Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 99-128

УДК 517.917
ББК 22.1

ДЕФЕКТ ФУНКЦИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Владимир Н. Ушаков
Александр А. Успенский *
Институт математики и механики УрО РАН
620090, Екатеринбург, С. Ковалевской, 16
e-mail: ushak@imm.uran.ru, uspen@imm.uran.ru

В работе рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух игроков с терминальной функцией платы. Для функций, зависящих от позиции игры и определенным образом связанных с функцией платы игры, вводится и изучается понятие дефекта функции.

Ключевые слова: игровая задача, управление, конфликтно управляемая система, гамильтониан, дефект стабильности, стабильный мост.

1. Введение

В настоящей работе изучается антагонистическая дифференциальная игра с терминальной функцией платы [3–7, 14, 15]. В работах [22, 23, 31], посвящённых игровым задачам о сближении, было введено и исследовалось понятие дефекта стабильности множества, содержащегося в пространстве позиций игры. Это понятие было введено для множеств, определенным образом связанных с целевым множеством и не обладающих, вообще говоря, свойством стабильности [3–7]. Свойство стабильности — ключевое при построении решений в

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 08-01-00587-а, программы Президиума РАН №4 «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики», регионального гранта РФФФИ/ПСО №07-0196085

позиционных дифференциальных играх; с ним тесно связано понятие стабильного моста — многообразия в пространстве позиций игровой задачи о сближении, удобного для её успешного завершения. Понятие дефекта стабильности множества мы трактуем как некоторое распространение понятия стабильности на нестабильные множества, с которыми исследователям игровых задач приходится довольно часто сталкиваться при попытках построения стабильных мостов.

Целесообразно, на наш взгляд, провести аналогичное распространение с класса стабильных функций на нестабильные функции. Здесь предлагается один из вариантов такого распространения, позволяющего привлечь к исследованию дифференциальной игры функции, зависящие от позиции и не обладающие, вообще говоря, свойством стабильности. При помощи понятия дефекта функции оценивается, с какой степенью точности может быть решена дифференциальная игра на базе использования этой функции.

Изучаемая здесь тематика возникла из работ [3–9, 26] и опирается на результаты, полученные в этих работах. Так, здесь используется унификация в дифференциальных играх [8, 9] и инфинитезимальное описание стабильности [26]. Одним из основных источников мотивации для написания этой работы стала статья [10], посвященная принципу сравнения для уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби–Беллмана и Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, описывающих решения ряда задач управления и задач управления с возмущениями. Другим таким источником явилась статья [23], конструкции из которой были перенесены в эту работу.

Работа примыкает к исследованиям по теории дифференциальных игр [1–30].

2. Постановка игровой задачи

Пусть задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x^0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{2.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены условия

A. Функция $f(t,x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t,x,u,v), и для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L_f=L_f(\mathcal{D})\in(0,\infty)$, что

$$\left\|f\left(t,x^{(1)},u,v\right)-f\left(t,x^{(2)},u,v\right)\right\|\leqslant L_f\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,$$

$$\left(t,x^{(i)},u,v\right)\in\mathcal{D}\times P\times Q,\quad i=1,2;$$

здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

B. Существует такая постоянная $\mu\in(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,v)\|\leqslant\mu(1+\|x\|),$$

$$(t,x,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q.$$

Пусть для любой непрерывной вектор-функции $x[\cdot]=\bigl(x[t],\ t_0\leqslant t\leqslant\vartheta\bigr)$ определено значение функционала $\gamma\bigl(x[\cdot]\bigr)=\sigma\bigl(x[\vartheta]\bigr)$, где $\sigma(x)$ — локально липшицева по x скалярная функция на $\mathbb{R}^m$.

Задача, стоящая перед первым игроком, заключается в определении позиционной процедуры управления с поводырем, обеспечивающей min функционала $\gamma\bigl(x[\cdot]\bigr)$ на движениях $x[\cdot]$ конфликтно управляемой системы (2.1). Эта задача формулируется как задача определения позиционной процедуры управления с поводырем первого игрока, обеспечивающей минимум гарантированного результата (см., например, задачу 1.1.2 из [16], стр. 12). При этом в качестве допустимого способа управления второго игрока используем контр-позиционные процедуры управления с поводырем второго игрока (см., например, [7]).

Тот факт, что в качестве допустимого способа управления второго игрока используются контр-позиционные процедуры управления, отражён в специфике гамильтониана системы (2.1), который используется в разрешающих конструкциях.

Игровую задачу будем рассматривать в ограниченной и замкнутой области

$$\mathcal{D}=\left\{(t,x)\colon t\in[t_0,\vartheta],\ \|x-x^0\|\leqslant\varepsilon+\mu(t-t_0)e^{\mu(t-t_0)}\right\}\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m;$$

где $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Область $\mathcal{D}$ есть интегральная воронка дифференциального включения (д. в.) $\dot{x} \in U(x) = \Big\{ f \in \mathbb{R}^m \colon \|f\| \leqslant \mu\big(1 + \|x\|\big) \Big\}$ с начальным множеством $\mathcal{D}(t_0) = \big\{ x \in \mathbb{R}^m \colon \|x - x^0\| \leqslant \varepsilon \big\}$.

В следующем разделе будут представлены позиционные процедуры управления с поводырем первого игрока, ориентированные на решение сформулированной выше задачи. Конструирование этих процедур сопряжено с выбором конечных разбиений Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Будем считать, что диаметры $\Delta(\Gamma)$ этих разбиений настолько малы, что все рассматриваемые ниже движения $x[t]$ $(t \in [t_0, \vartheta],\ x[t_0] = x^0)$ системы (2.1) и движения поводыря $z[t]$ $(t \in [t_0, \vartheta],\ z[t_0] = x^0)$ содержатся в $\mathcal{D}$ (в том смысле, что $(t, x[t]) \in \mathcal{D},\ (t, z[t]) \in \mathcal{D}$).

3. Дефект функции в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания

В этом разделе приведём определение дефекта функции $\varphi(t, x)$, заданной в некоторой окрестности области $\mathcal{D}$. Отметим, что в рамках этого определения стабильные функции $\varphi(t, x)$ (см. [16]) есть функции с дефектом, равным нулю.

Введем обозначения (см. [19, 20])

$$G = B(0; K) = \{ b \in \mathbb{R}^m \colon \|b\| \leqslant K \}, \text{ где } K \in (0, \infty) \text{ таково, что}$$

$$F(t, x) = \operatorname{co}\big\{ f(t, x, u, v) \colon u \in P, v \in Q \big\} \subset G \quad \text{при} \quad (t, x) \in D$$

$$\begin{gathered} \Pi_l(t, x) = \big\{ f \in \mathbb{R}^m \colon \langle l, f \rangle \leqslant H(t, x, l) \big\}, \\ F_l(t, x) = F(t, x) \cap \Pi_l(t, x), (t, x, l) \in \mathcal{D} \times S \end{gathered} \tag{3.1}$$

здесь $S = \{ l \in \mathbb{R}^m \colon \|l\| = 1 \}$, $H(t, x, l) = \max\limits_{u \in P} \min\limits_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle$, $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f.

Справедливо включение

$$F_l(t, x) \subset G, \quad (t, x, l) \in D \times S. \tag{3.2}$$

Введем скалярные функции $\varphi(t, x)$, определенные на некоторой окрестности области $\mathcal{D}$ и удовлетворяющие условиям

С.1. Функция $\varphi(t, x)$ непрерывна на $\mathcal{D}$ и $\varphi(\vartheta, x) = \sigma(x)$ на $\mathcal{D}(\vartheta) = \big\{ x \in \mathbb{R}^m \colon (x, \vartheta) \in \mathcal{D} \big\}$, при этом

$$\big\| \sigma(x_*) - \sigma(x^*) \big\| \leqslant L_\sigma \|x_* - x^*\|, \quad L_\sigma \in (0, \infty); \tag{3.3}$$

здесь x_* и x^* из $\mathcal{D}(\vartheta)$.

