Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 21–40

УДК 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВАЯ КООПЕРАЦИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ИГРАХ

Елена М. Парилина
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: elena.parilina@gmail.com

В работе рассматриваются стохастические игры со случайным моментом окончания в классе чистых стационарных стратегий. Построен кооперативный вариант для такого класса стохастических игр, найдено кооперативное решение. Получены условия устойчивой кооперации для стохастических игр. Принципы устойчивой кооперации включают три условия: позиционную состоятельность (динамическую устойчивость), стратегическую устойчивость, защиту от иррационального поведения. В работе представлен пример, для которого найдено кооперативное соглашение, и проверены условия устойчивой кооперации.

Ключевые слова: кооперативная стохастическая игра, позиционная состоятельность, динамическая устойчивость, процедура распределения дележа, стратегическая устойчивость, условие защиты от иррационального поведения.

1. Введение

Стохастические игры представляют собой динамический игровой процесс. Если в игре возможна кооперация, то важным её свойством является устойчивость в динамике. В работе [5] рассматриваются три принципа устойчивой кооперации: состоятельность во времени (динамическая устойчивость), стратегическая устойчивость и защита от иррационального поведения.

Впервые понятие динамической устойчивости было введено Л. А. Петросяном в 1977 г. для дифференциальных игр [2]. Это условие оказалось актуальным и для стохастических игр [13]. В настоящей работе рассматриваются стохастические игры в стационарных стратегиях с конечным числом игровых элементов, любой из которых может реализоваться на каждом шаге игры. При таком способе задания стохастических игр состоятельность кооперативного соглашения должна выполняться в каждой позиции (игровом элементе) игрового процесса. То есть для кооперативного соглашения предъявляется требование позиционной состоятельности. Позиционная состоятельность кооперативного соглашения позволяет игрокам на каждом шаге игры рассчитывать на получение дележа, удовлетворяющего одному и тому же принципу оптимальности.

Условие стратегической устойчивости гарантирует наличие равновесия по Нэшу в регуляризованной игре с выигрышами, которые игроки рассчитывают получить в результате кооперативного соглашения. Регуляризация игры строится на основе исходной стохастической игры с помощью процедуры распределения дележа [4]. Условия стратегической устойчивости для стохастических игр были также рассмотрены в работах [1,11].

В случае, когда кооперация распадается по каким-либо причинам (например, какой-либо из игроков (группа игроков) решает расторгнуть соглашение на некотором шаге игры), то игроки могут гарантировать себе ожидаемый выигрыш не меньше, чем, если бы они действовали самостоятельно с начала игры, если выполнено условие защиты от иррационального поведения [15],

Впервые понятие стохастических игр было введено Шепли в 1953 г. [14]. В настоящее время исследованием стохастических игр посвящено множество работ, некоторые из них – см. [3,9,12,16]. Широкое применение стохастические игры нашли в области моделирования телекоммуникационных систем [6,7] и в экономике [8].

2. Стохастические игры в стационарных стратегиях

Стохастическая игра происходит следующим образом. Игра начинается со случайного хода, т. е. с выбора начального состояния игры (игрового элемента), с которого начнется игровой процесс. На каждом шаге стохастической игры реализуется один игровой элемент из конечного множества, который представляет собой одновременную игру n лиц. В игровом элементе реализуется некоторая ситуация, в зависимости от которой с некоторой вероятностью осуществляется переход в следующий игровой элемент. На каждом шаге игра может закончиться с некоторой вероятностью, при условии, что она не закончилась на предыдущем шаге. Предполагается, что эта вероятность не зависит от номера шага.

