ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 3

2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Учредители журнала:

Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru
url: http://mgta.krc.karelia.ru

Мортирос Сарьян «Портрет молодого Леона Петросяна»

Петросян Леон Аганесович является видным ученым в области прикладной математики, известным специалистом по теории управления, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Он автор более 140 научных работ (из них 17 монографий, три из которых переведены в США и Великобритании), внесших выдающийся вклад в отечественную и мировую науку.

Им впервые построена математически корректная теория управления многокритериальными системами, основанная на регуляризации принципов оптимальности, обеспечивающих устойчивое во времени развитие сложной системы, описываемой дифференциальными уравнениями и общими динамическими системами. Эта теория содержит строгие постановки типичных задач, условия их регуляризации, способы построения искомых управлений; в ней изучены вопросы корректности и реализуемости найденных решений. Л.А.Петросяном впервые развита теория конфликтно-управляемых процессов с неполной информацией, не сводимых к процессам с полной информацией: обоснован метод выбора случайных управляющих воздействий и построены решения типичных классов задач с запаздыванием информации.

Одновременно Л.А. Петросян являлся руководителем работ по важнейшей тематике, результаты которых были доведены до реализации в специальных системах управления, в них предлагались способы управления в задачах поиска, преследования и перехвата подвижных объектов, оптимизация распределения капиталовложений по отраслям и направлениям деятельности, оптимальное поведение в задачах охраны окружающей среды.

Л.А. Петросян родился 18 декабря 1940 года в Ленинграде. Поступил в школу в 1947 году в Ереване, которую закончил в 1957 году с серебряной медалью. Поступил в 1957 году на механико-математический факультет Ереванского университета. В 1960 году перевелся на математико-механический факультет Ленинградского университета, где с 1961 года получал Чебышевскую стипендию. Закончил университет в 1962 году.

В 1961 году выступил с докладом на 5-ом Всероссийском съезде математиков в Ленинграде. Это было обобщение теоремы Куна, которое впоследствии (через 3 года) сделал и Ауманн, что принесло ему мировую известность. В 1963 году Л.А. Петросян сделал первый в СССР доклад по теории дифференциальных игр на Всесоюзной Конференции по Теории Вероятностей в г. Тбилиси.

В 1965 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Об одном классе игр преследования» (дано полное решение в явном виде игры преследования «с линией жизни» и впервые математически сформулирована стратегия параллельного сближения и доказана ее оптимальность в игре «с линией жизни»). Это первая диссертация по дифференциальным играм в СССР. В 1967 году его аспирант Н.В. Мурзов защищает кандидатскую диссертацию по теории дифференциальных игр.

В 1968 году в Ереване проходит Первая Всесоюзная Конференция по Теории Игр, организованная при его самом активном участии (член оргкомитета из четырех членов). В 1969 году выходит статья в Германии на немецком языке по дифференциальным играм «Differenzialspiele und Verfolgungsprobleme», это первая немецкоязычная работа по дифференциальным играм. В 1972 году защищает докторскую диссертацию «Дифференциальные игры преследования».

С 1975 года и по настоящее время – Петросян Л.А. первый избранный декан факультета ПМ-ПУ. С 1987 года заведует кафедрой теории игр и статистических решений.

Среди его учеников 7 докторов и 40 кандидатов наук. С 1976 года является председателем двух специализированных Советов по присуждению ученой степени кандидата и доктора физико-математических и технических наук по вычислительной математике, математической кибернетике, вычислительным машинам, программированию и др., член редколлегий ряда российских и международных научных журналов, редактор (совместно с В.В. Мазаловым) международного ежегодника "Game Theory and Applications"(Nova Sci. Pbl., N.Y., USA), редактор международного журнала "International Game Theory Review"(World Sci. Pbl., London, Singapore). Председатель международного общества динамических игр.

Члены Редакционной коллегии поздравляют Леона Агасесовича с его Юбилеем и желают ему творческих успехов!

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 7–20

УДК 517.977
ББК 22.19

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Михаил С. Никольский
Кафедра оптимального управления
Московский государственный университет
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: mni@mi.ras.ru

В статье рассматривается один класс билинейных двумерных управляемых систем. Для них изучается вопрос о релейности оптимального по быстродействию управления. Это свойство оптимальных управлений имеет большой интерес для приложений. Релейные управления легко реализуются на практике. Получены эффективные достаточные условия, гарантирующие релейность оптимального по быстродействию управления для рассматриваемого класса управляемых систем. В качестве примера рассмотрен управляемый аналог известной в политологии модели Л. Ричардсона.

Ключевые слова: оптимальное управление, билинейные управляемые системы, релейность управления, модель Л. Ричардсона.

1. Введение

Рассмотрим двумерную билинейную управляемую систему (см., например, [1]–[3], [5]) вида:

$$\dot{x} = A(u)x, \tag{1.1}$$

где $x \in R^2$, $u \in R^4$,

$$A(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

u_i, $i = 1, 2, 3, 4$, – компоненты вектора $u \in R^4$.

Обозначения. Символом R^k, где $k \geqslant 1$, условимся обозначать k-мерное действительное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением векторов $a, b \in R^k$ вида

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i,$$

где a_i, b_i – компоненты векторов a, b, соответственно. Длина вектора $a \in R^k$ определяется формулой $|a| = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2}$. Для произвольной матрицы A размерности 2×2 с действительными элементами определим ее норму формулой

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|,$$

где $x \in R^2$. Обозначим $\exp(z) = e^z$ при $z \in R^1$. Через I обозначим совокупность индексов 1, 2, 3, 4. Условимся две измеримые по Лебегу функции со значениями в R^k и определенные на некотором отрезке $[a, b]$ называть эквивалентными, если они совпадают на $[a, b]$ с точностью до множества лебеговой меры нуль, т. е. они совпадают почти всюду на $[a, b]$.

На компоненты u_i управляющего вектора $u \in R^4$ (см. (1.1), (1.2)) наложим следующие ограничения:

$$u_i \in [p_i, q_i], \quad i \in I, \tag{1.3}$$

где для констант p_i, q_i выполнены неравенства

$$p_i \leqslant q_i, \tag{1.4}$$

причем хотя бы для одного номера $i_0 \in I$

$$p_{i_0} < q_{i_0}. \tag{1.5}$$

Множество векторов $u \in R^4$, удовлетворяющих соотношениям (1.3)–(1.5), обозначим U.

В R^2 фиксированы начальное и конечное условия:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = m, \tag{1.6}$$

где $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq m$, $t_1 > 0$. На множестве измеримых по Лебегу управлений $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, для управляемой системы (1.1) при краевых условиях (1.6) рассматривается задача оптимального быстродействия (см. [1]–[3], [5]).

Управляемая система (1.1) имеет весьма общий вид. Отметим, например, что в [2] для управляемой системы (4.23) в пункте 61 весьма подробно рассматривается задача быстродействия, связанная с теорией неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Упомянутую управляемую систему (4.23) из [2] можно считать частным случаем управляемой системы вида (1.1), (1.2), если положить

$$p_1 = q_1 = 0; \quad p_2 = q_2 = 1;$$
$$p_3 = -\beta', \quad q_3 = -\beta; \quad p_4 = -\alpha', \quad q_4 = -\alpha,$$

где константы α, α', β, β' определены в [2]. Отметим также, что в пункте 61 из [2] для управляемой системы вида (4.23) вместо одноточечного терминального множества рассматривается терминальное множество $M = \{x \in R^2\colon x_1 = 0,\ x_2 < 0\}$. Но можно перейти к случаю одноточечного терминального множества и в этой задаче с помощью следующего соображения. Пусть $\hat{u}(t)$, $t \in [0,\ \tau]$, – допустимое управление, осуществляющее оптимальное быстродействие с терминальным множеством M, а $\hat{x}(t)$, $t \in [0,\ \tau]$, – соответствующее оптимальное решение рассматриваемой управляемой системы (здесь $\tau > 0$ – время оптимального быстродействия). Тогда, полагая $m = \hat{x}(\tau)$, мы формально можем перейти к задаче оптимального быстродействия с одноточечным терминальным множеством.

Отметим еще, что к управляемой системе вида (1.1), (1.2) можно привести управляемую систему вида

$$\dot{x} = B(v)x,$$

где для элементов $b_{ij}(v)$ матрицы $B(v)$ с $v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ выполняются равенства

$$b_{ij}(v) = c_{ij} + v_{ij}d_{ij} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Здесь c_{ij}, d_{ij} – действительные константы, v_{ij} – управления, на них наложены ограничения $v_{ij} \in [r_{ij}, s_{ij}] \subset R^1$, причем $r_{ij} \leqslant s_{ij}$ и хотя бы для одной пары индексов $r_{ij}d_{ij} \neq s_{ij}d_{ij}$. Обозначим

$$u_1 = c_{11} + v_{11}d_{11}, \quad u_2 = c_{12} + v_{12}d_{12},$$
$$u_3 = c_{21} + v_{21}d_{21}, \quad u_4 = c_{22} + v_{22}d_{22}.$$

При $v_{ij} \in [r_{ij}, s_{ij}]$

$$u_1 \in \mathrm{co}\{c_{11} + p_{11}d_{11}, c_{11} + q_{11}d_{11}\},\ u_2 \in \mathrm{co}\{c_{12} + p_{12}d_{12}, c_{12} + q_{12}d_{12}\},$$
$$u_3 \in \mathrm{co}\{c_{21} + p_{21}d_{21}, c_{21} + q_{21}d_{21}\},\ u_4 \in \mathrm{co}\{c_{22} + p_{22}d_{22}, c_{22} + q_{22}d_{22}\},$$

где co означает операцию овыпукления множества. И мы пришли к системе вида (1.1).

В разделе 3, как частный случай управляемой системы (1.1), мы рассмотрим управляемый аналог модели Л. Ричардсона вооружения двух государств, известной в политологии (см. [4], [6]).

2. Анализ задачи

Приступаем к анализу поставленной задачи оптимального быстродействия. Если существует хотя бы одно допустимое управление $u = u(t)$, $t \geqslant 0$, для которого решение $x(t, u(\cdot))$ уравнения (1.1) с начальным условием x_0 при некотором $t_1 > 0$ удовлетворяет терминальному условию $x(t_1) = m$, то (см., например, [3]) существует и оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t) \in U$ с временем быстродействия $\tau > 0$. Обозначим $\Delta = [0, \tau]$. В силу принципа максимума Понтрягина (см. [1]–[3], [5]) для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\tilde{u}_1(t)\psi_1 - \tilde{u}_3(t)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -\tilde{u}_2(t)\psi_1 - \tilde{u}_4(t)\psi_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

что почти всюду на Δ выполняется следующее условие максимума:

$$\max_{u \in U} \langle A(u)\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)\rangle = \langle A(\tilde{u}(t))\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)\rangle, \tag{2.2}$$

где $\tilde{x}(t) = x(t,\, \tilde{u}(\cdot))$. Из определения множества U и соотношения максимума (2.2) почти всюду на Δ вытекают следующие соотношения максимума:

$$\max_{u_1 \in [p_1,\, q_1]} (u_1 \tilde{x}_1(t) \tilde{\psi}_1(t)) = \tilde{u}_1(t) \tilde{x}_1(t) \tilde{\psi}_1(t), \tag{2.3}$$

$$\max_{u_2 \in [p_2,\, q_2]} (u_2 \tilde{x}_2(t) \tilde{\psi}_1(t)) = \tilde{u}_2(t) \tilde{x}_2(t) \tilde{\psi}_1(t), \tag{2.4}$$

$$\max_{u_3 \in [p_3,\, q_3]} (u_3 \tilde{x}_1(t) \tilde{\psi}_2(t)) = \tilde{u}_3(t) \tilde{x}_1(t) \tilde{\psi}_2(t), \tag{2.5}$$

$$\max_{u_4 \in [p_4,\, q_4]} (u_4 \tilde{x}_2(t) \tilde{\psi}_2(t)) = \tilde{u}_4(t) \tilde{x}_2(t) \tilde{\psi}_2(t)). \tag{2.6}$$

Заметим, что, если при данном $i \in I$ выполняется равенство $p_i = q_i$, то $\tilde{u}_i(t) \equiv p_i$ при $t \in \Delta$. Поэтому нам интересны лишь те номера $i \in I$, для которых $p_i < q_i$. Отметим также следующее обстоятельство: если оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на Δ изменить на множестве лебеговой меры нуль, то это новое управление будет эквивалентным $\tilde{u}(t)$ на Δ и останется оптимальным. Этот факт важен для приложений. Он позволяет довольно часто «упростить» вид оптимального управления за счет изменения исходного $\tilde{u}(t)$ на множестве лебеговой меры нуль из Δ.

Для дальнейшего будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \notin [p_2,\, q_2]$, *где* $p_2 \leqslant q_2$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_1 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) = U$, $t \in \Delta$, *для первой компоненты* $x_1(t,\, u(\cdot))$ *решения* $x(t,\, u(\cdot))$ *уравнения* (1.1) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_1. *Если добавочно выполняется условие согласования: при* $p_2 > 0$ *выполняется неравенство* $p_3 \geqslant 0$, *а при* $q_2 < 0$ *выполняется неравенство* $q_3 \leqslant 0$, *то можно положить* $\theta_1 = 1$.

Доказательство. Фиксируем измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, и займемся изучением распределения нулей функции $x_1(t) = x_1(t,\, u(\cdot))$ на Δ. Пусть $x_1(\alpha) = 0$, где $\alpha \in [0,\, \tau)$. Так как $x_0 \neq 0$, то решение уравнения (1.1) $x(t) = x(t,\, u(\cdot)) \neq 0$ при $t \in \Delta$ и следовательно $x_2(\alpha) \neq 0$. Из сказанного и из соотношений (1.1), (1.2) вытекает с помощью известной формулы Коши, что при $t \in [\alpha,\, \tau]$

$$x_1(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} f(t,\, s)u_2(s)x_2(s)\, ds, \tag{2.7}$$

$$f(t,\, s) = \exp\biggl(\int\limits_{s}^{t} u_1(r)\, dr\biggr), \tag{2.8}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега.

Для дальнейшего будет полезен следующий факт: при $u \in U$ норма матрицы $A(u)$ (см. (1.2)) ограничена сверху некоторой достаточно большой константой $\beta > 0$, т. е.

$$\|A(u)\| \leqslant \beta \quad \forall u \in U. \tag{2.9}$$

Например, можно положить

$$\beta = \sum_{i=1}^{4} \max(|p_i|,\, |q_i|).$$

Из (2.9) с помощью известных фактов (см. гл. IV, § 4 [7]) получаем при $t \in \Delta$ неравенства

$$e^{-\beta t}|x_0| \leqslant |x(t)| \leqslant e^{\beta t}|x_0|. \tag{2.10}$$

Из равенства $x_1(\alpha) = 0$ и соотношений (2.10) вытекает неравенство

$$|x_2(\alpha)| \geqslant e^{-\beta\tau}|x_0|. \tag{2.11}$$

Из соотношений (1.1), (2.9)–(2.11) следует, что при $t \in [\alpha,\, \gamma(\alpha))$ выполняется неравенство $|x_2(t)| > 0$, где

$$\gamma(\alpha) = \min\left\{\tau,\, \alpha + \frac{e^{-2\beta\tau}}{\beta}\right\}. \tag{2.12}$$

Так как по предположению леммы $0 \notin [p_2,\, q_2]$, то в силу сказанного и формул (2.7), (2.8) получаем, что при $t \in (\alpha,\, \gamma(\alpha))$ $|x_1(t)| > 0$. Из приведенного анализа вытекает, что функция $x_1(t)$ имеет ограниченное число нулей на Δ и их число независимо от выбора измеримого управления $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, может быть оценено сверху величиной (см. (2.12))

$$\theta_1 = [\beta\tau e^{2\beta\tau}] + 1,$$

где $[z]$ означает целую часть числа $z \geqslant 0$.

Теперь изучим, что добавочно дает нам условие согласования (см. формулировку леммы). Пока рассмотрим случай, когда $p_2 > 0$, $p_3 \geqslant 0$.

Пусть, как выше, $x_1(\alpha) = 0$, где $\alpha \in [0, \tau)$. Обозначим через α_1 наименьший нуль функции $x_1(t)$ на $[0, \tau]$ (он, очевидно, существует). Допустим, что на $(\alpha_1, \tau]$ существует другой нуль α_3 функции $x_1(t)$. В силу вышесказанного на $[\alpha_1, \tau]$ существует минимальный элемент α_4 в множестве таких точек α_3, причем $\alpha_4 \in (\alpha_1, \tau]$. Если $x_2(\alpha_1) > 0$, то $x_2(t) > 0$ при $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало́ и $\alpha_1 + \delta \leqslant \tau$. В этой ситуации из формулы (2.7) при $\alpha = \alpha_1$ получаем, что $x_1(t) > 0$ при $t \in (\alpha_1, \alpha_4)$. Далее, с помощью известной формулы Коши, применяемой ко второму уравнению из (1.1), получаем при $t \in [\alpha_1, \tau]$ следующее соотношение:

$$x_2(t) = g(t, x_1)x_2(\alpha_1) + \int\limits_{\alpha_1}^{t} g(t, s)u_3(s)x_1(s)\, ds, \tag{2.13}$$

где

$$g(t, s) = \exp\biggl(\int\limits_{s}^{t} u_4(r)\, dr\biggr). \tag{2.14}$$

Отсюда и из неравенства $p_3 \geqslant 0$ вытекает, что $x_2(t) > 0$ при $t \in (\alpha_1, \alpha_4]$. Применяя формулу (2.7) при $\alpha = \alpha_1$, теперь нетрудно показать, что $x_1(\alpha_4) > 0$, и мы приходим к противоречию с определением величины α_4. Таким образом, правее α_1 на $(\alpha_1, \tau]$ у функции $x_1(t)$ нулей нет. Если $x_2(\alpha_1) < 0$, то $x_2(t) < 0$ при $t \in [\alpha_1, \alpha_1 + \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало́ и $\alpha_1 + \delta \leqslant \tau$. В этой ситуации с помощью формул (2.13), (2.14) обосновывается (по аналогии с вышесказанным), что $x_2(t) < 0$ при $t \in (\alpha_1, \alpha_4]$. Применяя формулу (2.7) при $\alpha = \alpha_1$, получаем, что $x_1(\alpha_4) < 0$. Таким образом, и в этой ситуации правее α_1 на $(\alpha_1, \tau]$ у функции $x_1(t)$ нулей нет. Из сказанного получаем, что при $p_2 > 0$, $p_3 \geqslant 0$ можно положить $\theta_1 = 1$. Случай $q_2 < 0$, $q_3 \leqslant 0$ рассматривается аналогично с очевидными изменениями. И в этом случае можно положить $\theta_1 = 1$. $\square$

Аналогично Лемме 2.1 с очевидными изменениями доказывается

Лемма 2.2. *Пусть* $0 \notin [p_3,\, q_3]$, *где* $p_3 \leqslant q_3$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_2 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для второй компоненты* $x_2(t,\, u(\cdot))$ *решения* $x(t,\, u(\cdot))$ *уравнения* (1.1) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_2. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $p_3 > 0$ *выполняется неравенство* $p_2 \geqslant 0$, *а при* $q_3 < 0$ *выполняется неравенство* $q_2 \leqslant 0$, *то можно положить* $\theta_2 = 1$.

Рассмотрим далее при $t \in \Delta$ следующую систему дифференциальных уравнений (ср. с (2.1)):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -u_1(t)\psi_1 - u_3(t)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -u_2(t)\psi_1 - u_4(t)\psi_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $u_i(t) \in [p_i,\, q_i]$ – произвольная измеримая функция на Δ. По аналогии с Леммой 2.1 доказывается следующая

Лемма 2.3. *Пусть* $0 \notin [-q_3,\, -p_3]$ (*т. е.* $0 \notin [p_3,\, q_3]$), *где* $p_3 \leqslant q_3$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_3 \geqslant 0$, *независящее от начального вектора* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для первой компоненты* $\psi_1(t,\, u(\cdot))$ *решение* $\psi(t,\, u(\cdot))$ *системы уравнений* (2.15) *с начальным условием* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_3. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $q_3 < 0$ *выполняется неравенство* $q_2 \leqslant 0$, *а при* $p_3 > 0$ *выполняется неравенство* $p_2 \geqslant 0$, *то можно положить* $\theta_3 = 1$.

По аналогии с Леммой 2.2 доказывается

Лемма 2.4. *Пусть* $0 \notin [-q_2,\, -p_2]$ (*т. е.* $0 \notin [p_2,\, q_2]$). *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_4 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для второй компоненты* $\psi_2(t,\, u(\cdot))$ *решения* $\psi(t,\, u(\cdot))$ *уравнения (2.15) с произвольным начальным условием* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_4. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $q_2 < 0$ *выполняется неравенство* $q_3 \leqslant 0$, *а при* $p_2 > 0$ *выполняется неравенство* $p_3 \geqslant 0$, *то можно положить* $\theta_4 = 1$.

При использовании принципа максимума Понтрягина в изучаемой нами оптимизационной задаче (см. соотношения (2.2)–(2.6)) полезно озаботиться достаточными условиями, которые гарантируют, что функции $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)$ имеют на Δ лишь конечное число нулей. При выполнении таких условий, изменяя, если надо, компоненты оптимального управления $\tilde{u}_i(t)$, $i \in I$, на множествах лебеговой меры нуль из Δ (при этом решение $\tilde{x}(t)$ не меняется), получим эквивалентные кусочно-постоянные функции, принимающие лишь крайние значения p_i, q_i, $i \in I$ с конечным числом точек разрыва. Такого рода информация очень полезна для приложений.

Используя Леммы 2.1–2.4 нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2.5. *a) Если* $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_1 + \theta_3$ *нулей.*

b) Если $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_2+\theta_3$ *нулей.*

c) Если $0 \notin [p_2, q_2]$, *то функция* $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_1+\theta_4$ *нулей.*

d) Если $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_2 + \theta_4$ *нулей.*

Из принципа максимума Понтрягина (см. соотношения (2.2)–(2.6)) и Леммы 2.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *a) При выполнении условий*: $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_1(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_1, q_1 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_1 + \theta_3$ *точек разрыва.*

b) При выполнении условия $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_2(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_2, q_2 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_2 + \theta_3$ *точек разрыва.*

c) При выполнении условия $0 \notin [p_2, q_2]$ *функция* $\tilde{u}_3(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_3, q_3 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_1 + \theta_4$ *точек разрыва.*

d) При выполнении условий $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_4(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_4, q_4 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_2 + \theta_4$ *точек разрыва.*

Замечание 2.1. Если для некоторого номера $i \in I$ выполняется равенство $p_i = q_i$, то крайние значения для управления u_i сливаются в одну точку и $\tilde{u}_i(t) \equiv p_i$ при $t \in \Delta$.

Используя Теорему 2.1 и Леммы 2.1–2.5, можно доказать следующую теорему, уточняющую Теорему 2.1.

Теорема 2.2. *1) Пусть либо* $p_2 > 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_1 = 1$, $\theta_3 = 1$, $\theta_1 + \theta_3 = 2$.
2) Пусть либо $p_2 \geqslant 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 \leqslant 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 1$, $\theta_2 + \theta_3 = 2$.
3) Пусть либо $p_2 > 0$ *и* $p_3 \geqslant 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 \leqslant 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_4 = 1$, $\theta_2 + \theta_4 = 2$.
4) Пусть либо $p_2 > 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_4 = 1$, $\theta_2 + \theta_4 = 2$.

Замечание 2.2. A) При выполнении условий пункта 1) Теоремы 2.2 в пункте a) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_1 + \theta_3 = 2$. B) При выполнении условий пункта 2) Теоремы 2.2 в пункте в) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_2 + \theta_3 = 2$. C) При выполнении условий пункта 3) Теоремы 2.2 в пункте c) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_1 + \theta_4 = 2$. D) При выполнении условий пункта 4) Теоремы 2.2 в пункте d) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_2 + \theta_4 = 2$.

Замечание 2.3. При выполнении условий: либо $p_2 > 0$ и $p_3 > 0$, либо $q_2 < 0$ и $q_3 < 0$ можно положить $\theta_i = 1$, где $i \in I$, и в силу Замечания 2.2 любая из функций $\tilde{u}_i(t)$, $i \in I$, оказывается эквивалентной на Δ кусочно-постоянной функции, принимающей крайние значения p_i, q_i, где $i \in I$, и имеющей не более 2-х точек разрыва.

3. Пример

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим управляемый аналог модели Л. Ричардсона вооружений двух государств (см., например, [6]). Чтобы была более понятна физическая суть этого управляемого аналога, рассмотрим сначала неуправляемый нестационарный аналог модели Л. Ричардсона вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)x_2 - bx_1 \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - dx_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x_1(t) \geqslant 0$ – затраты на вооружение, сделанные первым государством к текущему моменту $t \geqslant 0$, выраженные в деньгах, $x_2(t) \geqslant 0$ – затраты на вооружения, сделанные вторым государством к текущему моменту $t \geqslant 0$, выраженные в деньгах, $a(t)$ и $c(t)$ – измеримые по Лебегу положительные функции при $t \geqslant 0$, b, d – положительные константы. Члены $-bx_1$, $-dx_2$ в (3.1) моделируют устаревание и износ вооружений 1-го и 2-го государств, соответственно. Члены $a(t)x_2$, $c(t)x_1$ моделируют скорости вкладов в свое вооружение 1-го и 2-го государств, соответственно. Эти члены пропорциональны соответственно расходам на вооружение другого государства. Собственно, в этом и состоит основная идея модели Л. Ричардсона, подтвержденная статистическими данными (см. [6]). Коэффициенты b, d не зависят от политики государств. Коэффициенты же $a(t)$, $c(t)$ зависят соответственно от политик 1-го и 2-го государств. Мы остановимся на случае, когда политики обоих государств имеют союзный характер и они согласованно добиваются определенной цели. В такой ситуации разумно положить

$$a(t) = u_2(t) \in [p_2,\, q_2], \quad c(t) = u_3(t) \in [p_3,\, q_3], \tag{3.2}$$

где $0 < p_2 < q_2$, $0 < p_3 < q_3$, причем функции $u_2(t)$, $u_3(t)$, $t \geqslant 0$, измеримы по Лебегу. Мы пришли к билинейной управляемой системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -bx_1 + u_2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_3 x_1 - dx_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где на u_2, u_3 наложены ограничения (3.2). Положим также $u_1 = -b$, $[p_1,\, q_1] = \{-b\}$, $u_4 = -d$, $[p_4,\, q_4] = \{-d\}$ и получим управляемую систему вида (1.1), (1.2).

Для управляемой системы (3.3) с указанными ограничениями на управляющий вектор $u \in R^4$ рассмотрим задачу оптимального быстродействия (см. раздел 1) с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = m,$$

где $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq m$ и компоненты векторов x_0, m неотрицательны, в классе измеримых функций $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$.

Для этой задачи оптимального быстродействия важной является следующая лемма.

Лемма 3.1. *При произвольном начальном векторе x_0 с неотрицательными компонентами x_{01}, x_{02} и произвольном измеримом управлении $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, для компонент соответствующего решения $x_1(t,\ u(\cdot))$, $x_2(t,\ u(\cdot))$ системы дифференциальных уравнений* (3.3) *при $t \geqslant 0$ выполняются неравенства*

$$x_1(t, u(\cdot)) \geqslant 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Если добавочно $x_0 \neq 0$, то при $t > 0$ выполняются неравенства

$$x_1(t, u(\cdot)) > 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) > 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Обозначим $x_1(t) = x_1(t, u(\cdot)), \quad x_2(t) = x_2(t, u(\cdot))$.

Тогда с помощью известной формулы Коши из (3.3) получаем при $t \geqslant 0$ следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_1(t, 0)x_{01} + \int\limits_0^t f_1(t, s)u_2(s)x_2(s)\, ds \\ x_2(t) &= g_1(t, 0)x_{02} + \int\limits_0^t g_1(t, s)u_3(s)x_1(s)\, ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и (ср. с (2.8), (2.14))

$$f_1(t, s) = \exp(-b(t-s)), \quad g_1(t, s) = \exp(-d(t-s)). \tag{3.7}$$

Применяя метод последовательных приближений к системе интегральных уравнений (3.6), (3.7) и используя неравенства $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, нетрудно обосновать искомые неравенства (3.4).

Если добавочно $x_0 \neq 0$, то по крайней мере одна из величин x_{01}, x_{02} больше нуля. Пусть, например, $x_{01} > 0$. Тогда из соотношений (3.4), (3.6), (3.7) получаем, что $x_1(t,\ u(\cdot)) > 0$ при $t \geqslant 0$. Учитывая это обстоятельство, из (3.6), (3.7) теперь нетрудно получить, что $x_2(t, u(\cdot)) > 0$ при $t > 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $x_{02} > 0$. Из сказанного вытекают неравенства (3.5) при $t > 0$. □

Из Леммы 3.1 следует, что в рассматриваемой в этом пункте задаче оптимального быстродействия фазовые ограничения $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, имеющие понятный физический смысл, выполняются при $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$ и $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ автоматически.

Переходим к изучению компонент $\tilde{u}_2(t)$, $\tilde{u}_3(t)$ оптимального управления $\tilde{u}(t)$ на Δ. В связи с соотношениями максимума (2.4), (2.5) полезно изучить распределение нулей функций $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$ на Δ. Из Леммы 3.1 и условий $x_0 \neq 0$, $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$ вытекает, что $\tilde{x}_2(t) > 0$ при $t \in (0, \tau]$. Из Леммы 2.3 и условий $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ вытекает, что функция $\tilde{\psi}_1(t)$ на Δ имеет не более одного нуля. Из сказанного получаем, что функция $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$ имеет при $t \in (0, \tau]$ не более одного нуля. Отсюда и в силу соотношения максимума (2.4) следует, что функция $\tilde{u}_2(t)$ эквивалентна на Δ кусочно-постоянной функции, имеющей на Δ не более одной точки разрыва и принимающей значения из множества $\{p_2, q_2\}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для функции $\tilde{u}_3(t)$ и обосновать, что функция $\tilde{u}_3(t)$ эквивалентна на Δ кусочно-постоянной функции, имеющей на Δ не более одной точки разрыва и принимающей значения из множества $\{p_3, q_3\}$.

4. Заключение

В этой статье для задачи оптимального быстродействия для одного класса двумерных управляемых систем были получены эффективные достаточные условия, гарантирующие эквивалентность оптимального управления $\tilde{u}(t)$ на отрезке Δ кусочно-постоянному оптимальному же управлению $\hat{u}(t)$ с конечным числом точек разрыва и принимающему значения в множестве вершин выпуклого многогранника U. Такого рода свойство оптимального управления называют иногда свойством релейности. Оно изучалось для различных управляемых систем в работах С. А. Вахрамеева (см., например, [8]). Отметим также, что результаты пункта 3 развивают исследования пункта 2 из [4].

Благодарности

Приношу благодарность Ф. П. Васильеву, А. С. Анитипину, Н. Л. Григоренко и Е. Н. Хайлову за интерес и внимание к моей работе.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2004.

2. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления.* М.: Наука, 1969.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. *Основы оптимального управления.* М.: Наука, 1972.
4. Никольский М. С. *Некоторые задачи оптимального управления, связанные с моделью Л.Ричардсона гонки вооружения государств* // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов. 2009. Вып. 4. М.: Макс - Пресс. С. 113–123.
5. Понтрягин Л. С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1969.
6. Саати Т. П. *Математические модели конфликтных ситуаций.* М.: Сов. Радио, 1977.
7. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
8. Vakhrameev S. A. *Geometrical and Topological Methods in Optimal Control Theory* // J. on Mathematical Sciences. Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys. 1995. V. 76, N 5.

ABOUT THE TIME-OPTIMAL PROBLEM FOR ONE CLASS OF TWO-DIMENSIONAL BILINEAR CONTROLLED SYSTEMS

Mikhail S. Nikolskii, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., Prof. (mni@mi.ras.ru).

Abstract: In the paper one class of bilinear two-dimensional controlled systems is considered. For these systems the bang-bang property of time-optimal control is studied. The bang-bang property is very interesting for applications, because bang-bang controls are very suitable for realization in practice. In the paper some efficient conditions for bang-bang property of time-optimal controls are received. In the capacity as example, it was considered some controlled analog of the L. Richardson model which is well-known in political science.

Keywords: optimal control, bilinear controlled systems, bang-bang property of control, model of L. Richardson.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 21–40

УДК 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВАЯ КООПЕРАЦИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ИГРАХ

Елена М. Парилина
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: elena.parilina@gmail.com

В работе рассматриваются стохастические игры со случайным моментом окончания в классе чистых стационарных стратегий. Построен кооперативный вариант для такого класса стохастических игр, найдено кооперативное решение. Получены условия устойчивой кооперации для стохастических игр. Принципы устойчивой кооперации включают три условия: позиционную состоятельность (динамическую устойчивость), стратегическую устойчивость, защиту от иррационального поведения. В работе представлен пример, для которого найдено кооперативное соглашение, и проверены условия устойчивой кооперации.

Ключевые слова: кооперативная стохастическая игра, позиционная состоятельность, динамическая устойчивость, процедура распределения дележа, стратегическая устойчивость, условие защиты от иррационального поведения.

1. Введение

Стохастические игры представляют собой динамический игровой процесс. Если в игре возможна кооперация, то важным её свойством является устойчивость в динамике. В работе [5] рассматриваются три принципа устойчивой кооперации: состоятельность во времени (динамическая устойчивость), стратегическая устойчивость и защита от иррационального поведения.

Впервые понятие динамической устойчивости было введено Л. А. Петросяном в 1977 г. для дифференциальных игр [2]. Это условие оказалось актуальным и для стохастических игр [13]. В настоящей работе рассматриваются стохастические игры в стационарных стратегиях с конечным числом игровых элементов, любой из которых может реализоваться на каждом шаге игры. При таком способе задания стохастических игр состоятельность кооперативного соглашения должна выполняться в каждой позиции (игровом элементе) игрового процесса. То есть для кооперативного соглашения предъявляется требование позиционной состоятельности. Позиционная состоятельность кооперативного соглашения позволяет игрокам на каждом шаге игры рассчитывать на получение дележа, удовлетворяющего одному и тому же принципу оптимальности.

Условие стратегической устойчивости гарантирует наличие равновесия по Нэшу в регуляризованной игре с выигрышами, которые игроки рассчитывают получить в результате кооперативного соглашения. Регуляризация игры строится на основе исходной стохастической игры с помощью процедуры распределения дележа [4]. Условия стратегической устойчивости для стохастических игр были также рассмотрены в работах [1,11].

В случае, когда кооперация распадается по каким-либо причинам (например, какой-либо из игроков (группа игроков) решает расторгнуть соглашение на некотором шаге игры), то игроки могут гарантировать себе ожидаемый выигрыш не меньше, чем, если бы они действовали самостоятельно с начала игры, если выполнено условие защиты от иррационального поведения [15],

Впервые понятие стохастических игр было введено Шепли в 1953 г. [14]. В настоящее время исследованием стохастических игр посвящено множество работ, некоторые из них – см. [3,9,12,16]. Широкое применение стохастические игры нашли в области моделирования телекоммуникационных систем [6,7] и в экономике [8].

2. Стохастические игры в стационарных стратегиях

Стохастическая игра происходит следующим образом. Игра начинается со случайного хода, т. е. с выбора начального состояния игры (игрового элемента), с которого начнется игровой процесс. На каждом шаге стохастической игры реализуется один игровой элемент из конечного множества, который представляет собой одновременную игру n лиц. В игровом элементе реализуется некоторая ситуация, в зависимости от которой с некоторой вероятностью осуществляется переход в следующий игровой элемент. На каждом шаге игра может закончиться с некоторой вероятностью, при условии, что она не закончилась на предыдущем шаге. Предполагается, что эта вероятность не зависит от номера шага.

Введем некоторые обозначения:

$N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков;

$\Gamma^j = \langle N, X_1^j, \dots, X_n^j, K_1^j, \dots, K_n^j \rangle$ – j-ый игровой элемент (одновременная игра n лиц в нормальной форме), множество игроков N одинаково для всех Γ^j, $j = 1, \dots, t$, X_i^j – конечное множество стратегий i - го игрока $(i \in N)$ в Γ^j, $K_i^j \left(x_1^j, \dots, x_n^j\right) = K_i^j(x^j)$ – неотрицательная функция выигрыша i-го игрока в игровом элементе Γ^j, $j = 1, \dots, t$;

$p(j, k; x^j)$ – вероятность того, что реализуется игровой элемент Γ^k, если на предыдущем шаге (в игровом элементе Γ^j) реализовалась ситуация $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$. Очевидно, что $p(j, k; x^j) \geqslant 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{t} p(j, k; x^j) = 1$ для всех $x^j \in X^j = \prod\limits_{i \in N} X_i^j$ и для любых $j, k = 1, \dots, t$;

$q \in (0, 1]$ – вероятность окончания стохастической игры на шаге k при условии, что игра не закончилась на шаге $k - 1$;

$\pi^0 = (\pi_1^0, \dots, \pi_t^0)$ – вектор начального распределения вероятностей на множестве игровых элементов $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$, где π_j^0 $(j = 1, \dots, t)$ – вероятность того, что на первом шаге игры реализуется игровой элемент Γ^j, $\sum\limits_{j=1}^{t} \pi_j^0 = 1$;

$\Xi_i = \{\eta_i\}$ – множество чистых стационарных стратегий i-го игрока. При использовании игроками стационарных стратегий выбор стратегии в каждом игровом элементе из множества $\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^t\}$ на каждом шаге зависит только от того, какой игровой элемент реализуется на этом шаге, т. е. $\eta_i : \Gamma^j \longmapsto x_i^j \in X_i^j, j = 1, \dots, t$.