С.2. Существуют такие функции $\psi(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$ и $\gamma(\delta)$ на $(0,\infty)$ ($\gamma(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что

1. при любых $t\in[t_0,\vartheta)$, $(t,x)\in\mathcal{D}$, $f\in F(t,x)$, $\delta>0$
$$\varphi(t+\delta,x+\delta f)\leqslant\varphi(t,x)+\psi(t,x,f)\delta+\gamma(\delta)\delta; \tag{3.4}$$
2. функция $\psi(t,x,f)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и для любых $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ существует и конечен
$$\psi\big(t,x,F_l(t,x)\big)=\min_{f\in F_l(t,x)}\psi(t,x,f). \tag{3.5}$$

С.3. Функция $\varepsilon(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0,\vartheta]$; здесь
$$\begin{gathered}\varepsilon(t)=\sup_{x\in\mathcal{D}(t)}\varepsilon(t,x),\\ \varepsilon(t,x)=\sup_{l\in S}\psi\big(t,x,F_l(t,x)\big),\quad (t,x)\in\mathcal{D}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

К условиям **С.1**, **С.2**, **С.3**, наложенным на функции $\varphi(t,x)$, добавим ещё условие, наложенное на семейство отображений $(t,x)\mapsto F_l(t,x)$, $l\in S$

С.4. Существует скалярная функция $\widetilde{\omega}(\delta)$ на $(0,\infty)$ ($\widetilde{\omega}(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что
$$d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big)\leqslant\widetilde{\omega}(\|t_*-t^*\|+\|x_*-x^*\|)$$
при любых $(t_*,x_*),(t^*,x^*)$ из $\mathcal{D}$ и $l\in S$.

Функции $\psi(t,x,f)$ в условиях **С.2** и **С.3** будем называть *калибровочными функциями*, имея в виду, что они задают ограничение на скорость функции φ с возрастанием времени, тем самым как бы ранжируя (калибруя) эту скорость. будем считать также, что функция $\gamma(\delta)$ в условии **С.2** не является, вообще говоря, строго монотонной; в частности, мы допускаем в неравенстве (3.4) функцию $\gamma(\delta)\equiv 0$.

Опишем позиционную процедуру u^c управления с поводырем первого игрока, основанную на использовании калибровочной функции

$\psi(t,x,f)$. Эту процедуру будем применять в процессе управления системой (2.1) на промежутке $[t_0,\vartheta]$.

Для этого зададим разбиение $\Gamma = \{t_0,t_1,\ldots,t_N = \vartheta\}$ с диаметром $\Delta(\Gamma) = \max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$. Процедура u^c предполагает пошаговое (по промежуткам $[t_i,t_{i+1}]$ разбиения Γ) конструирование движения $x[t]$ системы (2.1) параллельно с вспомогательным движением $z[t]$ поводыря. При этом, в соответствии с конструкциями позиционных процедур управления из работ [7, 16], управление первого игрока на каждом шаге $[t_i,t_{i+1})$ разбиения Γ задается как некоторый вектор $u^c(t_i,x[t_i])$, где $x[t_i]$ — конечная точка движения $x[t]$ системы (2.1) на предыдущем шаге $[t_{i-1},t_i]$ (в случае, когда $i\geqslant 1$).

Итак, полагаем $x[t_0]=z[t_0]=x^0$.

На первом шаге разбиения Γ выбираем произвольно вектор $l^{(0)}\in S$ и вектор $f^*(t_0,z[t_0])$ из условия

$$f^*(t_0,z[t_0])\in F_{l^{(0)}}(t_0,z[t_0]). \tag{3.7}$$

Движение $z[t]$ поводыря на $[t_0,t_1]$ определяем равенством

$$z[t]=z[t_0]+(t-t_0)f^*(t_0,z[t_0]). \tag{3.8}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_0,t_1]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t]=f\big(t,x[t],u^c(t_0,x[t_0]),v(t)\big),\quad x[t_0]=x^0. \tag{3.9}$$

Здесь $u^c(t_0,x[t_0])$ — произвольный вектор из P, $v(t)\in Q$ — допустимое управление второго игрока на $[t_0,t_1)$.

Решение $x[t]$ уравнения (3.9) понимается как абсолютно непрерывная на $[t_0,t_1]$ функция, удовлетворяющая (3.9) почти всюду на $[t_0,t_1]$.

Рассмотрим следующий шаг $[t_1,t_2]$ разбиения Γ.

В случае, если $x[t_1]=z[t_1]$, при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ на $[t_1,t_2]$ поступаем аналогично тому, как это делалось на шаге $[t_0,t_1]$.

В случае, если $x[t_1]\neq z[t_1]$, определяем вектор $l^{(1)}=\|s[t_1]\|^{-1}s[t_1]\in S$, а также вектор $f^*(t_1,z[t_1])$ из соотношений

$$\begin{gathered} f^*(t_1,z[t_1])\in F_{l^{(1)}}(t_1,z[t_1]),\\ \psi\big(t_1,z[t_1],f^*(t_1,z[t_1])\big)=\psi\big(t_1,z[t_1],F_{l^{(1)}}(t_1,z[t_1])\big). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь и в дальнейшем $s[t_i] = z[t_i] - x[t_i], i = \overline{0, N}$.

Движение поводыря $z[t]$ на $[t_1, t_2]$ определим равенством

$$z[t] = z[t_1] + (t - t_1)f^*(t_1, z[t_1]). \tag{3.11}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big), \tag{3.12}$$

с начальным значением $x[t_1]$, где $x[t_1]$ — конечная точка движения $x[t]$ системы (2.1) на предыдущем шаге $[t_0, t_1]$.

Здесь вектор $u^c(t_1, x[t_1])$ определяется соотношением

$$\min_{v \in Q} \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v\big)\big\rangle = H\big(t_1, x[t_1], l^{(1)}\big), \tag{3.13}$$

$v(t)$ — допустимое управление второго игрока на полуинтервале $[t_1, t_2)$.

В случае, если $x[t_2] = z[t_2]$, на следующем шаге $[t_2, t_3]$ разбиения Γ поступаем при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ аналогично тому, как это делалось на предыдущих шагах.

В случае, если $x[t_2] \neq z[t_2]$, поступаем аналогично тому, как это делалось на предыдущем шаге $[t_1, t_2]$.

Допустим теперь, что в ходе применения процедуры u^c управления с поводырем первого игрока реализовались движения $x[t]$ и $z[t]$ на промежутке $[t_0, t_i]$.

В случае, если оказалось $z[t_i] = x[t_i]$, при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ поступаем по аналогии с предыдущими шагами $[t_1, t_2], \ldots, [t_{i-1}, t_i]$ разбиения Γ.

В случае, если $x[t_i] \neq z[t_i]$, определяем вектор $l^{(i)} = \|s[t_i]\|^{-1} s[t_i] \in S$ $(s[t_i] = z[t_i] - x[t_i])$ и вектор $f^*(t_i, z[t_i])$ из соотношений

$$\begin{gathered} f^*(t_i, z[t_i]) \in F_{l^{(i)}}(t_i, z[t_i]), \\ \psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big) = \psi\big(t_i, z[t_i], F_{l^{(i)}}(t_i, z[t_i])\big). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Движение поводыря $z[t]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ определяем равенством

$$z[t] = z[t_i] + (t - t_i)f^*(t_i, z[t_i]). \tag{3.15}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_i, t_{i+1}]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = f\big(t, x[t], u^c(t_i, x[t_i]), v(t)\big), \tag{3.16}$$

с начальным значением $x[t_i]$, где $x[t_i]$ — конечная точка движения $x[t]$ на $[t_{i-1}, t_i]$.

Здесь вектор $u^c(t_i, x[t_i]) \in P$ определяется из соотношения

$$\min_{v \in Q} \big\langle l^{(i)}, f\big(t_i, x[t_i], u^c(t_i, x[t_i]), v\big)\big\rangle = H(t_i, x[t_i], l^{(i)}), \tag{3.17}$$

$v(t)$ — допустимое управление второго игрока на промежутке $[t_i, t_{i+1})$.

