-y) - 2yf'(-y) = 0.$$

Положим $x = -y$, тогда $x \in (c, c+2)$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2x\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^3}}. \quad (2.7)$$

Определим константы c и α . Из (2.5) получаем

$$0 = H'(f, -c - 0) = \frac{1+p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c}},$$

$$0 = H'(f, -(c+2) + 0) = \frac{1-p}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c+2}}.$$

Тогда

$$c = \frac{(1-p)^2}{2}, \alpha = \frac{1+p}{4p}\sqrt{c}. \quad (2.8)$$

Из (2.2), (2.7) и (2.8) следует, что $f(x)$ имеет вид (2.1).

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+2), -c]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+2), -c)$, $H'(f(x), -c - 0) = 0$ и $H(f(x), -c - 0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+2), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+4)]$, тогда $-y \in [(c+4), +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int_c^{c+2} xf(x)dx = \sqrt{c(c+2)} = \frac{1-p^2}{2p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \frac{1-p}{2} \left[\int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+2} yf(x)dx \right] + \frac{1+p}{2} \int_c^{c+2} xf(x)dx, \\ H'(f(x), y) &= \frac{1-p}{2} \left[2(1+y)f(-2-y) + \int_{-2-y}^{c+2} f(x)dx \right] = \\ &= -\frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(-2-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right]. \end{aligned}$$

Так как $H(f(x), -(c+2) - 0) = 0$ и $H'(f(x), y) < 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$.

Пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2-y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2} \left[\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+2} yf(x)dx \right], \\ H'(f(x), y) &= \frac{1+p}{2} + \frac{1-p}{2} \left[2(-1+y)f(2-y) + \int_{2-y}^{c+2} f(x)dx \right] = \\ &= \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right]. \end{aligned}$$

Далее, так как $H(f(x), -c+0) = 0$, а функция $H'(f(x), y)$ является строго возрастающей, то, если $H'(f(x), -c+0) \geq 0$, то $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, -(c-2)] \cap (-c, 0]$.

Имеем:

$$\begin{aligned} H'(f(x), -c+0) &= \frac{1+p}{2} + \frac{(1-p^2)\sqrt{c}}{4p} \left[\frac{1}{\sqrt{(c+2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right] = \\ &= \frac{p^2+4p-1}{4p} + \frac{(1-p)^2}{2(1+p)^2} = \frac{p^4+8p^3+4p^2+4p-1}{4p(1+p)^2}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего исследования заметим, что функция $c = c(p) = \frac{(1-p)^2}{2p}$ строго убывает в интервале $(0, 1)$.

Если $p^2+4p-1 \geq 0$, то $p \geq \sqrt{5}-2$, $0 < c \leq \sqrt{5}-1 < 2$, $H'(f(x), -c+0) > 0$ и исследование условий оптимальности окончено.

Пусть теперь $p^2+4p-1 < 0$. Рассмотрим функцию $F(p) = p^4+8p^3+4p^2+4p-1$ на отрезке $[0, 1]$. Так как $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 16 > 0$ и $F'(p) = 4p^3+24p^2+8p+4 > 0$, то существует единственная точка $p_0 \in (0, 1)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in (0, p_0)$ и $F(p) > 0$ при $p \in (p_0, 1)$.

Уточним границы для констант p_0 и c . В самом деле, если $c \geq 2$, то $p \leq 3-2\sqrt{2}$. Имеем: $F(3-2\sqrt{2}) = 1448-1024\sqrt{2} \approx -0,15468786 < 0$.

Так как, очевидно, что $F(\sqrt{5} - 2) > 0$, то $p_0 \in (3 - 2\sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$ и $c \in (0, 2)$ при $p \in (p_0, 1)$.

Таким образом, $[-c, -(c-2)] \cap [-c, 0] = [-c, 0]$. Легко проверить, что $p_0 \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{5}) \subset (3 - \sqrt{2}, \sqrt{5} - 2)$. Окончательно заключаем, что $H(f(x), y) > 0$ для $y \in (-\infty, -(c+2)) \cup (-c, 0]$ и теорема доказана. \square

3. Оптимальные стратегии при четырех предложениях

Пусть арбитр выбирает одно из четырех значений: $-3, -1, 1, 3$, соответственно, с вероятностями $\frac{1}{2} - p, p, p, \frac{1}{2} - p$. Ясно, что $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Случай $p = \frac{1}{2}$ отмечен во введении, а случай $p = 0$ приводит к аналогичным результатам, так что мы будем искать равновесие в игре в ситуации, где $0 < p < \frac{1}{2}$.

Теорема 3.1. Если $p \in \left(p_0, \frac{1}{2}\right)$, где p_0 – положительный корень уравнения $32p^5 + 16p^4 + 24p^3 + 8p^2 - 8p + 1 = 0$ из интервала $\left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{1}{5}\right)$, то для игрока L оптимальной является стратегия

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{если } c < x < c+2, \\ \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{если } c+2 < x < c+4, \\ 0, & \text{если } c+4 \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{где } c = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} - 2.$$

Доказательство. Будем искать оптимальную стратегию для игрока L в следующей форме:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < c, \\ \varphi(x), & \text{если } c < x < c+2, \\ \psi(x), & \text{если } c+2 < x < c+4, \\ 0, & \text{если } c+4 \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (3.2)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы в соответствующих интервалах. Обозначим через $H(f(x), y)$ функцию выигрыша игрока M при выбранной игроком L стратегии $f(x)$. Функция $H(f(x), y)$ непрерывна на всей полуоси $(-\infty, 0]$. Стратегия (3.2) будет оптимальной, если $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+4), -c]$ и $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c+4)) \cup (-c, 0]$

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$, тогда $-y \in [c+2, c+4]$, $-2-y \in [c, c+2]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p\right)y + p \left(\int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} xf(x)dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если теперь $f(x)$ – оптимальная стратегия, то из (3.3) получаем

$$H(f(x), -(c+2)-0) = -\left(\frac{1}{2} - p\right)(c+2) - p(c+2) + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} xf(x)dx = 0,$$

откуда следует равенство для математического ожидания стратегии $f(x)$:

$$\int_c^{c+4} xf(x)dx = c+2. \quad (3.4)$$

Далее, для оптимальности стратегии $f(x)$ необходимо, чтобы $H'(f(x), y) = H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$. Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} - p + p \left(2(1+y)f(-2-y) + \int_{-2-y}^{c+4} f(x)dx \right), \quad (3.5)$$

$$H''(f(x), y) = p(3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y)), \quad (3.6)$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(-2-y) - 2(1+y)f'(-2-y) = 0.$$

Положим $x = -2 - y$, тогда $x \in [c, c + 2]$, $f(x) = \varphi(x)$ и

$$3\varphi(x) + 2(x + 1)\varphi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{(x + 1)^3}}. \quad (3.7)$$

Определим константу α . Из (3.5) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c + 2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha p}{\sqrt{c + 1}},$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\sqrt{c + 1}}{4p}. \quad (3.8)$$

Далее, пусть $y \in [-(c + 2), -c]$, тогда $-y \in [c, c + 2]$, $2 - y \in [c + 2, c + 4]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \frac{1}{2}y + p \left(\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+4} yf(x)dx \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - p \right) \int_c^{c+4} f(x)dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Имеем:

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{2} + p \left(2(-1 + y)f(2 - y) + \int_{2-y}^{c+4} f(x)dx \right), \quad (3.10)$$

$$H''(f(x), y) = p(3f(2 - y) - 2f(-1 + y)f'(2 - y)), \quad (3.11)$$

откуда приходим к уравнению

$$3f(2 - y) - 2(-1 + y)f'(2 - y)) = 0.$$

Положим $x = 2 - y$, тогда $x \in [c + 2, c + 4]$, $f(x) = \psi(x)$ и

$$3\psi(x) + 2(x - 1)\psi'(x) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(x) = \frac{\beta}{\sqrt{(x-1)^3}}. \quad (3.12)$$

Определим константу β . Из (3.10) получаем

$$0 = H'(f(x), -(c+2) - 0) = \frac{1}{2} - \frac{2p\beta}{\sqrt{c+3}},$$

тогда

$$\beta = \frac{\sqrt{c+3}}{4p}. \quad (3.13)$$

Найдем константу c . Имеем:

$$1 = \int_c^{c+4} xf(x)dx = \int_c^{c+2} \frac{\sqrt{c+1}}{4p\sqrt{(x-4)^3}} dx + \int_{c+2}^{c+4} \frac{\sqrt{c+3}}{4p\sqrt{(x-1)^3}} dx,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{c+3}{c+1}} - \sqrt{\frac{c+1}{c+3}} = 2p.$$

Полагая $t = \sqrt{\frac{c+1}{c+3}}$, приходим к квадратному уравнению $t^2 + 2pt - 1 = 0$, положительный корень которого равен $\sqrt{p^2 + 1} - p$. Наконец,

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} - 2. \quad (3.14)$$

Отметим, что функция $c = c(p)$ строго убывает на полуоси $(0, +\infty)$. Так как по условию задачи $p < \frac{1}{2}$, то $c(p) > c(\frac{1}{2}) = \sqrt{5} - 2 > 0$.

Проверим выполнение условий оптимальности.

Пусть $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Так как при построении стратегии $f(x)$ были использованы равенства $H''(f(x), y) = 0$ в интервале $(-(c+4), -(c+2))$, $H'(f(x), -(c+2) - 0) = 0$ и $H(f(x), -(c+2) - 0) = 0$, то в силу непрерывности функции $H(f(x), y)$ заключаем, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+4), -(c+2)]$. Аналогично приходим к выводу, что $H(f(x), y) = 0$ при $y \in [-(c+2), -c]$.

Исследуем теперь поведение функции $H(f(x), y)$ вне отрезка $[-(c+4), -c]$.