Определение 2.1. *Стохастической игрой G с конечным числом игровых элементов назовем набор*

$$G = \left\langle N, \left\{\Gamma^j\right\}_{j=1}^{t}, \{\Xi_i\}_{i\in N}, q, \pi^0, \left\{p(j,k;x^j)\right\}_{j=\overline{1,t}, k=\overline{1,t}, x^j\in \prod\limits_{l=1}^{n} X_l^j} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. *Стохастической подыгрой G^j, $j = 1,\ldots,t$, с конечным числом игровых элементов назовем стохастическую игру (2.1) с вектором $\pi^0 = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (с единицей на j-ом месте), т. е. стохастическую игру, с вероятностью 1 начинающуюся с игрового элемента Γ^j.*

Замечание 2.1. Стохастическая игра в Определении 2.1 для любой ситуации в стационарных стратегиях $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ представляет собой конечный марковский процесс с конечным множеством состояний $\{\Gamma^1,\ldots,\Gamma^t\}$, вектором начального распределения вероятностей π^0 и матрицей переходных вероятностей $\{p(j,k;x^j)\}_{j=\overline{1,t},k=\overline{1,t},x^j\in X^j}$.

Замечание 2.2. Момент окончания стохастической игры является случайным и подчиняется геометрическому закону распределения вероятностей. Следовательно, вероятность того, что стохастическая игра G закончится на шаге k $(k = 1,2,\ldots)$ равна $(1-q)^{k-1}q$.

В качестве выигрыша игрока будем рассматривать математическое ожидание выигрыша. Обозначим через $\overline{E}_i$ математическое ожидание выигрыша i-го игрока в игре G и через E_i^j математическое ожидание выигрыша i-го игрока в подыгре G^j. Сформируем вектор $E_i(\eta) = (E_i^1(\eta),\ldots,E_i^t(\eta))$.

Для математического ожидания выигрыша i-го игрока в подыгре G^j запишем рекуррентное уравнение:

$$E_i^j(\eta) = K_i^j(x^j) + (1-q)\sum_{k=1}^{t} p(j,k;x^j)E_i^k(\eta) \quad (2.2)$$

при условии, что $\eta(\Gamma^j) = x^j$, т. е. $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot),\ldots,\eta_n(\cdot))$, где $\eta_i(\Gamma^j) = x_i^j \in X_i^j$, $x^j = (x_1^j,\ldots,x_n^j)$ для всех $j = 1,\ldots,t$, $i \in N$.

Так как стохастическая игра G с конечным числом игровых элементов рассматривается в классе чистых стационарных стратегий, определенных выше, и множество одновременных игр $\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^t\}$ конечно, то достаточно рассмотреть t подыгр $G^1, \dots, G^t$, начинающихся с игровых элементов $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$ соответственно.

В дальнейшем под $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot), \dots, \eta_n(\cdot))$ будем понимать ситуацию в чистых стационарных стратегиях, такую что $\eta_i(\Gamma^j) = x_i^j \in X_i^j$ где $j = 1, \dots, t, \quad i \in N$. Очевидно, что стационарная стратегия i-го игрока в игре G будет являться стационарной стратегией в любой подыгре $G^1, \dots, G^t$.

Матрица переходных вероятностей в стохастической игре G при реализации стационарной стратегии $\eta(\cdot)$ имеет вид

$$\Pi(\eta(\cdot)) = \begin{pmatrix} p(1,1;x^1) & \dots & p(1,t;x^1) \\ p(2,1;x^2) & \dots & p(2,t;x^2) \\ \dots & \dots & \dots \\ p(t,1;x^t) & \dots & p(t,t;x^t) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Для математического ожидания выигрыша i-го игрока в любой подыгре стохастической игры G при реализации ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta(\cdot) \in \prod\limits_{i\in N} \Xi_i$ можно записать рекуррентное уравнение:

$$E_i(\eta(\cdot)) = K_i(\eta(\cdot)) + (1-q)\Pi(\eta(\cdot))E_i(\eta(\cdot)), \tag{2.4}$$

где $K_i(\eta(\cdot)) = (K_i^1(x^1), \dots, K_i^t(x^t))$, где $K_i^j(x^j)$ — это значение функции выигрыша i-го игрока в игровом элементе Γ^j при условии, что в этом игровом элементе реализовалась ситуация $x^j \in X^j$.

Уравнение (2.4) эквивалентно следующему уравнению:

$$E_i(\eta(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\eta(\cdot)))^{-1}\, K_i(\eta(\cdot)), \tag{2.5}$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица размерности $t \times t$.

Для стохастической игры G математическое ожидание выигрыша i-го игрока, которое обозначим через $\overline{E}_i(\eta(\cdot))$, может быть найдено по формуле

$$\overline{E}_i(\eta(\cdot)) = \pi^0 E_i(\eta(\cdot)). \tag{2.6}$$

3. Кооперация в стохастических играх

Предположим, что игроки из множества N решили объединиться с целью получения максимального суммарного выигрыша. Обозначим через $\overline{\eta}(\cdot) = (\overline{\eta}_1(\cdot), \ldots, \overline{\eta}_n(\cdot))$ ситуацию в чистых стационарных стратегиях, максимизирующую сумму математических ожиданий выигрышей игроков в стохастической игре G, т. е.

$$\max_{\eta(\cdot)\in \prod\limits_{i\in N} \Xi_i} \sum_{i\in N} \overline{E}_i(\eta(\cdot)) = \sum_{i\in N} \overline{E}_i(\overline{\eta}(\cdot)). \tag{3.1}$$

Ситуацию $\overline{\eta}(\cdot)$ будем называть кооперативным решением.

Для построения кооперативного варианта стохастической игры определим характеристическую функцию $\overline{V}(S)$ в стохастической игре G следующим образом:

$$\overline{V}(S) = \pi^0 V(S) \tag{3.2}$$

для любой коалиции $S \subset N$, где $V(S) = (V^1(S), \ldots, V^t(S))$, $V^j(S)$ – значение характеристической функции для коалиции S, рассчитанное для подыгры G^j.

Для значения $V(N)$ можно записать уравнение Беллмана в виде:

$$V(N) = \max_{\eta(\cdot)\in \prod\limits_{i\in N} \Xi_i} \left[\sum_{i\in N} K_i(\eta(\cdot)) + (1-q)\Pi(\eta(\cdot))V(N)\right] = \\ = \sum_{i\in N} K_i(\overline{\eta}(\cdot)) + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(N),$$

где $\overline{\eta}(\cdot)$ — ситуация в чистых стационарных стратегиях, которая удовлетворяет условию (3.1).

Значения $V(N)$ можно найти из уравнения

$$V(N) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i\in N} K_i(\overline{\eta}(\cdot)). \tag{3.3}$$

Для вычисления значений характеристической функции $V^j(S)$, $j = 1,\ldots,t$, для каждой подыгры G^j определим вспомогательную стохастическую игру G^j_S с нулевой суммой между коалицией $S \subset N$, выступающей в качестве максимизирующего игрока, и коалицией $N\backslash S$, выступающей в качестве минимизирующего игрока. Значение функции $V^j(S)$ для подыгры G^j зададим как нижнее значение антагонистической стохастической игры G^j_S, найденное в чистых стратегиях (фактически, как нижнее значение матричной игры):

$$V^j(S) = \max_{\eta_S(\cdot)} \min_{\eta_{N\backslash S}(\cdot)} \sum_{i \in S} E^j_i(\eta_S(\cdot), \eta_{N\backslash S}(\cdot)),\ V^j(\emptyset) = 0, \qquad (3.4)$$

где пара $(\eta_S(\cdot), \eta_{N\backslash S}(\cdot))$ образует некоторую ситуацию в чистых стационарных стратегиях, а $\eta_S(\cdot) = (\eta_{i_1}(\cdot), \ldots, \eta_{i_k}(\cdot))$ – вектор стационарных стратегий игроков $i_1, \ldots, i_k \in S$, $i_1 \bigcup \ldots \bigcup i_k = S$, $\eta_S(\cdot) \in \prod_{j=1}^{k} \Xi_{i_j}$ – множество чистых стратегий коалиции $S \subset N$, а $\eta_{N\backslash S}(\cdot)$ – вектор стационарных стратегий игроков $i_{k+1}, \ldots, i_n \in N\backslash S$, $i_{k+1} \bigcup \ldots \bigcup i_n = N\backslash S$, $\prod_{j=k+1}^{n} \Xi_{i_j}$ – множество чистых стратегий коалиции $N\backslash S$.

Кооперативный вариант стохастической подыгры G^j с конечным числом игровых элементов определим набором $\langle N, V^j(\cdot)\rangle$, $V^j : S \longrightarrow R$ — характеристическая функция, определенная формулами (3.3) и (3.4).

Кооперативный вариант стохастической игры G с конечным числом игровых элементов определим набором $\langle N, \overline{V}(\cdot)\rangle$, где N – множество игроков, $\overline{V} : S \longrightarrow R$ – характеристическая функция, определенная формулой (3.2).

Характеристические функции $\overline{V}(S)$ и $V^j(S)$ являются супераддитивными.

Дележом в кооперативной стохастической подыгре G^j $(j = 1, \ldots, t)$ будем называть вектор $\alpha^j = (\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n)$, удовлетворяющий свойствам:

1) $\sum\limits_{i \in N} \alpha^j_i = V^j(N)$,

2) $\alpha^j_i \geqslant V^j(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Множество дележей в кооперативной подыгре G^j обозначим через I^j, $j = 1, \ldots, t$.

Дележом в кооперативной стохастической игре G будем называть вектор $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha^1_i, \ldots, \alpha^t_i)$, где $(\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n) = \alpha^j \in I^j$.

Множество дележей в кооперативной стохастической игре G обозначим через $\overline{I}$.

Предположим, что множество дележей в любой подыгре G^j, $j = 1, \ldots, t$, непусто, следовательно, непустым является и множество дележей в кооперативной стохастической игре G.

4. Принципы устойчивой кооперации

Позиционная состоятельность кооперативного соглашения. Проведем регуляризацию игры G (подыгры G^j) следующим образом. Допустим, что игроки выбрали дележ $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, $(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) = \alpha^j \in I^j$. Тогда для каждого дележа $\alpha^j \in I^j$ $(j = 1, \ldots, t)$ определим некооперативную подыгру G_α^j, которая отличается от подыгры G^j только выигрышами в ситуациях $\overline{x}^j$, где $\overline{\eta}(\Gamma^j) = \overline{x}^j$, $j = 1, \ldots, t$. Таким образом, зададим перераспределения выигрышей игроков в ситуации, которая реализуется в игровом элементе Γ^j, $j = 1, \ldots, t$, в случае, когда игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}$. В ситуациях $x^j \neq \overline{x}^j$, $j = 1, \ldots, t$, выигрыши игроков остаются прежними.

Для игрока i $(i \in N)$, который рассчитывает получить $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, α_i^j – i-ая компонента дележа $\alpha^j \in I^j$, определим процедуру распределения дележа [4] как вектор-функцию $\beta_i = (\beta_i^1, \ldots, \beta_i^t)$ такую, что выполняются следующие условия

$$\overline{\alpha}_i = \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}, \text{ для всех } \ i \in N, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i \in N} \beta_i^j = \sum_{i \in N} K_i^j(\overline{x}^j), \quad j = 1, \ldots, t, \tag{4.2}$$

где $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}}$ – ожидаемый выигрыш i-го игрока в стохастической игре $G_{\overline{\alpha}}$, которая является регуляризацией игры G.

Условие (4.1) гарантирует, что i-ая компонента дележа $\overline{\alpha}$ совпадает с математическим ожиданием выигрыша игрока i в регуляризованной игре. Равенство (4.2) утверждает, что в любом игровом элементе сумма выплат игрокам в соответствии с ПРД равна сумме выигрышей игроков при условии, что игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$. Очевидно, что если игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, ожидаемый выигрыш i-го игрока в игре $G_{\overline{\alpha}}$ (подыгре G_α^j) совпадает с ожидаемым значением соответствующей компоненты дележа в кооперативном варианте стохастической игры G.

Определение 4.1. *Некооперативная стохастическая игра* $G_{\overline{\alpha}}$ *(подыгра* G^j_α, $j = 1, \ldots, t$*) называется* $\overline{\alpha}$*-регуляризацией (*α*-регуляризацией) стохастической игры* G *(подыгры* G^j*), если для любого игрока* $i \in N$ *в игровом элементе* Γ^j, $j = 1, \ldots, t$, *функция выигрыша* $K_i^{\alpha,j}(x^j)$ *определена следующим образом:*

$$K_i^{\alpha,j}(x^j) = \begin{cases} \beta_i^j, & \text{если } x^j = \overline{x}^j; \\ K_i^j(x^j), & \text{если } x^j \neq \overline{x}^j, \end{cases} \tag{4.3}$$

где процедура распределения дележа $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *(см.[9]) определяется уравнением*

$$\beta_i = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))\alpha_i. \tag{4.4}$$

Нетрудно показать, что β_i, определенная по формуле (4.4), удовлетворяет условиям (4.1), (4.2). Поскольку $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}} = \pi^0 E_i^\alpha$, где E_i^α удовлетворяет функциональному уравнению $E_i^\alpha = \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))E_i^\alpha$, то $E_i^\alpha = (\mathbb{I}-(1-q)\Pi(\overline{\eta}))^{-1}\beta_i = (\mathbb{I}-(1-q)\Pi(\overline{\eta}))^{-1}(\mathbb{I}-(1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))\alpha_i = \alpha_i$. Так как $\sum\limits_{i\in N}\beta_i^j = (\mathbb{I}-(1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))\sum\limits_{i\in N}\alpha_i = (\mathbb{I}-(1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))V(N)$, и $V(N)$ определяется из уравнения (3.3), то имеет место равенство (4.2).

Уравнение (4.4) эквивалентно следующему функциональному уравнению

$$\alpha_i = \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\alpha_i. \tag{4.5}$$

В правой части уравнения (4.5) второе слагаемое – ожидаемое значение компоненты дележа в подыгре, начинающейся со следующего шага. Причем, предполагается, что дележ для каждой подыгры выбирается, исходя из того же принципа оптимальности, что был выбран игроками перед началом игры. В случае стохастической игры с конечным числом игровых элементов и при использовании игроками стационарных стратегий в каждой подыгре G^j выбирается один и тот же дележ α^j. Например, если игроки перед началом игры договорились о кооперации и решили разделить ожидаемый суммарный выигрыш по вектору Шепли, то в любой подыгре игроки также в качестве дележа оставшегося ожидаемого суммарного выигрыша будут выбирать вектор Шепли. Это условие гарантирует уравнение (4.5). В качестве дележа может быть выбран любой из принципов оптимальности, применяемых в кооперативной теории игр, например, выше упомянутый вектор Шепли, N-ядро, C-ядро. Условие (4.5) определяет позиционную состоятельность (динамическую устойчивость) дележа.

Процедура регуляризации стохастической игры G предлагает способ построения реальных выплат игрокам на каждом шаге игры, причем, можно утверждать, что игроки заинтересованы в перераспределении своих выигрышей, т. к., получая $\beta_i^1, \ldots, \beta_i^t$ в игровых элементах $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t$ соответственно, игрок i в игре $G_{\overline{\alpha}}$ получит столько же (с точки зрения математического ожидания), сколько и планировал получить в кооперативном варианте игры G, и ожидаемая сумма оставшихся выплат будет принадлежать тому же принципу оптимальности, который был выбран игроками изначально. В таком случае можно говорить, что имеет место *позиционная состоятельность* (*динамическая устойчивость*) *выбранного кооперативного соглашения.*

Стратегическая устойчивость кооперативного соглашения. Введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $\Gamma(k)$ игровой элемент, реализовавшийся на шаге k стохастической игры G. Очевидно, что $\Gamma(k) \in \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t\}$. Через $x(k)$ будем обозначать ситуацию, реализовавшуюся в игровом элементе $\Gamma(k)$. Подыгру игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающуюся с игрового элемента $\Gamma(k)$, обозначим через $G_{\alpha}^{\Gamma(k)}$. Предысторией шага k будем называть последовательность $((\Gamma(1), x(1)), (\Gamma(2), x(2)), \ldots, (\Gamma(k-1), x(k-1)))$, которую обозначим через $h(k)$.

Пусть $T = \{(\Gamma^1, \overline{x}^1), (\Gamma^2, \overline{x}^2), \ldots, (\Gamma^t, \overline{x}^t)\}$.

Стохастическая игра G и её α-регуляризация $G_{\overline{\alpha}}$ является игрой с совершенной информацией в том смысле, что на каждом шаге k $(k = 1, 2, \ldots)$ игрок $i \in N$ знает игровой элемент $\Gamma(k)$ и предысторию шага k.

Определение 4.2. *Ситуация в стратегиях поведения* $\varphi^*(\cdot) = (\varphi_1^*(\cdot), \ldots, \varphi_n^*(\cdot))$ *называется сильным трансферабельным равновесием в регуляризованной игре* $G_{\overline{\alpha}}$*, если для любой коалиции* $S \subset N$*,*

$S \neq \emptyset$, справедливо неравенство

$$\sum_{i \in S} \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\varphi^*(\cdot)) \geqslant \sum_{i \in S} \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\varphi^*(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) \tag{4.6}$$

для любой стратегии поведения коалиции S: $\varphi_S(\cdot) = \{\varphi_i(\cdot)\}_{i \in S} \in \prod_{i \in S} \Phi_i$, $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\cdot)$ – математическое ожидание выигрыша i-го игрока в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$.

Теорема 4.1. *Если в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ с дележом $\overline{\alpha}$ для любой коалиции $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i \in S} \beta_i \geqslant (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(S), \tag{4.7}$$

где $F(S) = (F^1(S), \ldots, F^t(S))$,

$$F^j(S) = \max_{\substack{x_S^j \in \prod_{i \in S} X_i^j \\ x_S^j \neq \overline{x}_S^j}} \left\{ \sum_{i \in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q) \sum_{l=1}^{t} p(j, l; \overline{x}^j \parallel x_S^j) V^l(S) \right\},$$

тогда в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ существует сильное трансферабельное равновесие с выигрышами $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую ситуацию в стратегиях поведения $\widehat{\varphi}(\cdot) = (\widehat{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \widehat{\varphi}_n(\cdot))$ в игре $G_{\overline{\alpha}}$:

$$\widehat{\varphi}_i(h(k)) = \begin{cases} \overline{x}_i^j, & \text{если } \Gamma(k) = \Gamma^j, j = \overline{1,t}, h(k) \subset T; \\ \widehat{x}_i^j(S), & \text{если } \Gamma(k) = \Gamma^j,\ j = \overline{1,t},\ \exists\ l \in [1, k-1] \\ & \text{и } S \subset N,\ i \notin S\text{: } h(l) \subset T, \\ & \text{а } (\Gamma(l), x(l)) \notin T, \text{но } (\Gamma(l), (x(l) \parallel \overline{x}_S(l)) \in T, \\ \text{произвольна} & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{4.8}$$

где $\widehat{x}_i^j(S)$ – чистая стратегия i-го игрока в игровом элементе Γ^j, которая вместе со стратегиями $x_p^j(S)$, $p \neq i$, $p \notin S$, образует стратегию коалиции $\{N \backslash S\}$ в антагонистической игре против коалиции S в подыгре $G^{\Gamma(j)}$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство «народных теорем» (см. [10]), используя структуру стратегии $\widehat{\varphi}_i(h(k))$, $i \in N$. Докажем, что $\widehat{\varphi}(\cdot) = (\widehat{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \widehat{\varphi}_n(\cdot))$, определенная в (4.8), является сильным трансферабельным равновесием в игре $G_{\overline{\alpha}}$.

Из определения (4.8) следует, что ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре G^j_α, $j = 1, \dots, t$, при условии, что все игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, равен

$$E^j_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = \sum_{i \in S} E^j_i(\widehat{\varphi}(\cdot)) = \sum_{i \in S} E^j_i(\overline{\eta}(\cdot)).$$

Пусть $E_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (E^1_S(\widehat{\varphi}(\cdot)), \dots, E^t_S(\widehat{\varphi}(\cdot)))$, тогда для любой коалиции $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ имеет место равенство

$$E_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i \in S} \beta_i. \tag{4.9}$$

Рассмотрим ситуацию $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$, $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, когда некоторая коалиция S отклоняется от своей стратегии $\widehat{\varphi}_S(\cdot)$. Пусть шаг k такой, что существует номер $l \in [1, k-1]$ такой, что предыстория $h(l) \subset T$, а элемент $(\Gamma(l), x(l)) \notin T$, но $(\Gamma(l), (x(l) \parallel \overline{x}_S(l))) \in T$. Не умоляя общности, предположим, что $\Gamma(k) = \Gamma^j$. Вычислим ожидаемый выигрыш коалиции S в игре $G_{\overline{\alpha}}$ в ситуации $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ по формуле $\sum\limits_{i \in S} \overline{E}^{\overline{\alpha}}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \pi^0 \sum\limits_{i \in S} E^\alpha_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$, где

$$\sum_{i \in S} E^\alpha_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \sum_{i \in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) + \\ + (1-q)^{k-1}\Pi^{k-1}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) \sum_{i \in S} E^{\alpha,[k,\infty)}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)), \tag{4.10}$$

где первое слагаемое в правой части – ожидаемый выигрыш коалиции S на первых $k-1$ шагах игры $G_{\overline{\alpha}}$, во втором слагаемом $\sum\limits_{i \in S} E^{\alpha,[k,\infty)}_i$ $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ – ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающейся с шага k. Так как до шага $k-1$ включительно отклонения никакой из коалиций от кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$ не было, то, как было показано ранее, для элементов из правой части (4.10) имеют место равенства:

$$\sum_{i \in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \sum_{i \in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\overline{\eta}(\cdot)),$$

$$\Pi^{k-1}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \Pi^{k-1}(\overline{\eta}(\cdot)).$$

Во втором слагаемом в правой части (4.10) под $E^{\alpha,[k,\infty)}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ понимается вектор $(E^{\alpha,1}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)), \dots, E^{\alpha,t}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)))$, где

$E_i^{\alpha,j}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ – ожидаемый выигрыш игрока $i \in S$ в регуляризованной подыгре G_α^j, начинающейся с игрового элемента Γ^j.

Вычислим ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре G_α^j, начинающейся с шага k, и $\Gamma(k) = \Gamma^j$. Имеет место формула:

$$\sum_{i\in S} E_i^{\alpha,j}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) =$$
$$\sum_{i\in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q)\sum_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_S^j)V^l(S), \quad (4.11)$$

поскольку, согласно определению ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$, игроки из коалиции $N \setminus S$ будут наказывать коалицию S, играя, начиная с шага $k+1$, в антагонистическую игру против коалиции S.

Так как ожидаемые выигрыши коалиции S в ситуациях $\widehat{\varphi}(\cdot)$ и $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ до шага $k-1$ совпадают, то в результате отклонения коалиция S может гарантировать себе увеличение выигрыша только за счет части игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающейся с шага k, т. е. за счет ожидаемого выигрыша в подыгре G_α^j, $j = 1, \ldots, t$. Коалиция S в ситуации $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ может гарантировать себе с шага k следующий ожидаемый выигрыш :

$$\max_{\substack{x_S^j \in \prod_{i\in S} X_i^j \\ x_S^j \neq \overline{x}_S^j}} \left\{ \sum_{i\in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q)\sum_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_S^j)V^l(S) \right\}. \quad (4.12)$$

Ожидаемый выигрыш коалиции S в регуляризованной подыгре G_α^j в ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$ согласно определению ПРД может быть найден из уравнения:

$$\sum_{i\in S} E_i^{\alpha}(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i\in S} \beta_i, \quad (4.13)$$

где $E_i^\alpha(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (E_i^{\alpha,1}(\widehat{\varphi}(\cdot)), \ldots, E_i^{\alpha,t}(\widehat{\varphi}(\cdot))$. Учитывая неравенство (4.7), из (4.12), (4.13) и рассуждений, приведенных выше, получаем справедливость неравенства:

$$E_S^\alpha(\widehat{\varphi}(\cdot)) \geqslant E_S^\alpha(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)).$$

Следовательно, ситуация $\widehat{\varphi}(\cdot)$ в стратегиях поведения (4.8) является сильным трансферабельным равновесием в $\overline{\alpha}$-регуляризации игры G.

Причем, ожидаемый выигрыш i-го игрока в игре $G_{\overline{\alpha}}$ в ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$ равен $\overline{\alpha}_i$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0\alpha_i$, вектор $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$ состоит из i-ых компонент дележей α^1, …, α^t, рассчитанных для кооперативных подыгр G^1, …, G^t соответственно. Утверждение теоремы доказано. $\square$

Следствие 4.1. *Если в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство*

$$\beta_i \geqslant (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))W_i,$$

где $W_i = (W_i^1, \ldots, W_i^t)$,
$W_i^j = \max\limits_{\substack{x_i^j \in X_i^j \\ x_i^j \neq \overline{x}_i^j}} \left\{ K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_i^j) + (1-q)\sum\limits_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_i^j)V^l(\{i\}) \right\}$, *тогда в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ существует ситуация равновесия по Нэшу с выигрышами $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.*

Условие защиты от иррационального поведения. Для защиты игроков от потерь в случаях, когда кооперация распадается на некотором шаге игры, необходимо, чтобы для всех $i \in N$ и любого $k = 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство:

$$V(\{i\}) \leqslant E_i^{\alpha,[1,k]} + (1-q)^k\Pi^k(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}), \tag{4.14}$$

где $E_i^{\alpha,[1,k]}$ – математическое ожидание выигрыша i-го игрока на первых k шагах регуляризованной игры $G_{\overline{\alpha}}$.

Предполагается, что перед началом очередного шага игры игроки знают о том, распалась кооперация или нет, т. е. задержки информации в такой постановке не предполагается. В левой части неравенства (4.14) – значение характеристической функции $V(\{i\}) = (V^1(\{i\}), \ldots, V^t(\{i\}))$, рассчитанное для игрока i, где $V^j(\{i\})$ – значение характеристической функции для игрока i в подыгре G^j. В правой части неравенства (4.14) первое слагаемое равно ожидаемому выигрышу игрока i, если на первых k шагах игры игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, второе слагаемое – ожидаемый выигрыш i-го игрока начиная с $(k+1)$-го шага, если с этого шага игрок i действует самостоятельно.

Утверждение 4.1. *В стохастической игре G для выполнения условия защиты от иррационального поведения достаточно, чтобы* *для всех $i \in N$ имело место неравенство:*

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_i - V(\{i\})) \geqslant 0, \tag{4.15}$$

где $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, α_i^j – i-ая компонента дележа $\alpha^j \in I^j$.

Доказательство. Покажем, что условие (4.15) является достаточным для того, чтобы имело место неравенство (4.14) для любого $k = 1, 2, \ldots$. Доказательство проведем методом математической индукции.

Запишем неравенство (4.14) для $k = 1$:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.16}$$

Преобразуем неравенство (4.15), учитывая определение α_i через ПРД (4.4), получаем неравенство (4.16).

Предположим, что из справедливости неравенства (4.15) следует справедливость неравенства (4.14) при $k = l$. Запишем неравенство (4.14) для $k = l$:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + \ldots + (1-q)^{l-1}\Pi^{l-1}(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.17}$$

Докажем утверждение для $k = l+1$. Неравенство (4.14) при $k = l+1$ будет иметь вид:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + \ldots + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^{l+1}\Pi^{l+1}(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.18}$$

После преобразования правая часть неравенства (4.18) примет вид:

$$\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\left\{\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + \ldots \right.$$
$$\left. + (1-q)^{l-1}\Pi^{l-1}(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\})\right\}$$

Учитывая неравенство (4.17), выражение в фигурных скобках не меньше $V(\{i\})$, следовательно, правая часть неравенства (4.18) не меньше, чем $\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\})$. Учитывая определение ПРД (4.4), получаем неравенство (4.15), которое выполнено по условию утверждения. □

5. Пример

Рассмотрим стохастическую игру двух лиц. Параметры стохастической игры следующие:

1. Множество игроков $N = \{1, 2\}$.

2. Множество игровых элементов $\{\Gamma^1, \Gamma^2\}$, где $\Gamma^j = \langle N, X_1^j, X_2^j, K_1^j, K_2^j \rangle$ $(j = 1, 2)$, множество стратегий первого игрока – $X_1^j = \{x_{11}^j, x_{12}^j\}$, множество стратегий второго игрока – $X_2^j = \{x_{21}^j, x_{22}^j\}$, функции выигрышей запишем в виде биматрицы (игрок 1 выбирает строки, игрок 2 – столбцы). Для игрового элемента Γ^1 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (3;5) & (1;10) \\ (10;4) & (7;6) \end{pmatrix}.$$

Для игрового элемента Γ^2 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (2;4) & (2;8) \\ (7;3) & (5;4) \end{pmatrix}.$$

3. Вероятности перехода из игрового элемента Γ^1 можно представить в виде биматрицы

$$\begin{pmatrix} (0{,}7; 0{,}3) & (0{,}4; 0{,}6) \\ (0{,}4; 0{,}6) & (0{,}3; 0{,}7) \end{pmatrix},$$

где элемент (k, l) матрицы содержит вероятности перехода из Γ^1 в игровые элементы Γ^1, Γ^2 соответственно, при условии, что игрок 1 выбирает стратегию номер k, а игрок 2 стратегию номер l в игровом элементе Γ^1.

Вероятности перехода из игрового элемента Γ^2 можно представить в виде биматрицы

$$\begin{pmatrix} (0{,}9; 0{,}1) & (0{,}4; 0{,}6) \\ (0{,}2; 0{,}8) & (0{,}3; 0{,}7) \end{pmatrix}.$$

4. Вероятность окончания игры $q = 1/365$.

5. Вектор начального распределения вероятностей $\pi^0 = (1/2, 1/2)$.

Используя (2.6) и (3.1), получаем кооперативное решение $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)$, где $\overline{\eta}_1(\Gamma^1) = x_{12}^1$, $\overline{\eta}_1(\Gamma^2) = x_{11}^2$, $\overline{\eta}_2(\Gamma^1) = x_{21}^1$, $\overline{\eta}_2(\Gamma^2) = x_{22}^2$.

Вычислим значения характеристических функций для подыгр по формулам (3.3) и (3.4), получаем

$$V(\{1\}) = \begin{pmatrix} 2045{,}4 \\ 2043{,}4 \end{pmatrix}, \quad V(\{2\}) = \begin{pmatrix} 1680{,}4 \\ 1678{,}4 \end{pmatrix}, \quad V(\{1,2\}) = \begin{pmatrix} 4236{,}4 \\ 4232{,}4 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (3.2), находим значения характеристической функции $\overline{V}(\cdot)$: $\overline{V}(\{1\}) = 2044{,}4$; $\overline{V}(\{2\}) = 1679{,}4$; $\overline{V}(\{1,2\}) = 4234{,}4$. В качестве дележа возьмем вектор Шепли. Рассчитаем вектор Шепли для каждой подыгры, получаем

$$Sh_1 = \begin{pmatrix} 2300{,}7 \\ 2298{,}7 \end{pmatrix}, \quad Sh_2 = \begin{pmatrix} 1935{,}7 \\ 1933{,}7 \end{pmatrix},$$

где $Sh_i = (Sh_i^1, Sh_i^2)$, Sh_i^j – это i-ая компонента вектора Шепли, рассчитанного для подыгры G^j по характеристической функции $V^j(\cdot)$, $j = 1, 2$, $i \in N$. Тогда, учитывая вектор начального распределения вероятностей π^0, находим дележ для игры G: $\overline{Sh} = (\overline{Sh}_1, \overline{Sh}_2) = (2299{,}7; 1934{,}7)$.

По формуле (4.4) определим компоненты ПРД:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}.$$

Проведем регуляризацию стохастической игры G, используя ПРД и определение (4.3). В $\overline{Sh}$-регуляризованной игре выигрыши игроков в игровом элементе Γ^1 будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (3; 5) & (1; 10) \\ (7{,}5; 6{,}5) & (7; 6) \end{pmatrix},$$

в игровом элементе Γ^2 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (2; 4) & (5{,}5; 4{,}5) \\ (7; 3) & (5; 4) \end{pmatrix}$$

Можно сказать, что в $\overline{Sh}$-регуляризованной стохастической игре имеет место позиционная состоятельность выбранного игроками кооперативного соглашения.

Проверим условие стратегической устойчивости. Выпишем неравенства (4.7) из Теоремы 4.1. Вычислим $F(S)$ для всех $S \subset N$, получаем $F(\{1\}) = (2042{,}2; 2043{,}4)$, $F(\{2\}) = (1680{,}4; 1679{,}6)$. Тогда проверка справедливости неравенств (4.7) сводится к проверке справедливости следующих неравенств:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} -0{,}72 \\ 0{,}48 \end{pmatrix} = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(\{1\}),$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0.48 \\ -0.32 \end{pmatrix} = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(\{2\}).$$

Условия Теоремы 4.1 выполнены, значит, можно говорить о стратегической устойчивости выбранного игроками кооперативного решения.

Проверим условие защиты от иррационального поведения. Достаточное условие для защиты от иррационального поведения из Утверждения 4.1 выполнено, поскольку оно сводится к проверке справедливости следующих неравенств:

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_1 - V(\{1\})) = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_2 - V(\{2\})) = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

В рассмотренном численном примере стохастической игры при условии проведения регуляризации выполнены три принципа устойчивой кооперации.

Благодарности

Исследование, представленное в работе, было начато в 2002 году под руководством профессора, доктора физико-математических наук Леона Аганесовича Петросяна. Выражаю искреннюю сердечную благодарность руководителю моей кандидатской диссертации, заведующему кафедрой математической теории игр и статистических решений, руководителю Центра теории игр в г. Санкт-Петербург Л.А. Петросяну за постановку интересной задачи, полезные замечания в работе над статьями и внимательное отношение при любых обстоятельствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грауэр Л. В., Петросян Л. А. *Многошаговые игры* // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 667–677.

2. Петросян Л. А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Л.: Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. 1977. Вып. 19. С. 46–52.

3. Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Сборник статей. Труды института математики и механики. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.

4. Петросян Л. А., Данилов Н. А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. №1. С. 46–54.

5. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 1. С. 102–117.

6. Парилина Е. М. *Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 4. С. 93–110.

7. Altman E., El-Azouzi R., Jimenez T. *Slotted Aloha as a stochastic game with partial information* // Proceedings of Modeling and Optimization in Mobile, Ad-Hoc and Wireless Networks (WiOpt '03). Sophia Antipolis. France. March 2003.

8. Amir R. *Stochastic games in economics: The latter-theoretic approach* // Stochastic Games and Applications in A. Neyman and S. Sorin (eds.) NATO Science Series C, Mathematical and Physical Sciences. 2003. Vol. 570. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Chap. 29. P. 443–453.

9. Baranova E. M., Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game theory and Applications. 2006. V. XI. P. 7–17.

10. Dutta P. *A Folk Theorem for Stochastic Games* // Journal of Economic Theory. 1995. V. 66. P. 1–32.

11. Grauer L. V., Petrosjan L. A. *Strong Nash Equilibrium in Multistage Games* // International Game Theory Review. 2002. V. 4. N. 3. P. 255–264.

12. Herings P. J.-J., Peeters R. J. A. P. *Stationary Equlibria in Stochastic Games: Structure, Selection, and Computation* // Journal of Economic Theory. 2004. V. 118. N. 1. P. 32–60.

13. Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Games* // Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L. A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan. 2006. P. 139–146.

14. Shapley L. S. *Stochastic Games* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 1953. V. 39. P. 1095–1100.

15. Yeung D. W. K. *An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games*// International Game Theory Review (IGTR). 2006. V. 08. Is. 04. P. 739–744.

16. Yeung D. W. K., Petrosjan L. A. *Subgame consist cooperative solutions in stochastic differential games* // J. optimiz. theory and appl. 2004. V. 120. N. 3. P. 651–666.

STABLE COOPERATION IN STOCHASTIC GAMES

Elena M. Parilina, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (barlena@gmail.com).

Abstract: The paper considers stochastic games with random duration in the class of stationary strategies. The cooperative version for such class of the stochastic game is constructed. The cooperative solution is found. Conditions of stable cooperation for stochastic games are obtained. Principles of stable cooperation include three conditions: subgame consistency, strategic stability and condition of irrational behavior proofness of the cooperative agreement. Also the paper considers the example for which the cooperative agreement is found and the conditions of dynamic stability are checked.

Keywords: cooperative stochastic game, time consistency, subgame consistency, payoff distribution procedure, strategic stability, condition of irrational behavior proofness.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 41–78

УДК 519.833.52
ББК 22.1

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АРБИТРАЖНЫХ СХЕМ И НТП ИГР

Сергей Л. Печерский
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: specher@emi.nw.ru

В статье определяются и исследуются свойства пропорциональных решений для игр с нетрансферабельными полезностями и арбитражных схем, в основе которых лежит использование пропорционального эксцесса. В частности, определяется *status quo*-пропорциональное решение для арбитражных схем. Доказана его согласованность (в смысле Харта–Мас-Коллела) и приведена аксиоматическая характеризация, использующая это свойство. Определено согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и дана его аксиоматическая характеризация. Доказано существование решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. Рассмотрены соотношения между некоторыми решениями арбитражных схем и НТП игр.