Представленная выше процедура u^c управления с поводырем первого игрока вместе с некоторым допустимым управлением $v(t)$ второго игрока на $[t_0, \vartheta]$ определяют движение $x[t] = x_\Gamma[t; t_0, x^0; v(\cdot)]$, $t \in [t_0, \vartheta]$ системы (2.1), отвечающее разбиению Γ.

Введем в рассмотрение величину

$$V_\Gamma(t_0, x^0) = \sup_{v(\cdot)} \varphi(x_\Gamma[\vartheta; t_0, x^0; v(\cdot)]). \tag{3.18}$$

Величина $V_\Gamma(t_0, x^0)$ есть тот результат, который гарантирует себе первый игрок в рассматриваемой задаче управления в случае, когда он использует процедуру u^c, отвечающую разбиению Γ и калибровочной функции $\psi(t, x, f)$.

Оценим сверху величину $V_\Gamma(t_0, x^0)$. Для этого приступим сначала к оценке расстояния между движениями $x[t]$ и $z[t]$ в моменты $t_i \in \Gamma$. Оценку проведем в случае 1: $z[t_i] \neq x[t_i]$, $i = \overline{0, N-1}$. В альтернативном случае 2, когда при некоторых $i = \overline{0, N-1}$ неравенство $z[t_i] \neq x[t_i]$ нарушается, вывод оценки расстояния сводится к выводу оценки в случае 1.

Рассмотрим первый шаг $[t_0, t_1]$ разбиения Γ.

Так как $f^*(t_0, z[t_0])$ и $f\big(t, x[t], u^c(t_0, x[t_0]), v(t)\big)$ содержатся в G, то

$$\begin{gathered} \|f^*(t_0, z[t_0])\| \leqslant K, \\ \big\|f\big(t, x[t], u^c(t_0, x[t_0]), v(t)\big)\big\| \leqslant K, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|z[t_1] - x[t_1]\| \leqslant 2K\Delta_0, \tag{3.20}$$

где обозначено $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим следующий промежуток $[t_1, t_2]$.

Движение $z[t]$ поводыря на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет равенству

$$z[t_2] = z[t_1] + \Delta_1 f^*(t_1, z[t_1]). \tag{3.21}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет равенству

$$x[t_2] = x[t_1] + \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)dt.$$

Вместе с тем получаем

$$\begin{gathered}\|s[t_2]\|^2 = \|s[t_1]\|^2 \\ + 2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle \\ + \Big\|\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\|^2.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Из неравенства (3.19) следует оценка

$$\Big\|\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\|^2 \leqslant 4K^2\Delta_1^2. \tag{3.23}$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (3.22). Представим его в виде

$$\begin{gathered}2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle \\ + 2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \\ - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle.\end{gathered}$$

Рассмотрим выражение

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle,$$

которое запишем в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \big\langle s[t_1], f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\langle s[t_1], f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle dt.$$

По определению вектора $f^*(t_1, z[t_1])$ имеем

$$\begin{gathered} \big\langle s[t_1], f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, \big\langle l^{(1)}, f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle \leqslant \|s[t_1]\| \, H(t_1, z[t_1], l^{(1)}), \end{gathered} \tag{3.24}$$

поскольку $f^*(t_1, z[t_1]) \in F_{l^{(1)}}(t_1, z[t_1])$.

По определению вектора $u^c(t_1, x[t_1])$ имеем

$$\begin{gathered} \big\langle s[t_1], f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle \geqslant \\ \|s[t_1]\| \min_{v \in Q} \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v\big) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, H(t_1, x[t_1], l^{(1)}). \end{gathered} \tag{3.25}$$

Из соотношений (3.24), (3.25) следует

$$\begin{gathered} \Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle \leqslant \\ \|s[t_1]\| \, \big(H(t_1, z[t_1], l^{(1)}) - H(t_1, x[t_1], l^{(1)}) \big) \Delta_1. \end{gathered}$$

Учитывая, что функция $H(t, x, l)$ локально липшицева по x на $\mathcal{D}$ с константой $L_f = L_f(\mathcal{D})$, получаем

$$H(t_1, z[t_1], l^{(1)}) - H(t_1, x[t_1], l^{(1)}) \leqslant L_f \, \|s[t_1]\| \, .$$

Принимая во внимание два последних неравенства, получаем

$$\begin{gathered} \Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle \leqslant \\ L_f \, \|s[t_1]\|^2 \, \Delta_1. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Оценим далее сверху выражение

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle.$$

Для этого введем функции на $(0, \infty)$

$$\omega^*(\delta) = \sup\big\{ \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| :$$
$$(t_*, x_*, t^*, x^*, u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times P \times Q,\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta \big\},$$
$$\omega(\delta) = \delta \omega^*\big((1+K)\delta\big).$$

Принимая во внимание тот факт, что движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет включению $(t, x[t]) \in \mathcal{D}$, получаем

$$\big\| f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\| \leqslant$$
$$\omega^*\big((1+K)\Delta_1\big), \quad t \in [t_1, t_2],$$

откуда следует оценка

$$\begin{gathered}\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - \\ f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle \leqslant K_* \omega(\Delta_1);\end{gathered} \tag{3.27}$$

здесь $K_* = \max\big\{ \|z - x\| : (t, x),\ (t, z) \in \mathcal{D} \big\} < \infty$.

Из (3.26), (3.27) следует оценка

$$\begin{gathered}\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle \leqslant \\ L_f \|s[t_1]\|^2 \Delta_1 + K_* \omega(\Delta_1).\end{gathered} \tag{3.28}$$

Из (3.22), (3.23) и (3.28) получаем

$$\|s[t_2]\|^2 \leqslant (1 + 2L_f \Delta_1) \|s[t_1]\|^2 + K_* \omega(\Delta_1) + 4K^2 {\Delta_1}^2. \tag{3.29}$$

Пусть теперь в процессе позиционной процедуры u^c управления с поводырем реализовались в текущий момент $t_i \in \Gamma$ точки $x[t_i]$ и $z[t_i]$

движений системы (2.1) и поводыря. Тогда процедура u^c породит на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ движения $x[t]$ и $z[t]$, выходящие в момент t_i из этих точек; при этом будет справедлива оценка, подобная оценке (3.29)

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leqslant (1 + 2L_f\Delta_i)\,\|s[t_i]\|^2 + \Delta_i\varphi^*(\Delta_i), \tag{3.30}$$

где обозначено $\varphi^*(\delta) = K_*\omega^*\big((1+K)\delta\big) + 4K^2\delta,\ \delta > 0.$

Из локальной оценки (3.30), справедливой для любого $i = \overline{1, N-1}$, следует оценка

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|^2 \leqslant e^{2L_f(\vartheta - t_1)}\Big(\|s[t_1]\|^2 + (\vartheta - t_1)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big). \tag{3.31}$$

Из (3.20) и (3.31) получаем оценку

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|^2 \leqslant e^{2L_f(\vartheta - t_0)}\Big(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big)$$

и, следовательно, оценку

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\| \leqslant e^{L_f(\vartheta - t_0)}\Big(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

Теперь сфокусируем внимание на конечной последовательности $z[t_i]$,
$i = \overline{1, N}$. Для точек этой последовательности имеют место, согласно условию **C.2**, неравенства

$$\varphi(t_{i+1}, z[t_{i+1}]) \leqslant \varphi(t_i, z[t_i]) + \psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big)\Delta_i + \gamma(\Delta_i)\Delta_i,$$

$$\psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big) \leqslant \varepsilon(t_i, z[t_i]) \leqslant \varepsilon(t_i).$$

Из этих неравенств (верхнего неравенства) путем их последовательной подстановки друг в друга, получаем оценку

$$\varphi(\vartheta, z[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, z[t_0]) + \sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon(t_i)\Delta_i + \sum_{i=0}^{N-1}\Delta_i\gamma(\Delta_i). \tag{3.33}$$

