Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 42-65

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ

Николай А. Зенкевич*
Андрей В. Зятчин*
Высшая школа менеджмента СПбГУ
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 1-3
e-mail: zenkevich@gsom.pu.ru, zyatchin@gsom.pu.ru

В статье предложена техника нахождения ситуации сильного равновесия в дифференциальной игре с помощью специальной скаляризации векторного критерия. Сформулированы достаточные условия существования сильного равновесия. Приведен пример несимметричной игры двух лиц, в котором ситуация сильного равновесия найдена в явном виде.

Ключевые слова: дифференциальная игра, равновесие по Нэшу, сильное равновесие.

1. Введение

В настоящее время известно несколько концепций сильного равновесия [3, 7, 9]. При этом в каждом случае под сильным равновесием понимается ситуация, в определенном смысле устойчивая относительно коалиционных отклонений игроков. Этот принцип оптимальности исследован в широких классах игр в нормальной и развернутой

---

* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00301-а)

формах (см. например [3, 4, 9]). Основным недостатком концепции сильного равновесия является то, что оно существует достаточно редко.

При исследовании дифференциальных игр часто используется принцип оптимальности Беллмана [1, 2, 5, 6, 9]. В этом случае задача определения оптимального значения интегрального функционала сводится к решению экстремального уравнения в частных производных. С помощью такой техники в ряде случаев удается найти равновесие по Нэшу и парето-оптимальное решение [2, 10]. При этом в исследуемой модели необходимо дополнительно учитывать условия существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику игры, гладкость функции Беллмана, а также функций мгновенного и терминального выигрышей игроков.

В данной работе предлагается следующая техника нахождения сильного равновесия в дифференциальной игре. Для каждой коалиции с помощью специальной свертки осуществляется переход к экстремальной задаче со скалярным критерием, зависящим от набора параметров. Формулируются достаточные условия существования сильного равновесия в дифференциальной игре в виде условий на параметры свертки. Использование теоремы продемонстрировано на примере линейно-квадратичной несимметричной игры двух лиц. Для этой игры сильное равновесие удалось построить в явном виде на основе решения уравнения в частных производных первого порядка специального вида.

2. Определение сильного равновесия

Определим дифференциальную игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$ из начального состояния x_0 и конечной продолжительности $T-t_0$. Здесь $t_0 \geq 0$, $T \geq t_0$ — моменты начала и окончания игры соответственно [2, 5, 8]. Множество игроков в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ обозначим через $N = \{1, \ldots, i, \ldots n\}$.

Предположим, что динамика изменения состояния игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right], \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R$, x_0 — известное начальное состояние игры, $u_i(t)$ — управление игрока $i \in N$ в момент времени t. Здесь $u_i(t) \in U_i \subset R$, $\prod\limits_{i \in N} U_i =$

$U_N \subset R^n$. Предположим, что функция $f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right]$ — непрерывно дифференцируемая на $[t_0, T] \times R \times U_N$.

Для каждого игрока $i \in N$ рассмотрим интегральный функционал с терминальным выигрышем вида:

$$J_i(x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots u_n(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t)\right] dt + q_i\left[x(T)\right],$$

где $u_i(\cdot)$ представляет собой непрерывную функцию $u_i(t)$, $t \in [t_0, T]$. Будем предполагать, что функции $g_i\left[t, x(t), u_1(t), \ldots u_n(t)\right]$ и $q_i\left[x(T)\right]$ являются дифференцируемыми в области определения. Предполагается, что игрок $i \in N$ стремится максимизировать значение функционала $J_i(x_0, u_1(\cdot), \ldots, u_i(\cdot), \ldots u_n(\cdot))$ по $u_i(\cdot)$.

Пусть $S \subseteq N$ — произвольная коалиция в игре $\Gamma(x_0)$. Обозначим через $u_S(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i \in S}$ стратегию коалиции S. Стратегию дополнительной коалиции $N \backslash S$ будем обозначать через $u_{N \backslash S}(\cdot)$ или $u_{-S}(\cdot)$.