Ключевые слова: арбитражные схемы, НТП игры, пропорциональный эксцесс, *status quo*-пропорциональное решение, согласованность.

---

1. Введение

Пропорциональность в распределении восходит своими корнями к Аристотелю, но именно в последние годы при решении задач распределения прибыли (или убытка) заметно вырос интерес к пропорциональным принципам распределения. Согласно пропорциональному принципу участники получают выигрыши пропорционально своим вкладам, если все вклады и выигрыши положительны. Классическая кооперативная игра (игра с трансферабельными полезностями, или кратко ТП игра) двух лиц представляет собой простейшую задачу распределения прибыли (или затрат): в них единственной коалицией является коалиция всех (т. е. двух) игроков. Тем самым для игр двух лиц с положительными значениями характеристической функции v очевидным образом определено *пропорциональное решение*, которое предписывает игроку i выигрыш $x_i = v(\{1,2\})\frac{v(\{i\})}{v(\{1\})+v(\{2\})}$, $i = 1, 2$. Для игр с бóльшим числом игроков определение пропорционального дележа уже сталкивается с определенными трудностями, поскольку нет единого метода, учитывающего пропорциональность участия игроков в промежуточных коалициях. Поэтому формирование пропорциональных решений для ТП игр может быть реализовано в виде некоторых расширений пропорционального решения для игр двух лиц на игры с произвольным числом игроков и с положительными значениями характеристической функции. Первым из таких решений явилось пропорциональное n-ядро, введенное Лемэром [12], которое было определено таким же способом, как и обычное n-ядро, но вместо стандартного эксцесса $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$ он использовал относительный эксцесс $e_r(S, x, v) = \frac{v(S)-x(S)}{v(S)}$. Заметим сразу же, что относительный эксцесс ординально эквивалентен пропорциональному эксцессу, определяемому для любой положительной ТП игры v как $v(S)/x(S)$, поэтому n-ядра, соответствующие относительному и пропорциональному эксцессам, совпадают.

Следующим решением явилось пропорциональное решение, определенное независимо Б. Фельдманом [5] и К. Ортманом [14], которое можно назвать согласованным в смысле Харта–Мас-Колелла расширением пропорционального решения для положительных игр двух лиц на весь класс положительных кооперативных игр. В [3] Е. Яновская определила инвариантное относительно пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ решение для положительных ТП игр и дала аксиоматическую характеризацию одного из таких решений.

С еще бóльшими трудностями приходится сталкиваться при попытке определить пропорциональные решения для игр с нетрансферабельными полезностями (НТП игр). Хотя Э. Калаи в [9] определил пропорциональное решение для арбитражных схем, но пропорциональность в этом решении понималась как существование такого вектора p с положительными координатами, что из множества допустимых альтернатив выбиралась оптимальная по Парето точка, пропорциональная этому вектору p. Такое решение характеризовалось аксиомами слабой оптимальности по Парето, положительной однородности, строгой индивидуальной рациональности и сильной монотонности, причем добавление аксиомы симметричности приводило к эгалитарному решению. Учитывая, что при этом пропорциональное решение определялось для арбитражных схем с нулевой точкой *status quo*, то тем самым несколько терялся смысл «пропорциональности вкладам».

С определенной натяжкой к пропорциональному типу можно отнести решение Калаи–Смородинского [11], которое каждой арбитражной схеме (с нулевой точкой *status quo*) ставит в соответствие оптимальную по Парето точку множества допустимых альтернатив, лежащую на отрезке, соединяющем начало координат и «идеальную точку» , i-я координата которой для каждого i представляет собой максимум полезности i-го агента на множестве допустимых альтернатив (разумеется, эта точка не обязана лежать в этом множестве). Решение Калаи-Смородинского (для случая нулевой точки *status quo*) характеризуется аксиомами оптимальности по Парето, симметричности, ковариантности относительно шкал и индивидуальной монотонности. Здесь стоит также упомянуть недавнюю работу С. Херреро и А. Виллара [7], в которой решение Калаи-Смородинского возникает в контексте задач распределения с нетрансферабельными полезностями.

При определении решений для НТП игр весьма существенную роль играет то обстоятельство, что если для ТП игр понятие пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ достаточно естественно, то в случае НТП игр возникает проблема определения не только пропорционального эксцесса, но и проблема, связанная с вопросом о том, каким должен быть вообще эксцесс в НТП случае, поскольку для НТП игр отсутствует какое-либо столь же естественное определение эксцесса, каковым в ТП случае является стандартный эксцесс $v(S) - x(S)$ или какие-то его вариации типа $(v(S) - x(S))/|S|$ или $(v(S) - x(S))/v(S)$.

Э. Калаи в [8] определил семейство функций эксцесса для НТП игр и, используя эти функции эксцесса, определил ε-c-ядро, k-ядро и n-ядро НТП игры, сохранив существенную часть структуры, которой обладают эти решения в ТП играх. Эти функции эксцесса удовлетворяют некоторым естественным условиям, которые представляются обязательными для таких функций. Однако, с одной стороны, эти условия являются слишком общими, а с другой стороны, их слишком мало, чтобы можно было выделить какой-то определенный эксцесс. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в [3].

Пропорциональный эксцесс для НТП игр (и его ординальный эквивалент, названный калибровочным эксцессом) был определен и аксиоматически охарактеризован в работах автора [1,2]. Пропорциональный эксцесс однозначно определяется пятью аксиомами, одна из которых говорит о том, что в случае, если НТП игра соответствует положительной ТП игре v, то эксцесс должен совпадать с пропорциональным, т. е. быть равным $v(S)/x(S)$. Мы кратко приводим соответствующие результаты в разделе 3.

Целью данной статьи является определение и исследование свойств пропорциональных решений для НТП игр (и в частности, для арбитражных схем), в основе которых лежит использование пропорционального эксцесса. Так, в частности, мы определяем и исследуем свойства *status quo*-пропорционального решения для арбитражных схем и приводим его аксиоматическую характеризацию. Интересно, что она совпадает с аксиоматикой арбитражного решения Нэша (но для другого семейства арбитражных схем). Далее мы рассматриваем свойство согласованности (в смысле Харта–Мас-Колелла) и даем аксиоматическую характеризацию *status quo*-пропорционального решения с помощью аксиомы согласованности. При этом возникает параллель с аксиоматикой Ленсберга арбитражного решения Нэша. Мы также определяем согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и даем его аксиоматическую характеризацию. Затем мы рассматриваем вопрос о существовании решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. Наконец, довольно любопытными представляются нам соотношения между некоторыми решениями арбитражных схем и НТП игр. Так например, с одной стороны, как мы уже упоминали выше, арбитражное решение Нэша и *status quo*-пропорциональное решение определяются одной системой аксиом (разумеется, для разных классов арбитражных схем), а с другой, весьма простые соотношения возникают в случае применения логарифмического преобразования к полезностям игроков.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 приводятся основные понятия и обозначения, используемые в тексте. В разделе 3 мы кратко останавливаемся на определении пропорционального эксцесса для НТП игр и на его свойствах. В разделе 4 мы определяем *status quo*-пропорциональное решение и приводим его аксиоматическую характеризацию без аксиомы согласованности. Раздел 5 посвящен аксиоматической характеризации этого решения с использованием аксиомы согласованности. Далее мы рассматриваем согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и даем его аксиоматическую характеризацию. В разделе 7 доказано существование решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. В разделе 8 рассмотрены некоторые соотношения между арбитражными решениями.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – конечное множество игроков. *Коалиция* – это непустое подмножество S множества N. Для $S \subset N$ через $\mathbb{R}^S$ будем обозначать $|S|$-мерное евклидово пространство с осями, заиндексированными элементами из S. *Вектор выигрышей* для S – это вектор $x \in \mathbb{R}^S$. Для $z \in \mathbb{R}^N$ и $S \subset N$, z^S будет обозначать проекцию z на подпространство

$$\mathbb{R}^{[S]} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i = 0, \quad i \notin S\},$$

а z_S – ограничение z на $\mathbb{R}^S$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$. Неравенство $x \geq y$ означает, что $x_i \geq y_i$ для всех $i \in N$; мы пишем $x > y$, если $x_i > y_i$ для всех $i \in N$. Далее, мы обозначаем

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x \geq \mathbf{0}\},$$

$$\mathbb{R}^N_{++} = \{x \in \mathbb{R}^N : x > \mathbf{0}\},$$

где $\mathbf{0}$=(0,0,. . . ,0). Покоординатное умножение мы обозначаем как $x * y$, т. е. $x * y = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, то $x + A = \{x + a : a \in A\}$ и $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. A называется *исчерпывающим*, если из $x \in A$ и $x \geq y$ следует $y \in A$. Множество A называется *ограниченным сверху*, если $A \cap (x + \mathbb{R}^N_+)$ ограничено для любого $x \in \mathbb{R}^N$. Граница множества A обозначается через ∂A. Внутренность множества A будет обозначаться $\mathrm{int}\, A$, а относительная внутренность $\mathrm{rel\ int}\, A$. Замкнутая выпуклая оболочка множества A обозначается через $\mathrm{co}\, A$.

Игрой с нетрансферабельными полезностями (или кратко *НТП игрой*) называется пара (N, V), где N – множество игроков, а V – многозначное отображение, которое ставит в соответствие каждой коалиции $S \subset N$ множество $V(S)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]} = \{x \subset \mathbb{R}^N : x_i = 0, \quad i \notin S\}$;

(2) $V(S)$ – непустое, замкнутое, исчерпывающее и ограниченное сверху множество.

(Обычно предполагается, что $V(\emptyset) = \emptyset$.)

В тех случаях, когда из контекста будет ясно, о каком множестве игроков идет речь, мы для краткости будем обозначать игру через V, без упоминания множества игроков.

Часто бывает удобно вместо свойства (1) требовать, чтобы $V(S) \subset \mathbb{R}^S$. Легко видеть, что если $V(S) \subset \mathbb{R}^S$, то $\bar{V}(S) = V(S) \times \mathbf{0}_{N \setminus S} \subset \mathbb{R}^{[S]}$. И обратно, если $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]}$, то $V_S(S) \subset \mathbb{R}^S$, где $V_S(S)$ обозначает ограничение $V(S)$ на $\mathbb{R}^S$. Эквивалентность этих определений позволит нам использовать оба, отдавая предпочтение одному из них в зависимости от контекста, причем всегда будет ясно, о каком определении идет речь.

Следует упомянуть следующие специальные случаи.

ТП игра. ТП игру v можно рассматривать как НТП игру следующего вида:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : x(S) \leq v(S)\},$$

где $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Граница $V(S)$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^S$ с нормалью e_S, где $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Как было только что отмечено, можно эквивалентно определить НТП игру, полагая

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]} : x(S) \leq v(S)\}.$$

Арбитражная схема. Арбитражной схемой n лиц называется пара (q, Q), в которой $q \in \mathbb{R}^N$ является точкой *status quo*, $Q \subset \mathbb{R}^N$ и $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Интерпретация такой пары следующая: если игроки действуют самостоятельно, то единственным возможным исходом является вектор q, дающий полезность (выигрыш) q_i игроку $i = 1, 2, \ldots, n$. Если *все* игроки кооперируются, то потенциально возможен любой исход из множества Q. (Все промежуточные коалиции также приводят только к исходу q). Соответствующая НТП игра определяется следующим образом:

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \text{существует } y \in Q \text{ такой, что } x \leq y\},$$

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]} \ : \ x_i \leq q_i \text{ для любого } i \in S\}, \quad S \neq N.$$

3. Пропорциональный эксцесс для НТП игр

В этом разделе мы напомним кратко определение пропорционального эксцесса для случая НТП игр и приведем его свойства (подробное изложение можно найти в [1,2], а также в [3]).

3.1. Функции эксцесса и пространство $\mathfrak{G}_{N+}$

Мы рассматриваем пространство $\mathfrak{G}_{N+}$ всех «нормально-порожденных» НТП игр: грубо говоря (формальное определение будет дано ниже), игра V лежит в $\mathfrak{G}_{N+}$, если каждое множество $V(S)$ компактно порождено, содержит $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ в качестве относительно внутренней точки и совпадает с исчерпывающей оболочкой своей «положительной части» $V_+(S) = V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+$.

Для характеризации соответствующего НТП эксцесса мы вводим пять аксиом – аксиомы непрерывности, инвариантности относительно шкал (или масштабов измерения полезности), аксиомы MIN- и MAX-инвариантности и аксиому пропорциональности для ТП игр, которые описывают желательные свойства функции эксцесса. Аксиома непрерывности утверждает, что эксцесс (коалиции) должен быть непрерывным относительно x и V. Инвариантность относительно шкал требует, чтобы эксцесс не зависел от того, какая шкала выбрана для измерения полезности. Аксиомы MIN- и MAX-инвариантности утверждают, что эксцессы «игры-пересечения» ($V = V_1 \cap V_2$) и «игры-объединения» ($V = V_1 \cup V_2$) должны определяться, соответственно, минимумом и максимумом эксцессов игр-компонент. Наконец, аксиома пропорциональности для ТП игр требует, чтобы для НТП игры, соответствующей ТП игре, эксцесс совпадал с пропорциональным эксцессом.

Эти пять аксиом однозначно задают *пропорциональный эксцесс* $h_S(V, x)$, определяемый формулой

$$h_S(V, x) = 1/\gamma(V(S), x^S),$$

где $\gamma(W, .)$ – *калибровочная функция* (или *калибровочная функция Минковского*) множества W:

$$\gamma(W, x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda W\}.$$

Итак, определим интересующее нас пространство игр $\mathfrak{G}_{N+}$ формально. НТП игра $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ тогда и только тогда, когда для всех $S \subset N$

(a) $V(S)$ положительно порождено, т. е. $V(S) = (V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+) - \mathbb{R}^{[S]}_+$ и $V_+(S) = V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+$ является компактным множеством, и каждый луч $L_x = \{\lambda x : \lambda \geq 0\}$, $x \neq \mathbf{0}$ пересекает границу множества $V(S)$ не более одного раза.

(b) $\mathbf{0}$ является внутренней точкой множества $V^\wedge(S) = V(S) + \mathbb{R}^{[N \setminus S]}$.

Множество $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]}$ будем называть *игровым подмножеством*, если оно удовлетворяет условиям (a) и (b). Пространство всех игровых подмножеств $\mathbb{R}^{[S]}$, удовлетворяющих условиям (a) и (b), будем обозначать через $\mathfrak{G}^S_{N+}$.

Очевидно, что каждое множество $V_+(S)$ является *нормальным* множеством (или $\mathbf{0}$-исчерпывающим множеством), т. е. если $x \in V_+(S)$ и $\mathbf{0} \leq y \leq x$ (в $\mathbb{R}^{[S]}$), то $y \in V_+(S)$. Именно в этом смысле мы будем говорить об игре $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ как о *нормально порожденной.* Ясно также, что каждое $U \in \mathfrak{G}^S_{N+}$ является *звездным.* (Используемое нами в (a) определение несколько сильнее обычного определения звездности: звездное множество вещественного векторного пространства содержит выделенный элемент, центр, который можно соединить с любым другим элементом этого множества отрезком, который целиком лежит в этом множестве). Заметим, что для любого $V(S) \in \mathfrak{G}_{N+}^S$ и каждого $x \in \mathbb{R}_+^{[S]}$, $x \neq \mathbf{0}$ существует единственное число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda x \in \partial V(S)$.

Ясно, что если $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}_{N+}$, то игры $V_1 \cap V_2$ и $V_1 \cup V_2$, определенные как

$$(V_1 \cap V_2)(S) = V_1(S) \cap V_2(S), \quad (V_1 \cup V_2)(S) = V_1(S) \cup V_2(S),$$

также лежат в $\mathfrak{G}_{N+}$.

Далее, если $V(S) \in \mathfrak{G}_{N+}^S$, $A \in \mathbb{R}_{++}^{[S]}$ и $A * V(S) = \{A * y : y \in V(S)\}$, то и $A * V(S) \in \mathfrak{G}_{N+}^S$.

Нетрудно проверить, что если игра V такова, что для любой коалиции S множество $V(S)$ нормально порождено, удовлетворяет (b) и обладает традиционным *свойством безуровневости*:

$$x, y \in \partial V(S) \cap \mathbb{R}_+^{[S]}, \ x \geq y \ \Rightarrow \ x = y,$$

то $V \in \mathfrak{G}_{N+}$.

Следует особо отметить случай ТП игры и соответствующей ей НТП игры.

ТП игра. Пусть v – положительная ТП игра, т. е. $v(S) > 0$ для любой S. Тогда соответствующую НТП игру $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ можно определить следующим образом

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^{[S]} : x(S) \leq v(S)\} - \mathbb{R}_+^{[S]}.$$

Напомним определение функции эксцесса по Калаи, адаптируя его к нашему случаю. В частности, мы заменим свойство (C) равенства нулю на границе его аналогом (C'). Определим *функцию эксцесса* для коалиции $S \neq \emptyset$ как такую функцию $E_S : \mathfrak{G}_{N+} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, что:

(A) Если $x, y \in \mathbb{R}^N$ и $x_i = y_i$ для любого $i \in S$, то для любой игры V

$$E_S(V, x) = E_S(V, y). \tag{3.1}$$

(B) Если $x, y \in \mathbb{R}^N$ таковы, что $x_i < y_i$ для любого $i \in S$, то для любой игры V

$$E_S(V, x) > E_S(V, y). \tag{3.2}$$

(C') Для любой игры V,

$$\text{если } x \in \partial V(S), \text{ то } E_S(V, x) = 1. \tag{3.3}$$

(D) $E_S(V, x)$ непрерывна по обеим переменным x и V.

(Метрика на $\mathfrak{G}_{N+}$ задается с помощью метрики Хаусдорфа: для $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$

$$\rho(V, W) = \max_S \delta_S(V(S), W(S)),$$

причем метрика Хаусдорфа δ определяется следующим образом. Пусть A и B – подмножества $\mathbb{R}^S$, тогда $\delta_S(A, B) = \max(l(A, B), l(B, A))$, где

$$l(A, B) = \sup\{d(x, B) \,:\, x \in A\},$$

а d – евклидова метрика).

Будем говорить, что E_S *не зависит от других коалиций*, если для любых двух игр V и W таких, что $V(S) = W(S)$, и для любого $x \in \mathbb{R}^N$ имеет место равенство $E_S(V, x) = E_S(W, x)$.

Мы ограничиваемся рассмотрением только неотрицательных векторов x, поскольку любое разумное решение игры $V \in \mathfrak{G}_{N+}$, конечно же, должно быть неотрицательным. Мы рассматриваем только эксцессы, не зависящие от других коалиций, и поэтому, принимая во внимание свойство (A), будем далее рассматривать функции эксцесса, как функции на $\mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^{[S]}_+$ (или $\mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^N_+$).

Нам понадобятся также следующие обозначения: $IR(V) = \{x \in V(N) : \forall i \in N\ x_i \geq y_i$ для каждого $y \in V(i)\}$ – множество индивидуально рациональных точек в игре V;
$GR(V) = \{x \in V(N)$: не существует $y \in V(N)$ такого, что $y > x\}$ – множество (слабо) оптимальных по Парето точек в игре V;
$C(V) = \{x \in V(N)$: не существует S, $y \in V(S)$ таких, что $y_i > x_i$ $\forall i \in S\}$ – c-ядро игры V.

Наконец, напомним определение n-ядра и пред-n-ядра игры (см., например, [3]).

Пусть $\{E_S\}_S$ – некоторое семейство функций эксцесса, и пусть X является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^N$. Для любых $x \in X$ и игры V определим вектор $\theta(x)$ следующим образом:

$$\theta(x) = \theta(V, x) = (E_{S_1}(V, x), \ldots, E_{S_{2^n}}(V, x)),$$

где различные эксцессы расположены в порядке убывания (невозрастания). Компоненты $\theta(x)$ корректно определены и изменяются непрерывно для «хороших» функций эксцесса. Будем говорит, что $\theta(x)$ лексикографически меньше, чем $\theta(y)$, $\theta(x) \prec_{lex} \theta(y)$, если существует такое натуральное число q, что $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ для всех $i < q$ и $\theta_q(x) < \theta_q(y)$.

N-ядром игры V (относительно X и данного семейства функций эксцесса $\{E_S\}_S$) – мы обозначаем его через $N(X, V)$ – называется множество векторов в X, для которых соответствующие вектора θ являются лексикографически наименьшими, т. е.

$$N(X, V) = \{x \in X : \theta(x) \preceq_{lex} \theta(y) \quad \text{для всех} \quad y \in X\}.$$

Если $X = IR(V) \cap GR(V)$, то $N(X, V) := N(V)$ называется n-ядром игры V. Если $X = GR(V)$, то $N(X, V) := PN(V)$ называется *пред-n-ядром* игры V.

3.2. Аксиомы и пропорциональный эксцесс

Итак, наша цель – обобщение пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ на НТП игры. Пусть H_S – функция эксцесса, т. е. $H_S : \mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^{[S]}_+ \to \mathbb{R}$. Введем пять следующих аксиом (чтобы несколько упростить обозначения, мы будем писать V вместо $V(S)$).

Непрерывность. $H_S(V, x)$ непрерывна по обеим переменным V и $x \neq \mathbf{0}$.

Инвариантность относительно шкал. Если $V \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, $A \in \mathbb{R}^{[S]}_{++}$ и $A * V = \{A * y : y \in V\}$, то

$$H_S(A * V, A * x) = H_S(V, x).$$

MIN-инвариантность. Пусть $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, тогда

$$H_S(V_1 \cap V_2, x) = \min\{H_S(V_1, x), H_S(V_2, x)\}.$$

MAX-инвариантность. Пусть $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}_{N+}^S$, тогда

$$H_S(V_1 \cup V_2, x) = \max\{H_S(V_1, x), H_S(V_2, x)\}.$$

Пропорциональность для ТП игр. Если $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ соответствует положительной ТП игре v, т. е.

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^{[S]} : x(S) \leq v(S)\} - \mathbb{R}_+^{[S]},$$

тогда $H_S(V, x) = \frac{v(S)}{x(S)}$.

Пусть $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ – произвольная игра. Определим функцию h_S : $\mathfrak{G}_{N+}^S \times \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h_S(V, x) = 1/\gamma(V(S), x^S), \tag{3.4}$$

где $\gamma(W, y) = \inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda W\}$ – калибровочная функция (или калибровочная функция Минковского) множества W (см., например, [4]).

Теорема 3.1. *Существует единственная функция эксцесса H_S : $\mathfrak{G}_{N+}^S \times \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая аксиомам непрерывности, инвариантности относительно шкал, MAX-, MIN-инвариантности и пропорциональности для ТП игр, причем $H_S = h_S$, где h_S определена с помощью (3.4).*

Комментарии приведенных выше аксиом, доказательство этой теоремы, а также свойства пропорционального эксцесса, некоторые из которых мы упоминаем ниже, можно найти в [2] (см. также [3]).

3.3. Свойства пропорционального эксцесса

Мы не приводим здесь соответствующий пропорциональному эксцессу аналог теоремы Калаи [8] полностью, а сформулируем лишь ту ее часть, которая касается n-ядра и пред-n-ядра.

Теорема 3.2. *Пусть $\{h_S\}_S$ – семейство пропорциональных эксцессов и $V \in \mathfrak{G}_{N+}$. Тогда*

1) Если $IR(V) \cap GR(V) \neq \emptyset$, то $N(V) \neq \emptyset$ и состоит из конечного числа точек.

2) Для любой игры V $PN(V)$ непусто и состоит из конечного числа точек.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 3.1. *Пусть $V, V' \in \mathfrak{G}_{N+}$ – такие НТП игры, что $V(N) = V'(N)$ и $V'(S) = aV(S), \forall S \neq N$ для некоторого $a > 0$. Тогда $x \in PN(V) \Leftrightarrow x \in PN(V')$, где $PN(V)$ – пред-n-ядро игры V.*

Пример 3.1. Пусть $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ – безуровневая арбитражная схема, т. е. для некоторого $q \in \mathbb{R}^N_{++}$

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S \,:\, x_i \leq q_i \text{ для любого } i \in S\},$$

для любой $S \neq N$, $q \in \mathrm{int}V(N)$, причем $V(N)$ обладает свойством безуровневости, и существует такой $x \in V(N)$, что $x > q$. Тогда $N(V) = PN(V) = \lambda q$, где λ таково, что $\lambda q \in \partial V(N)$.

Следующее предложение является простым следствием определения пропорционального эксцесса и равенства $\gamma(V, x) = \gamma(A * V, A * x)$ для любого $A \in \mathbb{R}^S_{++}$.

Предложение 3.2. *n-ядро и пред-n-ядро ковариантны относительно масштабов измерения полезностей, т. е. если $A \in \mathbb{R}^N_{++}$, то для любой $V \in \mathfrak{G}_{N+}$, $N(AV) = A * N(V)$, и $PN(AV) = A * PN(V)$, где игра AV определяется равенством*

$$AV(S) = A * V(S) \quad \textit{для любой } S.$$

4. *Status quo*-пропорциональное решение для арбитражных схем

В приведенном выше примере мы показали, что для безуровневой арбитражной схемы с положительной точкой *status quo* n-ядро и пред-n-ядро представляют собой оптимальную по Парето точку, пропорциональную точке *status quo*. Рассмотрим это арбитражное решение подробно.

Будем считать далее, что каждая арбитражная схема (q, Q) удовлетворяет следующим условиям:

(a) $Q \subset \mathbb{R}^N_+$ является компактным и норамальным ($\mathbf{0}$-исчерпывающим) множеством, т. е. из $x \in Q$, $y \in \mathbb{R}^N_+$, и $x \geq y$ следует $y \in Q$;

(b) Q – безуровневое множество, т. е.

$$x, y \in \partial Q, \quad x \geq y \;\Rightarrow\; x = y;$$

(c) $q \geq \mathbf{0}$ и существует такой $x \in Q$, что $x > q$.

Обозначим семейство всех арбитражных схем с множеством игроков N и удовлетворяющих свойствам (a)–(c) через Ω^N. Если же в свойстве (c) требуется $q > 0$, то соответствующее семейство будем обозначать через Ω^N_+.

Арбитражным решением F на $\Sigma \subset \Omega^N$ называется отображение $F : \Sigma \to \mathbb{R}^N_+$, которое ставит в соответствие каждой арбитражной схеме (q, Q) из Σ ее решение $F(q, Q)$.

Для арбитражной схемы $(q, Q) \in \Omega^N_+$ определим решение PS следующим образом: пусть

$$\mu(q, Q) = \max\{t \in \mathbb{R}_+ : tq \in Q\},$$

и $PS(q, Q) = \mu(q, Q)q$. Это решение будем называть *status quo*-пропорциональным или кратко *sq*-пропорциональным (чтобы отличать его от упомянутого выше пропорционального решения Калаи [9]).

Пусть F – арбитражное решение. Рассмотрим следующие аксиомы.

Оптимальность по Парето (PO). $F(q, Q) \in \pi Q$, где πQ обозначает множество оптимальных по Парето точек множества Q.

Ковариантность относительно шкал (SC). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^N_{++}$. Тогда для любой арбитражной схемы (q, Q)

$$F(\lambda * q, \lambda * Q) = \lambda * F(q, Q),$$

где $*$ обозначает покоординатное умножение.

Анонимность (AN). Если τ – произвольная перестановка множества N, то

$$F(\tau^* q, \tau^* Q) = \tau^* F(q, Q),$$

где τ^* – это преобразование $\mathbb{R}^N$, индуцированное τ, т. е.

$$\tau^*(x) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}).$$

Сильная монотонность (SM). Если $Q' \supset Q$, то $F(q, Q') \geq F(q, Q)$.

Следующее предложение следует немедленно из определения.

Предложение 4.1. *SQ-пропорциональное решение удовлетворяет аксиомам PO, SC, AN и SM.*

Теорема 4.1. *SQ-пропорциональное решение является единственным решением на Ω_+^N, удовлетворяющим аксиомам PO, SC, AN и SM.*

Доказательство. Пусть F – арбитражное решение, удовлетворяющее указанным аксиомам. Рассмотрим произвольную арбитражную схему (e, Q), где $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $x = \mu e$, где $\mu = \max\{t \in \mathbb{R}_+ : te \in Q\}$, и пусть $F(e, Q) \neq x$.

Рассмотрим арбитражную схему (e, Q^Π), где

$$Q^\Pi = \bigcup_{\tau \in \Pi} \tau^* Q,$$

и Π обозначает множество всех перестановок множества N. Очевидно, что множество Q^Π инвариантно относительно любых перестановок множества N, поэтому $F(e, Q^\Pi) = \lambda e$ для некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, $\lambda e = x$. Действительно, с одной стороны, $x \in Q^\Pi$, а с другой, не может быть, чтобы $F(e, Q^\Pi) > x$, поскольку $F(e, Q^\Pi) \in \tau^* Q$ для любой перестановки τ, но $\mu e \in \tau^* Q$ для любой τ, а поэтому $\mu \neq \max\{t \in \mathbb{R}_+ : te \in Q\}$.

Поскольку $Q^\Pi \supset Q$, то $x = F(e, Q^\Pi) \geq F(e, Q)$. Однако (в силу безуровневости) это возможно только, если $F(e, Q) = x$. Поскольку Q выбиралось произвольно, то из SC следует доказываемое утверждение. $\square$

Легко видеть, что в приведенной только что теореме аксиому сильной монотонности SM можно заменить аксиомой независимости от посторонних альтернатив IIA.

Независимость от посторонних альтернатив (IIA). Для любых арбитражных схем $(q, Q), (q, Q') \in \Omega^N$, если $Q' \subset Q$ и $F(q, Q) \in Q'$, то $F(q, Q') = F(q, Q)$.

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *SQ-пропорциональное решение является единственным решением на Ω_+^N, удовлетворяющим аксиомам PO, SC, AN и IIA.*

Обратим внимание на следующее. Если рассматривать арбитражные схемы с *нулевыми* точками *status quo*, то в определении арбитражной схемы точку *status quo* можно не указывать вообще, и в этом случае арбитражная схема определяется только множеством допустимых альтернатив Q. При этом арбитражное решение Нэша (для соответствующих выпуклых и компактных арбитражных схем Q) задается, как известно, той же самой системой аксиом, разумеется, для другого семейства арбитражных схем (с нулевыми точками *status quo* и выпуклыми компактными множествами Q).

Теорема 4.3. *Решение F удовлетворяет аксиомам PO, SC, AN и IIA тогда и только тогда, когда для любых Q, $F(Q) = NS(Q)$, где NS – арбитражное решение Нэша, т. е.*

$$NS(Q) = \arg\max\{\prod_{i\in N} x_i : \ x \in Q\}.$$

Если рассматривать произвольные токи *status quo*, то для характеризации арбитражного решения Нэша нужно добавить еще аксиому ковариантности относительно сдвига ТС.

Замечание 4.1. Вообще говоря, все сказанное выше остается в силе и для арбитражных схем, в которых не обязательно существует $x \in Q$ такой, что $x > q$. Разумеется, в этом случае теряется индивидуальная рациональность решения, и поэтому рассматривать арбитражные схемы без этого условия достаточно бессодержательно. Однако в общем случае НТП игр условия этого типа уже не являются обязательными. Так в разделе 6, в котором мы рассматриваем продолжение sq-пропорционального решения на НТП игры, нет ограничений типа индивидуально рациональной монотонности игры V, а именно: $V(S) \times V(i) \subset V(S \cup i)$.

5. Согласованность *status quo*-пропорционального решения для арбитражных схем

Значительная часть аксиоматической теории для арбитражных схем развивалась в предположении фиксированного числа игроков. Однако, модель существенно обогатилась за счет введения переменного числа агентов. Были сформулированы аксиомы, описывающие как могут или как должны решения реагировать на изменения числа агентов, и тем самым появились новые системы аксиом, определяющие решения. Так, в частности, Ленсберг [13] использовал аксиому согласованности для характеризации арбитражного решения Нэша.

Для формулировки соответствующих результатов нам понадобятся некоторые дополнительные определения, которые мы приведем ниже.

5.1. Аксиомы

Пусть $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел и пусть $\mathcal{P}$ обозначает семейство непустых, конечных подмножеств множества $\mathcal{N}$. Элементы $\mathcal{P}$ будем обозначать через $N, N', \ldots$. Множество $\mathcal{N}$ можно представлять себе, как множество потенциальных игроков, а $\mathcal{P}$ – это семейство всех подмножеств таких игроков, которые предположительно могут стать участниками некоторой арбитражной схемы (игры).

Пусть $N \in \mathcal{P}$ – непустое конечное множество игроков. Нам понадобится еще одно обозначение: для $x, y \in \mathbb{R}^N$ через $[x, y]$ (или $[y, x]$) будем обозначать отрезок вида $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^N : \ z = \lambda x + (1 - \lambda)y,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Далее мы будем в основном придерживаться обозначений Ленсберга, внося в них соответствующие модификации, поскольку в [13] точки *status quo* – нулевые.

Пусть $N \in \mathcal{P}$. Обозначим через Ω^N семейство всех арбитражных схем с множеством игроков N, удовлетворяющих свойствам (a)–(c).

Арбитражным решением называется отображение

$$F : \bigcup_{N \in \mathcal{P}} \Omega^N \to \bigcup_{N \in \mathcal{P}} \mathbb{R}^N_+,$$

которое ставит в соответствие каждому $N \in \mathcal{P}$ и каждой арбитражной схеме $(q, Q) \in \Omega^N$ точку $F(q, Q)$ множества Q, которая называется решением арбитражной схемы (q, Q).

Приведем теперь аксиомы, которые будут использоваться ниже. Мы формулируем их в форме, подходящей для случая переменного множества игроков.

Оптимальность по Парето (PO). Для любого $N \in \mathcal{P}$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ из $F(q, Q) = x$ следует, что не существует $y \in Q$ такого, что $y \geq x$, $y \neq x$.

Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $|N| = |N'|$ обозначим через $\Gamma^{N,N'}$ семейство взаимно-однозначных отображений $\delta : N \to N'$. Иногда будет удобно рассматривать $\delta \in \Gamma^{N,N'}$ как функцию из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^{N'}$, определенную формулой $y = \delta(x)$, если $y_{\delta(i)} = x_i$ для каждого $i \in N$. Для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ определим также $\delta(q, Q) \equiv (\delta(q), \delta(Q))$.

Анонимность (AN). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $|N| = |N'|$, для любого $\delta \in \Gamma^{N,N'}$ и каждой $(q, Q) \in \Omega^N$

$$F(\delta(q, Q)) = \delta(F(q, Q)).$$

Для любого $N \in \mathcal{P}$ обозначим через Λ^N семейство таких отображений $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^{N'}$, что для любого $\lambda \in \Lambda^N$ существует такой $a \in \mathbb{R}^N_{++}$, что для любого $i \in N$ и любого $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lambda_i(x) = a_i x_i.$$

Нам будет удобно также использовать следующие обозначения для $\lambda \in \Lambda^N$ и $(q, Q) \in \Omega^N$:

$$\lambda(q, Q) \equiv (\lambda(q), \lambda(Q)).$$

Ковариантность относительно шкал (SC). Для любого $N \in \mathcal{P}$, любой арбитражной схемы $(q, Q) \in \Omega^N$ и любого $\lambda \in \Lambda^N$

$$F(\lambda(q, Q)) = \lambda(F(q, Q)).$$

Независимость от посторонних альтернатив (IIA). Для любого $N \in \mathcal{P}$, для любых $(q, Q), (q, Q') \in \Omega^N$, если $Q' \subset Q$ и $F(q, Q) \in Q'$, то $F(q, Q') = F(q, Q)$.

Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через H^x_N гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$ вида

$$H^x_N = \{y \in \mathbb{R}^N : \ y_{N' \setminus N} = x_{N' \setminus N}\}.$$

Мы обозначаем также для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $x \in \mathbb{R}^{N'}$, ограничение x на $\mathbb{R}^N$ через x_N. Для $Q \subset \mathbb{R}^{N'}$ и $x \in Q$ обозначим $t^x_N(Q)$ проекцию множества $H^x_N \cap Q$ на $\mathbb{R}^N$.

Теперь мы можем сформулировать аксиомы согласованности, которые аналогичны аксиомам Ленсберга [13], но используют ненулевые точки *status quo*.

Двусторонняя устойчивость (B.STAB). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $|N| = 2$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ и любой $(r, R) \in \Omega^{N'}$, если $q = r_N$ и $Q = t_N^x(R)$, где $x = F(r, R)$, то $F(q, Q) = x_N$.

Следующая аксиома представляет собой усиление предыдущей.

Многосторонняя устойчивость (M.STAB). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ и любой $(r, R) \in \Omega^{N'}$ если $q = r_N$ и $Q = t_N^x(R)$, где $x = F(r, R)$, то $F(q, Q) = x_N$.

Будем обозначать для любого $N \in \mathcal{P}$ через Ω_0^N семейство всех арбитражных схем из Ω^N, удовлетворяющих свойствам (a) и (c) с выпуклыми Q и $q = \mathbf{0}$. В этом случае каждую арбитражную схему (q, Q) можно обозначать просто через Q. Через Ω_+^N будем, как и раньше, обозначать семейство арбитражных схем в Ω^N, удовлетворяющих свойствам (a)–(c) и $q > \mathbf{0}$.

Мы не приводим здесь оригинальные аксиомы Ленсберга, поскольку они легко получаются из приведенных простой заменой ненулевой точки *status quo* q на $\mathbf{0}$ с учетом того, что $\lambda_i(\mathbf{0}) = 0$.

