Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 7–20
УДК 517.977
ББК 22.19

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Михаил С. Никольский
Кафедра оптимального управления
Московский государственный университет
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: mni@mi.ras.ru

В статье рассматривается один класс билинейных двумерных управляемых систем. Для них изучается вопрос о релейности оптимального по быстродействию управления. Это свойство оптимальных управлений имеет большой интерес для приложений. Релейные управления легко реализуются на практике. Получены эффективные достаточные условия, гарантирующие релейность оптимального по быстродействию управления для рассматриваемого класса управляемых систем. В качестве примера рассмотрен управляемый аналог известной в политологии модели Л. Ричардсона.

Ключевые слова: оптимальное управление, билинейные управляемые системы, релейность управления, модель Л. Ричардсона.

1. Введение

Рассмотрим двумерную билинейную управляемую систему (см., например, [1]–[3], [5]) вида:

$$\dot{x} = A(u)x, \tag{1.1}$$

где $x \in R^2$, $u \in R^4$,

$$A(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

u_i, $i = 1, 2, 3, 4,$ – компоненты вектора $u \in R^4$.

Обозначения. Символом R^k, где $k \geqslant 1$, условимся обозначать k-мерное действительное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением векторов $a, b \in R^k$ вида

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i,$$

где a_i, b_i – компоненты векторов a, b, соответственно. Длина вектора $a \in R^k$ определяется формулой $|a| = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \right)^{1/2}$. Для произвольной матрицы A размерности 2×2 с действительными элементами определим ее норму формулой

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|,$$

где $x \in R^2$. Обозначим $\exp(z) = e^z$ при $z \in R^1$. Через I обозначим совокупность индексов 1, 2, 3, 4. Условимся две измеримые по Лебегу функции со значениями в R^k и определенные на некотором отрезке $[a, b]$ называть эквивалентными, если они совпадают на $[a, b]$ с точностью до множества лебеговой меры нуль, т. е. они совпадают почти всюду на $[a, b]$.

На компоненты u_i управляющего вектора $u \in R^4$ (см. (1.1), (1.2)) наложим следующие ограничения:

$$u_i \in [p_i, q_i], \quad i \in I, \tag{1.3}$$

где для констант p_i, q_i выполнены неравенства

$$p_i \leqslant q_i, \tag{1.4}$$

причем хотя бы для одного номера $i_0 \in I$

$$p_{i_0} < q_{i_0}. \tag{1.5}$$

Множество векторов $u \in R^4$, удовлетворяющих соотношениям (1.3)–(1.5), обозначим U.

В R^2 фиксированы начальное и конечное условия:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = m, \tag{1.6}$$

где $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq m$, $t_1 > 0$. На множестве измеримых по Лебегу управлений $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, для управляемой системы (1.1) при краевых условиях (1.6) рассматривается задача оптимального быстродействия (см. [1]–[3], [5]).

Управляемая система (1.1) имеет весьма общий вид. Отметим, например, что в [2] для управляемой системы (4.23) в пункте 61 весьма подробно рассматривается задача быстродействия, связанная с теорией неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Упомянутую управляемую систему (4.23) из [2] можно считать частным случаем управляемой системы вида (1.1), (1.2), если положить

$$p_1 = q_1 = 0; \quad p_2 = q_2 = 1;$$
$$p_3 = -\beta', \quad q_3 = -\beta; \quad p_4 = -\alpha', \quad q_4 = -\alpha,$$

где константы α, α', β, β' определены в [2]. Отметим также, что в пункте 61 из [2] для управляемой системы вида (4.23) вместо одноточечного терминального множества рассматривается терминальное множество $M = \{x \in R^2\colon x_1 = 0,\ x_2 < 0\}$. Но можно перейти к случаю одноточечного терминального множества и в этой задаче с помощью следующего соображения. Пусть $\hat{u}(t)$, $t \in [0,\ \tau]$, – допустимое управление, осуществляющее оптимальное быстродействие с терминальным множеством M, а $\hat{x}(t)$, $t \in [0,\ \tau]$, – соответствующее оптимальное решение рассматриваемой управляемой системы (здесь $\tau > 0$ – время оптимального быстродействия). Тогда, полагая $m = \hat{x}(\tau)$, мы формально можем перейти к задаче оптимального быстродействия с одноточечным терминальным множеством.