Пусть $y \in (-\infty, -(c+10)]$, тогда $-y \in [c+10, +\infty)$ и

$$H(f(x), y) = \int_c^{c+4} xf(x)dx = c + 2 = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} > 0.$$

Пусть $y \in [-(c+10), -(c+8)]$, тогда $-y \in [c+8, c+10]$, $-6-y \in [c+2, c+4]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[\int_c^{-6-y} xf(x)dx + \int_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \left(\frac{1}{2} + p\right) \int_c^{c+4} xf(x)dx, \\ H'(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[2(3+y)f(-6-y) + \int_{-6-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ &= -\left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{\sqrt{c+3}}{2p} \left(\frac{4}{\sqrt{(-7-y)^3}} + \frac{1}{\sqrt{c+3}} \right) < 0. \end{aligned}$$

Пусть $y \in [-(c+8), -(c+6)]$, тогда $-y \in [c+6, c+8]$, $-6-y \in [c, c+2]$ и

$$\begin{aligned} H(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[\int_c^{-6-y} xf(x)dx + \int_{-6-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \left(\frac{1}{2} + p\right) \int_c^{c+4} xf(x)dx, \\ H'(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[2(3+y)f(-6-y) + \int_{-6-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\ &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{1}{2p} \left[(2p-1) - \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(-5-y)^3}} \right] < 0. \end{aligned}$$

Пусть $y \in [-(c+6), -(c+4)]$, тогда $-y \in [c+4, c+6]$, $-2-y \in [c+2, c+4]$ и

$$H(f(x), y) = \left(\frac{1}{2} - p\right) y + p \left[\int_c^{-2-y} xf(x)dx + \int_{-2-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \frac{1}{2} \int_c^{c+4} xf(x)dx,$$

$$\begin{aligned}
H'(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} - p \right) + p \left[2(1+y)f(-2-y) + \int_{-2-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\
&= -p - \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(-3-y)^3}} < 0.
\end{aligned}$$

Так как $H(f(x), -(c+4) - 0) = 0$, то функция $H(f(x), y) > 0$ на полуоси $(-\infty, -(c+4))$.

Далее, пусть $y \in [-c, -(c-2)] \cap [-c, 0]$, тогда $-y \in [c-2, c] \cap [0, c]$, $2-y \in [c, c+2] \cap [2, c+2]$ и

$$\begin{aligned}
H(f(x), y) &= \frac{1}{2}y + p \left[\int_c^{2-y} xf(x)dx + \int_{2-y}^{c+4} yf(x)dx \right] + \left(\frac{1}{2} - p \right) \int_c^{c+4} xf(x)dx, \\
H'(f(x), y) &= \frac{1}{2} + p \left[2(-1+y)f(2-y) + \int_{2-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[(2p-1) + \frac{2\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}} \right] = p + \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{(3-y)^3}} > 0.
\end{aligned}$$

Если $c \leq 2$, то исследование окончено; при этом $p \in \left[\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{2} \right)$.

Пусть теперь $p \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{15}} \right)$, тогда $c > 2$ и пусть $y \in [-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0]$, тогда $-y \in [c-4, c-2] \cap [0, c-2]$, $6-y \in [c+2, c+4] \cap [6, c+4]$ и

$$\begin{aligned}
H(f(x), y) &= \left(\frac{1}{2} + p \right) y + \left(\frac{1}{2} - p \right) \left[\int_c^{6-y} xf(x)dx + \int_{6-y}^{c+4} yf(x)dx \right], \\
H'(f(x), y) &= \frac{1}{2} + p + \left(\frac{1}{2} - p \right) \left[2(-3+y)f(6-y) + \int_{6-y}^{c+4} f(x)dx \right] = \\
&= 1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1-2p}{2p} \frac{\sqrt{c+3}}{\sqrt{(5-y)^3}}.
\end{aligned}$$

Так как $H'(f(x), y)$ строго возрастает в области задания, то $H'(f(x), y) > H'(f(x), -(c-2)+0)$. Имеем:

$$H'(f(x), -(c-2)+0) = \frac{4p^2 + 4p - 1}{4p} + \frac{1-2p}{2p(c+3)}.$$

Пусть $4p^2 + 4p - 1 \geq 0$, тогда $p \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $c \leq c\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$
 $-2 = 2\sqrt{2} + 1 < 4$, $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и
исследование окончено.

Рассмотрим случай $p \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Решим неравенство

$$H'(f(x), -(c-2)+0) \geq 0.$$

Имеем:

$$1 + p - \frac{1}{4p} + \frac{1-2p}{2} \left(\sqrt{p^2 - 1} - p \right) \geq 0,$$

$$\frac{1-2p}{2} \sqrt{p^2 + 1} \geq \frac{(1-2p)p}{2} - 1 - p + \frac{1}{4p},$$

$$(2p(1-2p)\sqrt{p^2 + 1})^2 \geq [2p^2(1-2p) - 4p - 4p^2 + 1]^2$$

и, наконец,

$$-32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1 \geq 0.$$

Исследуем поведение функции $F(p) = -32p^5 - 16p^4 - 24p^3 - 8p^2 + 8p - 1$ на отрезке $\left[0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$. Имеем: $F(0) = -1 < 0$, $F\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$,

$$F'(p) = -160p^4 - 64p^3 - 72p^2 - 16p + 8,$$

$$F''(p) = -640p^3 - 192p^2 - 144p - 16 < 0.$$

Следовательно, $F'(p)$ строго убывает на отрезке $[0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}]$ и, если $F'\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) > 0$, то $F'(p) > 0$ на этом отрезке и функция $F(p)$ строго возрастает. Имеем: $F'\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = -152 + 108\sqrt{2} \approx 0,735 > 0$.

Далее, из неравенства $c \leq 4$ следует, что $p \geq \frac{1}{\sqrt{35}}$. Найдем $F\left(\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{35}}\right) = \frac{8928 - 1521\sqrt{35}}{35^2\sqrt{35}} < 0.$$

Тогда существует точка $p_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ такая, что $F(p_0) = 0$, $F(p) < 0$ при $p \in \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, p_0\right)$ и $F(p) > 0$ при $p \in \left(p_0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

Наконец, заметим, что $F\left(\frac{1}{5}\right) > 0$. Таким образом, $p_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{1}{5}\right)$ и, поскольку $c < 4$, то $[-(c-2), -(c-4)] \cap [-(c-2), 0] = [-(c-2), 0]$ и исследование окончено.

Так как $H(f(x), -c+0) = 0$, то для $p \in (p_0, 1)$ функция $H(f(x), y) > 0$ при $y \in (-c, 0]$. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Farber H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. 1980. V. 35. P. 683–705.
2. Mazalov V.V., Zabelin A.A., Karpin A.S. *Equilibrium in arbitration game* // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. 2002. P. 41–46.
3. Mazalov V.V., Mentcher A.E., Tokareva J.S. *On a discrete arbitration procedure in three points*// Game Theory and Applications. 2005. V. XI. P. 87–91.

DISCRETE ARBITRATION PROCEDURE WITH NONUNIFORM DISTRIBUTION

Alexsander Mentcher, Faculty of Physics and Mathematics,
Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after
N. Tchernishevsky, Chita, Cand. Sc., Docent (MentcherAE@zabspu.ru)

Abstract: We consider a zero-sum game related with arbitration scheme. The arbitrator's offers are concentrated in three or four points with nonuniform distribution. The equilibrium in mixed strategies is derived.

Keywords: arbitration scheme, discrete distribution, mixed strategies, equilibrium.

УДК 519.83

ББК 22.18

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ

ЕЛЕНА М. ПАРИЛИНА

факультет прикладной математики –
процессов управления

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: barlena@gmail.com

В работе рассмотрена задача передачи данных в простой беспроводной сети. Процесс передачи данных моделируется с помощью стохастической (марковской) игры. В работе предлагается система штрафов и вознаграждений пользователям сети для регулирования процесса передачи данных. Рассмотрен кооперативный вариант игры, в качестве кооперативного решения которой предлагается вектор Шепли. Получено условие позиционной состоятельности найденного вектора Шепли и представлен метод построения кооперативной процедуры распределения дележа, позволяющей перераспределять выплаты игрокам (пользователям сети) на каждом промежутке времени, преодолевая естественную несостоятельность вектора Шепли. Приведен численный пример, на котором демонстрируются все полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: кооперативная стохастическая игра, марковская игра, позиционная состоятельность, кооперативная процедура распределения дележа.

1. Введение

В статье рассматривается кооперативная стохастическая игра (кооперативная марковская игра), и полученные теоретические результаты применяются для моделирования процесса передачи данных в

одной простой беспроводной сети. Предполагается, что беспроводная сеть передачи данных состоит из трех точек доступа (вершин).

В каждый промежуток времени в двух вершинах сети генерируются пакеты данных с некоторыми вероятностями. Время предполагается дискретным. В третьей вершине пакеты данных не генерируются. Работа сети состоит в передаче пакетов данных из первых двух вершин в третью. Первые две вершины имеют однонаправленное беспроводное соединение между собой, то есть первая вершина (игрок 1) в один промежуток времени может послать пакет данных либо в вершину 2 (игроку 2), либо напрямую в вершину 3. Предполагается, что за пересылку пакета данных из вершины 1 в вершину 2 игрок 1 получает неотрицательное вознаграждение. Система вознаграждений и издержек позволяет поддерживать кооперацию между игроками 1 и 2. Задача состоит в нахождении оптимального кооперативного поведения, позволяющего достичь максимума математического ожидания суммарного выигрыша игроков 1 и 2. Такое поведение игроков моделируется с помощью кооперативной марковской игры.