Введем некоторые обозначения:

$N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков;

$\Gamma^j = \langle N, X_1^j, \ldots, X_n^j, K_1^j, \ldots, K_n^j \rangle$ – j-ый игровой элемент (одновременная игра n лиц в нормальной форме), множество игроков N одинаково для всех Γ^j, $j = 1, \ldots, t$, X_i^j – конечное множество стратегий i - го игрока $(i \in N)$ в Γ^j, $K_i^j \left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right) = K_i^j(x^j)$ – неотрицательная функция выигрыша i-го игрока в игровом элементе Γ^j, $j = 1, \ldots, t$;

$p(j, k; x^j)$ – вероятность того, что реализуется игровой элемент Γ^k, если на предыдущем шаге (в игровом элементе Γ^j) реализовалась ситуация $x^j = (x_1^j, \ldots, x_n^j)$. Очевидно, что $p(j, k; x^j) \geqslant 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{t} p(j, k; x^j) = 1$ для всех $x^j \in X^j = \prod\limits_{i \in N} X_i^j$ и для любых $j, k = 1, \ldots, t$;

$q \in (0, 1]$ – вероятность окончания стохастической игры на шаге k при условии, что игра не закончилась на шаге $k - 1$;

$\pi^0 = (\pi_1^0, \ldots, \pi_t^0)$ – вектор начального распределения вероятностей на множестве игровых элементов $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t$, где π_j^0 $(j = 1, \ldots, t)$ – вероятность того, что на первом шаге игры реализуется игровой элемент Γ^j, $\sum\limits_{j=1}^{t} \pi_j^0 = 1$;

$\Xi_i = \{\eta_i\}$ – множество чистых стационарных стратегий i-го игрока. При использовании игроками стационарных стратегий выбор стратегии в каждом игровом элементе из множества $\{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t\}$ на каждом шаге зависит только от того, какой игровой элемент реализуется на этом шаге, т. е. $\eta_i : \Gamma^j \longmapsto x_i^j \in X_i^j, j = 1, \ldots, t$.

Определение 2.1. *Стохастической игрой G с конечным числом игровых элементов назовем набор*

$$G = \left\langle N, \left\{\Gamma^j\right\}_{j=1}^t, \{\Xi_i\}_{i\in N}, q, \pi^0, \left\{p(j,k;x^j)\right\}_{j=\overline{1,t},k=\overline{1,t},x^j\in\prod\limits_{l=1}^n X_l^j} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Определение 2.2. *Стохастической подыгрой G^j, $j = 1,\ldots,t$, с конечным числом игровых элементов назовем стохастическую игру (2.1) с вектором $\pi^0 = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (с единицей на j-ом месте), т. е. стохастическую игру, с вероятностью 1 начинающуюся с игрового элемента Γ^j.*

Замечание 2.1. Стохастическая игра в Определении 2.1 для любой ситуации в стационарных стратегиях $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ представляет собой конечный марковский процесс с конечным множеством состояний $\{\Gamma^1,\ldots,\Gamma^t\}$, вектором начального распределения вероятностей π^0 и матрицей переходных вероятностей $\{p(j,k;x^j)\}_{j=\overline{1,t},k=\overline{1,t},x^j\in X^j}$.

Замечание 2.2. Момент окончания стохастической игры является случайным и подчиняется геометрическому закону распределения вероятностей. Следовательно, вероятность того, что стохастическая игра G закончится на шаге k $(k = 1,2,\ldots)$ равна $(1-q)^{k-1}q$.

В качестве выигрыша игрока будем рассматривать математическое ожидание выигрыша. Обозначим через $\overline{E}_i$ математическое ожидание выигрыша i-го игрока в игре G и через E_i^j математическое ожидание выигрыша i-го игрока в подыгре G^j. Сформируем вектор $E_i(\eta) = (E_i^1(\eta),\ldots,E_i^t(\eta))$.

Для математического ожидания выигрыша i-го игрока в подыгре G^j запишем рекуррентное уравнение:

$$E_i^j(\eta) = K_i^j(x^j) + (1-q)\sum_{k=1}^t p(j,k;x^j)E_i^k(\eta) \quad (2.2)$$

при условии, что $\eta(\Gamma^j) = x^j$, т. е. $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot),\ldots,\eta_n(\cdot))$, где $\eta_i(\Gamma^j) = x_i^j \in X_i^j$, $x^j = (x_1^j,\ldots,x_n^j)$ для всех $j = 1,\ldots,t$, $i \in N$.