5.2. Согласованность

Основной результат Ленсберга представляет следующая теорема [13].

Теорема 5.1. *Решение на Ω_0 удовлетворяет аксиомам PO, AN, SC и M.STAB тогда и только тогда, когда оно является арбитражным решением Нэша.*

Обратимся теперь к sq-пропорциональному решению.

Предложение 5.1. *sq-пропорциональное решение на Ω_+ удолетворяет аксиомам PO, SC, AN и M.STAB.*

Доказательство. PO, SC и AN следуют из определения sq-пропорционального решения. Проверим выполнение M.STAB.

Так как sq-пропорциональное решение удовлетворяет SC, мы можем рассматривать для каждого $N \in \mathcal{P}$ арбитражные схемы вида (e_N, Q). Тогда $PS(e_N, Q) = \mu e_N$ для некоторого числа $\mu > 0$.

Пусть теперь $N, N' \in \mathcal{P}$ таковы, что $N \subset N'$ и $(e_{N'}, R) \in \Omega_+^{N'}$. Определим арбитражную схему (q, Q) следующим образом: $q = e_N$ и $Q = t_N^{\mu e_{N'}}(R)$, где $\mu e_{N'} = PS(e_{N'}, R)$. Ясно, что $\mu e_N \in t_N^{\mu e_{N'}}(R)$ оптимально по Парето и, следовательно, $\mu e_N = PS(e_N, Q)$. $\square$

Следствие 5.1. SQ-*пропорциональное решение удовлетворяет B.STAB.*

Предложение 5.2. *Если решение F на Ω_+ удовлетворяет PO, AN, SC и B.STAB, то для любых $N \in \mathcal{P}$ с $|N| = 2$ и любых $(q, Q) \in \Omega_+^N$, $F(q, Q) = PS(q, Q)$.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathcal{P}$ с $|N| = 2$, и пусть $(q, Q) \in \Omega_+^N$. Не умаляя общности, мы можем считать (по аксиоме AN), что $N = \{1, 2\}$ и (в силу SC) что $q = e_N$.

Мы построим такую арбитражную схему $(r, R) \in \Omega_+^{N'}$ с $|N'| = 3$, что $r = e_{N\prime}, PS(r, R) = \mu e_{N'}$ для некоторого μ и $t_N^{\mu e_{N'}}(R) = Q$.

В силу AN мы можем считать, что $N' = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим множество $Q \subset \mathbb{R}_+^N$. По свойству (c) найдется такой $x \in \partial Q$, что $x = \mu e_N$, причем $\mu > 1$. Положим $\varepsilon = \mu - 1$. Тогда $x = (1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В силу условия безуровневости множество ∂Q можно представить следующим образом:

$$\partial Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : \; x_2 = f(x_1)\}$$

для некоторой непрерывной строго убывающей функции f.

Пусть $f(0) = \alpha$ и $f^{-1}(0) = \beta$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\alpha \leq \beta$. Заметим также, что, в силу безуровневости $\alpha > 1+\varepsilon$. Пусть теперь $\gamma : \{1, 2\} \to \{2, 3\}$ и $\gamma' : \{2, 3\} \to \{3, 1\}$. Обозначим $Q^{23} = \gamma(Q)$ и $Q^{31} = \gamma'(Q^{23})$. Пусть $R_1 \subset \mathbb{R}_+^{N'}$ определяется как $R_1 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, где

$$Q_1 = Q^{23} \times \{\mu e_{\{1\}}\}, Q_2 = Q^{31} \times \{\mu e_{\{2\}}\}, Q_3 = Q \times \{\mu e_{\{3\}}\}.$$

По построению $\mu e_{N'} \in R_1$ (см. Рис. 1).

Наша цель состоит в построении множества R как некоторой «оболочки» множества R_1. Для этого рассмотрим сначала произвольное $a \in [0, 1+\varepsilon]$. Тогда это a определяет (в силу безуровневости) в точности две точки $y(a) \in \partial Q_1$ и $z(a) \in \partial Q_3$ (мы рассматриваем Q_1, Q_2, Q_3 как двумерные множества) такие, что $y_2(a) = z_2(a) = a$ (заметим, что $y(a) = z(a)$ для $a = 1 + \varepsilon$). Пусть теперь

$$P_2 = \bigcup_{a \in [0, 1+\varepsilon]} P(a),$$

где $P(a)$ – это отрезок $[z(a), y(a)]$.

Аналогично определяем множества P_1 и P_3.

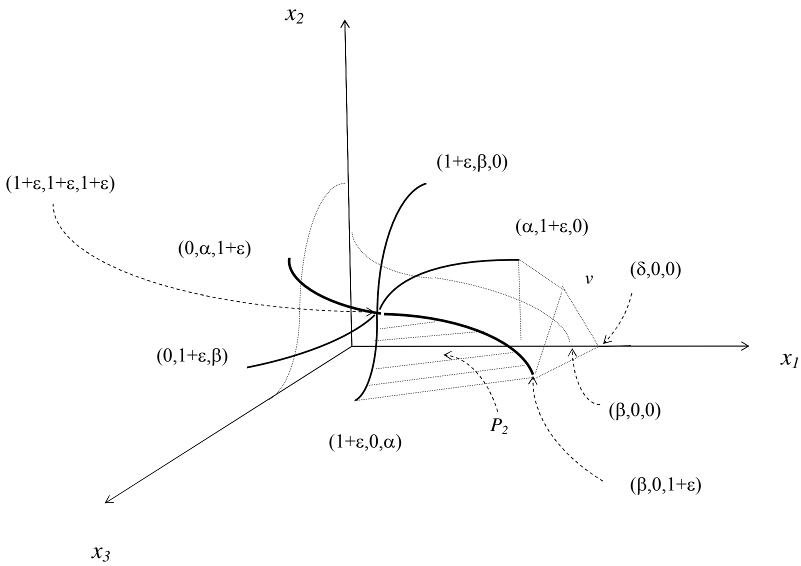

Рис. 1. Построение множества *R*

Дальнейшее построение разбивается на три шага.

(1) Рассмотрим для каждого $b \in [1+\varepsilon, \alpha]$ (напомним, что в силу безуровневости $\alpha > 1+\varepsilon$) две точки $z(b) \in \partial Q_3$ и $w(b) \in \partial Q_2$ (они определяются однозначно) с $z_1(a) = w_1(b) = b$. Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

(2) Так как $\alpha > 1+\varepsilon$ (в силу безуровневости), то $f(\alpha) < 1+\varepsilon$. Пусть $v = (\beta, f(\alpha), 0)$. Рассмотрим отрезок $S_3 = [(\alpha, 1+\varepsilon, 0), v]$. Тогда каждый $b \in [\alpha, \beta]$ определяет две точки$z(b) \in \partial Q_3$ и $w(b) \in S_3$ с $z_1(b) = w_1(b)$. Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

Если $\alpha = \beta$, то мы опускаем этот шаг и полагаем $v = (\alpha, 1+\varepsilon, 0)$.

(3) Возьмем теперь точку $h = (\delta, 0, 0)$ с $\delta > \beta$, и рассмотрим два отрезка $S_3' = [v, h]$ и $S_2 = [(\beta, 0, 1+\varepsilon), h]$. Тогда каждый $b \in [\beta, \delta]$ определяет две точки $z(b) \in S_2$ и $w(b) \in S_3'$ с $z_1(b) = w_1(b)$ (для $b = \delta$ они совпадают). Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

Определим теперь $E_1 = \bigcup\limits_{b\in[1+\varepsilon,\delta]} E(b)$.

Аналогично определяем множества E_2 и E_3.

Определим, наконец, R как нормальную оболочку множества $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

Проверим теперь, что R обладает всеми свойствами, требуемыми для принадлежности арбитражной схемы $(e_{N'}, R)$ семейству $\Omega_+^{N'}$.

Нормальность (**0**-исчерпываемость) следует из построения. Проверим безуровневость. Рассмотрим сначала множество P_2. Возьмем произвольный $x_2 = a < 1+\varepsilon$. Ясно, что отрезок $P(a) = [y(a), z(a)] \subset P_2$, и он параллелен плоскости $x_2 = 0$. Далее, $y_1(a) = 1+\varepsilon$ и $z_3(a) = 1+\varepsilon$ для любого a. Каждую точку в $P(a)$ можно единственным образом представить в виде $u(a) = \lambda y(a) + (1-\lambda)z(a)$ для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Поэтому любые две различные точки $u^1(a), u^2(a) \in P(a)$ отличаются и первыми, и третьими координатами. Следовательно, не существует отрезка в P_2, параллельного оси x_1 или x_3.

Предположим теперь, что существует отрезок I в P_2, параллельный оси x_2. Это означает, что для любой точки $v \in I$ мы имеем $v_1 = c_1$ и $v_3 = c_3$ для некоторых чисел $c_1, c_3 > 1+\varepsilon$. Рассмотрим две различные точки $v^1, v^2 \in I$. Тогда

$$v^1 = \lambda_1 y(a_1) + (1-\lambda_1)z(a_1), v^2 = \lambda_2 y(a_2) + (1-\lambda_2)z(a_2)$$

для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ и $a_1, a_2 > 1+\varepsilon$.

Предположим $a_1 < a_2$. Так как f строго убывает, то $y_3(a_1) > y_3(a_2)$, $y_1(a_1) = y_1(a_2) = 1+\varepsilon, z_1(a_1) > z_1(a_2)$ и $z_3(a_1) = z_3(a_2) = 1+\varepsilon$. Тогда

$$c_1 = \lambda_1(1+\varepsilon) + (1-\lambda_1)z_1(a_1) = \lambda_2(1+\varepsilon) + (1-\lambda_2)z_1(a_2),$$

$$c_3 = \lambda_1 y_3(a_1) + (1-\lambda_1)(1+\varepsilon) = \lambda_2 y_3(a_2) + (1-\lambda_2)(1+\varepsilon).$$

Из первого равенства следует, что $\lambda_2 < \lambda_1$, а из второго, что $\lambda_2 > \lambda_1$, и мы приходим к противоречию. Разумеется, все сказанное верно и для множеств P_1 и P_3.

Доказательство того, что E_1 (а также E_2 и E_3) не содержит отрезков, параллельных осям, аналогично только что приведенному, однако здесь следует учесть не только монотонность функции f, но также и построение отрезков S_2, S_3 и S_3' (см. шаги (2) и (3) выше).

Таким образом, множество R таково, что арбитражная схема $(e_{N'},R)$ $\in \Omega_+^{N'}$ (напомним, что точка $x = (1+\varepsilon, 1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$ лежит в R). Так как R инвариантно относительно поворотов осей, $F(e_{N'}, R)=x$.

Проверим теперь, что $t_N^{\mu e_{N'}}(R) = Q$. Нам достаточно показать, что каждый $v \in \partial Q_3$ оптимален по Парето в R. Для этого возьмем произвольную точку $v \in \partial Q_3$. Если $x_1 > 1+\varepsilon$, то $y_1 \leq 1+\varepsilon$ для любого $y \in E_2 \cup R_1 \cup E_3$. Для любого $y \in (E_1 \cup R_3)$ мы имеем $y_3 < x_3$ или $y_3 = x_3$, но в последнем случае $y_1 < x_1$, или если $y_1 > x_1$, то $y_2 < x_2$ (так как f строго убывает).

Рассмотрим, наконец, произвольный $y \in R_2, y \neq x$. Тогда $y \in [y(a), z(a)]$ для некоторого $a \in [0, 1+\varepsilon]$. Если $y = z(a)$, то $z_1(a) < x_1$, или $z_1(a) > x_1$, но $z_2(a) < x_2$.

Пусть теперь $y \neq z(a)$. Если $a > x_2$, то $y_2 < x_2$. Если $a \leq x_2$, то $z_1(a) \leq x_1, y_1(a) = 1+\varepsilon$. Тогда

$$y_1 = \lambda y_1(a) + (1-\lambda)z_1(a) = \lambda(1+\varepsilon) + (1-\lambda)z_1(a) < x_1$$

для любого $\lambda \in (0,1]$ (поскольку $x_1 > 1+\varepsilon$).

Случай $x_1 < 1+\varepsilon$ аналогичен.

Как уже говорилось выше, $F(e_{N'}, R) = \mu e_{N'}$. Тогда в силу B.STAB $F(e_N, Q) = F(e_N, t_N^{\mu e_{N'}}(R)) = \mu e_N$. $\square$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Решение F на Ω_+ удовлетворяет PO, AN, SC и B.STAB, тогда и только тогда, когда оно является status quo-пропорциональным решением.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $N' \in \mathcal{P}$, и пусть $(r, R) \in \Omega_+^{N'}$. В силу AN мы можем считать $q = e_{N'}$. Пусть $x = F(e_{N'}, R)$. Тогда, в силу B.STAB, для любого $N \subset N'$, $|N| = 2$ мы имеем $F(e_N, Q) = x_N$, где $Q = t_N^x(R)$. Из Предложения 5.2 следует, что $F(e_N, Q) = PS(e_N, Q) = \mu e_N$ для некоторого μ. Следовательно $x_i = x_j = \mu$ для $i, j \in N$ и каждого $N \subset N'$. Следовательно $x_i = x_j = \mu$ для всех $i, j \in N'$, а поэтому $x = \mu e_{N'}$. $\square$

Очевидно, что аксиому B.STAB можно заменить более сильной аксиомой M.STAB. В этом случае арбитражное решение Нэша и sq-пропорциональное решение характеризуются одной и той же системой аксиом. Различие состоит в том, что первое определено на Ω_0, а второе на Ω_+.

6. Согласованное пропорциональное решение для НТП игр

В этом разделе мы рассмотрим согласованное решение для НТП игр, которое для случая двух игроков совпадает со *status quo*-пропорциональным решением.

Для начала мы напомним определение редуцированной игры в смысле Харта–Мас-Колелла [6].

Для любого решения (на некотором семействе НТП игр) φ, игры (N, V), и подмножества $T \subset N$, редуцированная игра (T, V_T^φ) определяется следующим образом:

$$V_T^\varphi(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^S : \ (x, \varphi_i(S \cup (N \backslash T), V)_{i \in N \backslash T}) \in V(S \cup (N \backslash T))\}$$

для любых $S \subset T$. Таким образом, $V_T^\varphi(S)$ представляет собой S-сечение $V(S \cup (N \backslash T))$, когда координаты (выигрыши) всех игроков вне T зафиксированы на уровне выигрышей, предписываемых решением в подыгре $S \cup (N \backslash T)$.

Решение φ называется *согласованным*, если

$$\varphi_j(T, V_T^\varphi) = \varphi_j(N, V)$$

для всех игр (N, V) и всех $j \in T \subset N$.

Отметим, что B.STAB – это конечно же, согласованность в этом смысле.

Легко видеть, что если $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}^{nl}$, то редуцированные игры также лежат в соответствующем семействе игр. Здесь верхний индекс nl означает, что для рассматриваемых НТП игр выполнено условие безуровневости.

Определим искомое решение P индуктивно. Пусть $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}^{nl}$ – произвольная игра. Положим для $i \in N$

$$v_i = \max\{x : \ x \in V(i)\}.$$

Для дальнейшего изложения нам будет удобно положить также $\mu_i = 1$ для каждого i.

Теперь для каждых $i, j \in N$ определим

$$\mu_{ij} = \max\{\mu > 0 : \ \mu(\mu_i v_i, \mu_j v_j) \in V(i, j)\},$$

и $w^{ij} = \mu_{ij}(\mu_i v_i, \mu_j v_j) \in \partial V(i,j)$, т. е. w^{ij} является sq-пропорциональным решением арбитражной схемы $((v_i, v_j), V(i,j))$.

Далее, для любых $i, j, k \in N$ определим

$$\mu_{ijk} = \max\{\mu > 0 : \ \mu(\mu_i\mu_{ij}\mu_{ik}v_i, \mu_j\mu_{ij}\mu_{jk}v_j, \mu_k\mu_{ik}\mu_{jk}v_k) \in V(i,j,k)\}.$$

Тогда

$$w^{ijk} = \mu_{ijk}(\mu_i\mu_{ij}\mu_{ik}v_i, \mu_j\mu_{ij}\mu_{jk}v_j, \mu_k\mu_{ik}\mu_{jk}v_k) \in \partial V(i,j,k).$$

Для произвольного подмножества $S \subset N$ определяем

$$\mu_S = \max\{\mu > 0 : \ \mu((\prod_{T \neq S: i \in T \subset S} \mu_T v_i)_{i \in S}) \in V(S)\},$$

и

$$w^S = \mu_S((\prod_{T \neq S: i \in T \subset S} \mu_T v_i)_{i \in S}) \in \partial V(S).$$

Положим, наконец, $P(N,V) = w^N$.

Предложение 6.1. *Решение P обладает свойством согласованности.*

Доказательство. Нам достаточно проверить согласованность для $T = N \backslash \{m\}$ для произвольного игрока $m \in N$. В этом случае редуцированная игра определяется следующим образом:

$$V_T^P(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^S : \ (x, P_m(S \cup \{m\}, V)) \in V(S \cup \{m\})\}$$

для любых $S \subset N \backslash \{m\}$.

По определению

$$P_m(S \cup \{m\}, V) = \prod_{K: m \in K \subset S \cup \{m\}} \mu_K v_m.$$

Легко видеть, что для проверки согласованности P достаточно проверить, что

$$x = (\prod_{K: i \in K \subset S \cup \{m\}} \mu_K v_i)_{i \in S} \in V(S \cup \{m\}).$$

Это, однако, немедленно следует из определения решения. $\square$

Очевидно также, что решение P ковариантно относительно шкал.

Теорема 6.1. *Существует единственное согласованное решение на $\mathfrak{G}^{nl}_{N+}$, совпадающее в случае НТП игр двух лиц с sq-пропорциональным решением. Этим решением является P.*

Доказательство. Доказательство практически повторяет доказательство Леммы 6.8 в [6], касающейся решения Калаи-Самета (мы остановимся на этом решении ниже в разделе 8). Пусть P и R – два решения, удовлетворяющих требуемым свойствам. Предположим, по индукции, что они совпадают для всех игр с не более, чем $n-1$ игроками. Пусть (N, V) – игра n лиц, и пусть $i, j \in N, i \neq j$.

Рассмотрим две редуцированные игры $(\{i,j\}, V^P_{\{i,j\}})$ и $(\{i,j\}, V^R_{\{i,j\}})$. Для упрощения обозначений, обозначим их через V^P и V^R. Ясно, что они совпадают для одноэлементных коалиций (по индукции, т. к. существенны только $n-1$ игроков). Следовательно, поскольку P является sq-пропорциональным для игр двух лиц, $P_i(V^P) \gtrless P_i(V^R)$ тогда и только тогда, когда $P_j(V^P) \gtrless P_j(V^R)$.

Далее, $P = R$ для игр двух лиц, а кроме того, и P, и R согласованы. Поэтому

$$P_i(V) = P_i(V^P) \gtrless P_i(V^R) = R_i(V^R) = R_i(V)$$

тогда и только тогда, когда $P_j(V) \gtrless R_j(V)$. Это верно для любых двух игроков, причем и $P(V)$, и $R(V)$ оптимальны по Парето. Следовательно, $P(V) = R(V)$. □

Будем называть решение P *согласованным пропорциональным решением.*

Прежде чем сформулировать следствие из этой теоремы, напомним формулировки аксиом анонимности, ковариантности относительно шкал и сильной монотонности для случая НТП игр. (Аксиома оптимальности по Парето очевидна). Пусть F – решение на $\mathfrak{G}^{nl}_{N+}$.

Анонимность (AN). Пусть τ – произвольная перестановка множества N. Тогда τ индуцирует преобразование пространства $\mathbb{R}^N$, а значит и игры $(N, V) : \tau x = (x_{\tau^{-1}(i)})_{i \in N}$. Решение F называется анонимным, если для любой перестановки τ множества N имеет место равенство

$$\tau(F(V, N)) = F(N, \tau V).$$

Ковариантность относительно шкал (SC). Решение F называется ковариантным относительно шкал, если для любой игры (N, V) имеет место равенство $F(N, \lambda * V) = \lambda * F(N, V)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}^N_{++}$.

Сильная монотонность (SM). Если две игры (N, V) и (N, W) таковы, что $V(N) \supset W(N)$ и $V(S) = W(S)$ для всех $S \neq N$, то $F(V) \geq F(W)$.

Следствие 6.1. *Решение P является единственным согласованным решением на $\mathfrak{G}^{nl}_{N+}$, удовлетворяющим аксиомам PO, AN, SC и SM.*

Доказательство немедленно следует из согласованности, Предложения 5.2 и Теоремы 6.1.

7. Решение для НТП игр, инвариантное относительно пропорционального эксцесса

В [3] Е. Яновская определила значение для положительных ТП игр, инвариантное относительно пропорционального эксцесса, аналогично тому, как определяются ковариантные относительно сдвигов решения. В данном разделе мы обобщим одно из таких значений на случай НТП игр.

Напомним определение и некоторые свойства значения для положительных ТП игр, инвариантного относительно пропорционального эксцесса. Обозначим класс положительных ТП игр через $\mathcal{G}_+$. Через $\mathcal{G}_{N+} \subset \mathcal{G}_+$ будем обозначать класс положительных игр с множеством игроков N.

Значение Φ для класса $\mathcal{G}_{N+}$ назовем *инвариантным относительно пропорционального эксцесса*, если для двух произвольных игр (N, v), $(N, w) \in \mathcal{G}_{N+}$ и любых векторов выигрышей $x \in X(N, v), y \in X(N, w)$ из равенств

$$\frac{v(S)}{x(S)} = \frac{w(S)}{y(S)} \quad \text{для всех} \quad S \subset N$$

следует

$$x = \Phi(N, v) \iff y = \Phi(N, w). \tag{7.1}$$

(Здесь $X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N_{++} : x(N) = v(N)\}$).

Очевидно, что определение (7.1) эквивалентно определению ковариантности относительно сдвига для случая классического эксцесса.

Очевидно, что для значений, инвариантных относительно пропорционального эксцесса, свойство линейности не выполняется. Поэтому заменим его более слабой аксиомой.

Ограниченная линейность. Значение Ψ для некоторого класса игр $\mathcal{G}_N$ называется *ограниченно линейным*, если для любых игр $(N, v_k) \in \mathcal{G}_N$ для $k = 1, \ldots, m$ с одним и тем же значением $\Psi(N, v_k) = x$ из того, что их линейная комбинация $(N, \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, принадлежит этому же классу $\mathcal{G}_N$, следует, что она имеет то же самое значение:

$$\Psi(N, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k) = x.$$

Свойство ограниченной линейности значения Ψ означает, что для каждого вектора выигрышей $x \in \mathbb{R}^N$ это значение линейно на подклассе игр V^x с постоянным значением x :

$$V^x = \{(N, v) \in \mathcal{G}_N \,:\, \Psi(N, v) = x\}.$$

Назовем подкласс игр $\mathcal{G}'_N \subset \mathcal{G}_N$ *замкнутым относительно ковариантных преобразований*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}'$ из этого класса игры $(N, av + b)$ также принадлежат этому классу для всех $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Следующая лемма проясняет связь между свойствами линейности и ограниченной линейности.

Лемма 7.1. *Если значение Ψ для класса игр $\mathcal{G}'_N$, замкнутого относительно ковариантных преобразований, удовлетворяет свойствам ограниченной линейности и ковариантности, то оно линейно.*

С помощью двух последних аксиом приведем аксиоматическую характеризацию одного значения для класса положительных игр.

Теорема 7.1. (Яновская, [3]). *Для того чтобы значение Ψ для класса положительных игр $\mathcal{G}_{N+}$ удовлетворяло аксиомам эффективности, анонимности, ограниченной линейности, положительной однородности и инвариантности относительно пропорционального эксцесса, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие неотрицательные и не тождественно равные нулю числа $w(s), s \leq n-1, n =$*

$|N|$, *что для каждой игры* $(N,v) \in \mathcal{G}_{N+}$

$$\Psi(N,v) = \arg \max_{x \in X(N,v)} \prod_{S \subsetneq N} x(S)^{w(s)v(S)}. \tag{7.2}$$

Заметим, что функция в правой части (7.2) непрерывна и вогнута, если $w(s)v(S) \geq 0$, и это неравенство строгое хотя бы для одного $s = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, максимум в (7.2) достигается в единственной *положительной* точке, и значение Ψ определено корректно.

Можно показать (см. упомянутое выше доказательство), что для каждой игры $(N,v) \in \mathcal{G}_{N+}$ значение Ψ можно представить в виде

$$\Psi(N,v) = \arg \max_{x \in X(N,v)} \sum_{S \subsetneq N} w(s)v(S) \ln x(S), \tag{7.3}$$

и, следовательно, вектор $x = \Psi(N,v)$ должен являться решением следующей системы уравнений:

$$\sum_{S:S \ni i} w(s) \frac{v(S)}{x(S)} = \sum_{S:S \ni j} w(s) \frac{v(S)}{x(S)} \text{ для всех } i,j \in N. \tag{7.4}$$

В случае $w(S) = 1 \; \forall \, S$ будем называть такое решение пропорционально инвариантным или кратко p.i-решением, а в общем случае системы весов w – p.i(w)-решением.

Теперь мы можем перейти к определению аналога этого решения для НТП игр.

Определение 7.1. *Решение* ψ *(возможно, многозначное) на* $\mathfrak{G}_{N+}$ *назовем инвариантным относительно пропорционального эксцесса, если для любых двух игр* $(N,V),(N,W) \in \mathfrak{G}_{N+}$ *и любых* $x \in \partial V_+(N)$, $y \in \partial W_+(N)$ *из равенств*

$$h_S(V,x) = h_S(W,y) \;\; \forall S \subset N$$

следует

$$x \in \psi(N,V) \iff y \in \psi(N,W).$$

Прежде чем перейти к вопросу существования инвариантного относительно пропорционального эксцесса решения для НТП игр, покажем, что sq-пропорциональное решение является таковым в случае арбитражных схем.

Предложение 7.1. *Status quo-пропорциональное решение для арбитражных схем инвариантно относительно пропорционального эксцесса.*

Доказательство. Пусть (q, Q) и (q^1, Q^1) – две арбитражные схемы, V и V^1 – соответствующие НТП игры (заметим, что $V_S = P_{q^S}$, где $P_z = \{y \in \mathbb{R}^S : y \le z\}$ для $z \in \mathbb{R}^S_{++}$). Пусть $x \in \partial Q$, $y \in \partial Q^1$, $x = \mu(q, Q)q$ и $h_S(V, x) = h_S(V^1, y)$ для любой $S \subset N$. Ясно, что $h_S(V, x) = 1/\mu(q, Q)$. Тогда $h_S(V^1, y) = 1/\mu(q, Q)$ для каждого $S \subset N$. В частности, $y_1 = \mu(q, Q)q^1_1, \ldots, y_n = \mu(q, Q)q^1_n$. Так как $y \in \partial Q^1$, то $\mu(q, Q) = \mu(q^1, Q^1)$, и y является sq-пропорциональным решением для арбитражной схемы (q^1, Q^1). □

В основу определения инвариантного относительно пропорционального эксцесса решения для НТП игр мы положим равенство (7.4).

Теорема 7.2. *Для любой игры $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}$ существует $x \in \partial V_+(N)$, являющийся решением системы*

$$\sum_{S: i \in S} h_S(V, x) = \sum_{S: j \in S} h_S(V, x) \quad \forall i, j \in N, \tag{7.5}$$

а значит, существует и инвариантное относительно пропорционального эксцесса решение игры V.

Доказательство. Отметим, что если x является решением указанной системы (при этом не обязательно даже, чтобы $x \in \partial V_+(N)$), то λx также является ее решением для любого $\lambda > 0$.

Поэтому, не умаляя общности, мы можем считать, что множество $\partial V_+(N)$ представляет собой стандартный симплекс, т. е.

$$\partial V_+(N) = T^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_i y_i = 1\}.$$

Рассмотрим произвольную игру $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}$. Для любого вектора $y \in T^{n-1}$ и любой коалиции $S \ne \emptyset$ найдется единственное положительное число $\lambda_y^{(S)}$ такое, что $\lambda_y^{(S)} y \in \partial V(S)$. Заметим, что $\lambda_y^{(S)}$ непрерывно зависит от y.

Пусть $y \in \partial V_+(N)$. Определим положительную ТП игру $V_y \in \mathfrak{G}_{N+}$, в которой для любой коалиции $S \ne \emptyset$

$$\partial V_y(S) = \{z \in \mathbb{R}^S_+ : e_S(z - \lambda_y^{(S)} y) = 0\} - \mathbb{R}^S_+.$$

(Напомним, что мы именно так определяли НТП игру, соответствующую ТП случаю для игр из $\mathfrak{G}_{N+}$.) Иными словами, часть границы множества $V_y(S)$, лежащая в $\mathbb{R}^S_+$, представляет собой пересечение гиперплоскости в $\mathbb{R}^S$ с единичной нормалью, проходящей через точку $\lambda_y^{(S)} y$, и положительного ортанта $\mathbb{R}^S_+$. Ясно, что V_y можно рассматривать как элемент пространства $\mathbb{R}^{2^n}_+$, причем V_y как элемент пространства $\mathbb{R}^{2^n}_+$ непрерывно зависит от y.

В этом случае для игры V_y определено единственное p.i.-значение, которое мы обозначим через $\Psi(V_y)$.

В соответствии с (7.3) $\Psi(V_y)$ является единственным решением задачи максимизации функции

$$Q(N, V_y) = \sum_{S \subsetneqq N} V_y(S) \ln z(S)$$

на множестве $X(N, V_y) = \{z : z \in T^{n-1}\}$. Заметим, что если хотя бы для одного $i \in N$ $z_i \to 0$, то $Q(N, V_y) \to -\infty$.

Далее, поскольку для любого $z \in T^{n-1}$ и любой коалиции S мы имеем $z(S) \leq 1$, то все слагаемые в этой сумме неположительны (поскольку игра V_y положительна). Поэтому для любого $y \in T^{n-1}$ мы имеем

$$\max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} V_y(S) \ln z(S) \geq \max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} (\max_{y \in T^{n-1}} V_y(S)) \ln z(S) \geq$$

$$\geq \max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln z(S) \geq \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln(s/n) = a,$$

где $v(S) = \max_{y \in T^{n-1}} V_y(S) > 0, s = \mid S \mid$.

Следовательно, для любого $y \in T^{n-1}$ решение задачи максимизации функции $Q(N, V_y)$ лежит в (выпуклом) компакте

$$T_a = \{z \in T^{n-1} : \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln z(S) \geq a\} \subset T^{n-1}_o,$$

где T^{n-1}_o обозначает относительную внутренность множества T^{n-1}.

Нетрудно заметить, что это решение, как решение соответствующей системы (7.4), непрерывно зависит от y на T_a.

Таким образом мы построили непрерывное отображение симплекса T^{n-1} в себя: $y \mapsto \Psi(V_y)$. Следовательно, по теореме Брауэра о неподвижной точке найдется такой y, что $y = \Psi(V_y)$.

Покажем теперь, что точка y определяет инвариантное относительно пропорционального эксцесса решение игры V. Действительно, с одной стороны, $\gamma_S(V(S), y) = 1/\lambda_y^{(S)}$, но, с другой, поскольку для пропорционального эксцесса выполнена аксиома пропорциональности для ТП игр, то $h_S(V_y(S), y) = \frac{e_S \lambda_y^{(S)} y}{e_S y}$, а значит y является решением системы (7.5). □

Таким образом мы построили решение ψ на $\mathfrak{G}_{N+}$, ставящее в соответствие каждой игре V множество $\psi(V)$ решений системы (7.5), которое мы далее будем также называть p.i-решением. Обратим внимание на то, что это решение, в отличие от ТП случая, не обязано быть одноточечным. (Аналогично ТП случаю решение, соответствующее системе весов w, которое также, очевидно, существует, назовем p.i(w)-решением).

Следующие предложения немедленно следуют из определения и предыдущей теоремы.

Предложение 7.2. *Если $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ соответствует ТП игре, то $\psi(V) = \Psi(v)$.*

Предложение 7.3. *P.i-решение ψ обладает свойствами эффективности, анонимности и положительной однородности.*

Для того, чтобы сформулировать свойство, аналогичное свойству ограниченной линейности для ТП игр (см. выше), введем операцию на $\mathfrak{G}_{N+}$, которую мы обозначим через $\oplus_d$ и определим следующим образом. Пусть $A, B \in \mathfrak{G}_{N+}^S$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^S$ существует ровно две точки $y \in \partial A$ и $z \in \partial B$ такие, что $y = \lambda_x x$ и $z = \mu_x x$ для некоторых положительных чисел λ_x и μ_x. Тогда определим *сумму по направлениям* множеств A и B как множество

$$A \oplus_d B = comp\{\bigcup_x (\lambda_x + \mu_x)x\},$$

где $compF$ обозначает замкнутую исчерпывающую оболочку множества F. (Заметим, что поскольку $\lambda_{tx} = \lambda_x/t$, то объединение можно брать не по всем $x \in \mathbb{R}_+$, а только по $x \in T^{n-1}$.)

Пусть теперь $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$. Определим игру $V \oplus_d W$, положив для любой коалиции S

$$(V \oplus_d W)(S) = V(S) \oplus_d W(S).$$

Очевидно, что $V \oplus_d W \in \mathfrak{G}_{N+}$. Легко видеть также, что в случае ТП игр сумма по направлениям соответствует сложению значений характеристических функций. Наконец, из определения сложения по направлениям следует, что

$$h_S(V \oplus_d W, x) = h_S(V, x) + h_S(W, x).$$

Замечание 7.1. Следует подчеркнуть, что рассматриваемое сложение по направлениям отличается от *инверсной суммы* звездных множеств, при которой происходит сложение калибровочных функций соответствующих множеств. Определение инверсной суммы можно найти, например, в [3].

Теперь мы можем сформулировать аналог свойства ограниченной линейности, при этом нас будут интересовать суммы вида $aV \oplus_d (1-a)W$ для $0 < a < 1$.

Предложение 7.4. *Пусть $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$, и пусть $x \in \psi(V) \bigcap \psi(W)$. Тогда $x \in \psi(aV \oplus_d (1-a)W)$ для любого $0 < a < 1$.*

Доказательство немедленно следует из определений и упомянутых выше свойств сложения по направлениям.

8. Логарифмическое преобразование полезностей и некоторые соотношения между решениями

В заключение мы кратко, используя логарифмическое преобразование полезностей игроков, рассмотрим некоторые простые соотношения между арбитражными решениями и решениями НТП игр.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ фиксировано и $x \in \mathbb{R}^N_{++}$. Обозначим через

$$LN(x) = (\ln(x_1), \ln(x_2), \ldots, \ln(x_n)).$$

Мы можем определить теперь арбитражную схему

$$LN(q, Q) = (LN(q), LN(Q)),$$

полагая

$$LN(Q) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) : \exists x \in Q : y \le LN(x)\}.$$

Заметим, что для того, чтобы сохранить положительность, мы должны ограничиться арбитражными схемами (q, Q) с $q \ge e_N$ и q-исчерпывающими множествами Q. Поэтому если мы обозначим $Q_q^+ = comp(Q \cap (q + \mathbb{R}_+^N))$, определим $LN(q, Q) = (r, R)$, где $r = LN(q)$ и $R = LN(Q_q^+)$
$\cap \mathbb{R}_+^N$, то мы избежим возникающей проблемы.

Однако для нашего обсуждения это не является центральным вопросом, поскольку ковариантность относительно шкал решения Нэша и sq-пропорционального решения позволяют рассматривать арбитражные схемы, обладающие только что упомянутыми свойствами. Кроме того, наибольший интерес для нас представляет структура соотношений между решениями.

Рассмотрим решение Нэша. Очевидно, что для любого $Q \in \Omega_0^N$

$$LN(NS(Q)) = US(LN(Q)),$$

где US – (симметричное) утилитарное решение, т. е. решение, которое ставит в соответствие каждой арбитражной схеме точку множества достижимых векторов полезностей, максимизирующую суммарную полезность игроков.

(Здесь заметим следующее. Арбитражное решение Нэша определено для арбитражных схем с выпуклыми множествами Q и (сильно) оптимально по Парето для каждой арбитражной схемы. Поэтому, в силу вогнутости ln, все (сильно) оптимальные по Парето точки переходят в крайние точки множества $LN(Q)$. Поэтому утилитарное решение будет определяться однозначно.)

Напомним также, что утилитраное решение не зависит от точки *status quo* и может быть охарактеризовано с помощью аксиом оптимальности по Парето, симметричности, положительной однородности и аддитивности (см., например, [15]).

Рассмотрим теперь sq-пропорциональное решение. Легко видеть, что

$$LN(PS(q,Q)) = ES(LN(q,Q)),$$

где ES – эгалитарное решение, определенное для арбитражной схемы (r,R) как

$$ES(r,R) = r + \delta e_N,$$

где $\delta = \max\{t > 0 : \; r + te_N \in R\}$.

Действительно, пусть $x = PS(q,Q)$. Это означает, что $x = \mu q$, где $\mu = \max\{t > 0 : \; tq \in Q\}$. Тогда $\ln x_i = \ln\mu + \ln q_i$ для любого i. Поэтому $z = LN(x) = LN(q) + \delta e_N$, где $\delta = \ln\mu$.