В работах [2-4,9,10] рассматриваются теоретико-игровые модели передачи данных в ad-hoc и multi-hop беспроводных сетях, причем, делается акцент на развитие механизмов кооперации для стимулирования переадресации данных. В статье [7] исследуется простая структура сети, и выигрышами игроков являются средние ожидаемые выигрыши игроков за один временной промежуток. В настоящей статье за выигрыши игроков принимаются математические ожидания выигрышей игроков во всей марковской игре. Теоретические результаты, на которые опирается повествование статьи, можно найти в [1,5,8]. В работе вычисляется максимальный суммарный выигрыш игроков и значения характеристической функции. В качестве дележа максимального суммарного выигрыша игроков может быть рассчитан любой дележ, известный в кооперативной теории игр. В настоящей работе используется вектор Шепли.

Кооперативная марковская игра — динамическая игра. В любой динамической игре условие сохранения кооперации имеет важное значение. Перераспределение выплат игроков в каждый промежуток времени в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа, предложенной Л.А. Петросяном в 1977 (см. [6]), поз-

воляет игрокам в каждый момент времени ожидать в оставшейся части игры получение дележа, который будет принадлежать тому же принципу оптимальности, который был выбран игроками в начале игры. Если дополнительно потребовать неотрицательности всех элементов кооперативной процедуры распределения дележа, то будет выполняться условие позиционной состоятельности этого дележа. В настоящее время множество работ [11,12] посвящено исследованию позиционной состоятельности или динамической устойчивости принципов оптимальности в кооперативных динамических играх.

2. Постановка задачи

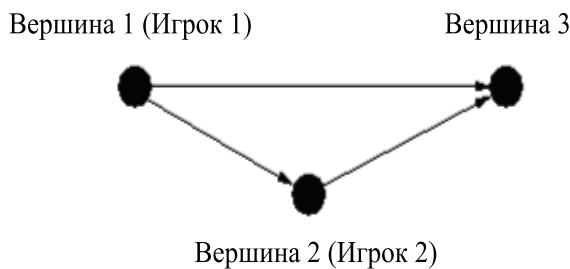


Рисунок 1. Простая беспроводная сеть

Рассмотрим систему, в которой приемники (вершины 1 и 2) независимо генерируют пакеты данных на каждом промежутке времени с вероятностями a_1 и a_2 соответственно. Пакет данных может появиться в вершине 1 (2) с вероятностью a_1 (a_2) только, если в конце предыдущего временного промежутка очередь в вершине 1 (2) пуста. Сделаем некоторые предположения:

1. вершины 1 и 2 (игроки 1 и 2 соответственно) стремятся послать пакеты данных, скопившихся у них, в конечный пункт назначения - вершину 3;
2. максимальная емкость буфера каждой вершины равна единице. Вершина 3 не может принять одновременно два пакета данных

в один промежуток времени. В данной постановке исключается многопакетная передача данных, а также исключается одновременное отправление и принятие пакетов никакой из вершин в любой промежуток времени;

3. если игроки одновременно пересылают пакеты в вершину 3, то эти пакеты отклоняются и возвращаются в начальные вершины, таким образом, в следующий промежуток времени ни один новый пакет не может появиться в вершинах 1 и 2;
4. все пересылаемые пакеты данных имеют одинаковый размер, равный единице, и, если вершины имеют прямое соединение друг с другом, то доставка одного пакета данных из одной вершины в другую занимает один промежуток времени;
5. игрок 1 (вершина 1) выбирает одну из двух стратегий: переслать пакет данных напрямую в вершину 3 или переслать этот пакет в вершину 2, чтобы тот послал этот пакет в вершину 3 в следующий промежуток времени;
6. если игрок 1 (вершина 1) пересыдает пакет данных игроку 2, который уже имеет в данный промежуток времени пакет в своей очереди, игрок 2 отклоняет переданный ему пакет. В противном случае игрок 2 решает принять или отклонить пакет, переданный ему игроком 1.

Предположим, что в вышеописанной системе передачи данных введена следующая схема поощрений и наказаний:

1. величина $f \geq 0$ — это премия, которую получает игрок 1 или 2 за каждую успешную передачу одного пакета данных в вершину 3;
2. игрок 1 получает премию в размере $c \geq 0$ от игрока 2 за передачу одного пакета данных игроку 2, который, в свою очередь, может рассчитывать на премию размером f только после успешной передачи этого пакета в конечный пункт (вершину 3) в следующий промежуток времени;

3. задержка пакета данных в вершине 1 или 2 на один промежуток времени приносит игроку, находящемуся в этой вершине, издержки в размере $d \geq 0$, независимо от того, по какой причине произошла задержка;
4. величина D_{ij} — это издержки по пересылке одного пакета данных из вершины i в вершину j , которые несет игрок i .

Процесс передачи данных может остановится в любой промежуток времени с вероятностью $0 < q < 1$. Вероятность q , по сути, является дисконт-фактором. Модель передачи данных в беспроводных сетях может быть представлена марковской игрой. Игроки, находящиеся в вершинах 1 и 2, стремятся максимизировать ожидаемый суммарный выигрыш с последующим разделом этого выигрыша с помощью вектора Шепли.

Обозначим через (Q_1, Q_2) состояние в беспроводной сети, где Q_i — это число пакетов данных, находящееся в очереди игрока $i = 1, 2$. Число Q_i может принимать значения 0 или 1, если ни одного или один пакет данных находится в данный промежуток времени в очереди игрока i соответственно.

В марковской игре передачи данных в беспроводных сетях возможно 4 состояния:

$$T = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}.$$

Предположим, что игроки имеют информацию о состоянии не только своей очереди, но и очереди другого игрока. Это предположение разумно, поскольку мы пытаемся найти кооперативное решение, которое подразумевает совместные действия, включая обмен информацией о состоянии очередей обоих игроков.

Определим, исходя из условия задачи игровые элементы во всех состояниях системы.

1. Игровой элемент $\Gamma(0, 0)$.

У игрока 1 имеется одна стратегия W (ожидать), у игрока 2 — одна стратегия W (ожидать). Выигрыши игроков будут $(0, 0)$.

2. Игровой элемент $\Gamma(0, 1)$.

У игрока 1 имеется одна стратегия W (ожидать), у игрока 2 — одна стратегия $\xrightarrow{3}$ (послать пакет в вершину 3). Выигрыши игроков будут следующими: $(0, f - D_{23})$.

3. Игровой элемент $\Gamma(1, 0)$.

Игрок 1 имеет две стратегии: 1) $\xrightarrow{3}$ (послать пакет в вершину 3), 2) $\xrightarrow{2}$ (послать пакет в вершину 2); игрок 2 имеет две стратегии: 1) Ac (принять пакет от игрока 1), 2) Rej (не принять пакет от игрока 1). Выигрыши игроков будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (f - D_{13}, 0) & (f - D_{13}, 0) \\ (c - D_{12}, -c) & (-d - D_{12}, 0) \end{pmatrix}.$$

4. Игровой элемент $\Gamma(1, 1)$.

Игрок 1 имеет две стратегии: 1) $\xrightarrow{3}$ (послать пакет в вершину 3), 2) W (ожидать); игрок 2 имеет две стратегии: 1) $\xrightarrow{3}$ (послать пакет в вершину 3), 2) W (ожидать). Выигрыши игроков будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (-d - D_{13}, -d - D_{23}) & (f - D_{13}, -d) \\ (-d, f - D_{23}) & (-d, -d) \end{pmatrix}.$$

Без потери общности прибавим число

$$z = \max\{d + D_{13}, d + D_{23}, d + D_{12}, -c + D_{12}, c\}$$

ко всем выигрышам игроков во всех игровых элементах, чтобы сделать все выигрыши неотрицательными.

3. Матрица вероятностей перехода

Будем решать описанную выше марковскую игру в классе стационарных стратегий [1]. В работе ограничимся рассмотрением множества чистых стационарных стратегий, но сначала для удобства определим матрицу вероятностей перехода марковской игры передачи данных в смешанных стратегиях для того, чтобы не выписывать 16 различных матриц вероятностей перехода для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях. Далее при подстановке в эту

матрицу определенных значений стратегий можно получить матрицу вероятностей перехода для любой ситуации в чистых стационарных стратегиях.

Обозначим через X_i множество смешанных стационарных стратегий игрока i , $i = 1, 2$.

В соответствии со структурой марковской игры передачи данных в беспроводной сети смешанная стационарная стратегия игрока 1 во всей марковской игре предписывает ему выбрать стратегию W с вероятностью 1 в состояниях $(0, 0)$, $(0, 1)$, стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{11} в состоянии $(1, 0)$, и стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{12} в состоянии $(1, 1)$. Смешанная стационарная стратегия игрока 2 во всей марковской игре предписывает ему выбрать стратегию W с вероятностью 1 в состояниях $(0, 0)$, стратегию $\xrightarrow{3}$ в состоянии $(0, 1)$, стратегию A_c с вероятностью p_{21} в состоянии $(1, 0)$, и стратегию $\xrightarrow{3}$ с вероятностью p_{22} в состоянии $(1, 1)$.