Так как стохастическая игра G с конечным числом игровых элементов рассматривается в классе чистых стационарных стратегий, определенных выше, и множество одновременных игр $\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^t\}$ конечно, то достаточно рассмотреть t подыгр $G^1, \dots, G^t$, начинающихся с игровых элементов $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$ соответственно.

В дальнейшем под $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot), \dots, \eta_n(\cdot))$ будем понимать ситуацию в чистых стационарных стратегиях, такую что $\eta_i(\Gamma^j) = x_i^j \in X_i^j$ где $j = 1, \dots, t, \quad i \in N$. Очевидно, что стационарная стратегия i-го игрока в игре G будет являться стационарной стратегией в любой подыгре $G^1, \dots, G^t$.

Матрица переходных вероятностей в стохастической игре G при реализации стационарной стратегии $\eta(\cdot)$ имеет вид

$$\Pi(\eta(\cdot)) = \begin{pmatrix} p(1,1;x^1) & \dots & p(1,t;x^1) \\ p(2,1;x^2) & \dots & p(2,t;x^2) \\ \dots & \dots & \dots \\ p(t,1;x^t) & \dots & p(t,t;x^t) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Для математического ожидания выигрыша i-го игрока в любой подыгре стохастической игры G при реализации ситуации в чистых стационарных стратегиях $\eta(\cdot) \in \prod\limits_{i \in N} \Xi_i$ можно записать рекуррентное уравнение:

$$E_i(\eta(\cdot)) = K_i(\eta(\cdot)) + (1-q)\Pi(\eta(\cdot))E_i(\eta(\cdot)), \tag{2.4}$$

где $K_i(\eta(\cdot)) = (K_i^1(x^1), \dots, K_i^t(x^t))$, где $K_i^j(x^j)$ — это значение функции выигрыша i-го игрока в игровом элементе Γ^j при условии, что в этом игровом элементе реализовалась ситуация $x^j \in X^j$.

Уравнение (2.4) эквивалентно следующему уравнению:

$$E_i(\eta(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\eta(\cdot)))^{-1} K_i(\eta(\cdot)), \tag{2.5}$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица размерности $t \times t$.

Для стохастической игры G математическое ожидание выигрыша i-го игрока, которое обозначим через $\overline{E}_i(\eta(\cdot))$, может быть найдено по формуле

$$\overline{E}_i(\eta(\cdot)) = \pi^0 E_i(\eta(\cdot)). \tag{2.6}$$

3. Кооперация в стохастических играх

Предположим, что игроки из множества N решили объединиться с целью получения максимального суммарного выигрыша. Обозначим через $\overline{\eta}(\cdot) = (\overline{\eta}_1(\cdot), \ldots, \overline{\eta}_n(\cdot))$ ситуацию в чистых стационарных стратегиях, максимизирующую сумму математических ожиданий выигрышей игроков в стохастической игре G, т. е.

$$\max_{\eta(\cdot)\in \prod\limits_{i\in N} \Xi_i} \sum_{i\in N} \overline{E}_i(\eta(\cdot)) = \sum_{i\in N} \overline{E}_i(\overline{\eta}(\cdot)). \tag{3.1}$$

Ситуацию $\overline{\eta}(\cdot)$ будем называть кооперативным решением.

Для построения кооперативного варианта стохастической игры определим характеристическую функцию $\overline{V}(S)$ в стохастической игре G следующим образом:

$$\overline{V}(S) = \pi^0 V(S) \tag{3.2}$$

для любой коалиции $S \subset N$, где $V(S) = (V^1(S), \ldots, V^t(S))$, $V^j(S)$ – значение характеристической функции для коалиции S, рассчитанное для подыгры G^j.