Отметим еще, что к управляемой системе вида (1.1), (1.2) можно привести управляемую систему вида

$$\dot{x} = B(v)x,$$

где для элементов $b_{ij}(v)$ матрицы $B(v)$ с $v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ выполняются равенства

$$b_{ij}(v) = c_{ij} + v_{ij}d_{ij} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Здесь c_{ij}, d_{ij} – действительные константы, v_{ij} – управления, на них наложены ограничения $v_{ij} \in [r_{ij}, s_{ij}] \subset R^1$, причем $r_{ij} \leqslant s_{ij}$ и хотя бы для одной пары индексов $r_{ij}d_{ij} \neq s_{ij}d_{ij}$. Обозначим

$$u_1 = c_{11} + v_{11}d_{11}, \quad u_2 = c_{12} + v_{12}d_{12},$$
$$u_3 = c_{21} + v_{21}d_{21}, \quad u_4 = c_{22} + v_{22}d_{22}.$$

При $v_{ij} \in [r_{ij}, s_{ij}]$

$$u_1 \in \mathrm{co}\{c_{11} + p_{11}d_{11}, c_{11} + q_{11}d_{11}\}, \ u_2 \in \mathrm{co}\{c_{12} + p_{12}d_{12}, c_{12} + q_{12}d_{12}\},$$
$$u_3 \in \mathrm{co}\{c_{21} + p_{21}d_{21}, c_{21} + q_{21}d_{21}\}, \ u_4 \in \mathrm{co}\{c_{22} + p_{22}d_{22}, c_{22} + q_{22}d_{22}\},$$

где co означает операцию овыпуклениия множества. И мы пришли к системе вида (1.1).

В разделе 3, как частный случай управляемой системы (1.1), мы рассмотрим управляемый аналог модели Л. Ричардсона вооружения двух государств, известной в политологии (см. [4], [6]).

2. Анализ задачи

Приступаем к анализу поставленной задачи оптимального быстродействия. Если существует хотя бы одно допустимое управление $u = u(t)$, $t \geqslant 0$, для которого решение $x(t, u(\cdot))$ уравнения (1.1) с начальным условием x_0 при некотором $t_1 > 0$ удовлетворяет терминальному условию $x(t_1) = m$, то (см., например, [3]) существует и оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t) \in U$ с временем быстродействия $\tau > 0$. Обозначим $\Delta = [0, \tau]$. В силу принципа максимума Понтрягина (см. [1]–[3], [5]) для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\tilde{u}_1(t)\psi_1 - \tilde{u}_3(t)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -\tilde{u}_2(t)\psi_1 - \tilde{u}_4(t)\psi_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

что почти всюду на Δ выполняется следующее условие максимума:

$$\max_{u \in U}\langle A(u)\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)\rangle = \langle A(\tilde{u}(t))\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)\rangle, \tag{2.2}$$

где $\tilde{x}(t) = x(t,\ \tilde{u}(\cdot))$. Из определения множества U и соотношения максимума (2.2) почти всюду на Δ вытекают следующие соотношения максимума:

$$\max_{u_1\in[p_1,\ q_1]}(u_1\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t)) = \tilde{u}_1(t)\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t), \tag{2.3}$$

$$\max_{u_2\in[p_2,\ q_2]}(u_2\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)) = \tilde{u}_2(t)\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t), \tag{2.4}$$

$$\max_{u_3\in[p_3,\ q_3]}(u_3\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)) = \tilde{u}_3(t)\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t), \tag{2.5}$$

$$\max_{u_4\in[p_4,\ q_4]}(u_4\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)) = \tilde{u}_4(t)\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)). \tag{2.6}$$

Заметим, что, если при данном $i \in I$ выполняется равенство $p_i = q_i$, то $\tilde{u}_i(t) \equiv p_i$ при $t \in \Delta$. Поэтому нам интересны лишь те номера $i \in I$, для которых $p_i < q_i$. Отметим также следующее обстоятельство: если оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на Δ изменить на множестве лебеговой меры нуль, то это новое управление будет эквивалентным $\tilde{u}(t)$ на Δ и останется оптимальным. Этот факт важен для приложений. Он позволяет довольно часто «упростить» вид оптимального управления за счет изменения исходного $\tilde{u}(t)$ на множестве лебеговой меры нуль из Δ.