Определение 2.1. *Ситуация* $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ *называется сильным равновесием в широком смысле в игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$, *если* $\forall M \subseteq N$, $\forall u_M(\cdot)$ *не выполнено:*

$\forall i \in M$

$$J_i(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_i\left[x^{[M]}(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_i\left[x^*(T)\right] = J_i(x_0, u_M^*(t), u_{-M}^*(t))$$

и $\exists i_0 \in M$, *такой что:*

$$J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_{i_0}\left[x^{[M]}(T)\right] >$$

$$> \int\limits_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_{i_0}\left[x^*(T)\right] = J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)),$$

где

$$\dot{x}^{[M]}(t) = f\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u^*_{-M}(t)\right], \quad x^{[M]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u^*_1(t), \ldots, u^*_n(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 2.1 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$.

Рассмотрим векторы

$$\lambda^{[n,i]} = \left(\lambda^{[n,i]}_1, \ldots, \lambda^{[n,i]}_i, \ldots, \lambda^{[n,i]}_n\right) \in E^n,$$

где $\lambda^{[n,i]}_j = 0$ при $j \neq i$ и $\lambda^{[n,i]}_i = 1$.

Лемма 2.1. *Для того чтобы ситуация*

$$u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \ldots, u^*_n(\cdot)) \in SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right),$$

т.е. была сильным равновесием в смысле определения 2.1 достаточно, чтобы для любой коалиций $S \subseteq N$ существовал такой номер $i^S_0 \in S$, что для любой стратегии $u_S(\cdot) \neq u^*_S(\cdot)$ этой коалиции выполнялось неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^S_0]}_i J_i(x_0, u^*_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^S_0]}_i J_i(x_0, u_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)). \quad (2.2)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. условия леммы выполнены, но ситуация $u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \ldots, u^*_n(\cdot))$ не является сильным равновесием в смысле $SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$. Тогда существует коалиция M и стратегия $u_M(\cdot)$, для которых выполнено:

$$\begin{cases} J_i(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) \geq J_i(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)), \quad \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M: \quad J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)). \end{cases} \quad (2.3)$$

Согласно условиям леммы, неравенство (2.2) выполнено для любой коалиции, в том числе и для коалиции M. Следовательно, существует такой номер $i^M_0 \in M$, для которого справедливо неравенство для $\forall u_M(\cdot) \neq u^*_M(\cdot)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^M_0]}_i J_i(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^M_0]}_i J_i(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)). \quad (2.4)$$

По определению вектора $\lambda^{[n,i_0^M]}$ из неравенства (2.4) следует:

$$J_{i_0^M}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0^M}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \qquad (2.5)$$

Поскольку $i_0^M \in M$, то неравенства (2.3) и (2.5) несовместны. Следовательно, предположение неверно, что доказывает утверждение леммы. □

Замечание 2.1. Число игроков n — конечное. Поэтому существование номера i_0^S из теоремы 2.1 можно установить простым перебором векторов $\lambda^{[n,i]}$, $i = 1, 2, \ldots n$ для каждой коалиции $S \subseteq N$. При этом строгое неравенство будет иметь место, если удастся показать, что набор стратегий $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ является единственным, доставляющим максимум функционалу $J_{i_0^S}(x_0, u_N^*(\cdot))$, $i_0^S \in S$.

Введем следующие обозначения:

$$g_S\left[t, x(t), u_N(t)\right] = \sum_{i\in S} g_i\left[t, x(t), u_N(t)\right],$$

$$q_S\left[x(t)\right] = \sum_{i\in S} q_i\left[x(t)\right].$$

Используя концепцию решения, предложенную Л.А. Петросяном [9], сформулируем другое определение сильного равновесия для дифференциальной игры.

Определение 2.2. *Ситуацию $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ будем называть сильным равновесием в узком смысле в дифференциальной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$, если следующие неравенства выполнены для всех коалиций $S \subseteq N$ и стратегий $u_S(\cdot)$:*

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u_1^*(t), \ldots, u_i^*(t), \ldots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u_1^*(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)),$$

где $S = \{i\}$, $i \in N$;

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_i^*(t), \dots, u_j^*(t), \dots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u_1^*(t), \dots, u_i(t), \dots, u_j(t), \dots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)),$$

где $S = \{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j \in N$;

$$\dots$$

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S\left[x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)\right],$$

где $S = N$,

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_n^*(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Далее для неравенств из определения 2.2 будем использовать более короткую запись:

$$J_S\left[x_0, u^*(\cdot)\right] \geq J_S\left[x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)\right],$$

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u^*(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\forall\ S \subset N, \quad S \neq \emptyset, \quad \forall u_S(\cdot).$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 2.2 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SPE\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$.