Для значения $V(N)$ можно записать уравнение Беллмана в виде:

$$V(N) = \max_{\eta(\cdot)\in \prod\limits_{i\in N} \Xi_i} \left[\sum_{i\in N} K_i(\eta(\cdot)) + (1-q)\Pi(\eta(\cdot))V(N)\right] =$$
$$= \sum_{i\in N} K_i(\overline{\eta}(\cdot)) + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(N),$$

где $\overline{\eta}(\cdot)$ — ситуация в чистых стационарных стратегиях, которая удовлетворяет условию (3.1).

Значения $V(N)$ можно найти из уравнения

$$V(N) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i\in N} K_i(\overline{\eta}(\cdot)). \tag{3.3}$$

Для вычисления значений характеристической функции $V^j(S)$, $j = 1,\ldots,t$, для каждой подыгры G^j определим вспомогательную стохастическую игру G^j_S с нулевой суммой между коалицией $S \subset N$, выступающей в качестве максимизирующего игрока, и коалицией $N\backslash S$, выступающей в качестве минимизирующего игрока. Значение функции $V^j(S)$ для подыгры G^j зададим как нижнее значение антагонистической стохастической игры G_S^j, найденное в чистых стратегиях (фактически, как нижнее значение матричной игры):

$$V^j(S) = \max_{\eta_S(\cdot)} \min_{\eta_{N\setminus S}(\cdot)} \sum_{i\in S} E_i^j(\eta_S(\cdot), \eta_{N\setminus S}(\cdot)),\ V^j(\emptyset) = 0, \qquad (3.4)$$

где пара $(\eta_S(\cdot), \eta_{N\setminus S}(\cdot))$ образует некоторую ситуацию в чистых стационарных стратегиях, а $\eta_S(\cdot) = (\eta_{i_1}(\cdot), \ldots, \eta_{i_k}(\cdot))$ – вектор стационарных стратегий игроков $i_1, \ldots, i_k \in S$, $i_1 \bigcup \ldots \bigcup i_k = S$, $\eta_S(\cdot) \in \prod_{j=1}^{k} \Xi_{i_j}$ – множество чистых стратегий коалиции $S \subset N$, а $\eta_{N\setminus S}(\cdot)$ – вектор стационарных стратегий игроков $i_{k+1}, \ldots, i_n \in N\setminus S$, $i_{k+1} \bigcup \ldots \bigcup i_n = N\setminus S$, $\prod_{j=k+1}^{n} \Xi_{i_j}$ – множество чистых стратегий коалиции $N\setminus S$.

Кооперативный вариант стохастической подыгры G^j с конечным числом игровых элементов определим набором $\langle N, V^j(\cdot)\rangle$, $V^j : S \longrightarrow R$ — характеристическая функция, определенная формулами (3.3) и (3.4).

Кооперативный вариант стохастической игры G с конечным числом игровых элементов определим набором $\langle N, \overline{V}(\cdot)\rangle$, где N – множество игроков, $\overline{V} : S \longrightarrow R$ – характеристическая функция, определенная формулой (3.2).

Характеристические функции $\overline{V}(S)$ и $V^j(S)$ являются супераддитивными.

Дележом в кооперативной стохастической подыгре G^j ($j = 1, \ldots, t$) будем называть вектор $\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$, удовлетворяющий свойствам:

1) $\sum\limits_{i\in N} \alpha_i^j = V^j(N)$,

2) $\alpha_i^j \geqslant V^j(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Множество дележей в кооперативной подыгре G^j обозначим через I^j, $j = 1, \ldots, t$.

Дележом в кооперативной стохастической игре G будем называть вектор $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, где $(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) = \alpha^j \in I^j$.

Множество дележей в кооперативной стохастической игре G обозначим через $\overline{I}$.

Предположим, что множество дележей в любой подыгре G^j, $j = 1, \ldots, t$, непусто, следовательно, непустым является и множество дележей в кооперативной стохастической игре G.