Обозначим через $u_i = (p_{i1}, p_{i2})$ смешанную стационарную стратегию игрока i и множество смешанных стационарных стратегий игрока i через U_i , $i = 1, 2$. Получаем ситуацию в смешанных стационарных стратегиях $u = (u_1, u_2) = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$. Матрица переходных вероятностей в ситуации u в смешанных стационарных стратегиях будет следующей:

$$\Pi(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{12} = (1 - a_1)a_2, \quad \alpha_{13} = a_1(1 - a_2), \quad \alpha_{14} = a_1a_2, \\ \alpha_{21} &= (1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{22} = (1 - a_1)a_2, \quad \alpha_{23} = a_1(1 - a_2), \quad \alpha_{24} = a_1a_2, \\ \alpha_{31} &= p_{11}(1 - a_1)(1 - a_2), \quad \alpha_{32} = p_{11}(1 - a_1)a_2 + (1 - p_{11})p_{21}(1 - a_1), \\ \alpha_{33} &= p_{11}a_1(1 - a_2) + (1 - p_{11})(1 - p_{21})(1 - a_2), \\ \alpha_{34} &= p_{11}a_1a_2 + (1 - p_{11})p_{21}a_1 + (1 - p_{11})(1 - p_{21})a_2, \\ \alpha_{41} &= 0, \quad \alpha_{42} = p_{12}(1 - p_{22})(1 - a_1), \quad \alpha_{43} = (1 - p_{12})p_{22}(1 - a_2), \\ \alpha_{44} &= p_{12}p_{22} + (1 - p_{12})(1 - p_{22}) + p_{12}(1 - p_{22})a_1 + (1 - p_{12})p_{22}a_2. \end{aligned}$$

Если в описанной выше марковской игре реализуется ситуация в стационарных стратегиях u , выигрыши игрока 1 в соответствующих

состояниях будут следующими:

$$K_1(u) = (\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{14}),$$

где $\Omega_{11} = \Omega_{12} = z$, $\Omega_{13} = p_{11}(z + f - D_{13}) + (1 - p_{11})p_{21}(z + c - D_{12}) + (1 - p_{11})(1 - p_{21})(z - d - D_{12})$, $\Omega_{14} = p_{12}p_{22}(z - d - D_{13}) + p_{12}(1 - p_{22})(z + f - D_{13}) + (1 - p_{12})(z - d)$.

У игрока 2 будут следующими:

$$K_2(u) = (\Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_{23}, \Omega_{24}),$$

где $\Omega_{21} = z$, $\Omega_{22} = z + f - D_{23}$, $\Omega_{23} = (1 - p_{11})p_{21}(z - c)$, $\Omega_{24} = p_{12}p_{22}(z - d - D_{23}) + (1 - p_{12})p_{22}(z + f - D_{23}) + (1 - p_{22})(z - d)$.

4. Кооперативная стохастическая игра передачи данных в беспроводной сети

Кооперативную игру передачи данных в беспроводной сети будем рассматривать в классе чистых стационарных стратегий. Обозначим через Ξ_i множество чистых стационарных стратегий игрока i , $i = 1, 2$. Например, чистая стационарная стратегия $\eta_1 = (1, 0)$ игрока 1 предписывает ему выбирать стратегию $\xrightarrow{3}$ в состоянии $(1, 0)$ и стратегию W в состоянии $(1, 1)$. Каждый игрок имеет 4 чистых стационарных стратегии, т.е. получается 16 ситуаций в чистых стационарных стратегиях. Для ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ можно записать в упрощенном виде матрицу переходных вероятностей $\Pi(\eta)$.

Например, для ситуации $\eta^1 = (1, 1, 1, 1)$ матрица переходных вероятностей будет иметь вид:

$$\Pi(\eta^1) = \begin{pmatrix} (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ (1 - a_1)(1 - a_2) & (1 - a_1)a_2 & a_1(1 - a_2) & a_1a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta \in \Xi = \prod_{i=1}^2 \Xi_i$ можно посчитать математическое ожидание выигрышей игроков для подыгры, начинающейся с определенного состояния:

$$E_i(\eta) = (E_i^{(0,0)}(\eta), E_i^{(0,1)}(\eta), E_i^{(1,0)}(\eta), E_i^{(1,1)}(\eta)),$$

где $E_i^t(\eta)$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре марковской игры, начинаящаяся из состояния $t \in T$.

Математическое ожидание выигрышей игрока i для подыгр можно рассчитать по следующей формуле:

$$E_i(\eta) = (E - (1 - q)\Pi(\eta))^{-1}K_i(\eta),$$

где $K_i(\eta)$, $\Pi(\eta)$ определены выше.

Математическое ожидание выигрыша игрока i во всей марковской игре, включая ход "случая" (т.е. выбор начального состояния), может быть рассчитано по формуле:

$$\bar{E}_i(\eta) = \pi E_i(\eta),$$

где $\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,0)}, \pi_{(1,1)})$ — вектор начальных вероятностей, и π_t — вероятность того, что первое состояние в марковской игре будет $t \in T$.

Для решения кооперативного варианта описанной выше марковской игры необходимо найти кооперативное решение $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$, т.е. ситуацию в чистых стационарных стратегиях такую, что

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\bar{\eta}) = \max_{\eta \in \Xi} \sum_{i \in \{1,2\}} \bar{E}_i(\eta).$$

Значение характеристических функций для подыгр

$$V(S) = (V^{(0,0)}(S), V^{(0,1)}(S), V^{(1,0)}(S), V^{(1,1)}(S))$$

можно рассчитать по формуле

$$V^t(S) = \max_{\eta_S} \min_{\eta_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} E_i^t(\eta_S, \eta_{N \setminus S}). \quad (4.1)$$

Значение характеристической функции для всей марковской игры для коалиций $S \neq \emptyset$ определяется формулой

$$\bar{V}(S) = \pi V(S). \quad (4.2)$$

Для $S = \emptyset$ значение характеристической функции $\bar{V}(S) = 0$.

Определение 4.1. Кооперативной марковской игрой передачи данных в беспроводной сети называется пара $\langle \{1, 2\}, \bar{V}(S) \rangle$, где $\bar{V}(\emptyset) = 0$, $\bar{V}(\{1, 2\}) = \sum_{i \in \{1, 2\}} \bar{E}_i(\bar{\eta})$, для $S \neq \emptyset$ и $S \neq \{1, 2\}$ значение функции $\bar{V}(S)$ определяется формулой (4.2).

В качестве дележа максимального суммарного математического ожидания выигрыша игроков рассмотрим вектор Шепли. Обозначим через $Sh = (Sh_1, Sh_2)$, где

$$Sh_i = (Sh_i^{(0,0)}, Sh_i^{(0,1)}, Sh_i^{(1,0)}, Sh_i^{(1,1)})$$

вектор Шепли, рассчитанный для подыгр, и через $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \bar{Sh}_2)$ вектор Шепли, рассчитанный для всей марковской игры, т.е. $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$.

5. Кооперативная процедура распределения дележа

Игроки перед началом игры договариваются о кооперации и ожидают получить совместный выигрыш $\bar{V}(\{1, 2\})$ и соответствующие компоненты \bar{Sh}_1 и \bar{Sh}_2 вектора Шепли.

Было бы естественно, если выплаты игрокам в игровых элементах, соответствующих состояниям марковской игры, были бы равны выигрышам игроков в одновременных играх, реализуемых при кооперативном решении $\bar{\eta}$, что эквивалентно условию:

$$Sh_i = K_i(\bar{\eta}) + (1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i, \quad (5.1)$$

где $K_i(\bar{\eta})$ — выигрыш игрока i в одновременной игре при условии, что реализуется кооперативное решение $\bar{\eta}$, слагаемое $(1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i$ — математическое ожидание i -ой компоненты вектора Шепли при условии, что игра передачи данных не закончится.

Определение 5.1. Назовем вектор Шепли $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \bar{Sh}_2)$, где $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$ естественно состоятельным, если Sh_i удовлетворяет условию (5.1) для всех $i = 1, 2$.

К сожалению, реализуя выплаты игрокам в соответствии с их выигрышами в одновременных играх, невозможно достичь того, чтобы оставшиеся выплаты были бы равны соответствующим компонентам

вектора Шепли, рассчитанного для подыгры. Нарушение естественной состоятельности может изменить планы игроков и разрушить их кооперацию. Предлагается перераспределить выигрыши игроков на каждом промежутке времени, чтобы преодолеть естественную несостоятельность вектора Шепли.

Перераспределенные выплаты игрокам β_i , где $\sum_{i \in N} \beta_i = \sum_{i \in N} K_i(\bar{\eta})$, можно найти по формуле

$$Sh_i = \beta_i + (1 - q)\Pi(\bar{\eta})Sh_i \quad (5.2)$$

или

$$\beta_i = (\beta_i^1, \dots, \beta_i^t) = (E - (1 - q)\Pi(\bar{\eta}))Sh_i. \quad (5.3)$$

Определение 5.2. Назовем вектор $\beta^t = (\beta_1^t, \dots, \beta_n^t)$, $t \in T$, кооперативной процедурой распределения делянка в состоянии t , где β_i^t — выплата игроку i в одновременной игре $\Gamma(t)$ в состоянии t , определяемая формулой (5.3).

Обозначим математическое ожидание суммы выплат игроку i в кооперативной марковской игре через $\bar{B}_i = \pi B_i$, где $B_i = \{B_i^t\}_{t \in T}$ и B_i^t — математическое ожидание суммы выплат игроку i в кооперативной стохастической подыгре, начинаящейся из состояния t .

Лемма 5.1. Имеет место равенство $\bar{B}_i = \bar{Sh}_i$ для всех $i \in N$.

Лемма 5.1 показывает, что перераспределение выплат игроков не влияет на их ожидаемый последующий выигрыш.

6. Позиционная состоятельность вектора Шепли

Можно потребовать, чтобы выплаты i -му игроку β_i^t были неотрицательными для любого состояния $t \in T$ и любого игрока $i \in N$, что эквивалентно тому, чтобы система уравнений относительно $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$

$$Sh_i = (E - (1 - q)\Pi(\bar{\eta}(\cdot)))^{-1}\beta_i$$

имела бы неотрицательное решение.

Определение 6.1. Вектор Шепли $\bar{Sh} = (\bar{Sh}_1, \dots, \bar{Sh}_n)$, $\bar{Sh}_i = \pi Sh_i$ назовем позиционно состоятельным [1, 5] в марковской игре, если

для каждого игрового элемента $\Gamma(t)$, $t \in T$ и для всех игроков $i \in N$ существует неотрицательная кооперативная процедура распределения дележа $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$, удовлетворяющая уравнению (5.3).