Лемма 2.2.

$$SPE\left(\Gamma(x_0, T-t_0)\right) \subset SME\left(\Gamma(x_0, T-t_0)\right).$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ является сильным равновесием в смысле определения 2.2, но эта ситуация не является сильным равновесием в смысле определения 2.1. Тогда существует коалиция $M \subseteq N$ и такая стратегия $u_M^{**}(\cdot)$ коалиции M, для которых выполняется:

$$\begin{cases} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) \geq J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)), \quad \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M: \quad J_{i_0}(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \end{cases}$$

Рассмотрим сумму выигрышей игроков коалиции M:

$$\sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) < \sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)).$$

Поэтому ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ не является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ в смысле определения 2.2. Противоречие и доказывает справедливость утверждения леммы. □

Докажем следующую теорему, используя технику динамического программирования.

Теорема 2.1. *Если в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, существует номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемое на $[0, T] \times R$ решение системы экстремальных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\begin{aligned} &V_t^{[S]}(t,x) + \max_{u_S} \Big\{ f\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i \left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \Big\} = \\ &= V_t^{[S]}(t,x) + f\left[t, x, \phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i \left[t, x, \phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)\right] = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} q_i \left[x^{[S]}(T)\right],$$

где для всех $S \subseteq N$ максимум в левой части (2.6) достигается на единственном наборе

$$\phi_S^*(t,x) = \{\phi_i^*(t,x) \in U_i,\ i \in S\},$$

$$\phi_N^*(t,x) = (\phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)),$$

где $\phi_i^*(t,x) \in U_i$, $i \in N$ — непрерывные на $[t_0, T] \times R$ функции, тогда набор $\{u_i^*(t) = \phi_i^*(t,x) \in U_i,\ i \in N,\ t \in [t_0, T]\}$ является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Доказательство. а) Предположим, что условия теоремы 2.1 выполнены для максимальной коалиции N. Тогда существует номер $i_0^N \in N$ и единственный вектор $\phi_N^*(t,x)$ такие, что:

$$\phi_N^*(t,x) = \arg\max_{u_N} \left\{ f\left[t, x, u_N(t)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, u_N(t)\right] \right\}.$$

Предположим, что коалиция N выбрала отличную от $\phi_N^*(t,x)$ произвольную стратегию $u_N(\cdot) \in U_N$, реализующую траекторию $x(t)$. Поскольку вектор $\phi_N^*(t,x)$ — единственный, имеет место строгое неравенство:

$$V_t^{[N]}(t,x) + f\left[t, x, u_N(t)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, u_N(t)\right] < 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u_N(t)\right], \quad x(t_0) = x_0.$$

При этом:

$$V_t^{[N]}(t,x) + f\left[t, x, \phi_N^*(t,x)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, \phi_N^*(t,x)\right] = 0$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*, \phi_N^*(t, x^*)\right], \quad x^*(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

Рассмотрим интегралы выражений (2.7)-(2.8):

$$\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x(T))-V^{[N]}(t_0,x(t_0))<0$$

$$\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x^*(T))-V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))=0,$$

следовательно,

$$\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x^*(T))-V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))>$$

$$>\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x(T))-V^{[N]}(t_0,x(t_0)).$$

Поскольку

$$V^{[N]}(T,x^*(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}q_i\left[x^*(T)\right],$$

$$V^{[N]}(T,x(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}q_i\left[x(T)\right],$$

$$V^{[N]}(t_0,x(t_0))=V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))=V^{[N]}(t_0,x_0),$$

имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^N]}\left\{\int_{t_0}^{T}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]dt+q_i\left[x^*(T)\right]\right\}\right)>$$

$$>\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^N]}\left\{\int_{t_0}^{T}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]dt+q_i\left[x(T)\right]\right\}\right).$$

Окончательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}J_i\left[x_0,u^*(\cdot)\right]>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}J_i\left[x_0,u_N(\cdot)\right] \qquad (2.9)$$

б) Предположим, что условия теоремы 2.1 выполнены для произвольной коалиции $S \subset N$, $S \neq N$. Тогда существует номер $i_0^S \in S$ и единственный вектор $\phi_S^*(t,x)$ такие, что:

$$\phi_S^*(t,x) = \arg\max_{u_S} \Big\{ f\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \Bigg\},$$

где вид функций, входящих в стратегию $\phi_{-S}^*(t,x)$, установлен в п. а).