Для дальнейшего будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \notin [p_2,\ q_2]$, *где* $p_2 \leqslant q_2$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_1 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) = U$, $t \in \Delta$, *для первой компоненты* $x_1(t,\ u(\cdot))$ *решения* $x(t,\ u(\cdot))$ *уравнения* (1.1) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_1. *Если добавочно выполняется условие согласования: при* $p_2 > 0$ *выполняется неравенство* $p_3 \geqslant 0$, *а при* $q_2 < 0$ *выполняется неравенство* $q_3 \leqslant 0$, *то можно положить* $\theta_1 = 1$.

Доказательство. Фиксируем измеримое управление $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, и займемся изучением распределения нулей функции $x_1(t) = x_1(t,\ u(\cdot))$ на Δ. Пусть $x_1(\alpha) = 0$, где $\alpha \in [0,\ \tau)$. Так как $x_0 \neq 0$, то решение уравнения (1.1) $x(t) = x(t,\ u(\cdot)) \neq 0$ при $t \in \Delta$ и следовательно $x_2(\alpha) \neq 0$. Из сказанного и из соотношений (1.1), (1.2) вытекает с помощью известной формулы Коши, что при $t \in [\alpha,\ \tau]$

$$x_1(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} f(t,\, s) u_2(s) x_2(s)\, ds, \tag{2.7}$$

$$f(t,\, s) = \exp\biggl(\int\limits_{s}^{t} u_1(r)\, dr\biggr), \tag{2.8}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега.

Для дальнейшего будет полезен следующий факт: при $u \in U$ норма матрицы $A(u)$ (см. (1.2)) ограничена сверху некоторой достаточно большой константой $\beta > 0$, т. е.

$$\|A(u)\| \leqslant \beta \quad \forall u \in U. \tag{2.9}$$

Например, можно положить

$$\beta = \sum_{i=1}^{4} \max(|p_i|,\, |q_i|).$$

Из (2.9) с помощью известных фактов (см. гл. IV, § 4 [7]) получаем при $t \in \Delta$ неравенства

$$e^{-\beta t}|x_0| \leqslant |x(t)| \leqslant e^{\beta t}|x_0|. \tag{2.10}$$

Из равенства $x_1(\alpha) = 0$ и соотношений (2.10) вытекает неравенство

$$|x_2(\alpha)| \geqslant e^{-\beta\tau}|x_0|. \tag{2.11}$$

Из соотношений (1.1), (2.9)–(2.11) следует, что при $t \in [\alpha,\, \gamma(\alpha))$ выполняется неравенство $|x_2(t)| > 0$, где

$$\gamma(\alpha) = \min\left\{\tau,\, \alpha + \frac{e^{-2\beta\tau}}{\beta}\right\}. \tag{2.12}$$

Так как по предположению леммы $0 \notin [p_2,\, q_2]$, то в силу сказанного и формул (2.7), (2.8) получаем, что при $t \in (\alpha,\, \gamma(\alpha))$ $|x_1(t)| > 0$. Из приведенного анализа вытекает, что функция $x_1(t)$ имеет ограниченное число нулей на Δ и их число независимо от выбора измеримого управления $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, может быть оценено сверху величиной (см. (2.12))

$$\theta_1 = [\beta\tau e^{2\beta\tau}] + 1,$$

где $[z]$ означает целую часть числа $z \geqslant 0$.

Теперь изучим, что добавочно дает нам условие согласования (см. формулировку леммы). Пока рассмотрим случай, когда $p_2 > 0$, $p_3 \geqslant 0$.

Пусть, как выше, $x_1(\alpha) = 0$, где $\alpha \in [0,\, \tau)$. Обозначим через α_1 наименьший нуль функции $x_1(t)$ на $[0,\, \tau]$ (он, очевидно, существует). Допустим, что на $(\alpha_1,\, \tau]$ существует другой нуль α_3 функции $x_1(t)$. В силу вышесказанного на $[\alpha_1,\, \tau]$ существует минимальный элемент α_4 в множестве таких точек α_3, причем $\alpha_4 \in (\alpha_1,\, \tau]$. Если $x_2(\alpha_1) > 0$, то $x_2(t) > 0$ при $t \in [\alpha_1,\, \alpha_1 + \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало́ и $\alpha_1 + \delta \leqslant \tau$. В этой ситуации из формулы (2.7) при $\alpha = \alpha_1$ получаем, что $x_1(t) > 0$ при $t \in (\alpha_1,\, \alpha_4)$. Далее, с помощью известной формулы Коши, применяемой ко второму уравнению из (1.1), получаем при $t \in [\alpha_1,\, \tau]$ следующее соотношение:

$$x_2(t) = g(t,\, x_1)x_2(\alpha_1) + \int\limits_{\alpha_1}^{t} g(t,\, s)u_3(s)x_1(s)\, ds, \tag{2.13}$$