В общем случае невозможно гарантировать неотрицательность элементов вектора $\beta_i = (\beta_i^{(0,0)}, \beta_i^{(0,1)}, \beta_i^{(1,0)}, \beta_i^{(1,1)})$. Несмотря на это, перераспределяя выигрыши игроков в каждом игровом элементе, который реализуется при кооперативном решении $\bar{\eta}$, в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа β_i , $i \in N$, можно добиться сохранения кооперации во всей марковской игре.

В некоторых случаях игроки могут считать условие неотрицательности выплат важным, особенно если их выигрыши в одновременных играх были неотрицательными. Но, возможно, игроки пойдут на то, чтобы на каких-то промежутках времени получать отрицательные выплаты в соответствии с кооперативной процедурой распределения дележа, желая при этом сохранить кооперацию.

7. Пример

Рассмотрим численный пример кооперативной игры передачи данных в беспроводной сети, поскольку в общем виде представить матрицу $(E - (1 - q)\Pi(\bar{\eta}))^{-1}$ в статье не имеется возможности. Пусть параметры игры принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5, & a_2 &= 0.1, & \pi &= (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) \\ q &= 0.01, & f &= 1, & d &= 0.1, & c &= 0.3, \\ D_{12} &= 0.1, & D_{13} &= 0.6, & D_{23} &= 0.2 \end{aligned}$$

В таблице показаны рассчитанные значения математических ожиданий для каждой ситуации в чистых стационарных стратегиях η . В таблице используются следующие обозначения:

$E_i(\eta) = (E_i^{(0,0)}(\eta), E_i^{(0,1)}(\eta), E_i^{(1,0)}(\eta), E_i^{(1,1)}(\eta))$ — вектор математических ожиданий выигрышей игрока i , $i = 1, 2$ в подыграх; $E_1(\eta) + E_2(\eta)$ — суммарное математическое ожидание выигрышей игроков.

η	$E_1(\eta)$	$E_2(\eta)$	$E_1(\eta) + E_2(\eta)$
$\eta^1 = (1, 1, 1, 1)$	14.75966387	45.70756302	60.46722689
	14.75966387	46.50756302	61.26722689
	15.15966387	45.70756302	60.86722689
	0	40.	40.
$\eta^2 = (1, 1, 1, 0)$	89.80000000	76.24887286	166.0488729
	89.80000000	77.04887286	166.8488729
	90.20000000	76.24887286	166.4488729
	90.20000000	76.71127141	166.9112714
$\eta^3 = (1, 0, 1, 1)$	88.22724883	77.92000000	166.1472488
	88.22724883	78.72000000	166.9472488
	88.62724883	77.92000000	166.5472488
	88.30952131	78.72000000	167.0295213
$\eta^4 = (1, 0, 1, 0)$	64.67563026	62.34621849	127.0218488
	64.67563026	63.14621849	127.8218488
	65.07563026	62.34621849	127.4218488
	60.	60.	120.
$\eta^5 = (1, 1, 0, 1)$	14.75966387	45.70756302	60.46722689
	14.75966387	46.50756302	61.26722689
	15.15966387	45.70756302	60.86722689
	0.	40.	40.
$\eta^6 = (1, 1, 0, 0)$	89.80000000	76.24887286	166.0488729
	89.80000000	77.04887286	166.8488729
	90.20000000	76.24887286	166.4488729
	90.20000000	76.71127141	166.9112714
$\eta^7 = (1, 0, 0, 1)$	88.22724883	77.92000000	166.1472488
	88.22724883	78.72000000	166.9472488
	88.62724883	77.92000000	166.5472488
	88.30952131	78.72000000	167.0295213
$\eta^8 = (1, 0, 0, 0)$	64.67563026	62.34621849	127.0218488
	64.67563026	63.14621849	127.8218488
	65.07563026	62.34621849	127.4218488
	60.	60.	120.
$\eta^9 = (0, 1, 1, 1)$	3.870077599	41.81391498	45.68399258
	3.870077599	42.61391498	46.48399258
	2.815688411	41.29388792	44.10957633
	0.	40.	40.

$\eta^{10} = (0, 1, 1, 0)$	85.30045000 85.30045000 85.58955000 85.78955000	82.15225000 82.95225000 82.29775000 82.49775000	167.4527000 168.2527000 167.8873000 168.2873000
$\eta^{11} = (0, 0, 1, 1)$	75.28276807 75.28276807 75.40659007 75.23559576	93.56491025 94.36491025 93.89870345 94.52135936	168.8476783 169.6476783 169.3052935 169.7569551
$\eta^{12} = (0, 0, 1, 0)$	60.82133034 60.82133034 60.70655852 60.	60.79766590 61.59766590 60.59084462 60.	121.6189962 122.4189962 121.2974031 120.
$\eta^{13} = (0, 1, 0, 1)$	5.432827686 5.432827686 4.587155964 0.	43.10048870 43.90048870 42.75229358 40.	48.53331639 49.33331639 47.33944954 40.
$\eta^{14} = (0, 1, 0, 0)$	62.35393639 62.35393639 62.07747575 63.29742280	75.10793102 75.90793102 75.07981035 75.59292249	137.4618674 138.2618674 137.1572861 138.8903453
$\eta^{15} = (0, 0, 0, 1)$	51.37623762 51.37623762 50.99000000 51.09000000	77.92000001 78.72000001 77.92000000 78.72000000	129.2962376 130.0962376 128.9100000 129.8100000
$\eta^{16} = (0, 0, 0, 0)$	59.38868199 59.38868199 59.08256880 60.	61.08577346 61.88577346 60.91743119 60.	120.4744554 121.2744554 120. 120.

В данном числовом примере кооперативным решением будет ситуация

$$\eta_{11} = ((W, W, \xrightarrow{2}, W), (W, \xrightarrow{3}, Ac, \xrightarrow{3})).$$

Максимум математического ожидания суммарного выигрыша игроков в этой марковской игре будет следующим:

$$\max_{\eta \in \Xi} \sum_{i \in N} \overline{E}_i(\eta) = 169.39.$$

Значения характеристических функций для подыгр будут следующими:

$$V(\{1\}) = (64.68, 64.68, 65.08, 60), \quad V(\{2\}) = (61.09, 61.89, 60.92, 60),$$

$$V(\{1, 2\}) = (168.85, 169.65, 169.31, 169.76),$$

и для всей марковской игры:

$$\bar{V}(\{1\}) = 63.61, \quad \bar{V}(\{2\}) = 60.97,$$

$$\bar{V}(\{1, 2\}) = 169.39.$$

Компоненты вектора Шепли, рассчитанного для подыгр марковской игры передачи данных, будут следующими:

$$Sh_1 = (86.22, 86.22, 86.73, 84.88), \quad Sh_2 = (82.63, 83.43, 82.57, 84.88).$$

Компоненты вектора Шепли, рассчитанного для всей марковской игры передачи данных, будут иметь значения

$$\bar{Sh}_1 = 86.01, \quad \bar{Sh}_2 = 83.38.$$

Кооперативные процедуры распределения дележа для игроков будут иметь следующие значения:

$$\beta_1 = (0.7, 0.7, 2.04, -0.8), \quad \beta_2 = (0.7, 1.5, -0.74, 2.9).$$

В соответствии с этими значениями игрокам необходимо перераспределять выигрыши следующим образом:

- в состоянии $(1, 0)$:
2.04 игроку 1 вместо 0.9,
–0.74 игроку 2 вместо 0.4,
- в состоянии $(1, 1)$:
–0.8 игроку 1 вместо 0.6,
2.9 игроку 2 вместо 1.5.

В численном примере марковской игры передачи данных вектор Шепли $\bar{Sh} = (86.01, 83.38)$ не является позиционно состоятельным, поскольку имеются отрицательные компоненты в векторе кооперативной процедуры распределения дележа.

8. Заключение

В работе рассмотрен случай чистых стационарных стратегий, поскольку стратегии работы в беспроводной сети должны быть простыми, особенно при большом потоке информации. Для того, чтобы добиться кооперации необходимо, чтобы удовлетворялись некоторые принципы. Одним из них является естественное желание игроков в течение всей игры придерживаться одного и того же принципа оптимальности. То есть, если в начале игры игроками было решено разделить их максимальный суммарный выигрыш в соответствии с вектором Шепли, то и на каждом последующем промежутке времени было бы естественно, если бы их оставшийся суммарный выигрыш тоже был бы разделен в соответствии с тем же принципом оптимальности. Дележ является естественно состоятельным, если ещё при этом на каждом промежутке времени игроки получают выплаты в соответствии со своими выигрышами в одновременных играх. Но это условие в реальных играх практически никогда не выполняется. Поэтому предлагается процедура перераспределения выплат на каждом промежутке времени таким образом, чтобы сумма этих выплат совпадала бы с суммарным выигрышем игроков на этом промежутке времени, и ожидаемый выигрыш любого игрока в оставшейся игре принадлежал бы тому же принципу оптимальности, что был выбран игроками в начале игры. Условие позиционной состоятельности вектора Шепли накладывает дополнительное условие неотрицательности на выплаты игрокам на каждом промежутке времени.

Кооперативную процедуру распределения дележа можно считать универсальной, поскольку её можно построить в любой марковской игре, используя полученные уравнения, но гарантировать при этом позиционную состоятельность дележа в общем случае нельзя.