Эгалитарное решение для арбитражных схем с $q = \mathbf{0}$ и выпуклыми исчерпывающими множествами Q характеризуется аксиомами (слабой) оптимальности по Парето, сильной монотонности, симметричности и положительной однородности (см. [9]). (Определение решения Нэша и эгалитраного решения для $q \neq \mathbf{0}$ требует аксиомы сдвига).

Мы уже отмечали выше, что арбитражное решение Нэша и sq-пропорциональное решение характеризуются одной и той же системой аксиом, но для различных семейств арбитражных схем.

Обратимся теперь к введенному выше согласованному пропорциональному решению. Нетрудно проверить, что при логарифмическом преобразовании полезностей оно переходит в симметричное эгалитарное решение Калаи-Самета.

А именно, для любой игры $(N,V) \in \mathfrak{G}^{nl}_{N+}$ мы можем определить НТП игру $LN(V)$ следующим образом:

$$LN(V)(S) = \{y \in \mathbb{R}^S : \exists x \in V_{++}(S) : y \leq LN(x)\}.$$

Напомним определение симметричного эгалитарного решения E (см. [10]).

Для данной игры V определим вначале $D(V,\emptyset) = 0$ и $Z(V,\emptyset) = 0$. Далее для каждой коалиции S

$$Z(V,S) = \sum_{T \subsetneq S} D(V,T)$$

и

$$D(V,S) = e_S \max\{t : \; (Z(V,S) + te_S) \in V(S)\}.$$

Наконец, определим

$$E(V) = \sum_{S \subset N} D(V, S).$$

Следующее предложение немедленно следует из определений согласованного пропорционального решения и решения Калаи-Самета и равенства $LN(PS(q, Q)) = ES(LN(q, Q))$.

Предложение 8.1. *LN(P(V))=E(LN(V)).*

Следующие свойства также следуют из определений.

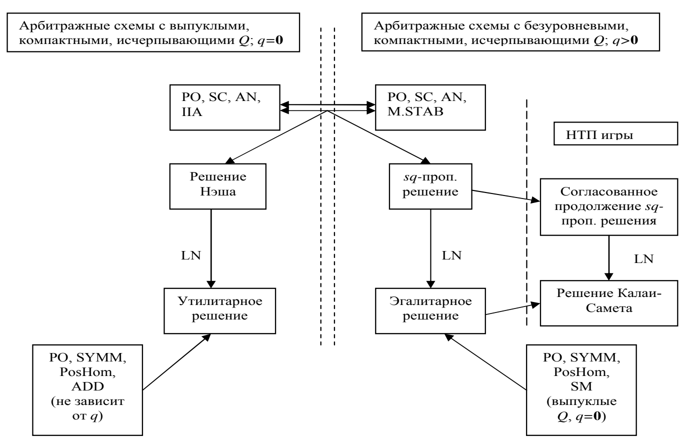

Рис. 2. Соотношения между арбитражными решениями

Предложение 8.2. *(1) Согласованное пропорциональное решение обладает свойством сильной независимости от посторонних альтернатив, т. е. для двух игр V, W и коалиции S, если $V(T) = W(T)$ для любой $T \neq S, W(S) \subset V(S)$, и $P(S,V) \in W(S)$, то $P(V) = P(W)$.*

(2) Если $V(N) = W(N)$ и для любого $i \in N$, $P(N \setminus \{i\}, V) = P(N \setminus \{i\}, W)$, то $P(V) = P(W)$.

В заключение мы приведем схему (см. Рис. 2), иллюстрирующую приведенные связи между арбитражными решениями и указанными решениями НТП игр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Печерский С.Л. *Функции эксцесса для кооперативных игр без побочных платежей: аксиоматический подход.* Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. 2000. СПб:Наука. С. 65–82.

2. Печерский С.Л. , *Калибровочный эксцесс для игр с нетрансферабельными полезностями: альтернативный подход.* Экономические исследования: теория и приложения. 2002. СПб: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге. С. 229–258.

3. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге. 2004.

4. Рокафеллар Р.Т. *Выпуклый анализ.* М: Мир. 1973.

5. Feldman B., *The proportional value of a cooperative game.* Mimeo. Seudder Kemper Investments, Chicago. 1999.

6. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989 V. 57. P. 589–614.

7. Herrero C., Villar A. *The rights egalitarian solution for NTU sharing problem* // Int. J. of Game Theory. 2009. V. 39. P. 137–150.

8. Kalai E. *Excess functions for cooperative games without sidepayments* // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 29. No. 1. P. 60–71.
9. Kalai E. *Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisions* // Econometrica. 1977. V. 45. P. 1623–1630.
10. Kalai E., Samet D. *Monotonic solutions to general cooperative games* // Econometrica. 1985. V. 53. P. 307–327.
11. Kalai D., Smorodinsky M., *Other solutions to Nash's bargaining problem* // Econometrica. 1975. V. 45. P. 513–518.
12. Lemaire J. *Cooperative game theory and its insurance applications* // Austin Bull. 1991. V. 21. P. 17–40.
13. Lensberg T. *Stability and the Nash solution* // J. Econ. Theory. 1988. V. 45. P. 330–341.
14. Ortmann K. *The proportional value for positive cooperative games* // Math. Meth. Oper. Res. 2000. V. 51. P. 235–248.
15. Pechersky S. *The Linear Bargaining Solution* // Russian Contribution to Game Theory and Equilibrium Theory. Berlin: Springer. NY: Heidelberg. 2006. P. 153–164.

PROPORTIONAL SOLUTIONS FOR BARGAINING GAMES AND NTU GAMES

Sergei L. Pechersky, St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, Dr.Sc., prof. (specherv@emi.nw.ru).

Abstract: The paper studies the properties of proportional solutions for bargaining games and NTU games based on the proportional excess. The *status quo*-proportional solution for bargaining games is defind. It's consistency (in Hart–Mas-Collel sense) is proved, and an axiomatic characterization with consistency property is given. A consistent continuatuon of the solution to NTU game is defind, and the uniqueness theorem is proved. Some relations between bargaining and NTU solutions are given.

Keywords: bargaining games, NTU games, proportional excess, *status quo*-proportional solution, consistency.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 79–105

УДК 517.977.8, 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВАЯ КООПЕРАЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Екатерина В. Шевкопляс
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: katya_shev@mail.ru

Работа посвящена изучению проблемы динамической устойчивости кооперативных решений, впервые сформулированной Петросяном Л.А. в 1977 г. для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью. В данной работе рассматривается модификация дифференциальной игры с предписанной продолжительностью, а именно, предполагается, что игра заканчивается в некоторый случайный момент времени. Кроме того, в качестве кооперативного решения используется вектор Шепли. Для такой постановки задачи сформулировано понятие процедуры распределения дележа, и получена аналитическая формула для проверки динамической устойчивости вектора Шепли. Также в работе изучается условие защиты от иррационального поведения участников (условие Д.Янга, 2006) и предложен механизм проверки выполнения этого свойства, основанный на процедуре распределения дележа. Теоретические результаты демонстрируются на примере дифференциальной игры разработки невозобновляемых ресурсов.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, устойчивая кооперация, защита от иррационального поведения, разработка невозобновляемых ресурсов, дифференциальная игра со случайной продолжительностью.

1. Введение

Исследование в данном направлении было начато в 1998 г. под руководством Л.А. Петросяна, которым была сформулирована тема работы – «Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью». Л.А. Петросян предложил изучить проблему динамической устойчивости принципов оптимальности, сформулированную им в конце 1970–х годов для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью (см. [2], [1]), для нового класса дифференциальных игр, а именно дифференциальных игр со случайной продолжительностью. В 1966 году в работе [4] изучалась антагонистическая игра преследования двух лиц с терминальными выигрышами в последний момент времени, который являлся случайной величиной с известной функцией распределения. Л. А. Петросян предложил автору рассмотреть общую постановку дифференциальной игры, заканчивающейся в случайный момент времени. Кроме того, выигрыши игроков в новой задаче предполагались интегральными.

Данное исследование переросло в диплом, а затем в кандидатскую диссертацию. Кроме проблемы динамической устойчивости, изученной в работе [5], было выведено уравнение типа Беллмана, позволяющее находить управления с обратной связью для задачи со случайной продолжительностью [6].

В данной работе собраны, переработаны и дополнены материалы, касающиеся проблемы устойчивой кооперации в дифференциальных играх со случайной продолжительностью.

В разделе 2 дается определение игры. В разделе 3 на примере вектора Шепли формулируется проблема динамической устойчивости принципов оптимальности для дифференциальных игр со случайной продолжительностью. В разделе 4 формулируется условие защиты от иррационального поведения участников. В разделе 5 приводится пример дифференциальной игры разработки невозобновляемых ресурсов, причем момент окончания игры является случайной величиной, распределенной по закону Вейбулла.

2. Модель игры

В исследованиях в области дифференциальных игр, как правило, изучаются дифференциальные игры с предписанной продолжительностью. Это означает, что игра развивается во времени на фиксированном временном промежутке $[t_0, T]$, причем момент окончания игры T известен заранее.

В данной работе изучается модификация дифференциальной игры n лиц с предписанной продолжительностью, а именно, предполагается, что игра развивается на промежутке $[t_0, T]$, где T — случайная величина с известной функцией распределения $F(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ [4], [5]. Таким образом, постановка дифференциальной игры со случайной продолжительностью является обобщением постановки дифференциальной игры с предписанной продолжительностью [2].

Итак, рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, t_0)$ со случайной продолжительностью $(T - t_0)$ и начальным состоянием x_0 [5]. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = g(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x \in R^m,\, u_i \in U \subseteq \operatorname{comp} R^l, \tag{2.1}$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Предполагаем, что вектор-функция $g(x, u_1, \ldots, u_n)$ непрерывна на $R^m \times U_1 \times \ldots \times U_n$, удовлетворяет условию Липшица по x и существует $\lambda > 0$, такое что $||g(x, u_1, \ldots, u_n)|| \leq \lambda(1 + ||x||)$ для всех $x \in R^m$, $u_i \in U$ [2].

Игра начинается в момент t_0 из состояния x_0, однако, момент ее окончания не фиксирован заранее, а является реализацией некоторой случайной величины T. Будем полагать, что для случайной величины T задана функция распределения $F(t)$, которая определена при $t \in [t_0, \infty)$ и удовлетворяет условию нормировки:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} dF(t) = 1.$$

Кроме того, далее будем предполагать существование функции плотности $f(t) = F'(t)$ для случайной величины T.

Функция «мгновенного» выигрыша игрока i в момент времени τ, $\tau \in [t_0, \infty)$ зависит от времени τ и фазовой переменной $x(t_0, x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)\}$ — n–набор допустимых программных управлений игроков. Под допустимыми программными управлениями понимаются измеримые по Лебегу программные управления $u_i(\cdot) : t \to u_i(t) \in R^l$, такие что $u_i(t) \in U$. Для краткости обозначим мгновенную функцию выигрыша как $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))$.

Предполагается, что h_i являются непрерывными функциями на R^m. Тогда ожидаемый интегральный выигрыш игрока i имеет вид:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^{t} h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] f(t) dt, \; i = 1, \ldots, n. \quad (2.2)$$

Известно, что по теореме Фубини–Тонелли о перестановке интегралов при требовании неотрицательности функций $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))$, функционалы вида (2.2) в форме повторных интегралов могут быть сведены к функционалам, имеющим стандартный для динамического программирования вид. Если же нельзя гарантировать неотрицательность функции мгновенного выигрыша h_i, но при этом выполнено условие абсолютной сходимости кратного интеграла

$$\iint_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} |f(t) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau))| dt d\tau < +\infty,$$

то все равно можно использовать теорему Фубини–Тонелли и также изменить порядок интегрирования [6].

Тогда имеем:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^{t} h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] f(t) dt =$$
$$= \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (2.3)$$

При развитии игры во времени в некоторый промежуточный момент ϑ, $\vartheta \in (t_0; \infty)$, игроки попадают в подыгру $\Gamma(x(\vartheta))$ с начальным состоянием $x(\vartheta) = x$. Очевидно, что игра может и закончиться до момента ϑ с вероятностью $F(\vartheta)$, а вероятность продолжить игру после момента ϑ равна $(1 - F(\vartheta))$. Тогда под выигрышем в подыгре $\Gamma(x(\vartheta))$ будем понимать условное математическое ожидание выигрыша, а именно:

$$K_i(x, \vartheta, u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{1 - F(\vartheta)} \int_{\vartheta}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (2.4)$$

3. Проблема динамической устойчивости кооперативных решений

3.1. Кооперативная игра

Рассмотрим кооперативную форму игры $\Gamma(x_0, t_0)$. Перед началом игры игроки договариваются об использовании ими таких допустимых программных управлений, которые будут максимизировать совокупный ожидаемый выигрыш игроков:

$$\max_{u_1, \ldots, u_n} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= \max_{u_1, \ldots, u_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (3.1)$$

Управления $\{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}$, доставляющие максимум (3.1), будем называть оптимальными, а траекторию $x^*(t)$, соответствующую оптимальным управлениям, – условно-оптимальной. Дальнейшее изложение предполагает, что условно–оптимальная траектория единственна.

Важным вопросом, который решается в кооперативной теории игр, является вопрос о выборе конкретного принципа оптимальности как справедливого способа раздела заработанного совместными усилиями выигрыша. Однако мы не будем останавливаться на данном аспекте и для определенности далее будем полагать, что игроки договорились использовать вектор Шепли для раздела суммы (3.1):

$$Sh_i = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [V(x_0, t_0, S) - V(x_0, t_0, S \backslash \{i\})], \; i = 1, \ldots, n. \quad (3.2)$$

Характеристической функцией $V(x_0, t_0, S)$, $S \subseteq N$, $|N| = n$, в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ будем называть функцию множества, удовлетворяющую условиям:

$$V(x_0, t_0, \emptyset) = 0, \tag{3.3}$$
$$V(x_0, t_0, S_1 \cup S_2) \geq V(x_0, t_0, S_1) + V(x_0, t_0, S_2), \ \forall S_1, S_2 \subset N, \ S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

где $V(x_0, t_0, S)$ интерпретируется как максимальное значение математического ожидания выигрыша, которое может обеспечить себе коалиция S в игре $\Gamma(x_0, t_0)$, действуя самостоятельно. Следовательно, $V(x_0, t_0, N)$ определяется по формуле (3.1).

Аналогичным образом определяется характеристическая функция в подыгре $\Gamma(x_t, t)$, начинающейся в момент времени t из состояния x_t. Отметим, что под характеристической функцией в подыгре понимается максимальное значение условного математического ожидания выигрыша, где условием является «дожитие» до момента t. Следовательно, $V(x_t, t, N)$ определяется как $\max\limits_{u} \sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_t, t, u_1, \ldots, u_n)$.

Не будем подробно останавливаться на способе построения характеристической функции $V(x_0, t_0, S)$ в дифференциальных играх со случайной продолжительностью. Данный вопрос был подробно исследован в работе [10]. Характеристическая функция может быть построена как стандартным способом — с использованием значения вспомогательной антагонистической игры $\Gamma_{S,\, N \setminus S}$, так и каким-либо другим образом при условии проверки выполнения свойства супераддитивности (3.1). В работе [9] предлагается следующий алгоритм построения характеристической функции $V(x_0, t_0, S)$ в дифференциальных играх: коалиция S максимизирует свой выигрыш, а остальные игроки, не входящие в S, используют равновесные по Нэшу стратегии.

Итак, предположим, что игроки в начальный момент t_0 договорились использовать оптимальные управления $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$, чтобы получить ожидаемый выигрыш (3.1), а затем разделить его согласно принципу оптимальности (вектору Шепли). Тогда, как и в любой дифференциальной игре, возникает вопрос о реализуемости вектора Шепли во времени или *проблема динамической устойчивости* выбранного игроками принципа оптимальности [2], [1].

3.2. Динамическая устойчивость вектора Шепли

Развитию игры во времени соответствует движение вдоль условно–оптимальной траектории $x^*(t)$, на которой по определению игроки получают наибольший ожидаемый дележ. Однако движение вдоль оптимальной траектории еще не обеспечивает сохранение кооперации. Действительно, при движении вдоль $x^*(t)$ игроки попадают в подыгры с текущими начальными состояниями, в которых один и тот же игрок имеет различные возможности. Следовательно, в некоторый момент ϑ может возникнуть ситуация, когда решение текущей игры $\Gamma(x^*(\vartheta), \vartheta)$ будет неоптимальным в смысле первоначально выбранного принципа оптимальности (в нашем случае — вектора Шепли). Тогда перед игроками встанет вопрос о целесообразности придерживаться далее намеченного перед началом игры соглашения действовать «совместно оптимально». Последнее будет означать динамическую неустойчивость вектора Шепли и, соответственно, самого движения по траектории $x^*(t)$.

Определение 3.1. *Рассмотрим вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t) \geq 0\}_{i=1,\ldots,n}$, такую что компоненты вектора Шепли $Sh = \{Sh_i\}_{i=1,\ldots,n}$ в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ представимы в виде*

$$Sh_i = \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(t))\beta_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t)\}$ будем называть процедурой распределения дележа (ПРД).

Определение ПРД для игр с фиксированной продолжительностью было введено в работе [1]. В нашей постановке ПРД определяет правило, по которому компоненты ожидаемого дележа распределяются во времени $[t_0, \infty)$. Отметим, что позднее в работах Петросяна Л.А. требование неотрицательности компонент $\beta_i(t)$, $\forall\, t \geq t_0$, было отменено (см., например, [9], [3]), однако в данной работе будем придерживаться изначальной формулировки.

Определение 3.2. *Будем называть вектор Шепли $\{\bar{Sh}_i\}$ динамически устойчивым вектором Шепли, если существует такая ПРД $\{\beta_i(t) \geq 0\}$, $t \in [t_0, \infty)$, что вектор $\bar{Sh}^{\vartheta} = \{\bar{Sh}_i^{\vartheta}\}$, $\forall\, \vartheta \in [t_0, \infty)$,* *вычисленный по формуле*

$$\bar{Sh}_i^{\vartheta} = \frac{1}{(1-F(\vartheta))}\int_{\vartheta}^{\infty}(1-F(t))\beta_i(t)dt, \quad i=1,\dots,n, \tag{3.5}$$

также является вектором Шепли в соответствующей подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta),\vartheta), \quad \vartheta\in[t_0,\infty)$.

Определение 3.2 означает, что при распределении дележа $\{\bar{Sh}_i\}$ во времени при помощи выплат согласно ПРД $\{\beta_i(\tau)\}$, в каждый текущий момент времени ϑ, $\vartheta\in[t_0,\infty)$, ожидаемый дележ $\{\bar{Sh}_i^{\vartheta}\}$ в оставшейся подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta),\vartheta)$ также является вектором Шепли. Таким образом, игроки не имеют оснований для нарушения соглашения о кооперации, заключенного перед началом игры. Последнее означает *динамическую устойчивость* или, согласно терминологии в англоязычной литературе, *временную состоятельность* выбранного принципа оптимальности (вектора Шепли).

Принимая во внимание (3.5), заметим, что динамически устойчивый вектор Шепли $\{\bar{Sh}_i\}$ в игре $\Gamma(x_0,t_0)$ может быть представлен в следующем виде:

$$\bar{Sh}_i=\int_{t_0}^{\vartheta}(1-F(\tau))\beta_i(\tau)d\tau+(1-F(\vartheta))\bar{Sh}_i^{\vartheta},\ \forall\,\vartheta\in[t_0,\infty),\ i=1,\dots,n. \tag{3.6}$$

Первое слагаемое в (3.6) соответствует сумме, которую игрок получит при движении вдоль условно–оптимальной траектории $x^*(t)$ при $t\in[t_0,\vartheta]$. Второе слагаемое является математическим ожиданием выигрыша в подыгре $\Gamma(x^*(\vartheta),\vartheta)$ при условии, что игра не закончилась до момента ϑ.

Дифференцируя (3.6) по ϑ, получаем аналитическую формулу для вычисления ПРД:

$$\beta_i(\vartheta) = \frac{f(\vartheta)}{(1-F(\vartheta))}\bar{Sh}_i^{\vartheta} - (\bar{Sh}_i^{\vartheta})', \qquad \vartheta\in[t_0,\infty), \quad i=1,\dots,n. \tag{3.7}$$

Очевидно, что в игре $\Gamma(x_0,t_0)$ мы всегда можем распределить во времени вектор Шепли $\{Sh_i\}$, используя формулу для выплат (3.7). Однако в общем случае нельзя гарантировать неотрицательности компонент $\beta_i(\vartheta),\forall\,\vartheta\in[t_0,\infty)$. Следовательно, в рамках Определения

3.2 вектор Шепли не является динамически устойчивым в общем случае. Алгоритм проверки динамической устойчивости вектора Шепли является следующим: вычислить компоненты ПРД по формуле (3.7) и проверить выполнение условия $\{\beta_i(\vartheta) \geq 0\}$, $\forall\, \vartheta \in [t_0, \infty)$. Если неотрицательность выполнена, то вектор Шепли $\{Sh_i\}$, распределенный во времени в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ согласно (3.7), является динамически устойчивым.

В противном случае вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности. Тогда, при выполнении свойства неотрицательности функции мгновенного выигрыша $h_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, для получения нового динамически устойчивого (регуляризованного) принципа оптимальности на основе первоначально выбранного игроками динамически неустойчивого принципа оптимальности, может быть использована новая процедура распределения дележа, а именно:

$$\bar{\beta}_i(\vartheta) = \frac{Sh_i^{\vartheta} \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))}{V(x^*(\vartheta), \vartheta, N)}, \qquad \vartheta \in [t_0, \infty). \tag{3.8}$$

На основе $\bar{\beta}_i(\vartheta) \geq, 0 \quad i = 1, \ldots, n$, можно сформировать так называемый регуляризованный вектор Шепли по формуле (3.4), который будет удовлетворять условию (3.6) (см. [5]).

3.3. Формула для вычисления ПРД

Заметим, что множитель $\frac{f(\vartheta)}{1-F(\vartheta)}$ (функция плотности для случайного момента окончания игры T при условии, что игра не закончилась до момента ϑ), появившийся в правой части уравнения (3.7), является стандартной для теории надежности функцией интенсивности отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{(1 - F(t))}. \tag{3.9}$$

Тогда, учитывая обозначение (3.9), выражение для ПРД (3.7) может быть переписано в следующем виде:

$$\beta_i(\vartheta) = \lambda(\vartheta) \bar{Sh_i}^{\vartheta} - (\bar{Sh_i}^{\vartheta})', \qquad \vartheta \in [t_0, \infty), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Кроме того, в данной терминологии $(1 - F(\vartheta))$ является функцией «дожития» до момента ϑ, для которой справедлива формула:

$$1 - F(\vartheta) = e^{-\int_{t_0}^{\vartheta} \lambda(t) dt}.$$

Тогда справедливо следующее представление для интегрального выигрыша игрока (2.3):

$$\int_{t_0}^{\infty}(1-F(\tau))h_i(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau=\int_{t_0}^{\infty}h_i(\tau,x(\tau),u(\tau))e^{-\lambda(\tau-t_0)}d\tau, \quad (3.11)$$

а динамически устойчивый вектор Шепли (3.6) может быть представлен следующим образом:

$$\bar{Sh}_i=\int_{t_0}^{\vartheta}\beta_i(\tau)e^{-\lambda(\tau-t_0)}d\tau+e^{-\lambda(\vartheta-t_0)}\bar{Sh}_i^{\vartheta}. \quad (3.12)$$

Следовательно, задача со случайной продолжительностью является не только обобщением задачи с предписанной продолжительностью, но и обобщением задачи на бесконечном временном промежутке с дисконтированием мгновенных выигрышей игроков (подробнее см. [6]).

Очевидно, что последнее утверждение распространяется и на результаты относительно вычисления ПРД в играх с предписанной продолжительностью [1], [2] и в играх с дисконтированием с бесконечным временным горизонтом [9]. При $f(\vartheta)=0$ ($\lambda(\vartheta)=0$) фактически рассматривается детерминированный случай, однако необходимо дополнительно требовать сходимость несобственных интегралов, соответствующих интегральным выигрышам игроков. Тогда из (3.10) получаем следующее выражение для ПРД:

$$\beta_i(\vartheta)=-(\bar{Sh}_i^{\vartheta})', \quad i=1,\ldots,n,$$

которое было получено в работе [1].

Кроме того, функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является константой тогда и только тогда, когда случайная величина T распределена по экспоненциальному закону:

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda(t-t_0)};\quad F(t)=1-e^{-\lambda(t-t_0)},\qquad \forall\, t\geq t_0;$$

$$\frac{f(t)}{1-F(t)}=\lambda.$$

Тогда интегральный выигрыш (3.11) в точности совпадает с интегральным выигрышем для постановки задачи с бесконечным временным горизонтом и дисконтированием мгновенных выигрышей экспоненциальной функцией с дискаунт-фактором λ:

$$\int_{t_0}^{\infty}h_i(\tau,x(\tau),u(\tau))e^{-\lambda\cdot(\tau-t_0)}d\tau,$$

а формула для ПРД (3.10) в точности совпадает с формулой, полученной в работе [9]:

$$\beta_i(\vartheta) = \lambda Shi_i^{\vartheta} - (Sh_i^{\vartheta})'. \tag{3.13}$$

Отметим, что этот результат был получен еще в работе [5].

4. Защита от иррационального поведения игроков

Проблема динамической устойчивости принципов оптимальности, которая была изучена выше на примере проблемы динамической устойчивости вектора Шепли, предполагал рациональное поведение всех участников дифференциальной игры. В этом случае, используя механизм ПРД, можно было добиться того, чтобы у *рациональных* участников не возникло мотивации нарушить соглашение о кооперации.

Однако в настоящее время в теории игр начало уделяться внимание и моделированию *иррациональных* поступков игроков.

Предположим, что в некоторый момент времени ϑ игрок иррационально нарушает соглашение о кооперации, что приводит к распаду большой коалиции N. Для определенности будем полагать, что изначально игроки договорились разделить заработанный совместными усилиями максимальный ожидаемый выигрыш согласно вектору Шепли. Распад коалиции будет означать, что вектор Шепли не реализуем во времени. Следовательно, требуется выполнение некоторого условия для защиты от иррационального поведения игроков. Это условие впервые было сформулировано в работе [11] для игр с предписанной продолжительностью.

Итак, для кооперативной дифференциальной игры со случайной продолжительностью условие защиты от иррационального поведения может быть сформулировано следующим образом:

$$V(x_0, t_0, \{i\}) \leq \int_{t_0}^{\vartheta} (1 - F(\tau))\beta_i(\tau)d\tau + (1 - F(\vartheta))V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\}),$$
$$i = 1, \dots, n, \qquad \theta \in [t_0; \infty). \tag{4.1}$$

Условие (4) означает, что даже если в некоторый момент времени ϑ игрок (либо группа игроков) иррационально нарушил соглашение действовать совместно оптимально, то выбором ПРД можно гарантировать, что ожидаемый выигрыш игрока i во всей игре все равно будет не меньше, чем выигрыш в случае, если бы игрок с самого начала действовал самостоятельно и получил гарантированный выигрыш $V(x_0, t_0, \{i\})$.

Дифференцируя (4), при предположении дифференцируемости функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ по ϑ, получаем условие на ПРД, обеспечивающее защиту от иррационального поведения:

$$\beta_i(t) \geq \lambda(t)V(\bar{x}(t), t, \{i\}) - \frac{d}{dt}V(\bar{x}(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

где $\lambda(t)$ определяется по формуле (3.9).

Очевидно, что для случая $\lambda(t) = 0$ мы фактически имеем полностью детерминированную задачу. Тогда при дополнительном требовании существования всех несобственных интегралов типа (3.11), из условия (4.2) имеем неравенства, полученные в работе [3] для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью:

$$\beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt}V(\bar{x}(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

Отметим, что свойство динамической устойчивости принципа оптимальности никак не связано с выполнением условия защиты от иррационального поведения. В следующем разделе приведен пример, когда вектор Шепли является динамически устойчивым, но условие защиты от иррационального поведения не выполнено, и наоборот. Однако оба этих условия являются важными аспектами кооперации в динамических играх [3]. В том случае, когда ПРД удовлетворяет и уравнению (3.10), и неравенству (4.2), будем говорить, что вектор Шепли, распределенный во времени согласно ПРД (3.4), является *устойчивым принципом кооперации.*

В данной работе мы не затрагиваем такой аспект устойчивости кооперативного соглашения, как стратегическая поддержка (см. [3]). Однако отметим, что стратегическая поддержка в кооперативной дифференциальной игре со случайной продолжительностью, т.е. существование специально сконструированного равновесия по Нэшу, может быть конструктивно доказана для независимых движений игроков в (2.1).

Продолжим рассматривать полностью детерминированную задачу, т.е. пусть $\lambda(t) = 0$. В том случае, когда вектор Шепли является динамически устойчивым принципом оптимальности, т.е. существует $\{\beta_i(t) \geq 0\}$, такая что $\beta_i(t) = -(Sh_i^t)'$, и при этом выполнено условие защиты от иррационального поведения (4.3), получаем следующее условие устойчивости:

$$(Sh_i^t)' \leq \frac{d}{dt} V(x^*(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Напомним, что классическое условие индивидуальной рациональности имеет вид:

$$Sh_i^t \geq V(x^*(t), t, \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Таким образом, условие (4.4) накладывает ограничения на первые производные для величин, присутствующих в неравенствах (4.5).

Теперь рассмотрим дифференциальную игру со случайной продолжительностью ($\lambda(t) \neq 0$). Тогда одновременное выполнение условия динамической устойчивости вектора Шепли и защиты от иррационального поведения участников означает выполнение следующих неравенств:

$$\lambda(t)[Sh_i^t - V(\bar{x}(t), t, \{i\})] \geq [(Sh_i^t)' - \frac{d}{dt} V(\bar{x}(t), t, \{i\})], \tag{4.6}$$
$$\forall\, t \in [t_0, \infty), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что из (4.6) следует выполнение (4.4) при $\lambda(t) = 0$. Таким образом, результат, полученный для игр со случайной продолжительностью, покрывает результат, полученный для детерминированных игр.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим теоретико-игровую модель [7] разработки невозобновляемых ресурсов (в частности, нефти) симметричными игроками. Особо отметим, что спецификой добычи нефти, особенно на континентальном шельфе, является прямая зависимость убытков от аварийности данного предприятия. Аварии на скважинах приводят к простою производства во время замены и ремонта оборудования, а также к тяжелым экологическим последствиям, затраты на устранение которых часто приводят к колоссальным убыткам. В большинстве известных теоретико-игровых моделей, описывающих динамический процесс добычи нефти несколькими игроками, также как и в работе [7] предполагается, что игра развивается на бесконечном промежутке времени с постоянным дисконтированием мгновенных выигрышей. В данной работе будем предполагать, что мгновенные выигрыши игроков не дисконтируются, но игра заканчивается в случайный момент времени T, распределенный по закону Вейбулла. Выбор распределения Вейбулла, как одного из основных распределений, описывающих жизненный цикл работы технических систем, подробно обоснован в работе [6].

Распределение Вейбулла имеет функцию интенсивности отказов следующего вида:

$$\lambda(t) = \lambda\delta t^{\delta-1}; \tag{5.1}$$
$$t \geq 0;\ \lambda > 0;\ \delta > 0.$$

Здесь λ и δ – параметры, определяющие данное распределение. λ – это параметр масштаба, а параметр формы δ соответствует одной из трех фаз, в которой может находиться система. Значение $\delta < 1$ соответствует «новорожденному» сценарию игры (период приработки). Здесь функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ является убывающей функцией. При $\delta = 1$ система находится в режиме нормальной эксплуатации, $\lambda(t)$ равна константе λ. Отметим, что при $\delta = 1$ распределение Вейбулла соответствует экспоненциальному распределению. При $\delta > 1$ система находится в состоянии износа, $\lambda(t)$ является возрастающей функцией.

Итак, согласно модели [7], в игре участвуют n игроков – фирмы или страны, которые разрабатывают некоторый невозобновляемый природный ресурс, например, нефть. Множество всех игроков обозначим как $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $x(t)$ — это поток невозобновляемого ресурса. Управлениями игроков являются темпы разработки ресурса, которые обозначим как $\{u_i(t)\}$. Динамика изменений потока ресурса $x(t)$ описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} u_i(t); \qquad u_i \geq 0, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x_0 > 0. \tag{5.2}$$

Ожидаемый выигрыш (2.2) игрока i, $i = 1, \ldots, n$, при условии, что момент окончания игры описывается законом Вейбулла, принимает вид:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^\infty h_i(t, x(t), u(t)) e^{-\lambda t^\delta} dt. \qquad (5.3)$$

В данном примере каждый игрок i имеет функцию полезности $h_i(t, x, u)$ (функцию мгновенного выигрыша) в виде $h_i = h(u_i)$, определенную для всех $u_i > 0$, которая зависит от маргинальной полезности η:

$$h(u_i) = A \ln(u_i) + B, \quad \eta = 1; \qquad (5.4)$$

$$h(u_i) = A \frac{u_i^{1-\eta}}{1-\eta} + B, \qquad \eta \neq 1. \qquad (5.5)$$

При $u_i = 0$ по определению полагаем $h(u_i) = 0$. Не умаляя общности, далее будем считать, что $A = 1$, $B = 0$. Кроме того, положим $t_0 = 0$.

Тогда общий ожидаемый выигрыш игроков вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n h(u_i) e^{-\lambda t^\delta} dt. \qquad (5.6)$$

Очевидно, что в данной модели рассматриваются только симметричные игроки, поэтому положим $u_i = u_j = u$.

Задача максимизации общего ожидаемого выигрыша (5.6) при условии (5.2) может быть решена при помощи уравнения типа Беллмана, выведенного в работе [6]:

$$\lambda(t) W(x,t) = \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \max_u \left(\sum_{i=1}^n h_i(x, u, t) + \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} g(x, u) \right). \quad (5.7)$$

Кроме того, это уравнение будет использоваться и для вычисления значений характеристической функции $V(x, t, S)$. Подробное построение характеристической функции описано в работе [10].

5.1. Логарифмическая функция полезности

Рассмотрим функцию полезности вида $h(u_i) = \ln(u_i)$. Будем искать функцию Беллмана в виде $W(x,t) = A(t) \ln x + B(t)$,

$\lim\limits_{t\to\infty} W(x,t) = 0$. Тогда частные производные $W(x,t)$ вычисляются по формуле

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = \frac{A(t)}{x}; \qquad \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \dot{A}(t)\ln(x) + \dot{B}(t). \tag{5.8}$$

Учитывая (5.8), из условия максимизации правой части уравнения (5.7) следует, что оптимальные управления имеют вид $u = \frac{x}{A(t)}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов в уравнении (5.7), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $A(t), B(t)$:

$$\dot{A}(t) - \lambda(t)A(t) + n = 0;$$

$$\dot{B}(t) - \lambda(t)B(t) - n\ln(A(t)) - n = 0,$$

и краевыми ограничениями

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} B(t) = 0.$$

Окончательно, получаем следующие оптимальные управления для задачи разработки невозобновляемых ресурсов со случайной продолжительностью:

$$u_i^* = u^* = \frac{x \cdot e^{-\lambda(t)t}}{n\int_t^\infty e^{-\lambda(s)s}ds}, \tag{5.9}$$

где $\lambda(t)$ удовлетворяет (5.1). Тогда при $\delta = 1$, соответствующем экспоненциальному распределению момента окончания игры, фактически рассматривается уже изученная модель с дисконтированными выигрышами на бесконечном временном промежутке [7]. Непосредственно из (5.9) следует, что при $\delta = 1$ оптимальными стратегиями игроков являются

$$u_i^* = u^* = \frac{\lambda}{n}x, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда оптимальные управления и траектория вычисляются по формуле

$$x^*(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda t}; \qquad u_i^*(t) = \frac{\lambda}{n}x_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в работе Докнера и др.[7] для случая дисконтированных выигрышей на бесконечном временном промежутке для единичной эластичности маргинальной полезности игроков, причем выполнено следующее условие:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Отметим, что траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

Значению характеристической функции $V(x^*(\vartheta),\vartheta,N)$ соответствует значение функции Беллмана $W(x^*(\vartheta),\vartheta)$:

$$V(x^*(\vartheta),\vartheta,N) = W(x^*(\vartheta),\vartheta) = \tfrac{n}{\lambda}\ln(x^*) - \tfrac{n}{\lambda} - \tfrac{n\ln(n)}{\lambda} + \tfrac{n\ln(\lambda)}{\lambda} =$$
$$= \tfrac{n}{\lambda}\ln(x_0) - n(\vartheta) - \tfrac{n}{\lambda} - \tfrac{n\ln(n)}{\lambda} + \tfrac{n\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Положим $\vartheta = 0$. Тогда

$$V(x_0,0,N) = W(x_0,0) = \frac{n}{\lambda}\ln(x_0) - \frac{n}{\lambda} - \frac{n\ln(n)}{\lambda} + \frac{n\ln(\lambda)}{\lambda}. \qquad (5.10)$$

Далее, для $\delta = 2$, которое соответствует распределению Рэлея для стареющей системы, из (5.9) получаем

$$u_i^* = \frac{x\cdot e^{-2\lambda t^2}}{n\int_t^\infty e^{-2\lambda s^2}ds}.$$

Тогда оптимальный способ поведения при разработке ресурса должен определяться согласно следующей формуле

$$u_i^* = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1-\mathrm{erf}(\sqrt{2\lambda}t))}x = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\cdot e^{-2\lambda t^2}}{n(1-2\Phi_0(2\sqrt{\lambda}t))}x,$$

где $\mathrm{erf}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}ds$, $\Phi_0(t)$ – интегральная функция Лапласа.