Учитывая также, что функция платы $\sigma[x] = \varphi(\vartheta, x)$ на $\mathcal{D}(\vartheta)$ удовлетворяет неравенству (3.3), получаем

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(\vartheta, z[\vartheta]) + L_\sigma\,\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|\,. \tag{3.34}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + (\vartheta - t_0)\gamma\bigl(\Delta(\Gamma)\bigr) + \\ L_\sigma e^{L_f(\vartheta - t_0)}\bigl(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*(\Delta(\Gamma))\bigr)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

Зафиксировав некоторое $\rho > 0$, подберем такое $\delta(\rho) > 0$, что при всех разбиениях Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)$ имеет место

$$(\vartheta - t_0)\gamma\bigl(\Delta(\Gamma)\bigr) + L_\delta e^{L_f(\vartheta - t_0)}\bigl(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*(\Delta(\Gamma))\bigr)^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho.$$

Здесь считаем, что величина $\delta(\rho)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\delta(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Для таких разбиений Γ и отвечающих им процедур u^c управления с поводырем первого игрока выполняется неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.36}$$

Начиная с этого момента, будем более адекватно обозначать движения $x[t]$ на $[t_0, \vartheta]$, порожденные процедурой управления u^c и отвечающие разбиению Γ. А именно, будем обозначать их символом $x_\Gamma[t]$ подобно тому как это делается в работах [7, 16], отражая тем самым их соответствие разбиению Γ. Учитывая это, неравенство (3.36) запишем в виде

$$\varphi(\vartheta, x_\Gamma[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.37}$$

Оценка (3.37) есть оценка сверху результата игры, сложившейся в процессе применения первым игроком процедуры u^c, отвечающей калибровочной функции $\psi(t, x, f)$ и разбиению Γ $\bigl(\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)\bigr)$.

Отсюда получаем верхнюю оценку

$$V_\Gamma(t_0, x^0) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.38}$$

результата (3.18), который гарантирует себе первый игрок в рассматриваемой задаче, применяя процедуру управления u^c, отвечающую калибровочной функции $\psi(t,x,f)$ и разбиению Γ с диаметром $\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)$.

Рассмотрим теперь некоторую последовательность $\{x^{(n)}[t]\}$ движений $x^{(n)}[t] = x_{\Gamma_n}[t]$ системы (2.1) на $[t_0,\vartheta]$, порожденных упомянутой процедурой u^c и отвечающих разбиению Γ_n с диаметрами $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma_n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Пусть существует равномерный на $[t_0,\vartheta]$ предел $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}[t]$. Следуя работам [7, 16], будем называть такие пределы $x[t]$ движениями системы (2.1), порожденными процедурой управления u^c, соответствующей калибровочной функции $\psi(t,x,f)$. Совокупность $\{x[t]\}$ всех таких движений $x[t]$ на $[t_0,\vartheta]$ обозначим символом $\mathcal{X}_{u^c}(t_0,x^0)$.

Введем величину

$$V(t_0,x^0) = \lim_{\Delta(\Gamma)\downarrow 0} \sup V_\Gamma(t_0,x^0). \tag{3.39}$$

Величина (3.39), так же как и $V_\Gamma(t_0,x^0)$, зависит от выбора калибровочной функции $\psi(t,x,f)$.

Оценим сверху $V(t_0,x^0)$. В связи с этим рассмотрим произвольное движение $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}[t]$ из пучка $\mathcal{X}_{u^c}(t_0,x^0)$ и некоторую последовательность $\{\rho_k\}$ ($\rho_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$).

Для каждого ρ_k найдется номер n_k, для которого $\Delta^{(n_k)} \leqslant \delta(\rho_k)$.

Тогда движения $x^{(n_k)}[t]$ на $[t_0,\vartheta]$, порожденные процедурой u^c и отвечающие разбиениям Γ_{n_k} $(k = 1,2,\dots)$, стеснены оценкой

$$\varphi(\vartheta, x^{(n_k)}[\vartheta]) \leqslant V_{\Gamma_{n_k}}(t_0,x^0) \leqslant \varphi(t_0,x^0) + \sum_{i=0}^{N_k-1} \varepsilon(t_i^{(k)})\Delta_i^{(k)} + \rho_k. \tag{3.40}$$

Здесь $t_i^{(k)}$ — моменты разбиения Γ_{n_k}, $\Delta_i^{(k)} = t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}$, (N_k+1) — число моментов разбиения Γ_{n_k}.

Из неравенства (3.40) и предельного равенства $x[\vartheta] = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(n_k)}[\vartheta]$, учитывая непрерывность функции $\sigma(x) = \varphi(\vartheta,x)$ и условие **C.3**, получаем

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant V(t_0,x^0) \leqslant \varphi(t_0,x^0) + \int_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt. \tag{3.41}$$

С другой стороны, по определению $V(t_0, x^0)$, найдется такая последовательность $\{\Gamma_n\}$ ($\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \to \infty$), что $V(t_0, x^0) = \sup\limits_{n\to\infty} V_{\Gamma_n}(t_0, x^0)$. Для каждого разбиения Γ_n найдется такое движение $x_{\Gamma_n}[t]$ которое удовлетворяет неравенству $\varphi(\vartheta, x_{\Gamma_n}[\vartheta]) \geqslant V_{\Gamma_n}(t_0, x^0) - \frac{1}{n}$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что существует равномерный на $[t_0, \vartheta]$ предел $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\Gamma_n}[t]$. Для этого предела выполняется неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \geqslant V(t_0, x^0). \tag{3.42}$$

Из (3.41), (3.42) следует утверждение

Теорема 3.1. *Величина* (3.39) *удовлетворяет соотношению*

$$V(t_0, x^0) = \sup_{x[\cdot]\in\mathcal{X}_{u^c}(t_0,x^0)} \varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt. \tag{3.43}$$

где функция $\varepsilon(t)$ (3.6)*, входящая в* (3.43)*, определена на базе калибровочной функции* $\psi(t, x, f)$*.*

Замечание 3.1. В формулировке теоремы 3.1 (в правой части неравенства(3.43)) присутствует интеграл Римана $\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt$. Условие **C.3** интегрируемости функции $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ входит в число условий при которых доказана теорема 3.1. Заметим, что это условие можно ослабить до условия интегрируемости функции $\varepsilon(t)$ по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$. Доказательство теоремы 3.1 можно провести по схеме, подобной схеме рассуждений, примененных в работе [23] при доказательстве аналогичной теоремы о дефекте стабильности множеств.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(t, x)$ на $\mathcal{D}$, которая (наряду с условиями **C.1**, **C.2**) удовлетворяет следующему условию

C.2⁰. Функция $\varphi(t, x)$ дифференцируема по направлениям $(1, f)$, $f \in \mathrm{R}^m$ в каждой точке $(t, x) \in \mathcal{D},\ t \in [t_0, \vartheta)$, а также

1. $$\varphi(t + \delta, x + \delta f) = \varphi(t, x) + \varphi'\big(t, x; (1, f)\big)\delta + o_*(t, x, f; \delta)\delta \tag{3.44}$$

при любых $(t, x, f) \in \mathcal{D} \times \mathrm{R}^m,\ t \in [t_0, \vartheta),\ \delta \in (0, \vartheta - t)$, где функция $o_*(t, x, f; \delta)$ стеснена неравенством

$$\sup_{(t,x,f)\in\mathcal{D}\times G} o_*(t, x, f; \delta) \leqslant \gamma_*(\delta), \tag{3.45}$$

при этом $\gamma_*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$;

2. функция $\varphi'\bigl(t, x; (1, f)\bigr)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и для любых $(t, x, l) \in \mathcal{D} \times S$ существует

$$\varphi'\Bigl(t, x; \bigl(1, F_l(t, x)\bigr)\Bigr) \triangleq \min_{f\in F_l(t,x)} \varphi'\bigl(t, x; (1, f)\bigr). \tag{3.46}$$

Из (3.44), (3.45) следует равномерная на $\mathcal{D} \times G$ оценка

$$\begin{gathered}\varphi(t+\delta, x+\delta f) - \varphi(t, x) - \varphi'\bigl(t, x; (1, f)\bigr)\delta \leqslant \delta\gamma_*(\delta),\\ (t, x, f) \in \mathcal{D} \times G, \quad t \in [t_0, \vartheta).\end{gathered} \tag{3.47}$$

Равномерность понимается в том смысле, что правая часть оценки (3.47) не зависит от (t, x, f) из $\mathcal{D} \times G$.