4. Принципы устойчивой кооперации

Позиционная состоятельность кооперативного соглашения. Проведем регуляризацию игры G (подыгры G^j) следующим образом. Допустим, что игроки выбрали дележ $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, $(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) = \alpha^j \in I^j$. Тогда для каждого дележа $\alpha^j \in I^j$ $(j = 1, \ldots, t)$ определим некооперативную подыгру G^j_α, которая отличается от подыгры G^j только выигрышами в ситуациях $\overline{x}^j$, где $\overline{\eta}(\Gamma^j) = \overline{x}^j$, $j = 1, \ldots, t$. Таким образом, зададим перераспределения выигрышей игроков в ситуации, которая реализуется в игровом элементе Γ^j, $j = 1, \ldots, t$, в случае, когда игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}$. В ситуациях $x^j \neq \overline{x}^j$, $j = 1, \ldots, t$, выигрыши игроков остаются прежними.

Для игрока i $(i \in N)$, который рассчитывает получить $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, α_i^j – i-ая компонента дележа $\alpha^j \in I^j$, определим процедуру распределения дележа [4] как вектор-функцию $\beta_i = (\beta_i^1, \ldots, \beta_i^t)$ такую, что выполняются следующие условия

$$\overline{\alpha}_i = \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}, \text{ для всех } \ i \in N, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i \in N} \beta_i^j = \sum_{i \in N} K_i^j(\overline{x}^j), \quad j = 1, \ldots, t, \tag{4.2}$$

где $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}}$ – ожидаемый выигрыш i-го игрока в стохастической игре $G_{\overline{\alpha}}$, которая является регуляризацией игры G.

Условие (4.1) гарантирует, что i-ая компонента дележа $\overline{\alpha}$ совпадает с математическим ожиданием выигрыша игрока i в регуляризованной игре. Равенство (4.2) утверждает, что в любом игровом элементе сумма выплат игрокам в соответствии с ПРД равна сумме выигрышей игроков при условии, что игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$. Очевидно, что если игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, ожидаемый выигрыш i-го игрока в игре $G_{\overline{\alpha}}$ (подыгре G^j_α) совпадает с ожидаемым значением соответствующей компоненты дележа в кооперативном варианте стохастической игры G.

Определение 4.1. *Некооперативная стохастическая игра* $G_{\overline{\alpha}}$ *(подыгра* G^j_α, $j = 1, \ldots, t$*) называется* $\overline{\alpha}$*-регуляризацией (*α*-регуляризацией) стохастической игры* G *(подыгры* G^j*), если для любого игрока* $i \in N$ *в игровом элементе* Γ^j, $j = 1, \ldots, t$, *функция выигрыша* $K_i^{\alpha,j}(x^j)$ *определена следующим образом:*

$$K_i^{\alpha,j}(x^j) = \begin{cases} \beta_i^j, & \text{если } x^j = \overline{x}^j; \\ K_i^j(x^j), & \text{если } x^j \neq \overline{x}^j, \end{cases} \tag{4.3}$$

где процедура распределения дележа $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *(см.[9]) определяется уравнением*

$$\beta_i = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))\alpha_i. \tag{4.4}$$

Нетрудно показать, что β_i, определенная по формуле (4.4), удовлетворяет условиям (4.1), (4.2). Поскольку $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}} = \pi^0 E_i^\alpha$, где E_i^α удовлетворяет функциональному уравнению $E_i^\alpha = \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))E_i^\alpha$, то $E_i^\alpha = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}))^{-1}\beta_i = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}))^{-1}(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))\alpha_i = \alpha_i$. Так как $\sum\limits_{i \in N} \beta_i^j = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))) \sum\limits_{i \in N} \alpha_i = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))V(N)$, и $V(N)$ определяется из уравнения (3.3), то имеет место равенство (4.2).