где

$$g(t,\, s) = \exp\Bigg(\int\limits_{s}^{t} u_4(r)\, dr\Bigg). \tag{2.14}$$

Отсюда и из неравенства $p_3 \geqslant 0$ вытекает, что $x_2(t) > 0$ при $t \in (\alpha_1,\, \alpha_4]$. Применяя формулу (2.7) при $\alpha = \alpha_1$, теперь нетрудно показать, что $x_1(\alpha_4) > 0$, и мы приходим к противоречию с определением величины α_4. Таким образом, правее α_1 на $(\alpha_1,\, \tau]$ у функции $x_1(t)$ нулей нет. Если $x_2(\alpha_1) < 0$, то $x_2(t) < 0$ при $t \in [\alpha_1,\, \alpha_1 + \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало́ и $\alpha_1 + \delta \leqslant \tau$. В этой ситуации с помощью формул (2.13), (2.14) обосновывается (по аналогии с вышесказанным), что $x_2(t) < 0$ при $t \in (\alpha_1,\, \alpha_4]$. Применяя формулу (2.7) при $\alpha = \alpha_1$, получаем, что $x_1(\alpha_4) < 0$. Таким образом, и в этой ситуации правее α_1 на $(\alpha_1,\, \tau]$ у функции $x_1(t)$ нулей нет. Из сказанного получаем, что при $p_2 > 0$, $p_3 \geqslant 0$ можно положить $\theta_1 = 1$. Случай $q_2 < 0$, $q_3 \leqslant 0$ рассматривается аналогично с очевидными изменениями. И в этом случае можно положить $\theta_1 = 1$. $\square$

Аналогично Лемме 2.1 с очевидными изменениями доказывается

Лемма 2.2. *Пусть* $0 \notin [p_3,\, q_3]$, *где* $p_3 \leqslant q_3$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_2 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для второй компоненты* $x_2(t,\, u(\cdot))$ *решения* $x(t,\, u(\cdot))$ *уравнения* (1.1) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_2. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $p_3 > 0$ *выполняется неравенство* $p_2 \geqslant 0$, *а при* $q_3 < 0$ *выполняется неравенство* $q_2 \leqslant 0$, *то можно положить* $\theta_2 = 1$.

Рассмотрим далее при $t \in \Delta$ следующую систему дифференциальных уравнений (ср. с (2.1)):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -u_1(t)\psi_1 - u_3(t)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -u_2(t)\psi_1 - u_4(t)\psi_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $u_i(t) \in [p_i,\, q_i]$ – произвольная измеримая функция на Δ. По аналогии с Леммой 2.1 доказывается следующая

Лемма 2.3. *Пусть* $0 \notin [-q_3,\, -p_3]$ (*т. е.* $0 \notin [p_3,\, q_3]$), *где* $p_3 \leqslant q_3$. *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_3 \geqslant 0$, *независящее от начального вектора* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для первой компоненты* $\psi_1(t,\, u(\cdot))$ *решение* $\psi(t,\, u(\cdot))$ *системы уравнений* (2.15) *с начальным условием* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_3. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $q_3 < 0$ *выполняется неравенство* $q_2 \leqslant 0$, *а при* $p_3 > 0$ *выполняется неравенство* $p_2 \geqslant 0$, *то можно положить* $\theta_3 = 1$.

По аналогии с Леммой 2.2 доказывается

Лемма 2.4. *Пусть* $0 \notin [-q_2,\, -p_2]$ (*т. е.* $0 \notin [p_2,\, q_2]$). *Тогда существует столь большое целое число* $\theta_4 \geqslant 0$, *что для произвольного измеримого управления* $u(t) \in U$, $t \in \Delta$, *для второй компоненты* $\psi_2(t,\, u(\cdot))$ *решения* $\psi(t,\, u(\cdot))$ *уравнения (2.15) с произвольным начальным условием* $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$ *число нулей на* Δ *не превосходит* θ_4. *Если добавочно выполняется условие согласования*: *при* $q_2 < 0$ *выполняется неравенство* $q_3 \leqslant 0$, *а при* $p_2 > 0$ *выполняется неравенство* $p_3 \geqslant 0$, *то можно положить* $\theta_4 = 1$.