Также из условия $\mathbf{C.2^0}$ и оценки (3.47) следует, что функция $\psi_*(t, x, f) = \varphi'(t, x; (1, f))$, заданная на $\mathcal{D} \times G$, удовлетворяет условиям $\mathbf{C.2}$, $\mathbf{C.3}$, наложенным на функцию $\psi(t, x, f)$. Таким образом, функция $\psi_*(t, x, f)$ сама является калибровочной функцией.

Кроме того, из (3.4) следует, что для любой калибровочной функции $\psi(t, x, f)$ справедливо неравенство

$$\frac{\varphi(t+\delta, x+\delta f) - \varphi(t, x)}{\delta} \leqslant \psi(t, x, f) + \gamma(\delta), \quad \delta > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \downarrow 0$, получаем

$$\psi_*(t, x, f) \leqslant \psi(t, x, f), \quad (t, x, f) \in \mathcal{D} \times G. \tag{3.48}$$

Неравенство (3.48) означает, что функция $\psi_*(t, x, f)$ является нижней огибающей для семейства калибровочных функций $\psi(t, x, f)$ на $\mathcal{D} \times G$.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon_*(t, x) = \sup_{l\in S} \psi_*\bigl(t, x, F_l(t, x)\bigr), \quad (t, x) \in \mathcal{D}, \quad t \in [t_0, \vartheta). \tag{3.49}$$

Пусть $(t, x) \in \mathcal{D}$, $t \in [t_0, \vartheta)$. В случае $\varepsilon_*(t, x) \leqslant 0$ получаем $k_*(t, x) \triangleq \varepsilon_*(t, x)$ — *индекс стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в точке* (t, x); в случае $\varepsilon_*(t, x) \geqslant 0$ получаем $d_*(t, x) \triangleq \varepsilon_*(t, x)$ — *дефект стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в точке* (t, x).

Введем также функцию

$$\varepsilon_*(t) = \sup_{x \in \mathcal{D}(t)} \varepsilon_*(t, x), \quad t \in [t_0, \vartheta). \tag{3.50}$$

Дополним эту функцию значением $\varepsilon_*(\vartheta)$ в момент $t = \vartheta$, получив таким образом функцию $\varepsilon_*(t)$, определенную на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Функцию $\varepsilon_*(t)$ на отрезке $[t_0, \vartheta]$ назовём *спектром функции* $\varphi(t, x)$.

Пусть $t \in [t_0, \vartheta]$. В случае $\varepsilon_*(t) \leqslant 0$ получаем $k_*(t) \triangleq \varepsilon_*(t)$ — *индекс стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в момент* t; в случае $\varepsilon_*(t) \geqslant 0$ получаем $d_*(t) \triangleq \varepsilon_*(t)$ — *дефект стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в момент* t.

Обозначим через Λ^- и Λ^+ соответственно множества в $[t_0, \vartheta]$, на которых определены функции $k_*(t)$ и $d_*(t)$ — неположительная и неотрицательная части спектра $\varepsilon_*(t)$. Множества Λ^- и Λ^+ могут, вообще говоря, не пересекаться, и пересечение $\Lambda^- \cap \Lambda^+$ (в случае, если оно непусто) есть множество всех тех t в $[t_0, \vartheta]$, для которых $\varepsilon_*(t) = 0$.

В дополнение к условиям **C.1**, **C.2**, **C.2⁰** предполагаем, что выполнено относительно $\varepsilon_*(t)$ следующее условие.

C.3⁰. Функция $\varepsilon_*(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0, \vartheta]$.

Определение 3.1. *Дефектом функции* $\varphi(t, x)$ *на* $[t_0, \vartheta]$ *назовем интеграл*

$$\varkappa(\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt = \int\limits_{\Lambda^-} k_*(t)dt + \int\limits_{\Lambda^+} d_*(t)dt. \tag{3.51}$$

Здесь $\displaystyle\int\limits_{\Lambda^-} k_*(t)dt = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \min\bigl(\varepsilon_*(t), 0\bigr)dt, \int\limits_{\Lambda^+} d_*(t)dt = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \max\bigl(\varepsilon_*(t), 0\bigr)dt.$

Справедливо неравенство

$$V(t_0, x^0) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \varkappa(\vartheta). \tag{3.52}$$

Здесь $V(t_0, x^0) = \sup\limits_{x[\cdot] \in \mathcal{X}_{u^c}(t_0, x^0)} \varphi(\vartheta, x[\vartheta])$, где процедура u^c управления первого игрока базируется на использовании калибровочной функции $\psi_*(t, x, f)$ и, стало быть, значение $V(t_0, x^0)$ в некоторой степени определено функцией $\psi_*(t, x, f)$.

Далее заметим, что в рамках условий, при которых мы рассматриваем функции $\varphi(t,x)$, одним из критериев стабильности (u-стабильности) функции $\varphi(t,x)$ (см. [18]) является неравенство

$$\begin{gathered}\varepsilon_*(t,x)=\sup_{l\in S}\psi_*\bigl(t,x,F_l(t,x)\bigr)\leqslant 0,\\ t\in[t_0,\vartheta),\quad (t,x)\in\mathcal{D},\end{gathered}\tag{3.53}$$

а, значит, и неравенство

$$\varepsilon_*(t)\leqslant 0,\quad t\in[t_0,\vartheta].\tag{3.54}$$

Тогда, в соответствии с (3.52), величина $V(t_0,x_0)$ будет стеснена неравенством

$$V(t_0,x^0)\leqslant\varphi(t_0,x^0).\tag{3.55}$$

Очевидно, что неравенство (3.55) эквивалентно неравенству (3.52), дополненному неравенством $\varkappa(\vartheta)=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\varepsilon_*(t)dt\leqslant 0$, или, что одно и то же, — неравенством

$$\int\limits_{\Lambda^+}d_*(t)dt\leqslant\int\limits_{\Lambda^-}|k_*(t)|dt.\tag{3.56}$$

Можно проинтерпретировать неравенство (3.56) как то, что индекс стабильности превалирует в интегральном смысле над дефектом стабильности. Этого достаточно для выполнения (3.55).

Теперь, считая, что наряду с функцией $\psi_*(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$ задана некоторая калибровочная функция $\psi(t,x,f)$, оценим, насколько сильно различаются верхние оценки в (3.43) и (3.52).

Для этого введем неотрицательную функцию $h_*(t,x,f)=\psi(t,x,f)-\psi_*(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$. При любых $t\in[t_0,\vartheta)$, $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\psi_*(t,x,f_0)\leqslant\psi_*(t,x,f^0)\leqslant\psi(t,x,f^0)=\\ \psi_*(t,x,f^0)+h_*(t,x,f^0)\leqslant\psi_*(t,x,f_0)+h_*(t,x,f_0)\leqslant\\ \psi_*(t,x,f_0)+\sup_{f\in F_l(t,x)}h_*(t,x,f).\end{gathered}\tag{3.57}$$

Здесь обозначено $\psi_*(t,x,f_0) \triangleq \psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $\psi(t,x,f^0) \triangleq \psi\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, где f_0 и f^0 из $F_l(t,x)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} h_*(t,x) = \sup_{l\in S,\, f\in F_l(t,x)} h_*(t,x,f), \\ h_*(t) = \sup_{x\in\mathcal{D}(t)} h_*(t,x). \end{gathered} \tag{3.58}$$

Для этих функций выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \varepsilon(t,x) - \varepsilon_*(t,x) \leqslant h_*(t,x), \\ \varepsilon(t) - \varepsilon_*(t) \leqslant h_*(t), \end{gathered} \tag{3.59}$$

при $t \in [t_0,\vartheta)$, $(t,x) \in \mathcal{D}$.