Уравнение (4.4) эквивалентно следующему функциональному уравнению

$$\alpha_i = \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\alpha_i. \tag{4.5}$$

В правой части уравнения (4.5) второе слагаемое – ожидаемое значение компоненты дележа в подыгре, начинающейся со следующего шага. Причем, предполагается, что дележ для каждой подыгры выбирается, исходя из того же принципа оптимальности, что был выбран игроками перед началом игры. В случае стохастической игры с конечным числом игровых элементов и при использовании игроками стационарных стратегий в каждой подыгре G^j выбирается один и тот же дележ α^j. Например, если игроки перед началом игры договорились о кооперации и решили разделить ожидаемый суммарный выигрыш по вектору Шепли, то в любой подыгре игроки также в качестве дележа оставшегося ожидаемого суммарного выигрыша будут выбирать вектор Шепли. Это условие гарантирует уравнение (4.5). В качестве дележа может быть выбран любой из принципов оптимальности, применяемых в кооперативной теории игр, например, выше упомянутый вектор Шепли, N-ядро, C-ядро. Условие (4.5) определяет позиционную состоятельность (динамическую устойчивость) дележа.

Процедура регуляризации стохастической игры G предлагает способ построения реальных выплат игрокам на каждом шаге игры, причем, можно утверждать, что игроки заинтересованы в перераспределении своих выигрышей, т. к., получая $\beta_i^1, \ldots, \beta_i^t$ в игровых элементах $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t$ соответственно, игрок i в игре $G_{\overline{\alpha}}$ получит столько же (с точки зрения математического ожидания), сколько и планировал получить в кооперативном варианте игры G, и ожидаемая сумма оставшихся выплат будет принадлежать тому же принципу оптимальности, который был выбран игроками изначально. В таком случае можно говорить, что имеет место *позиционная состоятельность* (*динамическая устойчивость*) *выбранного кооперативного соглашения.*

Стратегическая устойчивость кооперативного соглашения. Введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $\Gamma(k)$ игровой элемент, реализовавшийся на шаге k стохастической игры G. Очевидно, что $\Gamma(k) \in \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^t\}$. Через $x(k)$ будем обозначать ситуацию, реализовавшуюся в игровом элементе $\Gamma(k)$. Подыгру игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающуюся с игрового элемента $\Gamma(k)$, обозначим через $G_{\alpha}^{\Gamma(k)}$. Предысторией шага k будем называть последовательность $((\Gamma(1), x(1)), (\Gamma(2), x(2)), \ldots, (\Gamma(k-1), x(k-1)))$, которую обозначим через $h(k)$.

Пусть $T = \{(\Gamma^1, \overline{x}^1), (\Gamma^2, \overline{x}^2), \ldots, (\Gamma^t, \overline{x}^t)\}$.

Стохастическая игра G и её α-регуляризация $G_{\overline{\alpha}}$ является игрой с совершенной информацией в том смысле, что на каждом шаге k $(k = 1, 2, \ldots)$ игрок $i \in N$ знает игровой элемент $\Gamma(k)$ и предысторию шага k.

Определение 4.2. *Ситуация в стратегиях поведения* $\varphi^*(\cdot) = (\varphi_1^*(\cdot),\ldots,\varphi_n^*(\cdot))$ *называется сильным трансферабельным равновесием в регуляризованной игре* $G_{\overline{\alpha}}$*, если для любой коалиции* $S \subset N$*,*

$S \neq \emptyset$, справедливо неравенство

$$\sum_{i \in S} \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\varphi^*(\cdot)) \geqslant \sum_{i \in S} \overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\varphi^*(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) \tag{4.6}$$

для любой стратегии поведения коалиции S: $\varphi_S(\cdot) = \{\varphi_i(\cdot)\}_{i \in S} \in \prod\limits_{i \in S} \varPhi_i$, $\overline{E}_i^{\overline{\alpha}}(\cdot)$ – математическое ожидание выигрыша i-го игрока в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$.