Предположим, что коалиция S выбрала отличную от $\phi_S^*(t,x)$ произвольную стратегию $u_S(\cdot) \in U_S$, реализующую траекторию $x^{[S]}(t)$:

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0.$$

Поскольку вектор $\phi_S^*(t,x)$ — единственный, то имеет место строгое неравенство:

$$V_t^{[S]}(t, x^{[S]}) + f\left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t, x^{[S]}) + \tag{2.10}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] < 0$$

При этом:

$$V_t^{[S]}(t, x^*) + f\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t, x^*) + \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] = 0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right], \quad x^*(t_0) = x_0$$

Рассмотрим интегралы выражений (2.10)-(2.11):

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+ V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) - V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)) < 0,$$

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+V^{[S]}(T,x^*(T))-V^{[S]}(t_0,x^*(t_0))=0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}g_i\left[t,x^*,\phi_N^*(t,x)\right]\right)dt+$$

$$+V^{[S]}(T,x^*(T))-V^{[S]}(t_0,x^*(t_0))>$$

$$>\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}g_i\left[t,x^{[S]},u_S(t),\phi_{-S}^*(t,x)\right]\right)dt+$$

$$+V^{[S]}(T,x^{[S]}(T))-V^{[S]}(t_0,x^{[S]}(t_0)).$$

Поскольку

$$V^{[S]}(T,x^*(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}q_i\left[x^*(T)\right],$$

$$V^{[S]}(T,x^{[S]}(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}q_i\left[x^{[S]}(T)\right],$$

$$V^{[S]}(t_0,x^{[S]}(t_0))=V^{[S]}(t_0,x^*(t_0))=V^{[S]}(t_0,x_0),$$

имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^S]}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}g_i\left[t,x^*,\phi_N^*(t,x)\right]dt+q_i\left[x^*(T)\right]\right\}\right)>$$

$$>\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^S]}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}g_i\left[t,x^{[S]},u_S(t),\phi_{-S}^*(t,x)\right]dt+q_i\left[x^{[S]}(T)\right]\right\}\right).$$

Окончательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}J_i\left[x_0,u^*(\cdot)\right]>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}J_i\left[x_0,u_S(\cdot),\phi_{-S}^*(t,x)\right]. \qquad (2.12)$$

Из неравенств (2.9) и (2.12) следует, что для любой коалиций $S\subseteq N$, $S\neq\emptyset$, существует номер $i_0^S\in S$ такой, что для любой стратегии $u_S(\cdot)\neq u_S^*(\cdot)$ коалиции S выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}J_i(x_0,u_S^*(\cdot),u_{-S}^*(\cdot))>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}J_i(x_0,u_S(\cdot),u_{-S}^*(\cdot)).$$

Следовательно, по лемме 2.1 ситуация $u_N^*(\cdot)$ является сильным равновесием из $SPE\,(\Gamma(x_0, T - t_0))$. □

3. Пример

Проиллюстрируем применение теоремы на примере, предварительно исследовав свойства уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \eta_1 \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^2 + \eta_2 \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} x + a e^{bt} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + r(t) = 0 \quad (3.1)$$

$$V(T,x) = \eta_3 x,$$

где a, b, η_1, η_2, η_3 — заданные параметры, $b \neq \eta_2$, $r(t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[t_0, T]$.

Лемма 3.1. *Уравнение (3.1) имеет на отрезке $[t_0, T]$ единственное решение $V(t,x)$, причем $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ не зависит от a, b, η_1, $r(t)$ и имеет вид:*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = \eta_3 e^{\eta_2 (T-t)}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = p, \qquad \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = q. \quad (3.2)$$

Запишем уравнение (3.1) с учетом (3.2) в виде:

$$p + \eta_1 q^2 + \eta_2 x q + a e^{bt} q + r(t) = F(t,x,p,q) = 0, \quad (3.3)$$

где

$$F_p^2 + F_q^2 = 1 + (2\eta_1 q + \eta_2 x + a e^{bt})^2 \neq 0.$$

Зададим граничное условие $V(T,x) = \eta_3 x$ в параметрическом виде:

$$t_0(\tau) = T, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad V_0(\tau) = \eta_3 \tau, \quad p_0(\tau), \quad q_0(\tau). \quad (3.4)$$

В результате определена задача Коши (3.3)-(3.4), где $p_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$ связаны условиями:

$$\begin{cases} F[t_0(\tau), x_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)] = 0, \\ \frac{dV_0}{d\tau} = p_0 \frac{dt_0}{d\tau} + q_0 \frac{dx_0}{d\tau}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из (3.5) имеем:

$$\begin{cases} p_0(\tau) + \eta_1 q_0^2(\tau) + \eta_2 \tau q_0(\tau) + ae^{bT} q_0(\tau) + r(T) = 0, \\ \eta_3 = q_0(\tau), \end{cases}$$

следовательно, $q_0(\tau) = \eta_3$, $p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau$.