При использовании принципа максимума Понтрягина в изучаемой нами оптимизационной задаче (см. соотношения (2.2)–(2.6)) полезно озаботиться достаточными условиями, которые гарантируют, что функции $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)$ имеют на Δ лишь конечное число нулей. При выполнении таких условий, изменяя, если надо, компоненты оптимального управления $\tilde{u}_i(t)$, $i \in I$, на множествах лебеговой меры нуль из Δ (при этом решение $\tilde{x}(t)$ не меняется), получим эквивалентные кусочно-постоянные функции, принимающие лишь крайние значения p_i, q_i, $i \in I$ с конечным числом точек разрыва. Такого рода информация очень полезна для приложений.

Используя Леммы 2.1–2.4 нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2.5. *a) Если* $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_1(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_1 + \theta_3$ *нулей.*

b) Если $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_2+\theta_3$ *нулей.*

c) Если $0 \notin [p_2, q_2]$, *то функция* $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_1+\theta_4$ *нулей.*

d) Если $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$, *то функция* $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_2(t)$ *имеет на* Δ *не более* $\theta_2 + \theta_4$ *нулей.*

Из принципа максимума Понтрягина (см. соотношения (2.2)–(2.6)) и Леммы 2.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *a) При выполнении условий*: $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_1(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_1, q_1 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_1 + \theta_3$ *точек разрыва.*

b) При выполнении условия $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_2(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_2, q_2 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_2 + \theta_3$ *точек разрыва.*

c) При выполнении условия $0 \notin [p_2, q_2]$ *функция* $\tilde{u}_3(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_3, q_3 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_1 + \theta_4$ *точек разрыва.*

d) При выполнении условий $0 \notin [p_2, q_2]$, $0 \notin [p_3, q_3]$ *функция* $\tilde{u}_4(t)$ *на* Δ *эквивалентна кусочно-постоянной функции, принимающей лишь крайние значения* p_4, q_4 *и имеющей на* Δ *не более чем* $\theta_2 + \theta_4$ *точек разрыва.*

Замечание 2.1. Если для некоторого номера $i \in I$ выполняется равенство $p_i = q_i$, то крайние значения для управления u_i сливаются в одну точку и $\tilde{u}_i(t) \equiv p_i$ при $t \in \Delta$.

Используя Теорему 2.1 и Леммы 2.1–2.5, можно доказать следующую теорему, уточняющую Теорему 2.1.

Теорема 2.2. *1) Пусть либо* $p_2 > 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_1 = 1$, $\theta_3 = 1$, $\theta_1 + \theta_3 = 2$.
2) Пусть либо $p_2 \geqslant 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 \leqslant 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 1$, $\theta_2 + \theta_3 = 2$.
3) Пусть либо $p_2 > 0$ *и* $p_3 \geqslant 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 \leqslant 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_4 = 1$, $\theta_2 + \theta_4 = 2$.
4) Пусть либо $p_2 > 0$ *и* $p_3 > 0$, *либо* $q_2 < 0$ *и* $q_3 < 0$, *тогда можно положить* $\theta_2 = 1$, $\theta_4 = 1$, $\theta_2 + \theta_4 = 2$.

Замечание 2.2. A) При выполнении условий пункта 1) Теоремы 2.2 в пункте a) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_1 + \theta_3 = 2$. B) При выполнении условий пункта 2) Теоремы 2.2 в пункте в) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_2 + \theta_3 = 2$. C) При выполнении условий пункта 3) Теоремы 2.2 в пункте c) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_1 + \theta_4 = 2$. D) При выполнении условий пункта 4) Теоремы 2.2 в пункте d) Теоремы 2.1 можно положить $\theta_2 + \theta_4 = 2$.

Замечание 2.3. При выполнении условий: либо $p_2 > 0$ и $p_3 > 0$, либо $q_2 < 0$ и $q_3 < 0$ можно положить $\theta_i = 1$, где $i \in I$, и в силу Замечания 2.2 любая из функций $\tilde{u}_i(t)$, $i \in I$, оказывается эквивалентной на Δ кусочно-постоянной функции, принимающей крайние значения p_i, q_i, где $i \in I$, и имеющей не более 2-х точек разрыва.