Для периода приработки (раннего периода) возьмем $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда из уравнения (5.9) получаем

$$u_i^* = \frac{x\cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t^{1/2}}}{n\int_t^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}s^{1/2}}ds}.$$

Следовательно, получаем оптимальные стратегии в управлениях с обратной связью:

$$u_i^* = \frac{\lambda^2}{4n(\lambda\sqrt{t}+2)}x.$$

Таким образом, для модели разработки невозобновляемых ресурсов удалось получить оптимальные решения для всех трех сценариев игры. Графическое изображение $u_i^*(x,t)$ при фиксированном параметре масштаба $\lambda = 1$ и параметрах формы $\delta = 1/2; 1; 2$ приведено на рис.1.

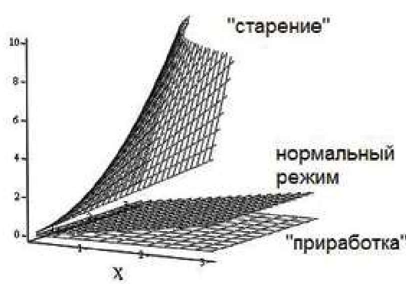

Рисунок 1. Оптимальная скорость разработки u_i^* для трех сценариев игры

Интересно, что в рамках нашей модели мы получили, что оптимальное поведение игроков коренным образом отличается для различных сценариев игры. Для фазы приработки, т.е. когда оборудование и общая координация еще не налажены, скорость разработки должна быть наименьшей, что соответствует осторожности игроков. В режиме нормальной эксплуатации игроки должны «копать» с постоянной скоростью. В режиме износа оборудования (впрочем, это также касается и «износа» не только технических элементов), когда функция интенсивности отказов возрастает, необходимо увеличить темпы разработки месторождений.

Кроме того, было численно проанализировано поведение условно - оптимальных траекторий для всех трех фаз игры. Качественное различие убывания невозобновляемых ресурсов представлено на Рис. 2 и Рис. 3.

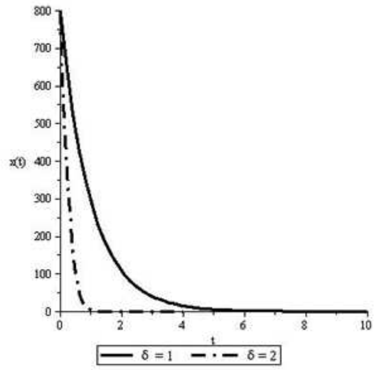

Рисунок 2. Оптимальная траектория $x^*(t)$ для режима нормальной эксплуатации и фазы износа

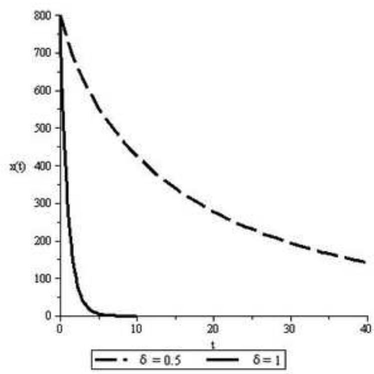

Рисунок 3. Оптимальная траектория $x^*(t)$ для фазы приработки и режима нормальной эксплуатации

Заметим, что быстрее всего убывает ресурс при $\delta = 2$, что соответствует интенсивным разработкам в состоянии износа. Медленнее всего убывает ресурс при $\delta = 1/2$, что соответствуем осторожным действиям игроков в состоянии приработки.

Далее, заменив $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ в уравнении (5.7) на h_i, можно найти равновесные по Нэшу управления $\{u_i^{nc}\}$ в классе управлений с обратной связью, линейных по фазовой переменной (см. [10]). В данной работе не обсуждается вопрос существования и единственности решения уравнения (5.7). Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$u_i^{nc} = \frac{e^{-\lambda(t)t}}{\int\limits_t^\infty e^{-\lambda(s)s}ds}x, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.11}$$

Далее в данном разделе во избежание излишнего нагромождения формул будут представлены результаты только для режима нормальной эксплуатации месторождения, т.е. для $\delta = 1$.

Итак, при $\delta = 1$ выполнено $\lambda(t) = \lambda$. Получаем управления, равновесные по Нэшу, а также соответствующие им траекторию и значение характеристической функции.

$$u_i^{nc} = \lambda x, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{5.12}$$

$$x^{nc}(t) = x^*(\vartheta)e^{-n\lambda(t-\vartheta)};$$
$$u_i^{nc}(t) = \lambda x^*(\vartheta)e^{-n\lambda(t-\vartheta)};$$
$$V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\}) = W_i(x^*(\vartheta)) = \frac{\ln(x^*(\vartheta))}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}. \tag{5.13}$$

Положим $\vartheta = 0$. Тогда

$$V(x_0, 0, \{i\}) = W_i(x_0, 0) = \frac{\ln(x_0)}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} + \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}. \tag{5.14}$$

Для построения характеристической функции $V(x, t, S)$, $S \subseteq N$, используем подход, предложенный в работе [9]. Будем предполагать, что если s игроков объединяются в коалицию S, то оставшиеся игроки $N \setminus S$ не образуют антикоалицию с целью минимизации совместного выигрыша игроков из S, а используют равновесные по Нэшу стратегии u_j^{nc}, $j \in N \setminus S$. Тогда, применяя полученный выше результат (5.12) для равновесия по Нэшу, и используя в уравнении (5.7) $\sum\limits_{i \in S} h_i$ вместо $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$, получаем следующие результаты [10]. Кооперативная траектория, управления и характеристическая функция имеют следующий вид:

$$x^S(t) = x^*(\vartheta)e^{-(n-s+1)\lambda(t-\vartheta)};$$
$$u_i^S(t) = \frac{\lambda}{s}x^*(\vartheta)e^{-(n-s+1)\lambda(t-\vartheta)}, \quad i \in S;$$
$$u_j^S(t) = u_j^{nc}(t), \quad i \in N \setminus S,$$

$$V(x^*(\vartheta),\vartheta,S)=W_S(x^*(\vartheta),\vartheta)=$$
$$=\frac{s}{\lambda}\ln(x^*(\vartheta))-\frac{s}{\lambda}-\frac{k(n-s)}{\lambda}-\frac{s}{\lambda}\ln(s)+\frac{s\ln(\lambda)}{\lambda}.$$

Положим $\vartheta=0$. Тогда

$$V(x_0,0,S)=W_S(x_0,0)=$$
$$=\frac{s}{\lambda}\ln(x_0)-\frac{s}{\lambda}-\frac{s(n-s)}{\lambda}-\frac{s}{\lambda}\ln(s)+\frac{s\ln(\lambda)}{\lambda}. \quad (5.15)$$

Таким образом, мы построили характеристическую функцию $V(x_0,0,S)$, $S\subseteq N$ (см. (5.10),(5.15)), используя подход, описанный в работе [9]. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *Пусть функция $V(x_0,0,S)$, $S\subseteq N$ определяется по формулам (5.10), (5.15). Тогда $V(x_0,0,S)$ удовлетворяет свойству супераддитивности (3.1).*

Для доказательства этого утверждения будем использовать следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $s_1\geq 1, s_2\geq 1$. Тогда*

$$s_1\ln(s_1)+s_2\ln(s_2)+2s_1s_2\geq(s_1+s_2)\ln(s_1+s_2). \quad (5.16)$$

Данная лемма доказывается стандартными методами математического анализа. Нетрудно проверить, что левая часть неравенства растет быстрее, чем правая.

Доказательство Утверждения 5.1 непосредственно следует из Леммы 5.1 [10].

Используя построенную характеристическую функцию, получаем значение вектора Шепли в подыгре $\Gamma(x^*(t),t)$ и всей игре $\Gamma(x_0,t_0)$:

$$\begin{aligned} Sh_i(x^*(t)) &= \tfrac{V(x^*(t),t,N)}{n}=\tfrac{\ln(x^*(t))}{\lambda}-\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{\ln(n)}{\lambda}+\tfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}= \\ &=\tfrac{\ln(x_0)}{\lambda}-(t-t_0)-\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{\ln(n)}{\lambda}+\tfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}, \\ Sh_i(x_0) &= \tfrac{V(x_0,0,N)}{n}=\tfrac{\ln(x_0)}{\lambda}-\tfrac{1}{\lambda}-\tfrac{\ln(n)}{\lambda}+\tfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Вычислим значения ПРД по формуле (3.10), которая для случая $\delta=1$ в точности совпадает с формулой (3.13). Получаем

$$\beta_i(\vartheta)=\ln(x_0)-\lambda\vartheta+\ln(\lambda)-\ln(n). \quad (5.18)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Вектор Шепли $\{Sh_i(x_0)\}$ (5.17) не является динамически устойчивым принципом оптимальности.*

Доказательство Утверждения 5.2 основано на Определении 3.2. Очевидно, что в (5.18) нельзя гарантировать неотрицательность компонент ПРД.

Отметим, что, поскольку $h_i = \ln u_i$ не является неотрицательной функцией, мы не можем воспользоваться регуляризацией вектора Шепли (3.8).

Проверим выполнение условия защиты от иррационального поведения участников (4), используя неравенство для ПРД (4.2). В данном примере с логарифмической функцией мгновенного выигрыша для параметра $\delta = 1$, получено значение характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ (5.13). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.3. *Для ПРД (5.18) и характеристической функции $V(x^*(\vartheta), \vartheta, \{i\})$ (5.13) выполнено условие защиты от иррационального поведения (4.2).*

Утверждение 5.3 доказывается непосредственной проверкой неравенства (4.2) при $\lambda(t) = \lambda$.

Таким образом, в данном примере с логарифмической функцией полезности было показано, что при экспоненциальном распределении момента окончания игры ($\delta = 1,\ \lambda(t) = \lambda$) вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности, а условие защиты от иррационального поведения участников выполнено.

5.2. Изоэластичная функция полезности

Рассмотрим тот же самый пример игры, только с изоэластичной функцией полезности h_i, т.е.

$$h(u_i) = \frac{u_i^{1-\eta}}{1-\eta}, \quad \eta \neq 1.$$

Все вычисления проводятся аналогично тому, как это было сделано в разделе 5.1 для логарифмической функции полезности. Главным отличием является вид функции Беллмана, которая ищется как $W(x,t) = A(t)x^{1-\eta} + B(t)$ [10]. Получаем оптимальную скорость разработки ресурсов для произвольной функции интенсивности отказов

$\lambda(t)$ (см. [8]):

$$u_i^* = \frac{e^{-\frac{\lambda(t)t}{\eta}}}{n\int\limits_t^\infty e^{-\frac{\lambda(s)s}{\eta}}ds}x.$$

Тогда для экспоненциального распределения для случайной величины T, которому соответствует $\lambda(t) = \lambda$, имеем:

$$u_i^* = \frac{\lambda}{\eta n}x, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, оптимальная траектория и оптимальные управления вычисляются согласно следующим формулам:

$$x^*(t) = x_0\, e^{-\frac{\lambda t}{\eta}};$$
$$u_i^*(t) = \frac{x_0\,\lambda}{n\eta}e^{-\frac{\lambda t}{\eta}}.$$

Отметим, что траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

Далее получаем выражение для характеристической функции для максимальной коалиции N:

$$V(x^*(\vartheta),\vartheta,N) = \left(\frac{n\eta}{\lambda}\right)^{\eta}\frac{1}{1-\eta}x^*(\vartheta)^{1-\eta} = \left(\frac{n\eta}{\lambda}\right)^{\eta}\frac{1}{1-\eta}x_0^{1-\eta}e^{-\frac{\lambda(1-\eta)\vartheta}{\eta}}. \quad (5.19)$$

Для равновесия по Нэшу имеем следующие результаты:

$$u_i^{nc} = \frac{\lambda x}{(1-n+n\eta)}, \qquad i = 1, \ldots, n; \quad (5.20)$$

$$x^{nc}(t) \quad = x^*(\vartheta)\, e^{-\frac{n\lambda}{(1-n+n\eta)}(t-\vartheta)};$$
$$u_i^{nc}(t) \quad = \frac{\lambda x^*(\vartheta)}{(1-n+n\eta)}\, e^{-\frac{n\lambda}{(1-n+n\eta)}(t-\vartheta)}.$$

Очевидно, что требование неотрицательности скорости разработки $u_i^{nc} \geq 0$ выполнено только при $\eta > (1-1/n)$. В противном случае равновесия по Нэшу не существует.

Итак, вычисляем значение характеристической функции $V(x^*(\vartheta),\vartheta,\{i\})$:

$$V(x^*(\vartheta),\vartheta,\{i\}) = \left(\frac{(1-n+n\eta)}{\lambda}\right)^{\eta}\frac{1}{1-\eta}x^*(\vartheta)^{1-\eta} =$$
$$= \left(\frac{(1-n+n\eta)}{\lambda}\right)^{\eta}\frac{1}{1-\eta}x_0^{1-\eta}e^{-\frac{\lambda(1-\eta)}{\eta}\vartheta}. \quad (5.21)$$

Описанным в предыдущем разделе способом, получаем выражение для характеристической функции $V(x^*(\vartheta),\vartheta,S), S\subset N$.

$$u_i^S=\frac{\lambda(1-s+s\eta)x}{s\eta(1-n+n\eta)},\quad i\in S;$$
$$u_j^S(t)=u_j^{nc}(t),\quad i\in N\setminus S,$$
$$V(x^*(\vartheta),\vartheta,S)=\left(\frac{s\eta(1-n+n\eta)}{\lambda(1-s+s\eta)}\right)^{\eta}\frac{1}{1-\eta}x(\vartheta)^{1-\eta}; \tag{5.22}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.4. *Пусть функция $V(x_0,0,S)$, $S\subseteq N$ определяется по формулам (5.19), (5.22). Тогда $V(x_0,0,S)$ удовлетворяет свойству супераддитивности (3.1).*

Доказательство Утверждения 5.4 основано на следующей лемме.

Лемма 5.2. *Пусть $s_1\geq 1, s_2\geq 1, \eta\in(0,1)$. Тогда*

$$\frac{(s_1+s_2)^{\eta}}{(1-(s_1+s_2)+(s_1+s_2)\eta)^{\eta}}\geq\frac{s_1^{\eta}}{(1-s_1+s_1\eta)^{\eta}}+\frac{s_2^{\eta}}{(1-s_2+s_2\eta)^{\eta}}. \tag{5.23}$$

Нетрудно проверить, что левая часть неравенства растет быстрее, чем правая.

Окончательно получаем следующее выражение для вектора Шепли:

$$Sh_i(x(t)) = \tfrac{1}{1-\eta}\left(\tfrac{x(t)}{n}\right)^{1-\eta}\left(\tfrac{\lambda}{\eta}\right)^{-\eta}; \tag{5.24}$$
$$Sh_i(x_0) = \tfrac{1}{1-\eta}\left(\tfrac{x_0}{n}\right)^{1-\eta}\left(\tfrac{\lambda}{\eta}\right)^{-\eta}. \tag{5.25}$$

Вычислим ПРД согласно (3.13). Тогда

$$\beta_i(\vartheta)=\lambda(\frac{n\eta}{\lambda})^{\eta}x_0^{1-\eta}e^{-\frac{\lambda\vartheta}{\eta}}\frac{1}{\eta(1-\eta)}. \tag{5.26}$$

Следующие утверждения доказываются аналогично тому, как это было сделано выше в разделе для логарифмической функции полезности. Однако результат проверки динамической устойчивости и условия защиты от иррационального поведения оказывается противоположным предыдущему.

Утверждение 5.5. *Вектор Шепли* $\{Sh_i(x_0)\}$ *(5.24) является динамически устойчивым принципом оптимальности при маргинальной полезности* $\eta \in (0;1)$.

Доказательство Утверждения 5.5 основано на Определении 3.2. Очевидно, что в (5.26) можно гарантировать неотрицательность компонент ПРД при $\eta \in (0;1)$.

Утверждение 5.6. *Для ПРД (5.26) и характеристической функции* $V(x^*(\vartheta),\vartheta,\{i\})$ *(5.21) не выполнено условие защиты от иррационального поведения (4.2).*

Утверждение 5.6 доказывается непосредственной проверкой неравенства (4.2) при $\lambda(t)=\lambda$.

Таким образом, в данном примере с изоэластичной функцией полезности было показано, что при экспоненциальном распределении момента окончания игры ($\delta = 1,\ \lambda(t) = \lambda$) вектор Шепли является динамически устойчивым принципом оптимальности при маргинальной полезности $\eta \in (0;1)$, а условие защиты от иррационального поведения участников не выполнено.

Следовательно, согласно результатам разделов 5.1, 5.2, построенный вектор Шепли не является устойчивым кооперативным соглашением ни для случая логарифмической функции полезности, ни для случая изоэластичной функции полезности игроков. При этом в обоих случаях условно–оптимальная траектория игры удовлетворяет условию устойчивости по Ляпунову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивые принципы оптимальности* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1993. Вып. 4. № 22. С. 35–40.

2. Петросян Л.А., Данилов Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. № 1. С. 46–54.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.

1. Вып. 1. С. 102–117.

4. Петросян Л.А., Мурзов Н.В. *Теоретико-игровые проблемы в механике* // Литовский математический сборник. 1966. VI-3. С. 423–433.

5. Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью* // Вестник СПбГУ. 2000. Сер. 1. Вып. 4. С. 18–23.

6. Шевкопляс Е.В. *Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 2. С. 98–118.

7. Dockner E.J., Jorgensen S., N. van Long and Sorger G. *Differential games in economics and management science.* Cambridge University Press, 2000.

8. Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V. *Non-constant discounting in differential games with random duration* // Contributions to Game Theory and Management, collected papers of the Third International Conference «Game Theory and Management 2009». St. Petersburg. 2010. P. 267–280.

9. Petrosyan L. A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction.* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. P. 381–398.

10. Shevkoplyas E.V. *The Shapley value in cooperative differential games with random duration* // Advances in Dynamic Games. 2011. V. 11. part 4. Edt. by M.Breton and K. Szajowski, Springer's imprint Birkhauser. Boston. P. 359–373. (http://www.springerlink.com/content/978-0-8176-8088-6/#section=815141&page=1)

11. Yeung D.W.K. *An irrational-behavior-proofness condition in cooperative differential games* // Int. J. of Game Theory Rew. 2007. V. 9. N 1. P. 256–273.

STABLE COOPERATION IN DIFFERENTIAL GAMES WITH RANDOM DURATION

Ekaterina V. Shevkoplyas, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (katya_shev@mail.ru).

Abstract: The problem of time-consistency of cooperative solutions is investigated in the paper. This problem was stated by Petrosyan L.A. in 1977 for differential games with finite time horizon. In the paper the modification of the game with finite time horizon is considered in the sense that the game has random time horizon. The Shapley value is used as an optimality principle under cooperative behavior of the players. For this formulation the definition of the imputation distribution procedure (IDP) is given and the analytic formula for IDP is derived. Moreover in the paper the irrational behavior proofness condition by D.W.K. Yeung (2006) is modified for problem with random duration. The tool is based on using IDP. Theoretical results are illustrated by an example of differential game of non-renewable resource extraction.

Keywords: time-consistency, stable cooperation, irrational behavior proofness, non-renewable resource extraction, differential game with random duration.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 106–136

УДК 519.833.5
ББК 210.301

ЛОРЕНЦ-МАКСИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИГР С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ

Елена Б. Яновская
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Рассматриваются кооперативные игры с ограниченной кооперацией, задаваемой произвольным набором допустимых коалиций, включающим большую коалицию всех игроков. Для этого класса игр определяется уравнивающее решение (ESOS) [1] таким же способом, как и для произвольных игр с трансферабельными полезностями. Показывается, что если уравнивающее решение сбалансированной игры с ограниченной кооперацией пересекается с ее с-ядром, то оно является одноточечным и доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра, т. е. Лоренц-максимальным решением.
Более детально исследуется класс игр с коалиционной структурой, в которых допустимыми коалициями являются коалиции некоторого разбиения множеств игроков, их объединения и все подкоалиции каждой коалиции разбиения. Для таких игр определяется понятие выпуклости и определяется два типа эгалитарных решений – Лоренц-максимальное и Лоренц-максимальное типа Камийо – для выпуклых игр с коалиционной структурой. Приводятся аксиоматические характеризации обоих эгалитарных решений.

Ключевые слова: кооперативная игра, ограниченная кооперация, уравнивающее решение, эгалитарное решение Дутта–Рэя, Лоренц-максимальное решение.

1. Введение

В классических кооперативных играх с трансферабельными полезностями (N, v) характеристическая функция v определена на множестве всех коалиций, т. е. подмножеств множества игроков N. На практике, однако, не все коалиции могут быть образованы по тем или иным политическим, экономическим или техническим причинам. Наиболее популярной является ситуация, в которой задано разбиение множества игроков, и подкоалиции различных коалиций этого разбиения не могут быть образованы. Обобщением этой ситуации является иерархия управлений, задаваемая разбиениями множества игроков, содержащимися друг в друге.

Таким образом, одним из дальнейших направлений исследования кооперативных игр следует рассматривать их расширения на случай задания характеристической функции на произвольном наборе коалиций множества игроков. Такой класс игр будет называться *играми с ограниченной кооперацией.*

Теория решений для игр с ограниченной кооперацией началась с исследования игр с *коалиционной структурой*, определяемой некоторым разбиением множества игроков. Для таких игр были определены решения, обобщающие значение Шепли ([11], [9] и др.). Однако характеристические функции определялись на множестве всех коалиций, хотя и не все коалиции участвовали в определении решений.

В статье предлагается другой подход. Рассматриваются произвольные наборы допустимых коалиций, и только на них определяется характеристическая функция. Приведем формальное определение.

Определение 1.1. *Игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор допустимых коалиций, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ является классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП).

Решения классических ТП игр можно адаптировать для игр с ограниченной кооперацией двумя способами: или прямым переносом определений на игры с ограниченной кооперацией, если это возможно, или доопределением характеристической функции на всех недопустимых коалициях и затем применением классического решения для получившейся ТП игры.

Для значения Шепли и других линейных значений первый подход невозможен, так как определяющие их формулы для каждой игры зависят от значений характеристической функции на всех коалициях.

С другой стороны, пред n-ядро и решение Дутта-Рэя допускают переформулировки на случай игр с ограниченной кооперацией.

Эгалитарное решение Дутта-Рэя [5] определялось авторами как отображение, сопоставляющее ТП игре подмножество недоминируемых по Лоренцу векторов выигрышей из Лоренц-ядра. Лоренц-ядро игры сбалансированной игры содержит с-ядро, но в общем случае может оказаться пустым. Не вдаваясь в определение Лоренц-ядра, в которое заложена концепция эгалитаризма, отметим только, что для класса выпуклых ТП игр оно оказывается весьма наглядным. Каждой выпуклой ТП игре оно сопоставляет единственный вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра. Однако не любая сбалансированная игра обладает таким вектором в с-ядре, хотя может обладать эгалитарным решением Дутта-Рэя, не принадлежащим с-ядру.

В данной работе эгалитарная концепция решений ТП игр будет рассматриваться только в связи с с-ядром: а именно, эгалитарным решением сбалансированной игры будет называться вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу остальные векторы из с-ядра. Область существования такого решения оказывается более широкой, чем класс выпуклых ТП игр, но уже, чем класс всех сбалансированных игр. Следуя терминологии статьи [8], мы будем далее называть рассматриваемое решение Лоренц-максимальным.

Оказывается, что это решение можно определить и для игр с ограниченной кооперацией, многие его свойства сохраняются и для такой модели. Действительно, для игр с ограниченной кооперацией понятие с-ядра уже было определено,(см., напр, [10]), то на класс игр с ограниченной кооперацией и для игр с непустым c-ядром определение Лоренц-максимального решения переносится непосредственно.

Поэтому нахождение классов игр с ограниченной кооперацией, для которых Лоренц-максимальное решение не пусто, является основной целью данной статьи. Эта задача решается с помощью уравнивающего решения (Equal Split-Off Set – ESOS [1]), являющегося результатом применения алгоритма Дутта–Рэя [4] для любой ТП игры, и, совпадающего с Лоренц-максимальным решением и с решением Дутта–Рэя на классе выпуклых игр.

Упомянутый алгоритм может быть применен и к произвольным играм с ограниченной кооперацией, его результатом является некоторое, вообще говоря, многозначное решение. Однако даже если уравнивающее решение оказывается одноточечным, оно может не принадлежать c-ядру. С другой стороны, если c-ядро (классической) сбалансированной ТП игры совпадает с c-ядром некоторой выпуклой игры, то для такой игры Лоренц-максимальное решение существует. Таким образом, область определения решения Дутта-Рэя в классическом случае шире, чем класс выпуклых игр. Поэтому следует ожидать, что и для некоторых классов игр с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром Лоренц-максимальное решение существует.

Понятие выпуклости для игр с ограниченной кооперацией не определено, ввиду того что для допустимых коалиций S, T их объединение или пересечение могут оказаться не допустимо. Поэтому для класса игр с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром используется подход определения Лоренц-максимального решения с помощью уравнивающего решения. Именно, в этом классе находятся те игры, для которых уравнивающее решение состоит из единственного вектора, принадлежащего c-ядру (раздел 3). Показывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы результат алгоритма для рассматриваемой игры пересекался с ее c-ядром.

Более детально исследуются игры с коалиционными структурами, в которых набор допустимых коалиций состоит из коалиций разбиения множества игроков, их объединений и всех подкоалиций коалиций разбиения. Каждая игра с коалиционной структурой определяет *внешнюю* ТП игру, игроками которой являются коалиции разбиения и *внутренние* ТП игры, являющиеся подыграми исходной игры на коалициях разбиения. Показывается, что если все эти игры выпуклые, в исходной игре существует Лоренц-максимальное решение. Приводится его аксиоматическая характеризация с помощью свойств согласованности по Дэвису–Машлеру и совпадения решения для игр двух лиц с решением ограниченного эгалитаризма. Этот результат является непосредственным обобщением одной из аксиоматизаций решения эгалитарного Дутта–Рэя для выпуклых ТП игр [4].

Для игр с коалиционными структурами строится еще одно эгалитарное решение, принимающее в расчет неравноправное значение коалиций разбиения (верхний уровень) и их подкоалиций (нижний уровень). Построение этого решения аналогично обобщению Камийо [9] значения Шепли на игры с коалиционными структурами. Построение решения для каждой игры состоит из двух этапов: на первом шаге находится Лоренц-максимальное решение внешней игры, а на втором шаге находятся такие же решения подыгр на каждой коалиции разбиения, в которых значения больших коалиций заменены на соответствующую компоненту Лоренц-максимального решения внешней игры. Набор этих решений определяет решение исходной игры. Приводится аксиоматическая характеризация эгалитарного решения типа Камийо. Одна из аксиом, характеризующих решение, является ослаблением свойства согласованности, а вторая, наоборот, усиливает аксиому ограниченного эгалитаризма, распространяя ее на игры значения выигрышей коалиций для игр с коалиционными структурами, состоящими из двух коалиций.

Доказательства вспомогательных утверждений и один из примеров помещены в Приложении.

2. Эгалитарные решения кооперативных игр

2.1. Кооперативные игры с трансферабельными полезностями

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП) называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, удовлетворяющая условию $v(\emptyset) = 0$.

Для каждой ТП игры (N, v) множество *допустимых* векторов выигрышей обозначим через

$$X(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) \le v(N)\}, \tag{2.1}$$

а множество *эффективных* векторов выигрышей через

$$X^*(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) = v(N)\}. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathcal{G}_N$ класс всех ТП игр с множеством игроков N.

Определение 2.1. *Решением для класса $\mathcal{G}_N$ называется такое отображение $\sigma : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^N$, что из $(N,v) \in \mathcal{G}_N$ следует $\sigma(N,v) \subset X(N,v,\Omega)$.*

Обозначим через $\mathcal{G}_N^b$ класс всех сбалансированных ТП игр с множеством игроков N, и пусть $\mathcal{G}^b = \bigcup\limits_{N \subset \mathcal{N}} \mathcal{G}_N^b$. С-ядро игры $(N,v) \in \mathcal{G}_N^b$ обозначим через $C(N,v)$.

Определение 2.2. *Решение на классе сбалансированных игр $\mathcal{G}_b$ называется Лоренц-максимальным решением ($L_{\max}$), если оно сопоставляет игре $(N,v) \in \mathcal{G}_N^b$ вектор $x = L_{\max}(N,v) \in C(N,v)$, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра.*

Очевидно, что Лоренц-максимальное решение существует не для всех сбалансированных игр, но если оно существует, то является одноточечным.

В работе [5] авторы определили эгалитарное решение для ТП игр, которое также может оказаться пустым для некоторых игр:

Определение 2.3. ([4], [5]) *Эгалитарным решением ТП игры называется множество ее векторов выигрышей из Лоренц-ядра*[1]*, не доминируемых по Лоренцу остальными векторами из этого ядра.*

В этой же статье они показали, что если эгалитарное решение существует, то оно одноточечно, и на классе выпуклых игр оно совпадает с Лоренц-максимальным решением, которое существует и единственно в этом классе.

Кроме того, они построили алгоритм нахождения эгалитарного решения в классе выпуклых игр. Этот алгоритм может быть применен к произвольной ТП игре, и результат работы этого алгоритма

---

[1]Определение Лоренц-ядра имеется в цитируемых статьях. Здесь оно не приводится, так как далее употребляться не будет.

приводит к еще одному эгалитарному решению, которое уже не пусто для всех ТП игр, но, в общем случае является многозначным:

Определение 2.4. *Уравнивающее решение (Equal Split Off Set) для класса $\mathcal{G}$ сопоставляет каждой ТП игре (N, v) множество $ESOS(N, v) \subset X^*(N, v)$, такое что $x \in ESOS(N, v)$ в том и только том случае, если*

$$x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots \underbrace{a_k \ldots, a_m}_{T_m}), \tag{2.3}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \subset N} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \ldots, m$, *где*

$$v^j(S) = v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i\right) \tag{2.4}$$

для $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i$.

Таким образом, Дутта и Рэй в [5] доказали совпадение на классе выпуклых ТП игр трех решений: эгалитарного, Лоренц-максимального решения и уравнивающего решения.

В данной статье мы будем рассматривать Лоренц-максимальное решение на подклассах сбалансированных не выпуклых игр, и на классе выпуклых игр с ограниченной кооперацией.

Начнем с определения класса выпуклых игр. ТП игра (N, v) называется *выпуклой*, если для любых коалиций $S, T \subset N$ справедливо неравенство

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \tag{2.5}$$

Класс всех выпуклых ТП игр с произвольным *универсальным* множеством игроков $\mathcal{N}$ обозначим через $\mathcal{G}^c$. Если неравенства (2.5) выполняются только для непересекающихся коалиций $S \cap T = \emptyset$, мы получаем класс *супераддитивных* игр. Очевидно для игр двух лиц эти классы совпадают. Для класса супераддитивных игр известно решение *ограниченного эгалитаризма* (CE) Это решение сопоставляет каждой супераддитивной игре двух лиц (N, v), $N = \{i, j\}$ ближайший к диагонали вектор из с-ядра:

$$x = (x_i, x_j) = CE(N, v) \Longleftrightarrow x \in C(N, v), x_i < x_j \rightarrow x_j = v(\{j\}). \tag{2.6}$$

Из Определения 2.2 следует, что Лоренц-максимальное решение зависит только от c-ядра игры. Поэтому оно существует и для более широких классов игр, чем класс выпуклых игр. Примером таких игр являются k-выпуклые игры [3]. Кроме того, существуют сбалансированные игры с одноточечным c-ядром, по определению являющимся $L_{\max}$-решением, но для которых уравнивающее решение не пересекается с c-ядром.

Задачу описания подклассов класса сбалансированных ТП игр, для которых существует Лоренц-максимальное решение можно сформулировать и для игр с ограничениями на кооперацию и непустыми c-ядрами. Она оказывается более сложной, так как характеристическая функция задается на произвольном наборе коалиций, и решение зависит не только от значений характеристической функции, но и от самого набора допустимых коалиций. Ее частичное решение будет приведено в следующем параграфе.

2.2. Игры с ограниченной кооперацией

Обозначим через $\mathcal{G}_N^r$ класс всех игр с ограниченной кооперацией и множеством игроков N. Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Как и для ТП игр, это означает, что если игра $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, то $N \subset \mathcal{N}$. Так как все последующие результаты (кроме раздела 4) будут справедливы для произвольного универсального множества игроков, будем обозначать класс игр $\mathcal{G}^r = \bigcup\limits_{N \subset \mathcal{N}} \mathcal{G}_N^r$ не выделяя универсальное множество игроков $\mathcal{N}$.

Для каждой игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией множества *допустимых* векторов и *эффективных векторов выигрышей* определяются так же, как и для ТП игр (2.1),(2.2), так как эти определения не зависят от наборов допустимых коалиций. Аналогично классическому случаю ТП игр определяются и *решения игр с ограниченной кооперацией.*

c-ядром игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) [10] называется множество

$$C(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \,|\, x(S) \geq v(S) \text{ для всех } S \in \Omega\}.$$

Если в игре с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром существует вектор, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из c-ядра, мы будем называть этот вектор *Лоренц-максимальным решением* $L_{\max}$, как и для классических ТП игр.

Уравнивающее решение для класса игр с ограниченной кооперацией определяется аналогично Определению 2.5 для ТП игр, однако на каждом шаге алгоритма изменяется набор допустимых коалиций, поэтому приведем версию Определения 2.5 для игр с ограниченной кооперацией.

Определение 2.5. *Уравнивающее решение (Equal Split Off Set) для класса* $\mathcal{G}_N^r$ *сопоставляет каждой игре* (N, v, Ω) *из этого класса множество* $ESOS(N, v, \Omega) \subset X^*(N, v)$, *такое что* $x \in ESOS(N, v, \Omega)$ *в том и только том случае, если*

$$x = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{T_2}, \dots \underbrace{a_k \dots, a_m}_{T_m}), \tag{2.7}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \in \Omega} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{\substack{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i \\ \cup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \in \Omega}} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \dots, m$,

$$v^j(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \notin \Omega, \\ v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i\right), & \text{если } \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \in \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

для $S \in \Omega$, $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i$.

Заметим, что ввиду предположения $N \in \Omega$, Определение 2.5 корректно, и для каждой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ алгоритм (2.7) дает определение непустого конечнозначного решения.

Однако, как и для классического случая ТП игр, не для всех игр с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром уравнивающее решение пересекается с c-ядром.

В следующем разделе для игр с ограниченной кооперацией и с непустым c-ядром будут даны два способа проверки совпадения уравнивающего решения с Лоренц-максимальным решением.

3. Лоренц-максимальное решение для игр с ограниченной кооперацией

3.1. Определение и существование Лоренц-максимального решения для игр с ограниченной кооперацией

В этом параграфе мы будем рассматривать класс игр с $\mathcal{G}_c^r$ ограниченной кооперацией и непустыми с-ядрами.

Известно, что не все сбалансированные ТП игры обладают Лоренц-максимальным решением. Очевидно, аналогичный результат имеет место и для игр с ограничениями и непустыми с-ядрами. Следовательно, решение, задаваемое Определением 2.2, не удовлетворяет условию непустоты. Будем пытаться найти подкласс класса $\mathcal{G}_c^r$, для которого Лоренц-максимальное решение существует, с помощью уравнивающего решения для игр с ограниченной кооперацией, а именно, выяснением условий, при которых оно совпадает с Лоренц-максимальным решением.

Определим следующий класс $\mathcal{G}_{ec}^r \subset \mathcal{G}_c^r$ игр с ограниченной кооперацией:

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{ec}^r \iff ESOS(N, v, \Omega) \cap C(N, v, \Omega) \neq \emptyset,$$

и, соответственно,обозначим через $\mathcal{G}_{ec_N}^r \subset \mathcal{G}_{ec}^r$ его подкласс с множеством игроков N.

Напомним определение доминирования по Лоренцу. Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ через x^* обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами x, но расположенными в порядке возрастания: $x_1^* \leq x_2^* \leq \ldots \leq x_n^*, n = |N|$. *Кривой Лоренца* вектора x называется вектор $L(x) \in \mathbb{R}^N$, компоненты которого равны $L_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*, k = 1, \ldots, n$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$. Вектор x *доминирует по Лоренцу* вектор y, $x \succ_{Lor} y$, если $L(x) \geq L(y)$, и $L(x) \neq L(y)$.

Приведем несколько свойств доминирования по Лоренцу.

Предложение 3.1. *Пусть $y \in \mathbb{R}^N$ – произвольный вектор, и для некоторых $1 \leq j_1 < j_2 \leq |N|$ $L_{j_1}(y) = a < b = L_{j_2}(y)$. Тогда для всех $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) \leq a + (b - a) \cdot \frac{j - j_1}{j_2 - j_1}$.*

Лемма 3.1. *Пусть* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_N$ *– произвольная игра,* $x \in ESOS$ (N, v, Ω). *Тогда* $x \succ_{Lor} y$ *для всех* $y \in X(N, v)$, *таких что* $L(y) \neq L(x)$ *и* $y(R_k) \geq v(R_k)$ *для* $k = 1, \ldots, m$, *где вектор* x *имеет представление (2.7), а* $R_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} T_j$.