Задача с граничными условиями (3.3)-(3.5) имеет единственное решение, если из данных граничных условий следует:

$$F_p \frac{dx}{d\tau} - F_q \frac{dt}{d\tau} \neq 0. \tag{3.6}$$

Проверим выполнение условий (3.6):

$$1 - \left(2\eta_1 q_0 + \eta_2 \tau + ae^{bT}\right) \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Условие (3.6) выполнено, следовательно, задача (3.3)-(3.5) имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь систему характеристических уравнений:

$$\frac{dt}{dt} = F_p = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} = F_q = 2\eta_1 q + \eta_2 x + ae^{bt} \tag{3.7}$$

$$\frac{dV}{dt} = pF_p + qF_q = p + 2\eta_1 q^2 + \eta_2 qx + ae^{bt} q \tag{3.8}$$

$$\frac{dp}{dt} = -(pF_V + F_t) = -abe^{bt} q - r'(t) \tag{3.9}$$

$$\frac{dq}{dt} = -(qF_V + F_x) = -\eta_2 q$$

с условиями:

$$t_0(\tau) = T, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad V_0(\tau) = \eta_3 \tau,$$

$$p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau, \quad q_0(\tau) = \eta_3.$$

Тогда,

$$q = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \eta_2 x + 2\eta_1\eta_3 e^{\eta_2(T-t)} + ae^{bt}, \quad x_0(\tau) = \tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$x = e^{-\eta_2(T-t)}\tau + \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)}\right) + \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt} - e^{bT}e^{-\eta_2(T-t)}\right). \tag{3.11}$$

Подставив (3.10) в (3.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = -abe^{bt}\eta_3 e^{\eta_2(T-t)} - r'(t) = -r'(t) - ab\eta_3 e^{bt}e^{\eta_2(T-t)},$$

$$p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$p = -r(t) - \frac{a\eta_3}{b-\eta_2}\left(be^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - \eta_2 e^{bT}\right) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.10), (3.11), (3.12) в (3.8) и приведя подобные члены, имеем следующее уравнение:

$$\frac{dV}{dt} = -r(t) + \eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-t)}, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau.$$

Откуда,

$$dV = \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-t)} - r(t)\right)dt, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau,$$

$$V = \eta_3\tau + \int\limits_T^t \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi)\right)d\xi.$$

Поскольку $t \in [t_0, T]$, имеем:

$$V = \eta_3\tau - \int\limits_t^T \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi)\right)d\xi,$$

$$V = \eta_3\tau - \left(-\frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}e^{2\eta_2(T-\xi)}\Bigg|_t^T\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi,$$

$$V = \eta_3\tau - \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi. \tag{3.13}$$

Рассмотрим систему, составленную из уравнений (3.11) и (3.13):

$$\begin{cases} x = e^{-\eta_2(T-t)}\tau + \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)}\right) + \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt} - e^{bT}e^{-\eta_2(T-t)}\right), \\ V = \eta_3\tau - \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi. \end{cases}$$

Исключим из системы параметр τ. Для этого выразим τ из первого уравнения:

$$\tau = e^{\eta_2(T-t)}x - \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(1 - e^{2\eta_2(T-t)}\right) - \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT}\right).$$

Полученное выражение подставим во второе уравнение системы, получим

$$V = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}x + \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) - \tag{3.14}$$

$$-\frac{a\eta_3}{b-\eta_2}\left(e^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT}\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi.$$

Подстановкой (3.14) в (3.1) непосредственно проверяем, что (3.1) превращается в тождество.