Кооперативное решение, полученное в работе для игры передачи данных позволяет наладить работу беспроводной сети и получить от этой работы максимальный ожидаемый результат. К сожалению, при изменении структуры сети необходимо заново определять матрицу вероятностей перехода и выигрыши игроков в игровых элементах. Также имеются вычислительные трудности при нахождении обратной матрицы в уравнениях, определяющих математические ожидания выигрышей игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baranova E.M., Petrosjan L.A. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game theory and Applications. 2006. V. XI. P. 7–17.
2. Ben Salem N., Buttyan L., Hubaux J.-P., Jakobsson M. *A charging and rewarding scheme for packet forwarding in multi-hop cellular networks* // Proc. ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc). June 2003. Annapolis, MD, USA.
3. Buttyan L., Hubaux J.P. *Stimulating cooperation in self-organizing mobile ad hoc network* // ACM Journal for Mobile Networks (MONET). Oct. 2003. V. 8. N. 5. P. 579–592.
4. Michiardi P., Molva R. *A game-theoretical approach to evaluate co-operation enforcement mechanisms in mobile ad hoc networks* // Proc. WiOpt'03: Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks. Mar. 2003. Sophia-Antipolis, France.
5. Petrosjan L.A. *Cooperative Stochastic Games* // Advances in Dynamic Games, Annals of the International Society of Dynamic Games, Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L. A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan. 2006. P. 139–146.
6. Petrosjan L.A. *Stability of Solutions in n-person Differential Games* // Vestnik of Leningrad University. 1977. N. 19. P. 46–52 (in Russian).
7. Sagduyu Y.E., Ephremides A. *A game-theoretic look at simple relay channel* // Wireless Networks. 2006. V. 12. N. 5. P. 545–560.
8. Shapley L.S. *Stochastic Games* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 1953. V. 39. P. 1095–1100.
9. Srinivasan V., Noggehalli P., Chiasserini C.F., Rao R.R. *Cooperation in wireless ad hoc networks* // Proc. IEEE INFOCOM. Apr. 2003. San Francisco, CA, USA.

10. Urpi A., Bonuccelli M., Giordano S. *Modelling cooperation in mobile ad hoc networks: a formal description of selfishness* // Proc. WiOpt'03: Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks. Mar. 2003. Sophia-Antipolis, France.
11. Yeung D.W.K., Petrosjan L.A. *Subgame consist cooperative solutions in stochastic differential games* // J. optimiz. theory and appl. 2004. V. 120. N. 3. P. 651–666.
12. Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Оптимальное управление и дифференциальные игры, Сборник статей, Труды института математики и механики. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.

COOPERATIVE DATA TRANSMISSION GAME IN WIRELESS NETWORK

Elena M. Parilina, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Saint-Peterburg, Cand.Sc. (barlena@gmail.com).

Abstract: The paper considers the problem of data transmission in a simple wireless network. The process of data transmission is modelled with the help of a stochastic game. The paper proposes the system of rewards and costs to the network users to regulate the process of data transmission. The cooperative version of the game is considered. For this purpose the characteristic function is found. The Shapley value is proposed as a cooperative decision of the game. The condition of subgame consistency of the Shapley value and the method of construction of the cooperative payoff distribution procedure are taken. The cooperative payoff distribution procedure allows to redistribute payoffs to the players (network users) at each time slot to overcome the natural inconsistency of the Shapley value. The paper considers the numerical example which demonstrates all obtained theoretical results.

Keywords: cooperative stochastic game, Markov game, subgame consistency, cooperative payoff distribution procedure.

УДК 517.977

ББК 22.18

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ВЫИГРЫША В БЕСКОНЕЧНЫХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ

ИГОРЬ М. ПРУДНИКОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: pim_10@hotmail.com

В работе рассматриваются бесконечные коалиционные игры. Изучаются коалиции с точки зрения риска и конфликтности. Произвольная коалиционная игра отожествляется с сопоставимой ей цепью Маркова. Тем самым, изучение коалиционных игр сводится к изучению цепей Маркова, соответствующих этим играм. Определяется средний выигрыш произвольной коалиционной игры и алгоритм его вычисления.

Ключевые слова: коалиционные игры, бесконечные игры, риски и конфликты в коалиционных играх, супераддитивные оболочки, математическое ожидание выигрыша, цепи Маркова.

1. Введение

Рассматриваются коалиционные игры с точки зрения теории цепей Маркова. Многие политические события, экономическая конкуренция и другие явления могут быть описаны с помощью теории коалиционных игр. Если определить возможные коалиции игроков и

выигрыши каждой коалиции, а также вероятности перехода игроков из одной коалиции в другую, то, оказывается, можно спрогнозировать среднюю величину выигрыша бесконечной коалиционной игры в целом и каждой коалиции в отдельности.

Конечно, вероятности перехода игроков из одной коалиции в другую могут зависеть от времени, но это не мешает делать прогнозы. Используя вычислительную технику и несложный алгоритм расчета выигрыша в каждый момент времени, можно спрогнозировать ход развития политической или экономической ситуации в мире или в отдельном регионе.

Кроме того, в статье вводится понятие конфликтной, а также самой рискованной коалиции, что может заинтересовать менеджеров предприятий и государственных служащих. Определяется алгоритм нахождения конфликтных коалиций и "построение" новых неконфликтных коалиций.

2. Риски и коалиции

Рассмотрим коалиционную игру V_N с N игроками и функцией выигрышей $v(\cdot) : S \rightarrow R$ (характеристическая функция), где S – коалиция, состоящая из $|S|$ игроков, $|S| < N$, и $v(S)$ – выигрыш коалиции S . По определению коалиция – это группа игроков, договорившихся играть сообща.

Введем функцию $\bar{v}(\cdot)$, определенную на подмножестве векторов пространства R^N . Точке $x_S = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ с координатой $x_i = 1$ или $x_i = 0$ в зависимости от того, принадлежит ли i -ый игрок S – коалиции или нет, ставим в соответствие значение функции $\bar{v}(\cdot)$, равное $v(S)$, т.е. $\bar{v}(x_S) = v(S)$. При таком сопоставлении коалиции точке пространства R^N естественным образом определяется расстояние между коалициями S_1 и S_2 , например,

$$\varrho(S_1, S_2) = \|x_{S_1} - x_{S_2}\| = \sum_{i=1}^N |x_{S_1i} - x_{S_2i}|$$

Среди всех коалиций существуют *самые рискованные*.

Определение 2.1. По определению самой рискованной коалиции с шагом риска h_{max} назовем такую коалицию, для которой при сдвиге из точки в R^N , соответствующей этой коалиции, на малое расстояние, не превосходящее h_{max} , значение функции $\bar{v}(\cdot)$ уменьшается на наибольшее значение.

Нетрудно видеть, что самые рискованные коалиции соответствуют тем точкам пространства R^N , где отношение приращения функции выигрыша к величине смещения в одну из ближайших точек дискретного множества в R^N , соответствующих возможным коалициям, – наименьшее. Для определения самой рискованной коалиции предлагается находить эти отношения, т.е. решать следующую оптимизационную задачу для всех коалиций S и возможных приращений h с целочисленными координатами (не обязательно положительными), удовлетворяющих неравенству $0 < \|h\| \leq h_{max}$,

$$\min \psi(S, h) \longrightarrow_{S, h}, \quad (2.1)$$

где

$$\psi(S, h) = \frac{\bar{v}(x_S + h) - \bar{v}(x_S)}{\|h\|}$$

при условии, что $x_S + h$ – существующая коалиция.

Решение оптимизационной задачи (2.1) даст нам наиболее рискованные коалиции и область риска для заданного изначально шага риска h_{max} .

Для уменьшения риска надо использовать имеющиеся в наличии методы изменения функции $v(\cdot)$. Один из методов – это построение функции $\tilde{v}(\cdot)$, описанный в следующем параграфе.

3. Конфликтные коалиции

Конфликты в коалиции возникают из-за того, что сумма выигрышей коалиций S и T больше, чем прибыль коалиции $S \cup T$, т.е.

$$v(S) + v(T) > v(S \cup T),$$

где $S \cap T = \emptyset$.

Определение 3.1. Назовем коалицию S конфликтной, если существует такое ее разбиение на подкоалиции $S_1, S_2 \subset S$, $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, для которых

$$v(S_1) + v(S_2) > v(S).$$

Для нахождения конфликтных коалиций сделаем следующее.

Вычтем из значения функции $\bar{v}(\cdot)$ в точке $x_{S \cup T}$ значения функции $\bar{v}(\cdot)$ в точке x_S либо x_T . Если

$$\bar{v}(x_T) > \bar{v}(x_{S \cup T}) - \bar{v}(x_S),$$

то коалиция $S \cup T$ конфликтная, и ее надо рассматривать как потенциально нестабильную, способную распасться на коалиции S и T .

Спрашивается, как находить конфликтные коалиции?

Рассмотрим произвольную функцию $\nu(\cdot)$, определенную на коалициях S .

Будем называть функцию $\nu(\cdot)$ супераддитивной [2], если

$$\nu(S) + \nu(T) \leq \nu(S \cup T) \tag{3.1}$$

для любых коалиций S и T , $S \cap T = \emptyset$. По определению $\nu(\emptyset) = 0$.

Замечание 3.1. Нетрудно видеть, что для супераддитивной функции $\nu(\cdot)$ неравенство (3.1) должно выполняться для любых коалиций S_1, S_2, \dots, S_k , $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$, т.е.

$$\nu(S_1) + \nu(S_2) + \dots + \nu(S_k) \leq \nu(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k).$$

Построим наименьшую супераддитивную оболочку функции выигрыша $v(\cdot)$, которую обозначим через $\tilde{v}(\cdot)$.

Определим $\tilde{v}(\cdot)$ следующим образом

$$\tilde{v}(S) = \max_{S_1, S_2, \dots, S_k} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k)), \tag{3.2}$$

где максимум берется по всем подкоалициям $S_i \subset S$, $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$, $i, j \in \mathcal{N}$, \mathcal{N} - множество натуральных чисел. Здесь объединение

коалиций S_i не обязательно дает все множество S . Но если функция $v(\cdot)$ неотрицательная и определенная для всех возможных коалиций, то, очевидно, максимум будет достигаться для тех S_i , объединение которых есть все множество S .