Предполагаем далее, что выполнено условие

$\mathbf{E^1}$. Функция $h_*(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0,\vartheta]$.

Тогда из (3.57)–(3.59) следует, что оценки $\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt\Big)$ и $\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt\Big)$, входящие соответственно в (3.43) и (3.52), отличаются не более, чем на величину $\int\limits_{t_0}^{\vartheta} h_*(t)dt$, т.е. справедливо неравенство

$$\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt\Big) - \Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt\Big) \leqslant \int\limits_{t_0}^{\vartheta} h_*(t)dt.$$

В заключение этих рассуждений, относящихся к сравнению правых частей в неравенствах (3.43) и (3.52), заметим, что эти рассуждения могут быть полезны при рассмотрении тех ситуаций, связанных с $\varphi(t,x)$, в которых затруднена по тем или иным причинам реализация процедуры управления u^c, базирующейся на использовании функции $\psi_*(t,x,f) = \varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$. Например, функция $\psi_*(t,x,f)$, как функция вектора f, может быть неудобной для вычисления величины $\psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $l\in S$, и тогда имеет смысл заменить функцию $\psi_*(t,x,f)$ некоторой хорошей с точки зрения вычисления значений $\psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $(t,x)\in\mathcal{D}$, $l\in S$, калибровочной функцией $\psi(t,x,f)$. Эту функцию $\psi(t,x,f)$ можно попытаться выбрать дифференцируемой по f при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$, $l\in S$, а также не сильно отличающейся от $\psi_*(t,x,f)$.

4. Примеры функций $\varphi(t,x)$, удовлетворяющих условиям C.1, C.2^0, C.3^0.

Пример 1. Рассматривается конфликтно-управляемая система (2.1) из раздела 2. Пусть функция $\varphi(t,x)$ определена в некоторой выпуклой окрестности U области $\mathcal{D}$ и вогнута на U, а также удовлетворяет условию **C.1**. Тогда при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$, $f\in F(t,x)$ существует производная по направлению $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ и при этом

$$\varphi(t+\delta,x+\delta f)\leqslant\varphi(t,x)+\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)\delta,\quad \delta>0. \tag{4.1}$$

Функция $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)=\min_{h\in\bar\partial\varphi(t,x)}\langle h,(1,f)\rangle,$$

где $h=(h_t,h_x)\in\mathrm{R}^{m+1}$ и $\bar\partial\varphi(t,x)$ — супердифференциал функции $\varphi(t,x)$ в точке (t,x) (см. [31], стр. 130).

Введем в этом примере функцию

$$o_*(t,x,f;\delta)=\big(\varphi(t+\delta,x+\delta f)-\varphi(t,x)-\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)\delta\big)\delta^{-1},\ \ \delta>0.$$

Функция $\varphi(t,x)$ вместе с $o_*(t,x,f;\delta)$ удовлетворяет равенству (3.44) и при этом $o_*(t,x,f;\delta)\leqslant 0$. Отсюда следует, что для функции имеет место неравенство (3.45), где в качестве $\gamma_*(\delta)$ выбрана функция $\gamma_*(\delta)\equiv 0$ на $(0,\infty)$. Вместе с тем получили, что функция $\varphi(t,x)$ удовлетворяет условию **C.2^0.1**.

Так как $\varphi(t,x)$ вогнута на U и непрерывна в каждой точке $(t,x)\in\mathcal{D}$, то производная $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и функция $\varphi'(t,x;(1,f))$ при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$ непрерывна по f. Значит, при любых $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ существует и конечен $\varphi'\big(t,x;(1,F_l(t,x))\big)=$

$\min\limits_{f\in F_l(t,x)} \varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$. Следовательно выполняется условие **C.2⁰.2** и вместе с ним условие **C.2⁰**.

Для того, чтобы $\varphi(t,x)$ удовлетворяла и условию **C.3⁰**, наложим на нее и область $\mathcal{D}$ некоторые дополнительные ограничения.

Предполагаем, что $\mathcal{D}$ есть объединение конечного числа (пусть I) компонентов $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} \cap \Pi(\tau_i,\tau_{i+1})$, $i \in \overline{1,I}$, $\tau_1 = t_0$, $\tau_{I+1} = \vartheta$, (см. рис. 1) удовлетворяющих условиям

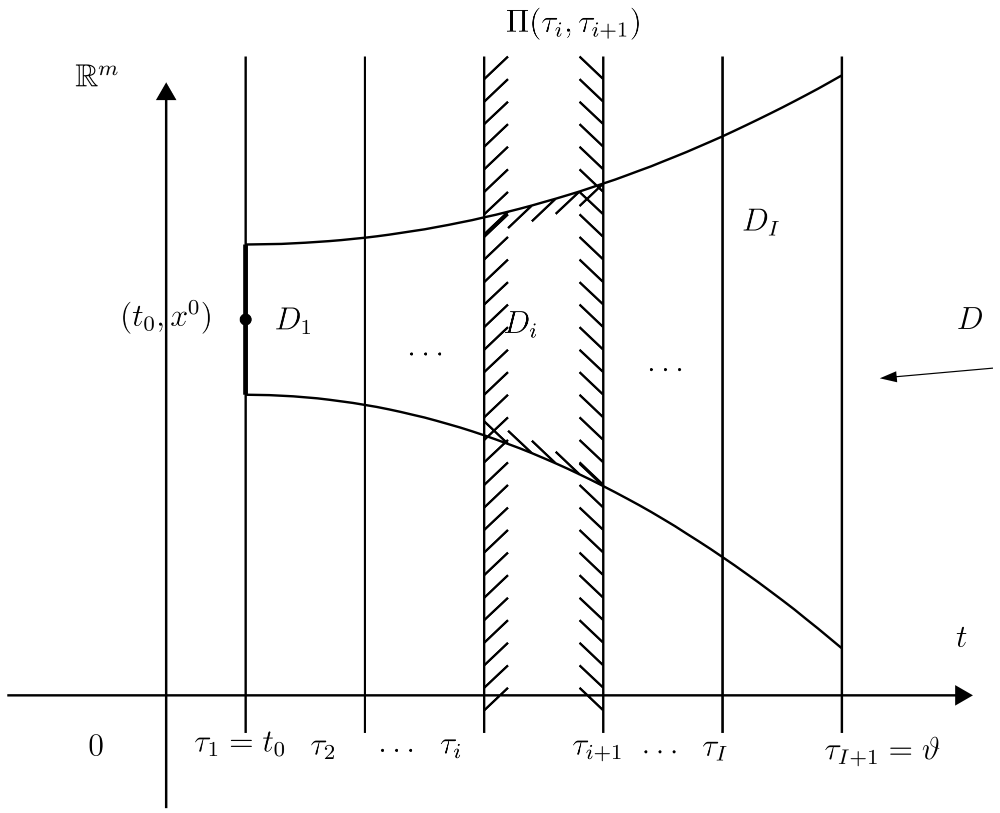

Рисунок 1.