Из (3.14) следует, что

$$V_x = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}.$$

□

Пример 3.1. Рассмотрим игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$, где $N = \{1,2\}$, $n = 2$, динамика (3.1) имеет вид:

$$\dot{x}(t) = ax + b_1u_1 + b_2u_2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.15}$$

Пусть целью игрока 1 является максимизация функционала:

$$J_{\{1\}}\left[x_0, u_1, u_2\right] = \int\limits_{t_0}^T \left[-u_1^2 - u_2^2 + u_1x + u_2x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t)\right]dt + x(T), \tag{3.16}$$

а целью игрока 2 — максимизация функционала:

$$J_{\{2\}}\left[x_0, u_1, u_2\right] = \int\limits_{t_0}^T \left[-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1x + u_2x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t)\right]dt + x(T), \tag{3.17}$$

где $r^{[1]}(t)$, $r^{[2]}(t)$ — непрерывные функции.

Покажем, что в игре (3.16)-(3.17) существует сильное равновесие в смысле определения 2.1. Согласно теореме 2.1, для этого достаточно для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, найти номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемую функцию $V^{[S]}(t,x)$ такие, чтобы максимальное значение левой части уравнения (2.6) достигалось на единственном наборе $\phi_N^*(t,x)$.

Рассмотрим коалицию $S = \{1,2\} = N$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^N]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}, \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right).$$

Уравнение (2.6) принимает вид:

$$\begin{gathered}
V_t^{[N]}(t,x) + \max_{u_1 u_2} \Big\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2)\, V_x^{[N]}(t,x) + \\
+ \lambda_1^{[n,i_0^N]} \left(-u_1^2 - u_2^2 + u_1 x + u_2 x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right) + \\
+ \lambda_2^{[n,i_0^N]} \left(-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 x + u_2 x - \frac{3}{4} x^2 + r^{[2]}(t) \right) \Big\} = 0, \\
V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} x^{[N]}(T),
\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}
V_t^{[N]}(t,x) + \max_{u_1 u_2} \Big\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2)\, V_x^{[N]}(t,x) - \\
- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) u_1^2 - \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) u_2^2 + \\
+ \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x u_1 + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x u_2 - \\
- \left(\frac{x^2}{2} \lambda_1^{[n,i_0^N]} + \frac{3x^2}{4} \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) + \left(r^{[1]}(t) \lambda_1^{[n,i_0^N]} + r^{[2]}(t) \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) \Big\} = 0, \\
V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x^{[N]}(T).
\end{gathered} \tag{3.18}$$

Определим максимум функции в фигурных скобках. Значения управлений, на которых достигается максимум в левой части уравнения (3.18), получаем из условий первого порядка:

$$b_1 V_x^{[N]}(t,x) - 2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) \phi_1^*(t,x) + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x = 0,$$

$$b_2 V_x^{[N]}(t,x) - 2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\phi_2^*(t,x) + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x = 0.$$

Откуда,

$$\begin{array}{l} \phi_1^*(t,x) = \frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \\ \phi_2^*(t,x) = \frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \end{array}. \tag{3.19}$$

Условия второго порядка зависят только от параметров свертки:

$$-2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) < 0$$

и

$$\left| \begin{array}{cc} -2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) & 0 \\ 0 & -2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) \end{array} \right| = \tag{3.20}$$

$$= 4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) > 0.$$

Следовательно, при выполнении условий (3.20), набор функций (3.19) будет единственным, на котором достигается максимум левой части уравнения (3.18).

Подставляя (3.19) в (3.18), имеем:

$$V_t^{[N]}(t,x) + \left\{ax + \frac{b_1 x}{2} + \frac{b_2 x}{2}\right\} V_x^{[N]}(t,x) +$$

$$+ \left\{ \frac{b_1^2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} + \frac{b_2^2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} \right\} \left(V_x^{[N]}(t,x)\right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) \left(\frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) \left(\frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \right)^2 +$$

$$+ \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) \left(\frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \right) x +$$

$$+\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}V_x^{[N]}(t,x)+\frac{x}{2}\right)x-$$

$$-\left(\frac{x^2}{2}\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\frac{3x^2}{4}\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)+ \tag{3.21}$$

$$+\left(r^{[1]}(t)\lambda_1^{[n,i_0^N]}+r^{[2]}(t)\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\Big\}=0,$$

$$V^{[N]}(T,x^{[N]}(T))=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x^{[N]}(T).$$