Замечание 3.2. Заметим, что $\tilde{v}(\cdot) \geq v(S)$, поскольку $S \cap \emptyset = \emptyset$, $S \cup \emptyset = S$ и $v(\emptyset) = 0$.

Из неравенства

$$\max_{S_1, S_2} (v(S_1) + v(S_2)) \leq \max_{S_1, S_2, \dots, S_k} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k)),$$

где S_i определены выше, следует, что при увеличении числа дроблений коалиции S на все большее число подкоалиций значение максимума, стоящего в правой части (3.2), может только увеличиваться.

Кроме того, функция $\tilde{v}(\cdot)$ может определяться для коалиций S , для которых функция $v(\cdot)$ не определена.

Докажем супераддитивность функции $\tilde{v}(\cdot)$.

Теорема 3.1. *Функция $\tilde{v}(\cdot)$ - супераддитивна.*

Доказательство. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что существуют такие коалиции S и T , для которых $S \cap T = \emptyset$, что неравенство (3.1) не выполняется, т.е.

$$\tilde{v}(S) + \tilde{v}(T) > \tilde{v}(S \cup T). \quad (3.3)$$

Из определения функции $\tilde{v}(\cdot)$ следует, что существуют такие $S_i, T_i, S_i \cap S_j = \emptyset, T_i \cap T_j = \emptyset$ $i \neq j, i, j \in \mathcal{N}$, и

$$\bigcup_i S_i \subset S, \quad \bigcup_i T_i \subset T, \quad S_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i, j,$$

для которых

$$\tilde{v}(S) = \max_{S_1, S_2, \dots, S_k} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k)) = v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k)$$

и

$$\tilde{v}(T) = \max_{T_1, T_2, \dots, T_m} (v(T_1) + v(T_2) + \dots + v(T_m)) = v(T_1) + v(T_2) + \dots + v(T_m).$$

Из определения функции $\tilde{v}(\cdot)$ следует, что

$$\tilde{v}(S \cup T) \geq \max_{S_i, T_i} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k) + v(T_1) + v(T_2) + \dots + v(T_m)), \quad (3.4)$$

где коалиции S_i и T_i определены выше.

Из (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S \cup T) &\geq \max_{S_i, T_i} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k) + v(T_1) + v(T_2) + \dots + v(T_m)) = \\ &= \max_{S_i} (v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_k)) + \max_{T_j} (v(T_1) + v(T_2) + \dots + v(T_m)) = \\ &= \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T), \end{aligned}$$

что противоречит (3.3). Пришли к противоречию с предположением. Лемма доказана. \square

Процедуру построения наименьшей супераддитивной оболочки функции $v(\cdot)$ легко алгоритмизировать и написать программу расчета функции $\tilde{v}(\cdot)$ на вычислительной машине. Для этого достаточно сопоставить каждой коалиции S вектор x_S из R^N , как это делалось ранее, и рассматривать векторы x_{S_i} взаимно перпендикулярные друг к другу, для которых их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(x_{S_i}, x_{S_j}) = 0$. Функцию $\tilde{v}(\cdot)$ можно определить так

$$\tilde{v}(S) = \max_{x_{S_1}, x_{S_2}, \dots, x_{S_k}} (\bar{v}(x_{S_1}) + \bar{v}(x_{S_2}) + \dots + \bar{v}(x_{S_k})),$$

где максимум берется по всем взаимно перпендикулярным векторам $x_{S_i}, k \in \mathcal{N}$, и $x_S = x_{S_1} + x_{S_2} + \dots + x_{S_k}$.

Нахождение конфликтных коалиций не представляет труда. Для этого надо построить наименьшую супераддитивную оболочку $\tilde{v}(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ и найти те коалиции S , где значение функции $\tilde{v}(S) > v(S)$. Такие коалиции будут неустойчивыми, и на них надо обратить внимание в первую очередь руководителям предприятий и менеджерам. Кроме того, с помощью функции $\tilde{v}(\cdot)$ можно определять новые неконфликтные коалиции S на основе формулы (3.2).

Пусть S – неконфликтная коалиция, т.е. $\tilde{v}(S) = v(S) = \bar{v}(x_S)$. Тогда из формулы (2.1) видно, что для уменьшения риска для коалиции S надо увеличивать значения $\bar{v}(x_S + h)$, где $0 < \|h\| \leq h_{max}$ для

заданного изначально шага риска h_{max} . Кроме того, увеличивать значения $\bar{v}(x_S + h)$ надо таким образом, чтобы сохранить существующие неконфликтные коалиции. Этим требованиям мы удовлетворим, если заменим функцию $v(\cdot)$ на функцию $\tilde{v}(\cdot)$. Из формулы (3.2) видно, что $\tilde{v}(S) \geq v(S)$. Поэтому такая замена приведет только к увеличению функции $\psi(\cdot)$, а значит и к уменьшению риска для коалиции S .

4. Средний выигрыш в бесконечных коалиционных играх

Рассмотрим, как и ранее, игру с N участниками и функцией выигрыша $v(\cdot) : S \rightarrow R$, определенной на коалициях S . В процессе игры некоторые коалиции могут распадаться, и игроки из одной коалиции будут переходить в другие коалиции с некоторыми вероятностями. Нас будут интересовать среднее значение выигрыша, вычисленного по всем возможным коалициям, если игра продолжается бесконечно долго. Помимо функции выигрыша $v(\cdot)$ определим матрицу вероятностей участия игроков в той или иной коалиции. Каждой такой матрице соответствует определенный средний выигрыш по коалициям. Этот средний выигрыш может рассматриваться как определяющий фактор для долгосрочного прогнозирования. Действительно, если есть коалиция с большим выигрышем, но которая почти никогда не создается участниками игры, то вряд ли стоит рассчитывать на такую коалицию, на что указывает маленький средний выигрыш такой коалиции в бесконечной игре.

Пусть известна вероятность p_i , с которой i -ый участник принимает участие в игре, $i \in 1 : N$. Можно рассматривать более общий случай, когда вероятности участия игроков зависят от коалиции. Обозначим вероятность участия i -ого игрока в коалиции M через $p_i(M)$, а не участия – через $q_i(M)$, $p_i(M) + q_i(M) = 1$. По предположению будем считать, что игроки принимают решение независимо друг от друга.

Пусть задана коалиция M с выигрышем $v(M)$. Вычислим вероятность перехода от коалиции M_2 к коалиции M_1 (см. рис. 1). Коалиция M_1 состоит из $|M_1|$ участников, а коалиция M_2 – из $|M_2|$ участников.

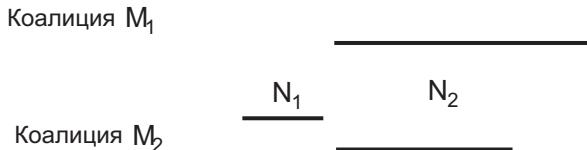


Рисунок 1.

Переход от коалиции M_2 к коалиции M_1 возможен *тогда и только тогда*, когда все игроки коалиции M_2 , которые не принадлежат коалиции M_1 , перейдут в любые другие коалиции, кроме M_1 , а игроки коалиции M_2 , которые принадлежат коалиции M_1 , перейдут в M_1 .

Вероятность того, что N_2 участников коалиции M_2 не перейдут в коалицию M_1 , а перейдут в произвольные другие коалиции, согласно правилу умножения вероятностей равна

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_{N_2}} = q_{i_1}(M_1)q_{i_2}(M_1)\dots q_{i_{N_2}}(M_1),$$

где i_1, i_2, \dots, i_{N_2} - номера N_2 участников коалиции M_2 , не входящих в коалицию коалиции M_1 .

Вероятность участия N_1 игроков (новых или старых) с номерами j_1, j_2, \dots, j_{N_1} в коалиции M_1 согласно правилу умножения вероятностей равна

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}} = p_{j_1}(M_1)p_{j_2}(M_1)\dots p_{j_{N_1}}(M_1),$$

где j_1, j_2, \dots, j_{N_1} номера игроков коалиции M_2 , входящих в коалицию коалиции M_1 .

Пусть число всех коалиций равно K . Возможно, что все они имеют одинаковый приоритет и в этом смысле равновероятны, т.е. вероятность выбора любой из них равна $\frac{1}{K}$. Но может быть ситуация, когда некоторые из них имеют больший приоритет, чем другие. Обозначим вероятность выбора построения коалиции M_1 из коалиции M_2 через $p(M_2, M_1)$. Как только выбрана коалиция M_1 , то тем самым фиксировано число возможных добавлений к коалиции M_2 , и вероятность добавления новых участников более этого числа равна нулю.

Тогда вероятность перехода от коалиции M_2 к коалиции M_1 равна

$$P_{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}, i_1, i_2, \dots, i_{N_2}} = p_{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}} p_{i_1, i_2, \dots, i_{N_2}}. \quad (4.1)$$

Игру с характеристической функцией $v(M)$ можно представить в виде графа Γ_V , у которого вершины есть возможные коалиции, а вероятность перехода от одной вершины-коалиции M_2 к другой вершине-коалиции M_1 равна $p_{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}, i_1, i_2, \dots, i_{N_2}}$. Заметим, что в общем случае вероятность перехода от M_2 к M_1 не равна вероятности перехода от M_1 к M_2 , т.е. граф Γ_V – направленный.

Вероятность оставаться в коалиции M_2 равна дополнению до единицы суммы вероятностей переходов из M_2 в другие, отличные от M_2 , коалиции.

Граф Γ_V имеет матрицу вероятностей переходов P , элементами которой являются числа $p_{j_1, j_2, \dots, j_{N_1}, i_1, i_2, \dots, i_{N_2}}$.