Следствие 3.1. *Если для игры* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_{ec}$ *вектор* $x \in ESOS(N, v, \Omega)$ $\cap C(N, v, \Omega)$, *то* $x \succ_{Lor} y$ *для всех* $y \in C(N, v, \Omega), y \neq x$

Следствие 3.1 показывает, что в классе $\mathcal{G}^r_{ec}$ уравнивающее решение совпадает с $L_{\max}$-решением, и в этом классе Лоренц-максимальное решение не пусто.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$ – произвольный вектор. Обозначим через $\mathcal{G}^{rx}_N \subset \mathcal{G}^r_{ec_N}$ класс игр, для которых $x = L_{\max}(N, v, \Omega)$.

Представим x в виде

$$x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots \underbrace{a_k \ldots, a_m}_{T_m}), \tag{3.1}$$

где $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$, и обозначим $R_j = \bigcup\limits_{l=1}^{j} T_l$, $j = 1, \ldots, m$.

Тогда классы $\mathcal{G}^{rx}_N$ можно охарактеризовать следующим образом:

Предложение 3.2. *Для того чтобы игра* (N, v, Ω) *принадлежала классу* $\mathcal{G}^{rx}_N$ *необходимо и достаточно выполнение равенств* $v(R_j) = x(R_j), j = 1, \ldots, m$, *и неравенств* $v(S) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} a_j s_j$ *для остальных коалиций* $S \in \Omega$, *где* $S_j = S \cap T_j, s_j = |S_j|$, *а коалиции* R_j, T_j, *и числа* $a_j, j = 1, \ldots, m$ *определены в представлении (3.1).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^{rx}_N$. Тогда $x = L_{\max}(N, v, \Omega)$, и $x \in C(N, v, \Omega)$. Из равенства $x = L_{\max}(N, v)$ следуют равенства $x(R_j) = v(R_j), j = 1, \ldots, m$, а из $x \in C(N, v, \Omega)$ следует равенство $x(S) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j s_j \geq v(S), S \in \Omega$.

Достаточность. Пусть (N, v, Ω)– произвольная игра, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда $x \in C(N, v, \Omega)$ и по Следствию 3.1 вектор x доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра. Следовательно, $x = L(N, v, \Omega)$ и $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^{rx}_N$. $\square$

Таким образом, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограничениями, для которых уравнивающее решение совпадает с Лоренц-максимальным решением, описывается следующим образом:

$$\mathcal{G}^r_{ec} = \bigcup_{N\subset\mathcal{U}} \Big\{(N,v,\Omega) \mid x \in ESOS(N,v,\Omega) \Longleftrightarrow x(R_j) = v(R_j), i,j = 1,\ldots,m,$$
$$\sum_{j=1}^{m} a_j s_j \geq v(S)\, \forall S \in \Omega \Big\}, \tag{3.2}$$

в представлении (3.1) вектора x.

Формула (3.2) описывает класс игр $\mathcal{G}^r_{ec}$ не столь явно, как например, определение класса выпуклых игр. Однако из Утверждения 3.2 следует, что для того чтобы проверить, принадлежит ли игра (N,v,Ω) к этому классу, достаточно найти множество $ESOS(N,v,\Omega)$ и, в случае если оно одноточечно, $ESOS(N,v,\Omega) = x$, проверить сбалансированность ТП игры (N,v_x), где

$$v_x(S) = \begin{cases} v(S) & \text{если } S \in \Omega, \\ x(S) & \text{если } S \notin \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Эта процедура не сложнее, чем проверка выпуклости ТП игры. Следовательно, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограниченной кооперацией, для которых уравнивающее решение совпадает с Лоренц-максимальным решением, определен корректно. Более того, для частного случая классических ТП игр, когда набор Ω состоит из всех коалиций, соответствующий подкласс класса $\mathcal{G}^r_{ec}$ оказывается шире, чем класс выпуклых игр.

Замечание 3.1. Лоренц-максимальное решение может существовать и в играх с ограниченной кооперацией, не принадлежащих классу $\mathcal{G}^r_{ec}$. Примером является следующая игра (N,v,Ω) трех лиц: $\Omega = N, \{1,2\}, \{1,3\}$, $v(N) = v(1,2) = v(1,3) = 1$. В этой игре c-ядро состоит из единственного дележа $x = (1,0,0)$, являющегося DR-решением. Однако $ESOS(N,v,\Omega) = (1/2,1/2,0),(1/2,0,1/2)$. Нахождение класса всех игр, обладающих Лоренц-максимальным решением, является открытой задачей.

3.2. Согласованность Лоренц-максимального-решения для игр с ограниченной кооперацией

В этом пункте мы проверим, какие свойства Лоренц-максимального решения, которыми оно обладает в классе выпуклых ТП игр, сохраняются и для игр с ограниченной кооперацией. Будем рассматривать свойства Лоренц-максимального решения во всем классе $\mathcal{G}_c^r$, хотя оно может оказаться пустым для некоторых игр из этого класса. Очевидно, что Лоренц-максимальное решение в играх с ограниченной кооперацией анонимно.

Покажем, что Лоренц-максимальное решение в классе $\mathcal{G}_{ec}^r$ удовлетворяет свойству согласованности в определении Дэвиса–Машлера [2] для произвольного универсального множества игроков $\mathcal{N}$.

Для заданной игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией *редуцированной игрой* на множество игроков $S \subset N$ относительно вектора выигрышей $x \in X(N, v)$ называется игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{G}_S^r$, где

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S) \text{ если } T = S, \\ \max\limits_{\substack{Q: T \cup Q \in \Omega \\ Q \subset N \setminus S}} (v(T \cup Q) - x(Q)), \qquad \text{если } T \subsetneq S, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\Omega_S = \{T \subset S \,|\, T \in \Omega \text{ или } \exists Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega\}$.

Решение σ называется *согласованным в определении Дэвиса–Машлера* для класса $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{G}^r$, если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$, вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ и коалиции $S \subset N$ редуцированная игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$ и выполняется соотношение $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega_S)$.

Для ТП игр имеется усиление свойства согласованности: если решение φ для некоторого класса ТП игр $\mathcal{G}$ является согласованным и для любых игры $(N, v) \in \mathcal{G}$, коалиции $S \subset N$, и вектора $x \in \varphi(N, v)$ выполняется равенство $(\varphi(N, v))|_{x_{N \setminus S}} = \varphi(S, v_S^x)$, где

$$\varphi(N, v)|_{x_{N \setminus S}} = \{y \in \mathbb{R}^S \,|\, (y_S, x_{N \setminus S}) \in \varphi(N, v),$$

то решение называется *сильно согласованным.*

Обратным к свойству согласованности решений ТП игр является следующее: решение φ называется *обратно согласованным* [12] на классе ТП игр $\mathcal{G}$, таком что для любой игры из этого класса все ее редуцированные игры относительно векторов выигрышей, принадлежащих решению φ, принадлежат этому же классу, называется обратно согласованным, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ и любых игроков $i, j \in N$ для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ справедливы соотношения $(x_i, x_j) \in \varphi(\{i, j\}, v^x_{i,j})$, то вектор $x \in \varphi(N, v)$.

Теорема 3.1. *Лоренц-максимальное решение согласовано в определении Дэвиса–Машлера в классе* $\mathcal{G}^r_c$

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_c$ – произвольная игра, для которой существует Лоренц- максимальное решение $x = L_{\max}(N, v, \Omega) \in C(N, v, \Omega) = C(N, v_x)$, где характеристическая функция v_x определена в (3.3). Тогда $x \succ_{Lor} y$ для всех $y \in C(N, v, \Omega) \setminus \{x\}$. Пусть $i \in N$ – произвольный игрок. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus \{i\}, v^x_{N\setminus\{i\}}, \Omega_{N\setminus\{i\}})$ на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

Так как с-ядро ТП игр согласовано по Дэвису–Машлеру [12], $x^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$, где $(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$ – редуцированная игра игры (N, v_x) на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

По определению редуцированной игры (3.4)

$$C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x) = C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega_S). \tag{3.5}$$

Покажем, что $x^i \succ_{Lor} y^i$ для всех $y^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega_S)$.

Из сильной согласованности с-ядра [14] на классе сбалансированных ТП игр и из равенства (4.4) следует$(y^i, x_i) \in C(N, v_x)$, откуда мы получаем

$$x \succ_{Lor} (y^i, x_i). \tag{3.6}$$

Из равенства (3.6) следует $x^i \succ_{Lor} y^i$ (см. Замечание 2 в статье [8]). Следовательно, $x^i = L_{\max}(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x, \Omega_{N\setminus\{i\}})$. □

Однако, в отличие от выпуклых ТП игр, Лоренц-максимальное решение на классе сбалансированных игр не удовлетворяет свойству обратной согласованности (пример см. в Приложении). Поэтому оно не удовлетворяет ему и в классе игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром. А именно это свойство Лоренц-максимального решения в классе выпуклых игр использовалось в доказательстве следующей теоремы, дающей аксиоматическую характеризацию Лоренц-максимального решения в классе выпуклых ТП игр:

Теорема 3.2. ([5], [4]) *В классе выпуклых ТП игр $\mathcal{G}^c$ Лоренц-максимальное решение является единственным непустым решением, удовлетворяющим свойствам согласованности и ограниченного эгалитаризма (CE) в классе игр двух лиц.*

Лоренц-максимальное решение на классе выпуклых ТП игр имеет еще одну аксиоматическую характеризацию с использованием согласованности в определении Харта–Мас-Колелла [6]. Это свойство согласованности нельзя определить для общего класса игр с ограниченной кооперацией, так как в определении редуцированных игр используются решения подыгр, которые могут и не существовать. Так как в последующем изложении мы будем использовать только согласованность в определении Дэвиса–Машлера, будем обозначать ее просто термином «согласованность».

4. Игры с ограниченной кооперацией, порожденной разбиением

4.1. Игры с коалиционной структурой

В теории кооперативных игр известны модели, называемые *кооперативными играми с коалиционной структурой (КС)*. Такая игра задается тройкой $(N, v, \mathcal{B})$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_k)$ – разбиение множества N. Решения кооперативных игр с КС определяются так же, как для классических ТП игр, но с учетом разбиений как первого уровня кооперации. Наиболее известным одноточечным решением для кооперативных игр с КС является значение Оуэна [11], являющегося модификацией значения Шепли для этого класса игр.

Существуют различные подходы к определению набора допустимых коалиций для игр с КС. Некоторые авторы рассматривают КС для дополнительного ограничения на множество допустимых векторов выигрышей: суммарный выигрыш игроков каждой коалиции разбиения не должен превышать соответствующего значения характеристической функции [13]. При этом все коалиции считаются допустимыми.

Оуэн [11] также рассматривал полностью заданную кооперативную ТП игру (N, v) и разбиение $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_r)$ на множестве игроков. Однако фактически значение Оуэна зависит только от значений характеристической функции на коалициях S, имеющих вид

$$S = \bigcup_{J \subset \{1,\ldots,k\}} B_i \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \tag{4.1}$$

Следовательно, можно считать, что значение Оуэна является решением игры с ограниченной кооперацией, допустимый набор коалиций Ω которой состоит из коалиций, определенных в (4.1).

Другой модификацией значения Шепли для кооперативных игр с КС является значение Камийо [9]. Это значение зависит от меньшего набора допустимых коалиций, чем значение Оуэна, а именно, от коалиций S, имеющих вид

$$S \subset B_i, i = 1, \ldots, k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1,\ldots,k\}} B_j, \tag{4.2}$$

т. е. набор допустимых коалиций в этом случае состоит из коалиций разбиения и их объединений, а также от всех подкоалиций каждой коалиции разбиения.

Оказывается, что для такого набора коалиций можно определить понятие выпуклости игр и определить, кроме Лоренц-максимального решения, еще одно эгалитарное решение, являющееся его модификацией. Более того, свойство выпуклости кооперативных игр с КС и наборами допустимых коалиций вида (4.2) позволяет дать аксиоматические характеризации этих решений. Это будет сделано в настоящем параграфе.

4.2. Выпуклые игры с коалиционными структурами

Рассмотрим класс кооперативных игр с КС $\mathcal{G}_{cs} \subset \mathcal{G}^r$, определяемый допустимыми наборами коалиций вида (4.2), т. е. $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{cs}$, если существует такое разбиение $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ множества N, что

$$\Omega = \{S \subset N \mid S \subset \mathcal{B} \text{ или } S \subset B_j, j = 1, \ldots, k\}. \tag{4.3}$$

Мы будет обозначать такие наборы коалиций $\Omega(\mathcal{B})$.

Для каждой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ с КС, определяемой набором допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ для некоторого разбиения $\mathcal{B}$ множества N, определим *внешнюю игру* $(\mathcal{B}, v)$, множество игроков которой совпадает с множеством коалиций разбиения, а характеристическая функция определяется характеристической функцией исходной игры, и поэтому имеет то же обозначение v, и *внутренние игры* $(B_j, v), l = 1, \ldots, m$, являющиеся подыграми исходной игры на каждой коалиции разбиения. По определению набора $\Omega(\mathcal{B})$ внутренняя и внешние игры являются классическими ТП играми.

Определение 4.1. *Игра с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ называется выпуклой, если ее внешняя и все внутренние игры выпуклые.*

Обозначим через $\mathcal{G}^c_{cs} \subset \mathcal{G}_{cs}$ класс выпуклых игр с КС. Будем доказывать, что все игры этого класса обладают $L_{\max}$-решением.

Начнем с применения алгоритма Дутта–Рэя к произвольной выпуклой игре с КС

$$\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B})). \tag{4.4}$$

Пусть

$$a_1 = \max_{S \in \Omega(\mathcal{B})} \frac{v(S)}{|S|}, \tag{4.5}$$

и пусть максимум в (4.5) достигается на коалиции $T_1 \in \Omega$. Определим игру $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$, где $\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B})_{N \setminus T_1}$, в соответствии с Определением 2.5. Характеристическая функция v^1 определяется в зависимости от вида коалиции T_1. Эта коалиция либо является объединением коалиций разбиения $\mathcal{B}$, либо подкоалицией коалиции $B_j, j = 1, \ldots, k$.

В первом случае, когда максимум в (4.5) достигается на коалиции $T_1 = \bigcup\limits_{\substack{j \in J \\ J \subset \{1,\ldots,k\}}} B_j$, из Определения 2.5 следует, что

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \in \mathcal{B}, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneq B_j \text{ для некоторой } B_j \cap \mathrm{B} = \emptyset. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рассмотрим второй случай, когда максимум в (4.5) достигается на некоторой подкоалиции коалиции разбиения. Пусть $T_1 \subset B_j$ – одна из таких коалиций. Тогда в игре $\Gamma^1 = (N \setminus S, v^1, \Omega^1)$

$$\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B})_{N\setminus T_1} = \{S \in \mathcal{B} \setminus B_j, \text{ и } S \subset B_i, i \neq j, S \subset B_j \setminus S\}.$$

Для таких коалиций

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega^1, S \cap B_j = \emptyset,, \\ v(B_j) - a_1|T_1|, & \text{если } S = B_j \setminus T_1, \\ v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \subsetneqq B_j, \\ v(\mathrm{B}) - a_1|S|, & \text{если } S = (\mathrm{B} \setminus B_j) \cup (B_j \setminus T_1), \\ & \text{где } \mathrm{B} \subset \mathcal{B}, B_j \subset \mathrm{B}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Используя формулы (4.6),(4.7), получаем следующий результат:

Лемма 4.1. *Игра* $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ *является выпуклой игрой с КС.*

Следовательно, алгоритм корректно определен для выпуклых игр с КС, и в результате за конечное число шагов мы получим вектор $x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots, \underbrace{a_m, \ldots, a_m}_{T_m})$, где $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$, и игроки упорядочены в соответствии с убыванием выигрышей.

Заметим, что на некотором шаге алгоритма соответствующий максимум может достигаться на нескольких коалициях. В случае классической выпуклой игры максимум в этом случае достигается и на объединении этих коалиций, и именно это свойство позволяет доказать, что алгоритм приводит к единственному вектору выигрышей. В рассматриваемом случае игр с КС объединение двух допустимых коалиций может оказаться не недопустимым. Поэтому, не доказывая единственности вектора – результата применения алгоритма, будем брать в качестве x произвольный вектор из набора возможных. Поэтому упорядочение чисел $a_1, \ldots, a_m$ в определении вектора x оказываются нестрогими.

Каждая коалиция $S \subset N, S \notin \Omega(\mathcal{B})$ может быть представлена единственным образом как объединение максимальных допустимых коалиций следующим образом:

$$S = \bigcup_{j \in J_1} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2} S_j, \tag{4.8}$$

где $J_1, J_2 \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$.

ТП игра $\Gamma_{ae} = (N, v_{ae})$, где

$$v_{ae}(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega, \\ v(\bigcup\limits_{j \in J_1} B_j) + \sum\limits_{j \in J_2} v(S_j), & \text{если } S \notin \Omega \text{ имеет вид (4.8)} \end{cases} \qquad (4.9)$$

называется *аддитивным расширением* игры $N, v, \Omega)$.

Лемма 4.2. *Если игра* $\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$*, то ее аддитивное расширение* $\Gamma_{ea} = (N, v_{ae})$ *является выпуклой ТП игрой.*

Применим теперь алгоритм Дутта–Рэя к игре Γ_{ae}. Тогда на первом шаге максимум $\max\limits_{S \subset N} \frac{v_{ae}(S)}{|S|}$ будет достигаться на той же коалиции T_1 (хотя, возможно, и не только на ней), что и максимум в (4.5). Рассмотрим игру $(N \setminus T_1, (v_{ae})^1)$, где

$$(v_{ae})^1(S) = v_{ae}(S \cup T_1) - a_1|T_1| \text{ для всех } S \subset N \setminus T_1. \qquad (4.10)$$

Лемма 4.3. $(v_{ae})^1 = (v^1)_{ae}$*, где игра* $(N \setminus T_1, (v^1)_{ae})$ *является аддитивным расширением игры с КС* $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$.

Теорема 4.1. *В классе* $\mathcal{G}^c_{cs}$ *выпуклых игр с КС Лоренц-максимальное решение не пусто.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную выпуклую игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Для сохранения обозначений пусть она совпадает с игрой Γ (4.4). Из Леммы 4.1 следует, что игра с КС $(N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ выпуклая, а из Лемм 4.2 и 4.3 следует, что ТП игра $(N \setminus T_1, (v_{ae})^1)$ выпуклая. Следовательно, и на всех остальных шагах алгоритма $j = 2, 3, \ldots, m$ справедливы равенства $v^j_{ae}(S) = (v^j)_{ae}(S)$ для всех $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_1$, откуда и получается равенство $DR(N, v_{ae}) = DR(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. □

Из Теоремы 4.1 следует, что класс $\mathcal{G}^c_{cs} \subset \mathcal{G}^r_{ec}$, и класс ТП игр, характеристические функции которых являются аддитивными расширениями игр из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, содержится в классе выпуклых ТП игр. Поэтому из Теоремы 4.1 следует, что $L_{\max}$-решение в классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ согласовано в определении Дэвиса–Машлера. Очевидно, что для $|N| = 2$

$\mathcal{G}^c_{cs_N} = \mathcal{G}^r_{ec} =$ классу супер-аддитивных (выпуклых) ТП игр двух лиц, и DR-решение для этого класса совпадает с решением ограниченного эгалитаризма (CE) [4].

Эти свойства позволяют построить аксиоматическую характеризацию Лоренц-максимального решения для класса выпуклых игр с КС, аналогичную характеризации этого решения решения для выпуклых ТП игр (Теорема 3.2).

Теорема 4.2. *В классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ выпуклых игр с КС Лоренц-максимальное решение является единственным решением, удовлетворяющим одноточечности, согласованности и ограниченному эгалитаризму для игр двух лиц.*

Доказательство. Ввиду Теоремы 4.1 и установленных свойств $L_{\max}$-решения для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, достаточно доказать только его единственность в этом классе. Пусть σ – произвольное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам, указанным в формулировке теоремы, $x = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. По свойствам CE и согласованности решения σ все редуцированные игры $(\{i,j\}, v^x, \Omega_{\{i,j\}})$ исходной игры на двухэлементные множества игроков $\{i,j\}, i,j \in N$ относительно вектора x являются супераддитивными, и игра $(\{i,j\}, v^x, \Omega_{\{i,j\}})$ является классической ТП игрой для любых $i,j \in N$.

Покажем, что $x \in C(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Пусть $S \in \Omega(\mathcal{B}), S \neq N$ – произвольная коалиция, и пусть $j \notin S, i \in S$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i,j\}, v^x)$ на множество игроков $\{i,j\}, i \in S$. По свойству CE решения σ $(x_i, x_j) \in C(\{i,j\}, v^x)$, и $x_i \geq v^x(\{i\})$. По определению редуцированной игры (3.4)

$$v^x\{i\} = \max_{\substack{\{i\}\cup Q \in \Omega \\ Q:\ i,j \notin Q}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)). \tag{4.11}$$

Из $x_i \geq v^x(\{i\})$ и равенства (4.11) следует, что $x(\{i\} \cup Q) \geq v(\{i\} \cup Q)$ для всех Q, по которым берется максимум в (4.11). Так как коалиция $S \setminus \{i\}$ удовлетворяет этим условиям на Q, то $x(S) \geq v(S)$. Коалиция $S \in \Omega(\mathcal{B})$ была выбрана произвольной в наборе $\Omega(\mathcal{B})$, поэтому $x \in C(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Покажем теперь, что для любых $i,j \in N$ редуцированная игра $(\{i,j\}, v^x)$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой

$(\{i,j\}, v^x_{ae})$ аддитивного расширения (N, v_{ae}). Рассмотрим следующие случаи:

1) $i,j \in B_t, t \in \{1,\ldots,k\}$. Тогда по (3.4)

$$v^x(\{i\}) = \max_{Q \subset B_t \setminus \{i,j\}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)),$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q \subset N \setminus \{i,j\}} (v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q)). \qquad (4.12)$$

Если $Q \notin B_t \setminus \{i,j\}$, то $Q = Q_1 \cup Q_2$, где $Q_1 \subset B_t$, $Q_2 \cap B_t = \emptyset$. По определению аддитивного расширения (4.9) и принадлежности x с-ядру игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, справедливо неравенство

$$v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q) \leq v_{ae}(\{i\} \cup Q_1) - x(Q_1), \qquad (4.13)$$

из которого следует равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.

2) $i \in B_t, j \in B_r, t, r \in \{1,\ldots,k\}$, $t \neq r$. Тогда

$$v^x(\{i\}) = \max_{\substack{Q \subset B_t \\ i \notin Q}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)),$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q \subset N \setminus \{i,j\}})(v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q).$$

Аналогично случаю 1) получаем равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.

Очевидно, что $v^x(\{i,j\}) = v^x_{ae}(\{i,j\}) = x_i + x_j$. Следовательно, редуцированные игры совпадают и, по согласованности решения σ, $(x_i, x_j) = L_{\max}(\{i,j\}, v^x) = L_{\max}(\{i,j\}, v^x_{ae})$.

Из обратной согласованности $L_{\max}$-решения в классе выпуклых ТП игр [4] следует, что $x = L_{\max}(N, v_{ae})$, и из Теоремы 4.1 мы получаем требуемый результат $x = L_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. $\square$

В следующем разделе приведем другое решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, с похожими свойствами.

4.3. Лорен-максимальное решение типа Камийо для класса выпуклых игр с коалиционной структурой

Для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где набор $\Omega(\mathcal{B})$ порожден разбиением $\mathcal{B}$ как определено в (4.4), рассмотрим внешнюю игру $(\mathcal{B}, v^*)$ (см. раздел 4.2) и внутренние игры $(B_i, v_i), i = 1,\ldots,k$, являющиеся соответствующими подыграми игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Камийо [9] определил следующее двухшаговое решение для игр с КС: Для произвольной игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, на первом шаге находится значение Шепли (Sh) внешней игры $(\mathcal{B}, v)$, и пусть $x = Sh(\mathcal{B}, v)$. Далее значения характеристических функций больших коалиций B_i внутренних игр $(B_i, v), i = 1, \ldots, k$ заменяются на x_i. Такие модифицированные внутренние игры обозначим через (B_i, v_i^x). На втором шаге находятся значения Шепли игр (B_i, v_i^x). Обозначим $y_i^x = Sh(B_i, v_i^x), i = 1, \ldots, k$. Вектор $(y_i^x, \ldots, y_k^x) \in X^*(N, v)$ называется *Камийо-Шепли значением* игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

В этом разделе мы рассмотрим выпуклые игры с КС и заменим значение Шепли в предыдущем определении на Лоренц-максимальное решение. Тогда мы получим непустое одноточечное решение для этого класса, так как внешняя и все внутренние (и также модифицированные внутренние) игры выпуклые, и для них существуют $L_{\max}$-решения. Назовем получившееся решения для игр с КС *Лоренц-максимальным решением типа Камийо* ($L_{\max}^K$).

Это решение отличается от определенного в предыдущем разделе $L_{\max}$-решения для игр с КС. Покажем это на примере

Пример 4.1. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{1\}\{2, 3\}$. Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $v(N) = 4, v(\{1\} = 1.5, v(\{2, 3\} = 2, v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$. Очевидно, эта игра выпуклая. Лоренц-максимальное решение для этой игры равно $L_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = (1.5, 1.25, 1.25)$. Однако $L_{\max}^K(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = (2, 1, 1)$.

Приведенный пример показывает, что Лоренц-максимальное решение является «более эгалитарным» с точки зрения равноправия всех игроков. $L_{\max}^K$-решение сначала «уравнивает» в смысле доминирования по Лоренцу выигрыши коалиций разбиения, а на втором уровне уравнивает выигрыши игроков внутри коалиций разбиения.

Очевидно, $L_{\max}^K$-решение анонимно и принадлежит с-ядру. Однако, в отличие от Лоренц-максимального решения (см. раздел 4.2), оно не является согласованным в определении редуцированной игры (3.4).

Пример 4.2. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{B} = (B_1, B_2,)\ B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{4, 5, 6\}$.

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{для } S = \{i\}, i \in N, \text{ и } S \subsetneqq B_2,\ S = \{1,3\}, \{2,3\} \\ 1, & \text{для } S = \{4,5,6\}, \\ 1.5, & \text{для } S = \{1,2,3\}, \{1,2\}, \\ 4, & \text{для } S = N. \end{cases}$$

Легко видеть, что игра $\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ является выпуклой игрой с КС. $L_{\max}$-решение внешней игры $\Gamma_{ou} = (\{B_1, B_2\}, v))$, $v(B_1) = 1.5$, $v(B_2) = 1, v(N) = 4$ равно $L_{\max}(\Gamma_{ou}) = (2,2)$, а $L^K_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = x = (3/4, 3/4, 1/2, 2/3, 2/3, 2/3)$. Рассмотрим редуцированную игру Γ^{x_3}, когда игрок 3 покидает игру с выигрышем $1/2$. В этой игре $\mathcal{B}_{N\setminus\{3\}} = (B_1 \setminus \{3\}, B_2)$. Характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v^x_4(S) = \begin{cases} 0, & \text{для } S = \{i\}, i = 1,2,4,5,6 \text{ и } S \subsetneqq B_2. \\ 1.5, & \text{для } S = \{1,2\}, \\ 1, & \text{для } S = \{4,5,6\} \\ 3.5, & \text{для } S = \{1,2,4,5,6\}. \end{cases}$$

Тогда $L^K_{\max}(\Gamma^{x_3}) = (7/8, 7/8, 7/12, 7/12, 7/12) \neq x_{N\setminus\{3\}}$.

Однако, ввиду того что $L^K_{\max}$-решение является результатом двухшагового нахождения Лоренц-максимальных решений классических выпуклых ТП игр, естественно ожидать, что оно удовлетворяет некоторому иному, возможно более слабому, свойству согласованности. Таким свойством оказывается свойство коалиционной согласованности, когда согласованность выполняется только для редуцированных игр, образованных уходом целых коалиций разбиения или их объединениями.

Определение 4.2. *Одноточечное решение Φ для класса $\mathcal{G}_{cs}$ игр с КС называется коалиционно согласованным с смысле Дэвиса–Машлера, если для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, и коалиции $B_j \in \mathcal{B}$ из $x = \Phi(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ следует выполнение равенства*

$$x_{N\setminus B_j} = \Phi_{N\setminus B_j}(N, v, \mathcal{B}) = \Phi(N \setminus B_j, v_x^{N\setminus B_j}, \mathcal{B} \setminus B_j),$$

где редуцированная игра определена следующим образом:

$$v_x^{N\setminus B_j}(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_j), \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i)\}, \quad \text{если } S = \bigcup\limits_{J \subset \{1,\dots,k\}, j \neq i} B_j \end{cases} \tag{4.14}$$

В этом определении предполагается, что разбиение $\mathcal{B}$ состоит более чем из одной коалиции.

Так как коалиционная структура двухточечного множества $\{i, j\}$ состоит либо из единственной коалиции $\{i, j\}$, либо из одноточечных множеств $\{i\}, \{j\}$, любая выпуклая игра двух лиц с КС совпадает с выпуклой ТП игрой двух лиц. Таким образом, в обоих случаях свойство CE определяется одним и тем же способом, и для игр этого класса $L_{\max}(N, v) = L^K_{\max}(N, v) = CE(N, v)$.

Однако если число игроков более двух, а число коалиций разбиения равно одному или двум, то определение $L^K_{\max}$-решения учитывает неравноправие коалиций разбиения и коалиций, содержащихся в единственной коалиции разбиения. Это свойство формулируется в виде следующего CE свойства для игр с КС:

Определение 4.3. *Одноточечное решение σ для класса $\mathcal{G}^r_{cs}$ игр с КС, содержащих две коалиции разбиения и удовлетворяющие коалиционной согласованности, удовлетворяют свойству коалиционного ограниченного эгалитаризма (CCE), если для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ $\in \mathcal{G}^r_{cs}$, $\mathcal{B} = (B_i, B_j)$ и $x = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ из неравенства $x(B_i) > x(B_j)$ следует равенство $x(B_i) = v(B_i)$.*

Заметим, что это определение совпадает со свойством CE для случая игр двух лиц.

Приведем теперь аксиоматическую характеризацию $L^K_{\max}$-решения для класса выпуклых игр с КС.

Теорема 4.3. *Единственным одноточечным решением для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющим свойством непустоты, CCE для разбиений, состоящих из двух коалиций, CE для игр двух лиц, CCONS, и согласованности для разбиения, состоящих из одной коалиции, является Лоренц-максимальное решение типа Камийо.*

Доказательство. Свойство коалиционной согласованности $L^K_{\max}$-решения фактически означает согласованность решения внешней игры

Из того факта, что для первым шагом нахождения $L^K_{\max}$-решения является нахождение $L_{\max}$-решения внешней игры, которое является согласованным, решение $L^K_{\max}$ обладает свойством коалиционной согласованности.

Остальные свойства непосредственно следует определения $L^K_{\max}$-решения и уже доказанных свойств $L_{\max}$-решения.

Пусть теперь Φ – произвольное одноточечное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам теоремы.

Рассмотрим класс $\mathcal{G}'$ выпуклых ТП игр, таких что любая игра $(K, v) \in \mathcal{G}'$ является внешней игрой некоторой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ с $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k), k = |K|$. Очевидно, что класс $\mathcal{G}'$ совпадает с классом всех выпуклых ТП игр $\mathcal{G}^c$. Обратно, для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ ее внешняя игра принадлежит классу $\mathcal{G}$. Следовательно, по Теореме 3.2, коалиционной согласованности и свойству коалиционного ограниченного эгалитаризма решения Φ, для любой игры из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$ решение Φ ее внешней игры совпадает с $L_{\max}$-решением. Пусть $x = \Phi(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$. Мы доказали справедливость равенств

$$x(B_i) = \Phi_i(K, v) = (L_{\max})_i(K, v), i \in K. \tag{4.15}$$

Рассмотрим внутреннюю игру (B_i, v^x), где характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v^x(S) = \begin{cases} x(B_i) & \text{если } S = B_i, \\ v(S) & \text{если } S \subsetneqq B_i. \end{cases}$$

По определению (3.4) согласованности решения для класса $\mathcal{G}_{cs}$, эта игра совпадает с редуцированной игрой игры Γ на множество игроков B_i относительно вектора выигрышей x. Следовательно, по согласованности решения $\Phi(B_i, v^x)$ и по Теореме 3.2 получаем равенства

$$x_{B_i} = \Phi(B_i, v^x) = L_{\max}(B, v^x), i \in K. \tag{4.16}$$

Равенства (4.15) и (4.16) завершают доказательство теоремы. $\square$

5. Приложение

Доказательство Предложения 3.1. Предположим, что для некоторого $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) > a + (b-a) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}$. Тогда

$$L_j(y) - L_{j_1}(y) = \sum_{l=j_1+1}^{j} y_l^* > \frac{j-j_1}{j_2-j_1} \cdot (b-a).$$

Так как компоненты y_l^* не убывают с ростом l,

$$y_j^* > \frac{b-a}{j_2-j_1}, \tag{5.1}$$

и для всех $l > j$ неравенство (5.1) также справедливо. Следовательно,

$$\sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > (b-a)\frac{j_2-j_1}{j_2-j_1} = b-a,$$

т. е.

$$b = L_{j_2}(y) = L_{j_1}(y) + \sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > a + b - a,$$

что невозможно. □

Доказательство Леммы 3.1. Пусть вектор x имеет вид (2.7), а вектор y удовлетворяет условиям леммы. Тогда

$$L_j(x) = \sum_{k=n-j+1}^{n} x_k. \tag{5.2}$$

Из неравенств $x(R_k) \le y(R_k)$ следуют неравенства $x(N \setminus R_k) \ge y(N \setminus R_k), k = 1, \ldots, m$, а из (5.2) мы получаем равенство $x(N \setminus R_k) = L_{|N \setminus R_k|}(x)$. Следовательно, $y(N \setminus R_k) \ge L_{|N \setminus R_k|}(y)$, откуда следуют неравенства

$$L_j(y) \le L_j(x) \text{ для } j = |N \setminus R_k|, k = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Обозначим $j_1 = |N \setminus R_k|, j_2 = |N \setminus R_{k-1}|$ для некоторого произвольного $k = 1, \ldots, m-1$. Тогда для $j \in (j_1, j_2)$

$$L_j(x) = L_{j_1}(x) + (L_{j_2}(x) - L_{j_1}(x)) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}. \tag{5.4}$$

По Утверждению 3.1 справедливы неравенства

$$L_j(y) \le L_{j_1}(y) + (L_{j_2}(y) - L_{j_1}(y)) \cdot \frac{j - j_1}{j_2 - j_1} \text{ для } j \in (j_1, j_2). \qquad (5.5)$$

Из неравенств (5.3),(5.5) и равенства (5.4) следует неравенство $L_j(y) \le L_j(x)$. Так как $k = 1, \dots, m-1$ и $j \in (j_1, j_2)$ были выбраны произвольно, $L_j(x) \ge L_j(y)$ для всех $j \in N$. $\square$

Доказательство Следствия 3.1. Представим x в виде (2.7), и пусть $y \in C(N, v, \Omega)$ – произвольный вектор. Если $L(x) \neq L(y)$, то $x \succ_{Lor} y$ по Лемме 3.1.

Остается показать, что для $y \neq x$ $L(y) \neq L(x)$. Для всех $k = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $y(R_k) \ge x(R_k)$. Предположим, что $y_{T_1} \neq x_{T_1}$. Тогда найдется такое $j \in T_1$, что $y_j > a_1 = \max_{i \in N} x_i$, откуда следует $L(x) \neq L(y)$.