1. На каждом $\Phi_i = \mathcal{D}_i \setminus \Pi(\tau_{i+1})$ функция $\varphi(t,x)$ имеет вид $\varphi(t,x) = \min\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \varphi_{ik}(t,x)$. При этом функции $\varphi_{ik}(t,x)$ определены и непрерывны в некоторой выпуклой открытой окрестности U_i компакта $\mathcal{D}_i$, а также обладают непрерывными по t,x,f на $U_i \times G$ производными по направлению $\varphi'_{ik}\big(t,x;(1,f)\big)$; число k_* зависит, вообще говоря, от номера i;

2. Каждое множество

$$\Phi_{ik} = \Phi_i \cap \big\{(t,x)\colon \varphi_{ik}(t,x) = \varphi(t,x)\big\} \tag{4.2}$$

гомеоморфно цилиндру $[\tau_i, \tau_{i+1}) \times B(0;1)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и каждое его сечение $\Phi_{ik}(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ гомеоморфно шару $B(0;1)$ в $\mathbb{R}^m$; (см. рис. 2);

3. Для любых k и s $(k \neq s)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ выполняется

$$\operatorname{int} \Phi_{ik}(t) \cap \operatorname{int} \Phi_{is}(t) = \varnothing.$$

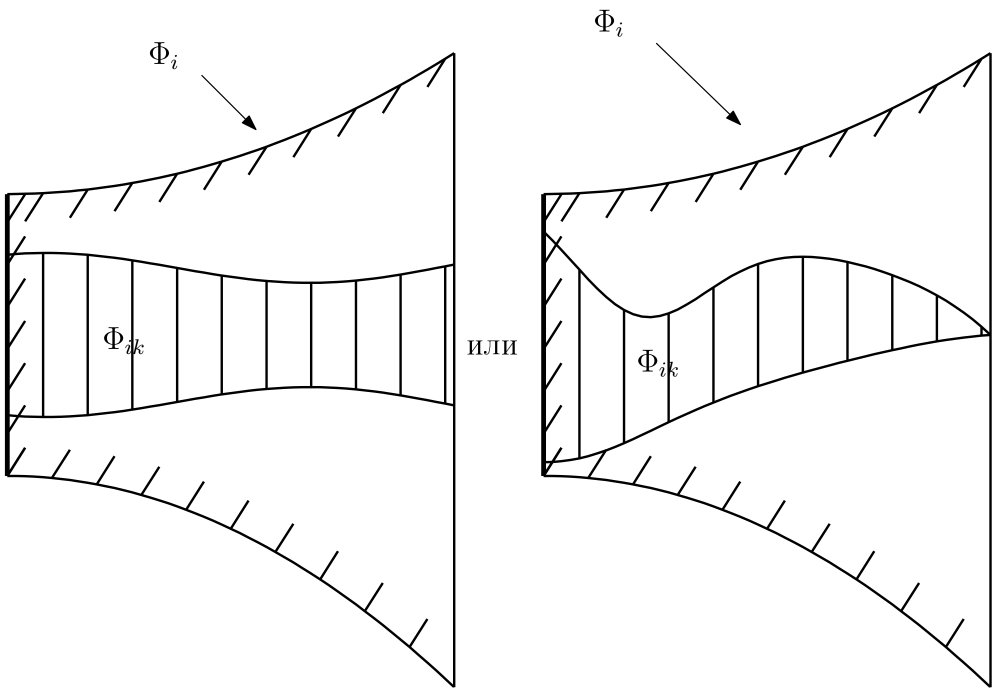

Рисунок 2.

Здесь $\Pi(\tau_i, \tau_{i+1}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}\colon t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\}$, $\Pi(\tau_{i+1}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}\colon t = \tau_{i+1}\}$, $\operatorname{int} \Phi_{ik}(t)$ — внутренность множества $\Phi_{ik}(t)$ в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим теперь некоторое множество $\Phi_{ik}(t)$, $k \in \overline{1, k_*}$, а также такую замкнутую окрестность V_{ik} множества Φ_{ik}, которая удовлетворяет включению $V_{ik} \subset U_i$.

Функция $\varphi'_{ik}\big(t,x;(1,f)\big)$ равномерно непрерывна на компакте $V_{ik}\times G$ и, значит, найдется такая функция $\varkappa(\delta)$ ($\varkappa(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что для (t_*,x_*,f_*) и (t^*,x^*,f^*) из $V_{ik}\times G$

$$\begin{gathered}\big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\big|\leqslant\\ \varkappa\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\|f_*-f^*\|\big).\end{gathered}\tag{4.3}$$

Также, по условию **C.4** (стр. 103), существует такая функция $\tilde{w}\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, что

$$d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big)\leqslant\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\tag{4.4}$$

при любых (t_*,x_*) и (t^*,x^*) из $\mathcal{D}$ и $l\in S$.

Пусть пока векторы f_* и f^* таковы, что $f_*\in F_l(t_*,x_*)$, $f^*\in F_l(t^*,x^*)$, $\|f_*-f^*\|\leqslant\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)$, где (t_*,x_*) и (t^*,x^*) из V_{ik} и $l\in S$.

Для таких f_* и f^* будет в силу (4.3), (4.4) выполнено неравенство при любом $l\in S$

$$\begin{gathered}\big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\big|\leqslant\\ \varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big).\end{gathered}\tag{4.5}$$

Учитывая монотонное убывание к нулю при $\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\downarrow 0$ функции $\varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big)$, получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\leqslant\delta$ будет

$$\varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big)\leqslant\varepsilon$$

для любого вектора $l\in S$ и, значит,

$$\big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\big|\leqslant\varepsilon\tag{4.6}$$

для любых $l\in S$ и $f_*\in F_l(t_*,x_*)$, $f^*\in F_l(t^*,x^*)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f_*-f^*\|\leqslant d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big)\leqslant\tilde{w}\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big).$$

Допустим теперь, что $f_* \in F_l(t_*, x_*)$ удовлетворяет соотношению $\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) = \varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big)$.

Из (4.6) вытекает неравенство

$$\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) \geqslant \varphi'_{ik}\big(t^*, x^*; (1, f^*)\big) - \varepsilon$$

для выбранного f_*, соответствующего вектора $f^* \in F_l(t^*, x^*)$ и $l \in S$.

Отсюда следует, что при любом $l \in S$

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) \geqslant \varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big) - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Аналогично показывается, что при любом $l \in S$

$$\varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big) \geqslant \varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) - \varepsilon. \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) следует неравенство

$$\left|\varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) - \varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big)\right| \leqslant \varepsilon \tag{4.9}$$

при любых (t_*, x_*), (t^*, x^*) из $\mathcal{D}$ $(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta)$ и любых $l \in S$.

Введем далее обозначение $\Omega_{ik}(t) = \operatorname{int} \Phi_{ik}(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Из условий 1, 2 (стр. 119) выводим, что множество $\Omega_{ik}(t)$ непрерывно по t на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ в хаусдорфовой метрике. Это означает: для любых $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $\xi > 0$ найдется такое $\rho = \rho(\xi) > 0$, что

$$d\big(\Omega_{ik}(t_*), \Omega_{ik}(t^*)\big) \leqslant \xi \tag{4.10}$$

при любых $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $|t_* - t^*| \leqslant \rho$.

Будем считать, не нарушая общности рассуждений, что $\rho(\xi) \downarrow 0$ при $\xi \downarrow 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(\varepsilon)$ (стр. (4.6)) можно выбрать $\xi > 0$ в (4.10) настолько малым, что будет справедливо неравенство

$$\rho(\xi) + \xi \leqslant \delta. \tag{4.11}$$

Следовательно, для любых $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $\xi > 0$ найдется такое $\rho = \rho(\xi) > 0$, что каковы бы ни были $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $\big(|t_* - t^*| \leqslant \rho\big)$ и $x_* \in \Omega_{ik}(t_*)$, найдется точка $x^* \in \Omega_{ik}(t^*)$, для которой справедливо

$$|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \rho(\xi) + \xi \leqslant \delta. \tag{4.12}$$

Значит, для этих (t_*, x_*) и (t^*, x^*) и любого $l \in S$ верно неравенство (4.9). Стало быть, для этих точек (t_*, x_*) и (t^*, x^*) верно неравенство

$$\Bigl|\sup_{l\in S}\varphi'_{ik}\bigl(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\bigr) - \sup_{l\in S}\varphi'_{ik}\bigl(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\bigr)\Bigr| \leqslant \varepsilon. \tag{4.13}$$

Учитывая, что точки (t_*, x_*) и (t^*, x^*) содержатся в $\operatorname{int}\Phi_{ik}$ и что $\operatorname{int}\Phi_{ik} \cap\ \operatorname{int}\Phi_{is} = \varnothing$ при любом $s \neq k$, получаем

$$\varphi'_{ik}\bigl(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\bigr) = \varphi'\bigl(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\bigr),$$

$$\varphi'_{ik}\bigl(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\bigr) = \varphi'\bigl(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\bigr).$$

Учитывая эти равенства, получаем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ найдется $\rho > 0$ такое, что для любых $x_* \in \Omega_{ik}(t_*)$ и $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(|t_* - t^*| \leqslant \rho)$ найдется точка $x^* \in \Omega_{ik}(t^*)$, для которой справедливо

$$\bigl|\varepsilon_*(t_*, x_*) - \varepsilon_*(t^*, x^*)\bigr| \leqslant \varepsilon. \tag{4.14}$$

Отсюда делаем вывод, что функция $\xi_{ik}(t) = \sup\limits_{x\in\Omega_{ik}(t)} \varepsilon_*(t, x)$ непрерывна на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ и это верно для всех i, k $(i = \overline{1, I},\ k \in \overline{1, k_*})$, в частности, и для $k = s$.