Раскрывая скобки в (3.21) и упрощая, имеем:

$$V_t^{[N]}(t,x)+\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}xV_x^{[N]}(t,x)+$$

$$+\left\{\frac{b_1^2}{4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}\right\}\left(V_x^{[N]}(t,x)\right)^2+ \tag{3.22}$$

$$+\left(r^{[1]}(t)\lambda_1^{[n,i_0^N]}+r^{[2]}(t)\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\Big\}=0,$$

$$V^{[N]}(T,x^{[N]}(T))=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x^{[N]}(T).$$

По лемме 3.1 уравнение (3.22) имеет единственное решение, причем

$$V_x^{[N]}(t,x)=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}. \tag{3.23}$$

С учетом (3.23) из (3.19) следует, что

$$\begin{array}{l}\phi_1^*(t,x)=\frac{b_1\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}\\ \phi_2^*(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}\end{array}. \tag{3.24}$$

При этом динамика (3.15) принимает вид:

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0. \tag{3.25}$$

Рассмотрим коалицию $S=\{1\}$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^S]}=\left(\lambda_1^{[n,i_0^S]},\lambda_2^{[n,i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 2 выбрал стратегию $\phi_2^*(t,x)$. Уравнение (2.6) принимает вид:

$$\begin{gathered}
V_t^{[S]}(t,x)+\max_{u_1}\left\{\left[ax+b_1u_1+\frac{b_2^2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{b_2x}{2}\right]V_x^{[S]}(t,x)+\right.\\
+\lambda_1^{[n,i_0^S]}\left(-u_1^2-\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)^2+\right. \qquad (3.26)\\
\left.+u_1x+\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)x-\frac{x^2}{2}+r^{[1]}(t)\right)+\\
+\lambda_2^{[n,i_0^S]}\left(-2u_1^2-\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)^2+\right.\\
\left.\left.+2u_1x+\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)x-\frac{3}{4}x^2+r^{[2]}(t)\right)\right\}=0\\
V^{[S]}(T,x(T))=\left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}+\lambda_2^{[n,i_0^S]}\right)x(T).
\end{gathered}$$

Из определения вектора $\lambda^{[n,i_0^S]}$ следует, что $\lambda_2^{[n,i_0^S]}=0$. Поэтому уравнение (3.26) принимает вид:

$$\begin{gathered}
V_t^{[S]}(t,x)+\max_{u_1}\left\{\left[ax+b_1u_1+\frac{b_2^2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{b_2x}{2}\right]V_x^{[S]}(t,x)+\right.\\
+\lambda_1^{[n,i_0^S]}\left(-u_1^2-\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)^2+\right. \qquad (3.27)\\
\left.\left.+\ u_1x+\left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)}+\frac{x}{2}\right)x-\frac{x^2}{2}+r^{[1]}(t)\right)\right\}=0\\
V^{[S]}(T,x(T))=\lambda_1^{[n,i_0^S]}x(T)
\end{gathered}$$

Условие первого порядка для функции в фигурных скобках принимает вид:

$$b_1V_x^{[S]}(t,x)-2\lambda_1^{[n,i_0^S]}\phi_1^{**}(t,x)+\lambda_1^{[n,i_0^S]}x=0.$$

Откуда,

$$\phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2\lambda_1^{[n,i_0^S]}} V_x^{[S]}(t,x) + \frac{x}{2}. \tag{3.28}$$

Условие второго порядка зависит только от параметров свертки:

$$-2\lambda_1^{[n,i_0^S]} < 0, \tag{3.29}$$

поэтому при выполнении условия (3.29) стратегия (3.28) будет единственной, на которой достигается максимум левой части уравнения (3.27).

Подставив (3.28) в (3.27) и упростив, получим:

$$V_t^{[S]}(t,x) + \frac{b_1^2}{4\lambda_1^{[n,i_0^S]}} \left(V_x^{[S]}(t,x)\right)^2 + \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+ \frac{b_2^2}{2} e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} V_x^{[S]}(t,x) - \tag{3.30}$$

$$-\frac{\lambda_1^{[n,i_0^S]} b_2^2}{2} e^{2\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \lambda_1^{[n,i_0^S]} r^{[1]}(t) = 0,$$

$$V^{[S]}(T, x(T)) = \lambda_1^{[n,i_0^S]} x(T).$$

По лемме 3.1 уравнение (3.30) имеет единственное решение, причем

$$V_x^{[S]}(t,x) = \lambda_1^{[n,i_0^S]} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}. \tag{3.31}$$