3. Пример

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим управляемый аналог модели Л. Ричардсона вооружений двух государств (см., например, [6]). Чтобы была более понятна физическая суть этого управляемого аналога, рассмотрим сначала неуправляемый нестационарный аналог модели Л. Ричардсона вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)x_2 - bx_1 \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - dx_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x_1(t) \geqslant 0$ – затраты на вооружение, сделанные первым государством к текущему моменту $t \geqslant 0$, выраженные в деньгах, $x_2(t) \geqslant 0$ – затраты на вооружения, сделанные вторым государством к текущему моменту $t \geqslant 0$, выраженные в деньгах, $a(t)$ и $c(t)$ – измеримые по Лебегу положительные функции при $t \geqslant 0$, b, d – положительные константы. Члены $-bx_1$, $-dx_2$ в (3.1) моделируют устаревание и износ вооружений 1-го и 2-го государств, соответственно. Члены $a(t)x_2$, $c(t)x_1$ моделируют скорости вкладов в свое вооружение 1-го и 2-го государств, соответственно. Эти члены пропорциональны соответственно расходам на вооружение другого государства. Собственно, в этом и состоит основная идея модели Л. Ричардсона, подтвержденная статистическими данными (см. [6]). Коэффициенты b, d не зависят от политики государств. Коэффициенты же $a(t)$, $c(t)$ зависят соответственно от политик 1-го и 2-го государств. Мы остановимся на случае, когда политики обоих государств имеют союзный характер и они согласованно добиваются определенной цели. В такой ситуации разумно положить

$$a(t) = u_2(t) \in [p_2,\, q_2], \quad c(t) = u_3(t) \in [p_3,\, q_3], \tag{3.2}$$

где $0 < p_2 < q_2$, $0 < p_3 < q_3$, причем функции $u_2(t)$, $u_3(t)$, $t \geqslant 0$, измеримы по Лебегу. Мы пришли к билинейной управляемой системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -bx_1 + u_2x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_3x_1 - dx_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где на u_2, u_3 наложены ограничения (3.2). Положим также $u_1 = -b$, $[p_1,\, q_1] = \{-b\}$, $u_4 = -d$, $[p_4,\, q_4] = \{-d\}$ и получим управляемую систему вида (1.1), (1.2).

Для управляемой системы (3.3) с указанными ограничениями на управляющий вектор $u \in R^4$ рассмотрим задачу оптимального быстродействия (см. раздел 1) с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = m,$$

где $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq m$ и компоненты векторов x_0, m неотрицательны, в классе измеримых функций $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$.

Для этой задачи оптимального быстродействия важной является следующая лемма.

Лемма 3.1. *При произвольном начальном векторе* x_0 *с неотрицательными компонентами* x_{01}, x_{02} *и произвольном измеримом управлении* $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, *для компонент соответствующего решения* $x_1(t,\ u(\cdot))$, $x_2(t,\ u(\cdot))$ *системы дифференциальных уравнений* (3.3) *при* $t \geqslant 0$ *выполняются неравенства*

$$x_1(t, u(\cdot)) \geqslant 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Если добавочно $x_0 \neq 0$, *то при* $t > 0$ *выполняются неравенства*

$$x_1(t, u(\cdot)) > 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) > 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Обозначим $x_1(t) = x_1(t, u(\cdot)), \quad x_2(t) = x_2(t, u(\cdot))$.

Тогда с помощью известной формулы Коши из (3.3) получаем при $t \geqslant 0$ следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_1(t, 0)x_{01} + \int_0^t f_1(t, s)u_2(s)x_2(s)\, ds \\ x_2(t) &= g_1(t, 0)x_{02} + \int_0^t g_1(t, s)u_3(s)x_1(s)\, ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега и (ср. с (2.8), (2.14))

$$f_1(t, s) = \exp(-b(t-s)), \quad g_1(t, s) = \exp(-d(t-s)). \tag{3.7}$$

Применяя метод последовательных приближений к системе интегральных уравнений (3.6), (3.7) и используя неравенства $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, нетрудно обосновать искомые неравенства (3.4).