Выберем далее точку $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$, удовлетворяющую соотношению $x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)$. Для точки x_* в этом случае найдутся по меньшей мере два множества $\Phi_{ik}(t_*)$ и $\Phi_{is}(t_*)$, которым она принадлежит. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что точка x_* принадлежит только этим двум множествам. Тогда имеем равенство

$$\varphi'\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr) = \min\Bigl(\varphi'_{ik}\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr), \varphi'_{is}\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr)\Bigr)$$

Из этого равенства следует

$$\min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr) = \min\Bigl(\min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'_{ik}\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr), \min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'_{is}\bigl(t_*, x_*; (1, f_*)\bigr)\Bigr). \tag{4.15}$$

Так как $x_* \in \Phi_{ik}(t_*) = \operatorname{cl}\Omega_{ik}(t_*)$, то найдется последовательность $\{x_j\}$, содержащаяся в $\Omega_{ik}(t_*)$ и сходящаяся к x_*, то есть $x_* = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$.

Здесь $\operatorname{cl}\Omega_{ik}(t_*)$ — замыкание множества $\Omega_{ik}(t_*)$ в $\mathbb{R}^m$.

Отсюда и из непрерывной зависимости функции $\varphi'_{ik}\Big(t,x;\big(1,F_l(t,x)\big)\Big)$ от t,x следует

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_j;\big(1,F_l(t_*,x_j)\big)\Big)\to\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big) \quad \text{при } j\to\infty. \tag{4.16}$$

Принимая во внимание (4.16), получаем

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'_{ik}\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)= \sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.17}$$

Аналогично, имеет место неравенство

$$\varphi'_{is}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'_{is}\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)= \sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.18}$$

Из (4.17), (4.18) следует соотношение

$$\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)= \min\Big(\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big),\varphi'_{is}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\Big)\leqslant \min\Big(\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big),\sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)\Big),$$

то есть при любых $l\in S$

$$\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.19}$$

Следовательно, имеем

$$\sup_{l\in S}\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant \sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\ \sup_{l\in S}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big), \tag{4.20}$$

иными словами, выполняется неравенство

$$\varepsilon_*(t_*,x_*)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\varepsilon_*(t_*,z). \tag{4.21}$$

Выше мы рассмотрели точку $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$ $\bigl(x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)\bigr)$, принадлежащую ровно двум множествам вида $\Phi_{ik}(t_*)$, $k \in \overline{1,k_*}$.

Очевидно, что для точки $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$ $\bigl(x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)\bigr)$ в общем случае верны включения $x_* \in \Phi_{ik_j}(t_*)$, $j \in \overline{1,J}$, где $J \leqslant k_*$ и k_j – натуральные числа, не превосходящие числа k_*. Для такой точки (t_*, x_*) выполняется по аналогии с (4.21) неравенство

$$\varepsilon_*(t_*, x_*) \leqslant \sup_{z\in \bigcup\limits_{j\in\overline{1,J}} \Omega_{ik_j}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, z). \tag{4.22}$$

Из неравенства (4.22) следует, что при любом $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}\varepsilon_*(t_*) = \sup_{x_*\in\mathcal{D}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, x_*) = \\ \max_{k\in\overline{1,k_*}} \sup_{x_*\in\Omega_{ik}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, x_*) = \max_{k\in\overline{1,k_*}} \xi_{ik}(t_*).\end{gathered} \tag{4.23}$$

Выше (на стр. 123) было показано, что функции $\xi_{ik}(t)$, $k \in \overline{1,k_*}$, непрерывны на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Тем самым получаем, что функция $\varepsilon_*(t)$ непрерывна на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{1,I}$.

В итоге мы показали, что в рассматриваемом примере функция $\varepsilon_*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ удовлетворяет условию $\mathbf{C.3^0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев М. И. *Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрёстными связями* // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.

2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990.

3. Красовский Н. Н. *Игровые задачи динамики. I* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Смешанное управление в дифференциальной игре* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 745–747.

5. Красовский Н. Н. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука, 1970.

6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *О структуре дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 523–526.

7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

8. Красовский Н. Н. *К задаче унификации дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.

9. Красовский Н. Н. *Унификация дифференциальных игр* // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.

10. Куржанский А. Б. *Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления* // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.

11. Никольский М. С. *Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина* // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.

12. Осипов Ю. С. *Альтернатива в дифференциально–разностной игре* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 619–624

13. Петров Н. Н. *О существовании значения игры преследования* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 6. С. 1289–1291.

14. Понтрягин Л. С. *О линейных дифференциальных играх. II* // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.

15. Понтрягин Л. С. *Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры* // М.: Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 119–158.

16. Субботин А. И., Ченцов А. Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

17. Субботин А. И., Субботина Н. Н. *Функция оптимального результата в задаче управления* // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 2. С. 294–299.

18. Субботин А. И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.

19. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. *О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения.* Деп. в ВИНИТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983.

20. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. *Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления* // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. вып. 2. С. 216–222.

21. Ухоботов В. И. *Аналитическая схема построения стабильных мостов для операторов программного поглощения с инвариантными семействами множеств* // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2005. № 2 (32). С. 23–34.

22. Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. *Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления* // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.

23. Ушаков В. Н., Малёв А. Г. *К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении* // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16. №. 1. С. 199–222.

24. Филиппова Т. Ф. *Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы* // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.

25. Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* М.: Наука. 1988.

26. Guseinov H. G., Subbotin A. I., and Ushakov V. N. *Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game–Theoretical Problems of Control* // Problems Control Inform. Theory. 1985. V. 14. №. 6. P. 405–419.

27. Kurzhanski A. B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston: Birkhauser, 1997.

28. Osipov Yu. S., Kryazhimski A. V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* London: Gordon and Breach, 1995.

29. Petrosjan L. *Differential Games of Pursuit.* World Scientific: Singapore. 1993.

30. Ushakov V. N., Taras'ev A. M., Tokmantsev T. B., Uspenskii A. A. *On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time* // Journal of Mathematical Sciences. 2006. V. 139, N. 5. P. 6954–6975.

31. Ushakov V. N., Brykalov S. A., Latushkin Y. A. *Stable and unstanble sets in problems of conflict control* // Functional Differential Equations. 2008. V. 15. N. 3–4. P. 309–338.

FUNCTION DEFECT IN DIFFERENTIAL GAMES WITH TERMINAL PAY

Vladimir N. Ushakov, IMM UrO RAN, Dr. Sc., chief of the department (ushak@imm.uran.ru).
Alexandr A. Uspenskiy, IMM UrO RAN, Cand. Sc. (uspen@imm.uran.ru).

Abstract: The antagonistic differential game of two players with terminal pay function is considered. Function defect conception is suggested for functions connected with the coast of the game.

Keywords: game problem, control, conflict controlled system, Hamiltonian, stability defect, stable bridge.