С учетом (3.31) из (3.28) следует:

$$\phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}. \tag{3.32}$$

При этом динамика (3.15) принимает следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}, \tag{3.33}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{2\}$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 1 выбрал стратегию $\phi_1^*(t,x)$. Повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении случая $S=\{1\}$, имеем:

$$\phi_2^{**}(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}. \tag{3.34}$$

При этом динамика (3.15) принимает вид:

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+ \tag{3.35}$$

$$+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

В результате получаем:

Для $S=N$, согласно (3.24), (3.25):

$$\phi_1^*(t,x)=\frac{b_1\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

Для $S=\{1\}$, согласно (3.32), (3.33):

$$\phi_1^{**}(t,x)=\frac{b_1}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}$$

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left(\frac{b_1^2}{2}+\frac{b_2^2}{2}\right)e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

Для $S=\{2\}$, согласно (3.34), (3.35):

$$\phi_2^{**}(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left\{ \frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

В игре возможны три коалиции ($n = 2$). Поэтому возможны $2^3 = 8$ векторов $\lambda^{[n,i_0^N]}$. Перебирая все варианты, находим следующий ответ.

Для $S = N$ значение $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $\lambda^{[n,i_0^{\{1,2\}}]} = (1,0)$, для $S = \{1\}$ значение $i_0^{\{1\}} = 1$, $\lambda^{[n,i_0^{\{1\}}]} = (1,0)$, для $S = \{2\}$ значение $i_0^{\{2\}} = 2$, $\lambda^{[n,i_0^{\{2\}}]} = (0,1)$. Тогда:

а) для всех экстремальных уравнений выполняются условия второго порядка,

б)

$$\phi_1^*(t,x) = \phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t,x) = \phi_2^{**}(t,x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

в) выполняются условия существования и единственности уравнений (3.25), (3.33), (3.35). При этом указанные уравнения принимают одинаковый вид:

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}, \tag{3.36}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Следовательно, для каждой коалиции $S \subseteq N$ нашлись такие номера игроков $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $i_0^{\{1\}} = 1$, $i_0^{\{2\}} = 2$, что максимальное значение левой части уравнений (3.18), (3.27), а также экстремального уравнения, составленного для случая $S = \{2\}$, достигается на единственном наборе непрерывных функций:

$$\phi_N^*(t,x) = (\phi_1^*(t,x), \phi_2^*(t,x)) =$$

$$= \left(\frac{b_1}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}, \frac{b_2}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}\right).$$

Тогда по теореме 2.1 набор $\phi_N^*(t,x) \in SME$ в игре (3.15)-(3.17), что и требовалось найти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.* М.: Советское радио, 1980.

2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте.* Санкт-Петербург: Высшая школа менеджмента, 2009.

3. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* / Пер. с франц. О.Р. Меньшиковой, И.С. Меньшикова. Москва: Мир, 1985.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет" , 1998.

5. Флеминг У., Ришел Р. *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.* / пер. с англ. М. Г. Бутрим, П. К. Катышева; под ред. А. Н. Ширяева. М.: Мир, 1978.

6. Чистяков С. В. *О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр* // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 1992. Сер.1: Математика, механика, астрономия. Вып. 1. С. 57–69.

7. Aumann R.J. *Acceptable Points in General Cooperative n - Person Games.* // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study 40, ed. by A.W. Tucker, Princeton NJ: Princeton University Press, 1959, p. 287-324.

8. Isaacs R. *Differential games.* New York, London, Sydney: John Wiley and sons Inc, 1965.

9. Petrosyan L.A., Grauer L.V. *Strong Nash Equilibrium in Multistage Games*// International Game Theory Review. 2002. V. 4. № 3. P. 255–264.

10. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games.* New York: Springer Verlag, 2006.

STRONG EQUILIBRIUM CONSTRUCTION IN A NONCOOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME

Nikolay A. Zenkevich, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, Cand. Sc., assoc. prof. (zenkevich@gsom.pu.ru).
Andrey V. Zyatchin, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, assistant (zyatchin@gsom.pu.ru).

Abstract: A strong equilibrium technique is proposed. It is based on a special scalarization of multicreteria problem. Sufficient conditions for strong equilibrium to exist are proved. The result is illustrated on asymmetric differential game with two players, where strong equilibrium is found in explicit form.

Keywords: differential game, Nash equilibrium, strong equilibrium.