Если рассмотрены все коалиции со всеми вероятностями переходов, то должна получиться цепь Маркова M , которую будем изучать и искать среднее значение выигрыша для бесконечной коалиционной игры V_N . Цепи Маркова удобно представлять в виде графов.

Обозначим граф, соответствующий построенной цепи Маркова M , через Γ_V , а вероятности перехода от i -ой вершины к j -ой – через p_{ij} . $i, j \in 1 : |\Gamma_V|$, где $|\Gamma_V|$ – число вершин графа Γ_V .

Пусть $p_{ij}^{(n)}$ – вероятность перехода от i -ой вершины к j -ой за n шагов. Вершины графа Γ_V соответствуют всем возможным коалициям игры.

Очевидно, что существует взаимно однозначное соответствие между игрой V_N , цепью Маркова M и ее графом Γ_V . Назовем Γ_V *графом коалиционной игры* V_N .

Рассмотрим сперва случай, когда цепь Маркова, соответствующая построенному графу Γ_V , состоит из одного класса смежности.

Тогда, если этот класс непериодический, а значит регулярный, или эргодический, то, как известно, у вероятностей перехода $p_{ij}^{(n)}$ есть предельные значения при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j, \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1.$$

Вероятности p_j называются предельными стационарными (эрго-дическими) вероятностями. В этом случае можно определить средний выигрыш в игре как сумму произведений вероятностей p_j попадания в вершину j на выигрыш, соответствующий этой вершине, т.е.

$$v_m = \sum_j^N p_j v(S_j), \quad (4.2)$$

где коалиция S_j соответствует вершине j .

Замечание 4.1. Известно [3], что если коэффициент эргодичности

$$k(n_0) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|$$

для некоторого n_0 положителен, то

$$\sup_{p_i^0} |p_{ij}(n) - p_j^*| \leq C e^{-Dn},$$

где p_i^0 - начальное распределение вероятностей,

$$D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1 - k(n_0)}.$$

Поэтому, исходя из приведенных формул, можно делать оценку времени и точности достижения среднего значения выигрыша игры.

Перейдем к рассмотрению случая, когда цепь Маркова M , соответствующая графу Γ_V , периодическая с периодом d . Тогда средний выигрыш для этого случая равен

$$v_m = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d v(S_j).$$

Здесь при нахождении среднего выигрыша v_m учитывается, что вероятность попадания в любую вершину периодической неразложимой цепи Маркова равна $\frac{1}{d}$.

Усложним ситуацию. Пусть цепь Маркова M игры V_N состоит из нескольких регулярных (эргодических) классов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, так что

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i.$$

Тогда средний выигрыш вычисляется по следующему алгоритму.

1. Вычисляем средний выигрыш для каждого класса Γ_i по указанной выше формуле

$$v_m(i) = \sum_{j=1}^{n_i} p_j(i)v(S_j(i)),$$

где $p_j(i)$ – предельные эргодические вероятности для класса Γ_i , $j \in 1 : n_i$, $S_j(i)$ – коалиции класса Γ_i , n_i – число вершин класса Γ_i .

2. Затем вычисляем средний выигрыш всей марковской цепи Γ_V .

$$v_m = \sum_{i=1}^k p_i v_m(i), \quad (4.3)$$

где p_i – вероятность попадания в класс Γ_i , которая вычисляется как суммарная предельная вероятность попадания в любую вершину класса Γ_i . Правило расчета вероятности p_i следующее:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_j^{(i)}, \quad (4.4)$$

где $p^{(0)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_{n_1}^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_{n_2}^{(2)}, \dots, p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_{n_k}^{(k)})$ – начальное распределение вероятности. В (4.4) суммирование идет для n_i элементов i -ого класса.

Выбор формулы (4.3) объясняется тем, что эргодические классы Γ_i , $i \in 1 : k$, в данном случае изолированные (см. рис. 2) и конечный выигрыш будет определяться тем, в каком классе мы находимся. Есть, как бы, несколько вариантов выбора с различными вероятностями и различными значениями функции выигрыша. После такой трактовки далее применяем известную формулу для математического ожидания.

Если цепь Маркова Γ состоит из k регулярных (эргодических) классов и l периодических классов, то средний выигрыш бесконечной коалиционной игры будет вычисляться следующим образом.

1. Вычисляем средний выигрыш для каждого из $k + l$ классов по формулам, данным выше. Обозначим эти выигрыши через v_{m_i} , $i \in 1 : (k + l)$.

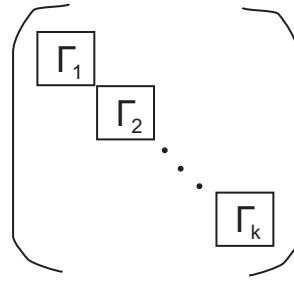


Рисунок 2.

2. Вычисляем средний выигрыш всей игры

$$v_m = \sum_{i=1}^{k+l} p_i v_{m_i}, \quad (4.5)$$

где p_i – вероятность попадания в класс Γ_i , вычисляемая по формуле (4.4).

Рассмотрим теперь общий случай марковской цепи. Известно, что произвольная цепь Маркова после перенумерации строк и столбцов может быть представлена в виде [1], изображенном на рис. 3, где пустые, незаполненные элементы соответствуют нулевым элементам. C_0 – есть класс несущественных состояний, а $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ – непересекающиеся классы существенных сообщающихся состояний.

Пусть известно начальное распределение вероятности по состояниям, которое есть вектор-строка $(p_{0,1}, \dots, p_{0,n_0}, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,n_1}, \dots, p_{k,1}, \dots, p_{k,n_k})$. Здесь k - число изолированных классов с матрицами Γ_i , $i \in 1 : k$, n_0, n_1, \dots, n_k – число столбцов матриц $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ соответственно, стоящих в первой строке матрицы переходных вероятностей марковской цепи M (см. рис. 3).

Введем следующие обозначения для вектор-строк $p_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,n_0})$, $p_1 = (p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,n_1})$, $\dots, p_k = (p_{k,1}, p_{k,2}, \dots, p_{k,n_k})$. Вычислим вероятность попадания в первый класс Γ_1 . Нетрудно видеть, что эта вероятность равна

$$\bar{p}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} b_{1j},$$

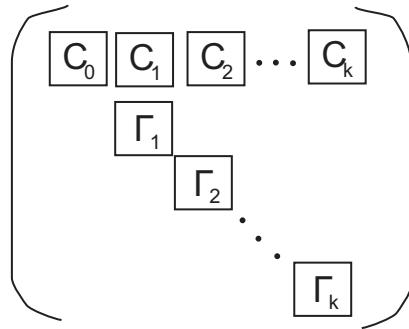


Рисунок 3.

где b_{1j} – элементы вектора-строки b_1 , вычисляемой по формуле

$$b_1 = p_1 \Gamma_1 + p_0 C_1.$$

Аналогично вычисляются вероятности $\bar{p}_i, i \in 1 : k$, попадания во второй и последующие классы.

Тогда для вычисления среднего выигрыша бесконечной коалиционной игры V_N с графом Γ_V , представленном на рис. 3, надо повторить все описанные выше операции и заменить формулу (4.5) на формулу

$$v_m = \sum_{i=1}^{k+l} \bar{p}_i v_{m_i},$$

где $v_{m_i}, i \in 1 : k$ – средние выигрыши для каждого из k классов.

Замечание 4.2. Можно рассматривать ситуацию, когда вероятности перехода i -ого участника в j -ую коалицию M_j зависит от момента времени $t = n$, т.е. $p_i(M_j) = p_{i,j}(n)$. Все приведенные выше формулы нетрудно переписать с учетом этого факта.

Замечание 4.3. Приведенная оценка средней величины выигрыша в игре может быть применена для оценки некоторых реальных политических ситуаций. При этом в качестве игроков могут выступать страны, военные блоки, рынки и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. *Теория вероятностей*. М: Наука. 1976.
2. Губко М.Б., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организованными системами*. Изд. 2. М.: Наука. 2005.
3. Розанов Ю.А. *Случайные процессы. Краткий курс*. М: Наука. 1971.

THE AVERAGE VALUE OF PROFIT IN INFINITE COALITION GAMES

I.M. Prudnikov, Saint-Peterburg State University, Saint-Peterburg,
Cand. Sc. (pim_10@hotmail.com).

Abstract: The infinite coalition games are considered in the article. The risk and conflicts of these games are introduced. The algorithm is suggested how to construct games without conflicts. It is shown how to confront any coalition game with a Markov's chain. The study of these games can be reduced to the study of the Markov's chains. The average value of profit and an algorithm of it's calculation is suggested.

Keywords: coalition games, infinite games, risks and conflicts in coalition games, superadditive hulls, the mean value of profit, Markov's chains.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 1
Выпуск 4

*Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Оригинал-макет A. H. Ремтиева

Сдано в печать 29.12.09.
Формат 70x108¹/₁₆. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,1. Усл. печ. л. 10,8. Тираж 300 экз.
Изд. № 93. Заказ 857.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТОМ 1, ВЫПУСК 4, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретико-игровой анализ одноэтапных и двухэтапных аукционов однородного товара	3
<i>А.А. Васин, А.Г. Гусев, А.А. Шарикова</i>	
Производящие функции для процедуры выбора комитетов	31
<i>А.М. Калугина</i>	
Стратегии параллельного сближения в игре простого преследования на сфере. Геодезическое сближение.	41
<i>А.М. Ковшов</i>	
Теоретико-игровой подход к оценке точности тестирования	63
<i>М.М. Луценко</i>	
Дискретная арбитражная процедура с неравномерным распределением вероятностей	78
<i>А.Э. Менчер</i>	
Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети	93
<i>Е.М. Парилина</i>	
Математическое ожидание выигрыша в бесконечных коалиционных играх	110
<i>И.М. Прудников</i>	