Если добавочно $x_0 \neq 0$, то по крайней мере одна из величин x_{01}, x_{02} больше нуля. Пусть, например, $x_{01} > 0$. Тогда из соотношений (3.4), (3.6), (3.7) получаем, что $x_1(t,\ u(\cdot)) > 0$ при $t \geqslant 0$. Учитывая это обстоятельство, из (3.6), (3.7) теперь нетрудно получить, что $x_2(t, u(\cdot)) > 0$ при $t > 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $x_{02} > 0$. Из сказанного вытекают неравенства (3.5) при $t > 0$. $\square$

Из Леммы 3.1 следует, что в рассматриваемой в этом пункте задаче оптимального быстродействия фазовые ограничения $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, имеющие понятный физический смысл, выполняются при $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$ и $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ автоматически.

Переходим к изучению компонент $\tilde{u}_2(t)$, $\tilde{u}_3(t)$ оптимального управления $\tilde{u}(t)$ на Δ. В связи с соотношениями максимума (2.4), (2.5) полезно изучить распределение нулей функций $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{x}_1(t)\tilde{\psi}_2(t)$ на Δ. Из Леммы 3.1 и условий $x_0 \neq 0$, $x_{01} \geqslant 0$, $x_{02} \geqslant 0$ вытекает, что $\tilde{x}_2(t) > 0$ при $t \in (0, \tau]$. Из Леммы 2.3 и условий $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ вытекает, что функция $\tilde{\psi}_1(t)$ на Δ имеет не более одного нуля. Из сказанного получаем, что функция $\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)$ имеет при $t \in (0, \tau]$ не более одного нуля. Отсюда и в силу соотношения максимума (2.4) следует, что функция $\tilde{u}_2(t)$ эквивалентна на Δ кусочно-постоянной функции, имеющей на Δ не более одной точки разрыва и принимающей значения из множества $\{p_2, q_2\}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для функции $\tilde{u}_3(t)$ и обосновать, что функция $\tilde{u}_3(t)$ эквивалентна на Δ кусочно-постоянной функции, имеющей на Δ не более одной точки разрыва и принимающей значения из множества $\{p_3, q_3\}$.

4. Заключение

В этой статье для задачи оптимального быстродействия для одного класса двумерных управляемых систем были получены эффективные достаточные условия, гарантирующие эквивалентность оптимального управления $\tilde{u}(t)$ на отрезке Δ кусочно-постоянному оптимальному же управлению $\hat{u}(t)$ с конечным числом точек разрыва и принимающему значения в множестве вершин выпуклого многогранника U. Такого рода свойство оптимального управления называют иногда свойством релейности. Оно изучалось для различных управляемых систем в работах С. А. Вахрамеева (см., например, [8]). Отметим также, что результаты пункта 3 развивают исследования пункта 2 из [4].

Благодарности

Приношу благодарность Ф. П. Васильеву, А. С. Анитипину, Н. Л. Григоренко и Е. Н. Хайлову за интерес и внимание к моей работе.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2004.

2. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления.* М.: Наука, 1969.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. *Основы оптимального управления.* М.: Наука, 1972.
4. Никольский М. С. *Некоторые задачи оптимального управления, связанные с моделью Л.Ричардсона гонки вооружения государств* // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов. 2009. Вып. 4. М.: Макс - Пресс. С. 113–123.
5. Понтрягин Л. С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1969.
6. Саати Т. П. *Математические модели конфликтных ситуаций.* М.: Сов. Радио, 1977.
7. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
8. Vakhrameev S. A. *Geometrical and Topological Methods in Optimal Control Theory* // J. on Mathematical Sciences. Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys. 1995. V. 76, N 5.

ABOUT THE TIME-OPTIMAL PROBLEM FOR ONE CLASS OF TWO-DIMENSIONAL BILINEAR CONTROLLED SYSTEMS

Mikhail S. Nikolskii, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., Prof. (mni@mi.ras.ru).

Abstract: In the paper one class of bilinear two-dimensional controlled systems is considered. For these systems the bang-bang property of time-optimal control is studied. The bang-bang property is very interesting for applications, because bang-bang controls are very suitable for realization in practice. In the paper some efficient conditions for bang-bang property of time-optimal controls are received. In the capacity as example, it was considered some controlled analog of the L. Richardson model which is well-known in political science.

Keywords: optimal control, bilinear controlled systems, bang-bang property of control, model of L. Richardson.