Пусть теперь $y_{R_{k-1}} = x_{R_{k-1}}$ для некоторого $k = 2, \dots, m$, а $y_{T_k} \neq x_{T_k}$. Тогда найдется такое $j \in T_k$, что $y_j > x_j = a_k$, и в этом случае также равенство $L(x) = L(y)$ невозможно. $\square$

Доказательство Леммы 4.2. Пусть $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, и $S, T \subset N, S \cap T \neq \emptyset$. Представим коалиции S, T в виде (4.8):

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{j \in J_1} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2} S_j, \\ T &= \bigcup_{j \in J_3} B_j \cup \bigcup_{j \in J_4} S_j, \end{aligned} \qquad (5.6)$$

где $J_i \subset \{1, \dots, k\}, i = 1, 2, 3, 4$, $(J_1 \cup J_2) \cap (J_3 \cup J_4) \neq \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} S \cup T &= \bigcup_{j \in J_1 \cup J_3} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2 \cup J_4} T_j, \\ S \cap T &= \bigcup_{j \in J_1 \cap J_3} B \cup \bigcup_{j \in J_2 \cap J_4} T_j. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Используя формулы (5.6),(5.7), получим равенство

$$v_{ae}(S) + v_{ae}(T) = v\Big(\bigcup_{j \in J_1} B_j\Big) + \sum_{j \in J_2} v(S_j) + v\Big(\bigcup_{j \in J_3} B_j\Big) + \sum_{j \in J_4} v(T_j). \quad (5.8)$$

В правой части равенства (5.8) стоит сумма значений характеристической функции v от допустимых коалиций из $\Omega(\mathcal{B})$. Так как игра $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ выпуклая, справедливы неравенства

$$v\Big(\bigcup_{j\in J_1} B_j\Big) + v\Big(\bigcup_{j\in J_3} B_j\Big) \le v\Big(\bigcup_{j\in J_1\cup J_3} B_j\Big) + v\Big(\bigcap_{j\in J_1\cap J_3} B_j\Big), \qquad (5.9)$$

$$\sum_{j\in J_2} v(S_j) + \sum_{j\in J_4} v(T_j) \le \sum_{j\in J_2\setminus J_4} v(S_j) + \sum_{j\in J_4\setminus J_2} v(T_j) + \sum_{j\in J_2\cap J_4} v(S_j\cap T_j) \quad (5.10)$$

Из равенства (5.8) и неравенств (5.9) и (5.10) следует неравенство

$$v(S) + v(T) \le v(S\cup T) + v(S\cap T),$$

завершающее доказательство. □

Доказательство Леммы 4.3. Пусть $S \subset \Omega^1$ – произвольная коалиция. Тогда очевидно, что $(v^1)_{ae}(S) = (v_{ae})^1(S)$. Теперь пусть $S \subset N \setminus T_1, S \notin \Omega^1$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $T_1 \subsetneqq B_l$. Если $S \subset N \setminus T_1, S \notin \Omega^1$, то S разлагается на коалиции из Ω^1 следующим образом:

$S = \mathrm{B}' \cup Q$, где $\mathrm{B}' = \bigcup\limits_{j\in J_1} B'_j$, $Q = \bigcup\limits_{j\in J_2} S_j$, $B'_j = B_j$ для $j \neq l$, $B'_l = B_l \setminus T_l$, $S_j \in B'_j, J_1, J_2 \subset \{1,\dots,k\}, J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

1a) $l \in J_1$. Тогда

$$(v^1_{ae}(S) = v^1(\mathrm{B}') + \sum_{j\in J_2} v^1(S_j) = v(\mathrm{B}) - a_1|T_1| + \sum_{j\in J_2} v(S_j). \qquad (5.11)$$

1b) $l \notin J_1, J_2$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\mathrm{B}) + \sum_{j\in J_2} v(S_j) = v(\mathrm{B}) + \sum_{j\in J_2} v(S_j) + v(T_1) - a_1|T_1|. \quad (5.12)$$

1c) $l \in J_2$. Тогда $v^1(S_l) = v(S_l \cup T_l) - a_1|T_1|$,

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\mathrm{B}) + \sum_{\substack{j\in J_2\\ j\neq l}} v(S_j) + v(S_j \cup T_l) - a_1|T_1|. \qquad (5.13)$$

Равенства (5.11)–(5.13) доказывают лемму для случая 1.

2. $T_1 = \mathrm{B}_1 = \bigcup\limits_{j\in J_1\subset\{1,\dots,k\}} B_j$. В этом случае, если $S \subset N \setminus T_1, S \notin \Omega^1$, то S разлагается на коалиции из Ω^1 следующим образом:

$S = \text{В}_2 \cup Q$, где $\text{В}_2 = \bigcup_{\substack{j \in J_2 \subset \{1,\ldots,k\} \\ J_2 \cap J_1 = \emptyset}} B_j$, $Q = \bigcup_{j \in J_3} S_j$, $S_j \subsetneqq B_j$, $J_3 \cap (J_1 \cup J_2) = \emptyset$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\text{В}_2 \cup T_1) + \sum_{j \in J_3} v(S_j) - a_1|T_1| = v_{ae}(S \cup T_1) - a_1|T_1| = (v_{ae})^1(S).$$

□

Пример, показывающий отсутствие обратной согласованности Лоренц-максимального решения на классе сбалансированных игр:

Пример 5.1. Рассмотрим игру четырех лиц (N, v), $N = \{1, 2, 3, 4\}$ со следующей характеристической функцией:

$$v(1) = 0.5, v(2) = v(3) = 1, v(4) = 0, v(1,2) = 2, v(1,3) = v(3,4) = 3,$$
$$v(2,3) = 5, v(1,4) = v(2,4) = 1, v(S) = 3 \text{ для } S : |S| = 3,\ v(1,2,3,4) = 6.$$

Эта игра сбалансированная, но не выпуклая. Нетрудно проверить, что Лорнец-максимальное решение $L(N, v) = (0.5, 2.5, 2.5, 0.5) \in C(N, v)$. Рассмотрим вектор $x = (0.9, 2.1, 2.9, 0.1) \in C(N, v)$ и покажем, что для всех редуцированных игр двух лиц относительно вектора x соответствующие проекции этого вектора являются решениями ограниченного эгалитаризма для этих игр:

$$\{i, j\} \subset N \implies (x_i, x_j) = CE(\{i, j\}, v^x_{ij}).$$

Прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned}
&v^x_{23}(3) = v(3,4) - x_4 = 2.9 = x_3 > x_2 \Longrightarrow (x_2, x_3) = CE(\{2,3\}, v^x_{23}),\\
&v^x_{13}(3) = v^x_{34}(3) = 2 - 2.1 = 2.9 = x_3 > x_1 \Longrightarrow (x_1, x_3) = CE((\{1,3\}, v^x_{13}),\\
&v^x_{34}(3) = 2 - 2.1 = 2.9 = x_3 > x_4 \Longrightarrow (x_3, x_4) = CE(\{3,4\}, v^x_{34}),\\
&v^x_{12}(2) = 3 - 0.9 = 2.1 = x_2 > x_1 \Longrightarrow (x_1, x_2) = CE(\{1,2\}, v^x_{12}),\\
&v^x_{24}(2) = 5 - 2.9 = 2.1 = x_2 > x_4 \Longrightarrow (x_2, x_4) = CE(\{2,4\}, v^x_{24}),\\
&v^x_{14}(1) = 3 - 2.1 = 0.9 = x_1 > x_4 \Longrightarrow (x_1, x_4) = CE(\{1,4\}, v^x_{14}).
\end{aligned}$$

Однако $x \neq L(N, v)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. *The equal split-off set for cooperative games* // Game Theory and Mathematical Economics. Banach Center Publications, v.71. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa. 2006. P. 39–46.

2. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistic Quarterl. 1965. V. 12. P. 223–259.

3. Driessen T. *k-convex n-person games and their cores* // Zeitschrift für Operations Research. Series A. 1986. V. 30. P. 49–84.

4. Dutta B. *The egalitarian solution and the reduced game properties in convex games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 153–159.

5. Dutta B., Ray D. *A concept of egalitarianism under participation constraints* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 615–630.

6. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 589–614.

7. Hokari T., van Gellekom A. *Population monotonicity and consistency in convex games: Some logical relations* // International Journal of Game Theory. 2002. V. 31. P. 593–607.

8. Hougaard J.L., Peleg B., Thorlund-Petersen L. *On the set of Lorenz-maximal imputations in the core of a balanced game* // International Jouranl of Game Theory. 2001. V. 30. P. 147–165.

9. Kamijo Y. *A two-step value for cooperative games with coalitional structures* // International Game Theory Review. 2009. V. 11. P. 207–214.

10. Llerena F. *An axiomatization of the core of games with restricted cooperation* // Economic Letters. 2007. V. 95. P. 80–84.

11. Owen G. *Values of games with a priori unions* // Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.) Springer-Verlag. Berlin. 1977. P. 76–88.

12. Peleg B. *On the Reduced Game Property and its Converse* // Int. Journal of Game Theory. 1986. V. 15. P. 187–200. *A Correction.* Int. Journal of Game Theory. 1987. V. 16.

13. Peleg B., Sudhölter P. it Introduction to the Theory of Cooperative Games. Kluwer Academic Publishers. Boston. 2003. 380pp.

14. Yanovskaya E. *Strongly consistent solutions to balanced TU games* // Int. Game Theory Review. 1999. V. 1. N 1. P. 63–85.

LORENZ-MAXIMAL SOLUTIONS FOR GAMES WITH A RESTRICTED COOPERATION

Elena B. Yanovskaya, St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, St. Petersburg, Dr.Sc., Prof. (eyanov@emi.nw.ru).

Abstract: Cooperative games with a restricted cooperation, defined by an arbitrary collection of feasible coalitions are considered. For this class the Equal Split-Off Set (ESOS) [1] is defined by the same way as for cooperative games with transferable utilities (TU). For the subclass of these games with non-empty cores the Lorenz-maximal solution is also defined by the same way as for TU games. It is shown that if the ESOS of a game with a restricted cooperation intersects with its core, then it is single-valued and Lorenz dominates other vectors from the core, i.e. it coincides with the Lorenz-maximal solution. Cooperative games with coalitional structure for which the collection of feasible coalitions consists of the coalitions of partition, their unions, and subcoalitions of the coalitions of the partition, are investigated more in detail. For these games the convexity property is defined, and for convex games with coalitional structure existence theorems for two egalitarian solutions – Lorenz maximal and Lorenz-Kamijo maximal – are proved. Axiomatic characterizations for both these solutions are given.

Keywords: cooperative games, restricted cooperation, The Equal Split-off set, the Dutta–Ray solution, Lorenz-maximal solution.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 137–149

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

TIME CONSISTENT SHAPLEY VALUE IMPUTATION FOR COST-SAVING JOINT VENTURES

David W.K. Yeung
SRS Consortium for Advanced Study in Cooperative Dynamic Games
Shue Yan University
Hong Kong
and
Center of Game Theory
St. Petersburg State University
198504, Saint-Petersburg, Universitetskii pr., 35
e-mail: dwkyeung@hksyu.edu

As markets become increasingly globalized and firms become more multinational, corporate joint ventures are likely to yield opportunities to quickly create economies of scale and critical mass, and facilitate rational resource sharing. A major source of gain from joint venture is from cost savings. However, it is often observed that after a certain time of cooperation, some firms may gain sufficient skills and technology that they would do better by breaking up from the joint venture. This is the well-known problem of time inconsistency. In this paper, we consider a dynamic cost saving joint venture which adopts the Shapley value as its profit allocation scheme. A compensation mechanism distributing payments to participating firms at each instant of time is devised to ensure the realization of the Shapley value imputation throughout the venture duration. Hence time-consistency will be attained, and a dynamically stable joint venture can be formed.

Keywords: corporate joint venture, the Shapley value, cost saving, dynamic stability.

1. Introduction

With joint ventures becoming a powerful force shaping global corporate strategy, partnerships between firms have significantly increased. D'Aspremont and Jacquemin [6], Kamien et al [7] and Suzumura [11] have studied cooperative R&D with spillovers in joint ventures under a static framework. Cellini and Lambertini [4], [5] considered cooperative solutions to investment in product differentiation in a dynamic approach. Moreover, as markets become increasingly globalized and firms become more multinational, corporate joint ventures are likely to yield opportunities to quickly create economies of scale and critical mass, and facilitate rational resource sharing (see [1]). A major source of gain from joint venture is from cost savings. Cost saving opportunities are created under joint venture, for instance, savings in joint R&D, administration, marketing, customer services, purchasing, financing, and economy of scales and scope. Despite their purported benefits, however, joint ventures are highly unstable and have a consistently high rate of failure ([3], [8]). After a certain time of cooperation, some firms may gain sufficient managerial and technological expertise that they would do better by breaking away from the joint venture. Thus a major source of instability is the lack of *dynamical stable* or *time consistent* cooperative solutions to the joint-venture. Time consistency is a fundamental element in dynamic cooperation, and it ensures that: (i) the extension of the solution policy to a later starting time and a state brought about by prior optimal behavior of the players would remain optimal, and (ii) all participating firms do not have incentive to deviate from the initial plan (see [12], [13]). Petrosyan and Zaccour [9] provided a time consistent solution to a class of differential games involving pollution cost reduction. Yeung and Petrosyan [14] presented a dynamically stable joint venture involving cooperative R&D with spillovers. Yeung and Petrosyan [15] developed a cooperative differential game of transboundary industrial pollution and derived a dynamically stable solution.

In this paper, we consider a joint venture which results in cost saving. The Shapley value [10] is adopted to be the profit allocation scheme to reflect the relative contributions of the firms in cost saving. Since joint venture is a continual arrangement, a dynamic specification of the Shapley value is provided. To fulfill time-consistency, the Shapley value imputation has to be throughout the venture duration. A compensation mechanism distributing payments to participating firms at each instant of time ensuring the realization of the Shapley value imputation throughout the venture duration is devised.

2. Dynamic cost saving joint ventures

Consider a framework of a dynamic joint venture in which there are n firms. The venture horizon is $[t_0, T]$. The objective of firm i is:

$$\int_{t_0}^{T} \left\{ g^i[s, x^i(s)] - c_i^{\{i\}}[u_i(s)] \right\} \exp\left[-\int_{t_0}^{S} r(y)dy \right] ds$$
$$+ \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy \right] q^i(x^i(T)), \quad \text{for } \ i \in [1, 2, \cdots, n] \equiv N, \tag{2.1}$$

where $x^i(s) \in X^i \subset R^{m_i+}$ denotes the state variables of firm i, $u_i \in U_i \subset R^{l_i+}$ is the control vector of firm i, $g^i[s, x^i(s)]$ the instantaneous revenue, $c_i^{\{i\}}[u_i(s)]$ represents the costs of the firms control $u_i(s)$ when it is operating on its own, $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} r(y)dy \right]$ is the discount factor, and $q^i(x^i(T))$ the terminal payment. In particular, the firm's revenue $g^i[s, x^i]$ is affected by the state variables like capital stock, special skills, productive resources and technologies.

The state dynamics of the ith firm is characterized by the set of vector-valued differential equations:

$$\dot{x}^i(s) = f^i[s, x^i(s), u_i(s)], \quad x^i(t_0) = x^{i(0)}, \qquad \text{for } \ i \in N. \tag{2.2}$$

Consider a joint venture consisting of a subset of firms $K \subseteq N$. There are k firms in the subset K. The participating firms can obtain cost reduction and the profit to the joint venture K at time t_0 becomes:

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{j \in K} \{ g^j[s, x^j(s)] - c_j^K[u_j(s)] \} \exp\left[-\int_{t_0}^{S} r(y)dy \right] ds$$
$$+ \sum_{j \in K} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy \right] q^j(x^j(T)), \qquad \text{for } K \subseteq N, \tag{2.3}$$

where $c_j^K[u_j(s)]$ represents the costs of the controls of the firm j in the subset K. Cost saving opportunities are created under joint venture, for instance, savings in joint R&D, administration, marketing, customer services, purchasing, financing, and economy of scales and scope. With absolute joint venture cost advantage we have

$$c_j^K[u_j(s)] \leq c_j^L[u_j(s)], \quad \text{for} \ \ j \in L \subseteq K, \tag{2.4}$$

Moreover, marginal cost advantages lead to:

$$\partial c_j^K[u_j(s)]/\partial u_j(s) \leq \partial c_j^L[u_j(s)]/\partial u_j(s), \ \text{for} \ j \in L \subseteq K.$$

The model adopted for analysis concentrates on cost savings and the profit of an outside firm is not affected by the actions of the joint venture. Let x^K denote the concatenation of all x^j for $j \in K$. To compute the profit of the joint venture K we have to consider the optimal control problem $\varpi[K; t_0, x^{K(0)}]$ which maximizes (2.3) subject to (2.2). Using Bellman's [2] technique of dynamic programming the solution of the problem $\varpi[K; t_0, x^{K(0)}]$ can be characterized as follows.

Definition 2.1. *A set of controls* $\left\{u_j^*(t) = \psi_j^{(t_0)K*}(t, x^K), \, j \in K\right\}$ *provides an optimal solution to the problem* $\varpi[K; t_0, x^{K(0)}]$ *if there exist continuously differentiable function*

$$W^{(t_0)K}(t, x^K) : [t_0, T] \times \prod_{j \in K} R^{m_j} \rightarrow R,$$

satisfying the Bellman equation:

$$\begin{aligned} -W_t^{(t_0)K}(t, x^K) = \max_{u_K} \Bigg\{ \sum_{j \in K} \left\{ g^j[s, x^j(s)] - c_j^K[u_j(s)] \right\} \exp\left[-\int_{t_0}^t r(y)dy \right] \\ + \sum_{j \in K} W_{x_j}^{(t_0)K}(t, x^K) f^j[t, x^j, u_j] \Bigg\}, \\ W^{(t_0)K}(T, x^K) = \exp\left[-\int_{t_0}^T r(y)dy \right] \sum_{j \in K} q^j(x^j). \end{aligned}$$

In the case when all the n firms are in the joint venture, the set of optimal controls $\left\{\psi_j^{(t_0)N^*}(s, x^N(s)), \ \ \text{for} \ j \in N\right\}$, will be adopted and the dynamics of the optimal state trajectory of the grand coalition can be expressed as:

$$\dot{x}^j(s) = f^j[s, x^j(s), \psi_j^{(t_0)N^*}(s, x(s))], \ x^j(t_0) = x_j^0, \qquad \text{for} \ j \in N. \tag{2.5}$$

Let $x^*(t) = \left\{x^{1^*}(t), x^{2^*}(t), \cdots, x^{n^*}(t)\right\}$ for $t \in [t_0, T]$ denote the solution to (2.5) which yields the optimal trajectories. In particular

$$x^{j^*}(t) = x^{j(0)} + \int_{t_0}^{t} f^j[s, x^{j^*}(s), \psi_j^{(t_0)N^*}(s, x_j^*(s))]ds, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.6)$$

We use $x_t^{j^*}$ to denote the value of $x^{j^*}(t)$ at time $t \in [t_0, T]$, and $x_t^{L^*}$ to denote the vector containing all $x_t^{j^*}$, for $j \in L \subseteq N$. The profit of the grand coalition joint venture becomes

$$\begin{aligned} &W^{(t_0)N}(t_0, x^{N(0)}) = \\ &\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{n} \left\{ g^j[s, x^{j^*}(s)] - c_j^N[\psi_j^{(t_0)N^*}(s, x_j^*(s))] \right\} \exp\left[-\int_{t_0}^{S} r(y)dy \right] ds \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy \right] q^j(x^{j^*}(T)). \end{aligned}$$

A remark which will be used in subsequent analysis is provided below.

Remark 2.1. Consider the problem $\varpi[K; \tau, x^K]$ which starts at time $\tau \in [t_0, T]$ with initial state x_τ^K which maximizes

$$\int_{\tau}^{T} \sum_{j \in K} \left\{ g^j[s, x^j(s)] - c_j^K[u_j(s)] \right\} \exp\left[-\int_{\tau}^{S} r(y)dy \right] ds + \sum_{j \in K} \exp\left[-\int_{\tau}^{T} r(y)dy \right] q^j(x^j(T))$$

subject to

$$\dot{x}^j(s) = f^j[s, x^j(s), u_j(s), \quad x^j(\tau) = x^j, \quad \text{for } j \in K.$$

One can readily show that:

$$\exp\left[\int_{\tau}^{t} r(y)dy \right] W^{(\tau)K}(t, x_t^K) = W^{(t)K}(t, x_t^K), \text{ for } t_0 \le \tau \le t \le T;$$

and

$$\Psi_j^{(\tau)K^*}(t, x_t^K) = \Psi_j^{(t)K^*}(t, x_t^K), \text{ for } t_0 \le \tau \le t \le T \text{ and } j \in K.$$

Since profit maximization by coalition K is not affected by actions of firms outside the coalition, the following superaddivity property can be obtained.

Proposition 2.1. *Coalition profits are superadditivity, that is*

$$W^{(\tau)K}(\tau, x_\tau^K) \geq W^{(\tau)L}(\tau, x_\tau^L) + W^{(\tau)K\backslash L}(\tau, x_\tau^{K\backslash L}), \quad \textit{for } L \subset K \subseteq N,$$

where $K \setminus L$ is the relative complement of L in K.

Proof. See Appendix.

3. Dynamic Shapley value imputation

The problem of sharing the cooperative gains is inescapable in virtually every joint venture. The Shapley value is one of the most commonly used sharing mechanism in static cooperation games with transferable payoffs. Besides being individually rational and group rational, the Shapley value is also unique. Specifically, the Shapley value gives an imputation rule:

$$\varphi^i(v) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}[v(K) - v(K \setminus i)], \quad \text{for } i \in N, \tag{3.1}$$

where $K \setminus i$ is the relative complement of i in K, $v(K)$ is the profit of coalition K, and $[v(K) - v(K \setminus i)]$ is the marginal contribution of firm i to the coalition K.

In the present dynamic analysis instead of a one-time allocation of the Shapley value, we have to consider the maintenance of the Shapley value imputation over the joint venture horizon.

Again, since profit maximization by coalition K is not affected by firms outside the coalition, the function $v(K)$ can be regarded as a characteristic function.

At time t_0 with state $x^{N(0)}$, the firms agree that firm i's share of profits be:

$$\begin{aligned}&\xi^{(t_0)i}(t_0, x^{N(0)}) = \\ &\qquad \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\left[W^{(t_0)K}(t_0, x^{K(0)}) - W^{(t_0)K\backslash i}(t_0, x^{K\backslash i(0)})\right], \\ &\qquad \text{for } i \in N,\end{aligned} \tag{3.2}$$

However, the Shapley value has to be maintained throughout the venture horizon $[t_0, T]$ to ensure time consistency. In particular, at time τ with the state being x_τ^* the following imputation principle has to be maintained:

Condition 3.1. *At time τ, firm i's share of profits is:*

$$\xi^{(\tau)i}(\tau, x_\tau^*) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(\tau)K}(\tau, x_\tau^{K^*}) - W^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_\tau^{K\backslash i^*})\right],$$
$$\textit{for } i \in N \textit{ and } \tau \in [t_0, T]. \tag{3.3}$$

Note that $\xi^{(\tau)}(\tau, x_\tau^*) = \left[\xi^{(\tau)1}(\tau, x_\tau^*), \xi^{(\tau)2}(\tau, x_\tau^*), \cdots, \xi^{(\tau)n}(\tau, x_\tau^*)\right]$ as specified in (3.3) satisfies the basic properties of an imputation vector:

$$\text{(i)} \quad \sum_{j=1}^{n} \xi^{(\tau)j}(\tau, x_\tau^*) = W^{(\tau)N}(\tau, x_\tau^*), \quad \text{and}$$
$$\text{(ii)} \quad \xi^{(\tau)i}(\tau, x_\tau^*) \geq W^{(\tau)i}(\tau, x_\tau^*), \quad \text{for } i \in N \text{ and } \tau \in [t_0, T]. \tag{3.4}$$

Part (i) of (3.4) shows that $\xi^{(\tau)}(\tau, x_\tau^*)$ satisfies the property of Pareto optimality throughout the game interval. Part (ii) demonstrates that $\xi^{(\tau)}(\tau, x_\tau^*)$ guarantees individual rationality throughout the game interval. Crucial to the analysis is the formulation of a profit distribution mechanism that would lead to the realization of Condition 3.1. This will be done in the next section.

4. Transitory compensation to secure the Shapley value imputation

In this section, a profit distribution mechanism will be developed to compensate transitory changes so that the Shapley value principle could be maintained throughout the venture horizon. First, an imputation distribution procedure (similar to those in [9], [12], [13]) must be now formulated so that the imputation scheme in Condition 3.1 can be realized. Let the $B_i^\tau(s)$ denote the payment received by firm $i \in N$ at time $\tau \in [t_0, T]$ dictated by $\xi^{(\tau)}(\tau, x_\tau^*)$. In particular,

$$\xi^{(\tau)i}(\tau, x_\tau^*) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(\tau)K}(\tau, x_\tau^*) - W^{(\tau)K\backslash i}(\tau, x_\tau^*)\right] =$$
$$= \int_\tau^T B_i^\tau(s) \exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right] ds + q^i(x^{i^*}(T)) \exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right],$$
$$\text{for } i \in N \text{ and } \tau \in [t_0, T]. \tag{4.1}$$

Moreover, for $i \in N$ and $t \in [\tau, T]$, we use

$$\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*) = \int_t^T B_i^\tau(s) \exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right] ds + q^i(x^{i^*}(T)) \exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right], \quad (4.2)$$

to denote the present value of player i's cooperative profit according to $\xi^{(\tau)}(\tau, x_\tau^*)$ over the time interval $[t, T]$, given that the state is x_τ^* at time $t \in [\tau, T]$.

A necessary condition for $\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*)$ to follow Condition 3.1 is that:

$$\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*) = \xi^{(t)i}(t, x_t^*) \exp\left[-\int_\tau^t r(y)dy\right],$$
$$\text{for } i \in N, \ \ t \in [\tau, T] \ \text{ and } \ \tau \in [t_0, T]. \quad (4.3)$$

A candidate of $\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*)$ satisfying (4.1)–(4.3) has to be found. A natural choice is

$$\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*) = \sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left[W^{(\tau)K}(t, x_t^{K^*}) - W^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^{K\backslash i*})\right] \quad (4.4)$$

With Remark 2.1, one can readily that $\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*)$ as defined in (4.4) satisfies (4.1)–(4.3).

For (4.1)–(4.4) to hold, $B_i^\tau(s)$ has to be equal to $B_i^t(s)$, for $i \in N$ and $\tau \neq t$. Therefore we adopt the notation $B_i^\tau(s) = B_i^t(s) = B_i(s)$. To fulfill the Pareto optimality property, the imputation vector $\xi^{(\tau)}(t, x_t^*)$ has to satisfy the following condition.

Condition 4.1.

$$\sum_{j=1}^n B_i(s) = \sum_{j=1}^n g^j[s, x_j^*, \psi_j^{(\tau)N^*}(s, x_s^*)], \qquad \textit{for } \ s \in [\tau, T] \ \textit{ and } \ \tau \in [t_0, T].$$

If there exist twice continuously differentiable value functions $W^{(\tau)K}(t, x_t^{K^*})$, for all $K \subseteq N$, the term $\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*)$ is twice continuously differentiable in t and x_t^*.

Given the differentiability property of $\xi^{(\tau)i}(t, x_t^*)$, for $\Delta t \to 0$ one can use (4.3) to obtain:

$$\xi^{(\tau)i}(\tau, x_\tau^*) = \int_\tau^{\tau+\Delta t} B_i(s) \exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right] ds +$$
$$\exp\left[-\int_\tau^{\tau+\Delta t} r(y)dy\right] \xi^{(\tau+\Delta t)i}(\tau+\Delta t, x_\tau^* + \Delta x_\tau^*)\Big| x(\tau) = x_\tau^*,$$
$$\text{for } i \in N, \quad t \in [\tau, T] \text{ and } \tau \in [t_0, T]. \tag{4.5}$$

where

$\Delta x_\tau^* = \left[\Delta x_\tau^{1^*}, \Delta x_\tau^{2^*}, \cdots, \Delta x_\tau^{n^*}\right],$

$\Delta x_\tau^{j^*} = f^j\left[\tau, x_\tau^{j^*}, \psi_j^{(\tau)N^*}(\tau, x_\tau^*)\right] \Delta t + o(\Delta t), \qquad \text{for } j \in N,$

and $[o(\Delta t)]/\Delta t \to 0$ as $\Delta t \to 0$.

Using (4.3), (4.4) and (4.5), one can obtain

$$B_i(\tau) = -\left[\xi_t^{(\tau)i}(t, x_t^*)\,|_{t=\tau}\right] - \sum_{j=1}^n \left[\xi_{x_j^{t^*}}^{(\tau)i}(t, x_t^*)\,|_{t=\tau}\right] f^j\left[\tau, x_\tau^{j^*}, \psi_j^{(\tau)N^*}(\tau, x_\tau^*)\right],$$
$$\text{for } i \in N,\ t \in [\tau, T]\ \tau \in [t_0, T]. \tag{4.6}$$

Using (4.4) and (4.6), we obtain:

Since the partial derivative of $W^{(\tau)K}(\tau, x_\tau^{K^*})$ with respect to x_j, for $j \notin K$, will vanish, a theorem characterizing the payoff distribution procedure leading to the realization of Condition 3.1 can be obtained as:

Теорема 4.1. *A payment to player $i \in N$ at time $\tau \in [t_0, T]$ leading to the realization of the Condition 3.1 can be expressed as:*

$$B_i(\tau) = -\sum_{K \subseteq N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \left\{ \left[W_t^{(\tau)K}(t, x_t^{K^*})\ |_{t=\tau}\right] - \right.$$
$$\left[W_t^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^{K\backslash i^*})\ |_{t=\tau}\right] + \sum_{j \in K}\left[W_{x_t^{j^*}}^{(\tau)K}(t, x_t^{K^*})\ |_{t=\tau}\right] f^j\left[\tau, x_\tau^{j^*}, \psi_j^{(\tau)N^*}(\tau, x_\tau^*)\right]$$
$$\left. -\sum_{j \in K}\left[W_{x_t^{j^*}}^{(\tau)K\backslash i}(t, x_t^{K\backslash i^*})\ |_{t=\tau}\right] f^{K\backslash i}\left[\tau, x_\tau^{K\backslash i^*}, \psi_j^{(\tau)N^*}(\tau, x_\tau^*)\right] \right\}$$

The vector $B(\tau)$ serves as a form equilibrating transitory compensation that guarantees the realization of the Shapley value imputation throughout the game horizon. Note that the instantaneous profit $B_i(\tau)$ offered to player i at time τ is conditional upon the current state x_τ^* and current time τ. One can elect to express $B_i(\tau)$ as $B_i(\tau, x_\tau^*)$. Hence an instantaneous payment $B_i(\tau, x_\tau^*)$ to player $i \in N$ yields a dynamically stable solution to the joint venture.

5. Concluding remarks

Despite all their purported benefits, joint ventures are highly unstable because of the lack of dynamical stable profit sharing schemes. In this paper, we consider a cost saving dynamic joint venture which adopts the Shapley value as its profit allocation scheme. A compensation mechanism distributing payments to participating firms at each instant of time is devised to ensure the realization of the Shapley value imputation througout the venture duration. Hence time-consistency will be attained, and a dynamically stable joint venture can result. Finally, this paper concentrates on the establishment of dynamically stable cost saving joint ventures. Further study on joint ventures which requires particular information on the demand structures, is left to the readers.

Appendix: Proof of Proposition 2.1.

Let $\hat{x}^{j(L)}$ for $j \in L$ denote the optimal trajectory of the optimal control problem $\varpi[L;\tau, x_\tau^L]$ which maximizes

$$\int_t^T \sum_{j\in L} \left\{ g^j[s, x^j(s)] - c_j^L[u_j(s)] \right\} \exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right] ds$$
$$+ \sum_{j\in L} \exp\left[-\int_{t_0}^T r(y)dy\right] q^j(x^j(T))$$

subject to $\dot{x}^j(s) = f^j[s, x^j(s), u_j(s)], \;\; x^j(\tau) = x_\tau^j, \qquad \text{for } j \in L.$

Note that

$$W^{(\tau)L}(\tau, x_\tau^L) =$$
$$\int_\tau^T \sum_{j\in L} \left\{ g^j[s, \hat{x}^{j(L)}(s)] - c_j^L[\psi_j^{(\tau)L^*}(s, \hat{x}^{L(L)}(s))] \right\} \exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right] ds$$
$$+ \sum_{j\in L} \exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right] q^j(\hat{x}^{j(L)}(T))$$

$$\leq \int_{\tau}^{T} \sum_{j\in L} \Big\{ g^j[s, \hat{x}^{j(L)}(s)] - c_j^K[\psi_j^{(\tau)L^*}(s, \hat{x}^{L(L)}(s))] \Big\} \exp\Big[-\int_{\tau}^{S} r(y)dy\Big] ds$$
$$+ \sum_{j\in L} \exp\left[-\int_{\tau}^{T} r(y)dy\right] q^j(\hat{x}^{j(L)}(T)),$$

because $c_j^K[u_j(s)] \leq c_j^L[u_j(s)]$, for $j \in L \subseteq K$. (A.1)

Applying the above analysis to the optimal control problem $\varpi[K \setminus L; \tau, x_\tau^{K\setminus L}]$, we have

$$W^{(\tau)K\setminus L}(\tau, x_\tau^{K\setminus L})$$
$$= \int_{\tau}^{T} \sum_{j\in K\setminus L} \left\{ g^j[s, \hat{x}^{j(K\setminus L)}(s)] - c_j^{K\setminus L}[\psi_j^{(\tau)K\setminus L^*}(s, \hat{x}^{K\setminus L(K\setminus L)}(s))] \right\}$$
$$\times \exp\left[-\int_{\tau}^{S} r(y)dy\right] ds + \sum_{j\in K\setminus L} \exp\left[-\int_{\tau}^{T} r(y)dy\right] q^j(\hat{x}^{j(K\setminus L)}(T))$$
$$\leq \int_{\tau}^{T} \sum_{j\in K\setminus L} \left\{ g^j[s, \hat{x}^{j(K\setminus L)}(s)] - c_j^{K}[\psi_j^{(\tau)K\setminus L^*}(s, \hat{x}^{K\setminus L(K\setminus L)}(s))] \right\}$$
$$\times \exp\left[-\int_{\tau}^{S} r(y)dy\right] ds + \sum_{j\in K\setminus L} \exp\left[-\int_{\tau}^{T} r(y)dy\right] q^j(\hat{x}^{j(K\setminus L)}(T)),$$

because $c_j^K[u_j(s)] \leq c_j^{K\setminus L}[u_j(s)]$, for $j \in K \setminus L \subseteq K$. (A.2)

Now consider the optimal control problem $\varpi[K; \tau, x_\tau^K]$ which maximizes

$$\int_{\tau}^{T} \sum_{j\in K} \left\{ g^j[s, x^j(s)] - c_j^K[u_j(s)] \right\} \exp\left[-\int_{\tau}^{S} r(y)dy\right] ds$$
$$+ \sum_{j\in K} \exp\left[-\int_{t_0}^{T} r(y)dy\right] q^j(x^j(T))$$

subject to $\dot{x}^j(s) = f^j[s, x^j(s), u_j(s)]$, $x^j(\tau) = x_\tau^j$, for $j \in K$.

Since $\psi_j^{(\tau)K^*}(s, \hat{x}^{K(K)}(s))$ and $\hat{x}^{K(K)}(s)$ are respectively the optimal control and optimal state trajectory of the problem $\varpi[K;\tau,x_\tau^K]$,

$$
\begin{aligned}
&W^{(\tau)K}(\tau,x_\tau^K)\\
&=\int_\tau^T\sum_{j\in K}\left\{g^j[s,\hat{x}^{j(K)}(s)]-c_j^K[\psi_j^{(\tau)K*}(s,\hat{x}^{K(K)}(s))]\right\}\exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right]ds\\
&\qquad+\sum_{j\in K}\exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right]q^j(\hat{x}^{j(K)}(T))\\
&\ge\int_\tau^T\sum_{j\in L}\left\{g^j[s,\hat{x}^{j(L)}(s)]-c_j^K[\psi_j^{(\tau)L*}(s,\hat{x}^{L(L)}(s))]\right\}\exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right]ds\\
&\qquad+\sum_{j\in L}\exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right]q^j(\hat{x}^{j(L)}(T))\\
&+\int_\tau^T\sum_{j\in K\backslash L}\left\{g^j[s,\hat{x}^{j(K\backslash L)}(s)]-c_j^K[\psi_j^{(\tau)K\backslash L*}(s,\hat{x}^{K\backslash L(K\backslash L)}(s))]\right\}\\
&\times\exp\left[-\int_\tau^S r(y)dy\right]ds+\sum_{j\in K\backslash L}\exp\left[-\int_\tau^T r(y)dy\right]q^j(\hat{x}^{j(K\backslash L)}(T)).\qquad\text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

Invoking (A.1), (A.2) and (A.3), we can readily obtain

$$W^{(\tau)K}(\tau,x_\tau^K)\ge W^{(\tau)L}(\tau,x_\tau^L)+W^{(\tau)K\backslash L}(\tau,x_\tau^{K\backslash L}).$$

Hence Proposition 2.1 follows.

REFERENCES

1. Bleeke J., Ernst D. *Collaborating to compete.* New York: John Wiley & Sons. 1993.

2. Bellman R. *Dynamic programming.* Princeton, Princeton University Press. 1957.

3. Blodgett L.L. *Factors in the instability of international joint ventures: An event history analysis* // Strategic Management Journal. 1992. V. 13. P. 475–481.

4. Cellini R., Lambertini L. *A differential game approach to investment product differentiation* // J. of Economic Dynamics and Control. 2002. V. 27. P. 51–62.

5. Cellini R., Lambertini L. *Private and social incentives towards investment in product differentiation* // Int. Game Theory Review. 2004. V. 6. N. 4. P. 493–508.

6. D'Aspremont C., Jacquemin A. *Cooperative and noncooperative R&D in duopoly with spillovers* // The American Economic Review. 1988. V. 78. N. 5. P. 1133–1137.

7. Kamien M.I., Muller E., and Zang I. *Research joint ventures and R&D cartels* // American Economic Review. 1992. V. 82. N 5. P. 1293–1306.

8. Parkhe A. *"Messy" research, methodological predispositions and theory development in international joint ventures* // Academy of Management Review. 1993. V. 18. N. 2. P. 227–268.

9. Petrosyan L. A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. N 3. P. 381–398.

10. Shapley L.S. *A value for n-person games*. In: Kuhn, H. W. and Tucker, A. W. (Eds.), Contributions to the theory of games. 1953. Princeton: Princeton University Press. P. 307–317.

11. Suzumura K. *Cooperative and noncooperative R&D in an oligopoly with spillovers* // The American Economic Review. 1992. V. 82. N 5. P. 1307–1320.

12. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Subgame consistent cooperative solutions in stochastic differential games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. V. 120. N 3. P. 651–666.

13. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games*. New York: Springer-Verlag. 2006.

14. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Dynamically stable corporate joint ventures* // Automatica. 2006. V. 42. P. 365–370.

15. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *A cooperative stochastic differential game of transboundary Industrial Pollution* // Automatica. 2008. V. 44. P. 1532–1544.