Теорема 4.1. *Если в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ с дележом $\overline{\alpha}$ для любой коалиции $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i \in S} \beta_i \geqslant (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(S), \tag{4.7}$$

где $F(S) = (F^1(S), \ldots, F^t(S))$,

$$F^j(S) = \max_{\substack{x_S^j \in \prod\limits_{i \in S} X_i^j \\ x_S^j \neq \overline{x}_S^j}} \left\{ \sum_{i \in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q) \sum_{l=1}^{t} p(j, l; \overline{x}^j \parallel x_S^j) V^l(S) \right\},$$

тогда в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ существует сильное трансферабельное равновесие с выигрышами $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую ситуацию в стратегиях поведения $\widehat{\varphi}(\cdot) = (\widehat{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \widehat{\varphi}_n(\cdot))$ в игре $G_{\overline{\alpha}}$:

$$\widehat{\varphi}_i(h(k)) = \begin{cases} \overline{x}_i^j, & \text{если } \Gamma(k) = \Gamma^j, j = \overline{1,t}, h(k) \subset T; \\ \widehat{x}_i^j(S), & \text{если } \Gamma(k) = \Gamma^j,\ j = \overline{1,t},\ \exists\ l \in [1, k-1] \\ & \text{и } S \subset N,\ i \notin S\text{: } h(l) \subset T, \\ & \text{а } (\Gamma(l), x(l)) \notin T, \text{но } (\Gamma(l), (x(l) \parallel \overline{x}_S(l)) \in T, \\ \text{произвольна} & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{4.8}$$

где $\widehat{x}_i^j(S)$ – чистая стратегия i-го игрока в игровом элементе Γ^j, которая вместе со стратегиями $x_p^j(S)$, $p \neq i$, $p \notin S$, образует стратегию коалиции $\{N \backslash S\}$ в антагонистической игре против коалиции S в подыгре $G^{\Gamma(j)}$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство «народных теорем» (см. [10]), используя структуру стратегии $\widehat{\varphi}_i(h(k))$, $i \in N$. Докажем, что $\widehat{\varphi}(\cdot) = (\widehat{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \widehat{\varphi}_n(\cdot))$, определенная в (4.8), является сильным трансферабельным равновесием в игре $G_{\overline{\alpha}}$.

Из определения (4.8) следует, что ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре G^j_α, $j = 1,\dots,t$, при условии, что все игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, равен

$$E^j_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = \sum_{i\in S} E^j_i(\widehat{\varphi}(\cdot)) = \sum_{i\in S} E^j_i(\overline{\eta}(\cdot)).$$

Пусть $E_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (E^1_S(\widehat{\varphi}(\cdot)),\dots,E^t_S(\widehat{\varphi}(\cdot)))$, тогда для любой коалиции $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ имеет место равенство

$$E_S(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i\in S} \beta_i. \tag{4.9}$$

Рассмотрим ситуацию $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$, $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, когда некоторая коалиция S отклоняется от своей стратегии $\widehat{\varphi}_S(\cdot)$. Пусть шаг k такой, что существует номер $l \in [1, k-1]$ такой, что предыстория $h(l) \subset T$, а элемент $(\Gamma(l), x(l)) \notin T$, но $(\Gamma(l), (x(l) \parallel \overline{x}_S(l))) \in T$. Не умоляя общности, предположим, что $\Gamma(k) = \Gamma^j$. Вычислим ожидаемый выигрыш коалиции S в игре $G_{\overline{\alpha}}$ в ситуации $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ по формуле $\sum\limits_{i\in S} \overline{E}^{\overline{\alpha}}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \pi^0 \sum\limits_{i\in S} E^\alpha_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$, где

$$\sum_{i\in S} E^\alpha_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \sum_{i\in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) +$$
$$+ (1-q)^{k-1}\Pi^{k-1}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) \sum_{i\in S} E^{\alpha,[k,\infty)}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)), \tag{4.10}$$

где первое слагаемое в правой части – ожидаемый выигрыш коалиции S на первых $k-1$ шагах игры $G_{\overline{\alpha}}$, во втором слагаемом $\sum\limits_{i\in S} E^{\alpha,[k,\infty)}_i$ $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ – ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающейся с шага k. Так как до шага $k-1$ включительно отклонения никакой из коалиций от кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$ не было, то, как было показано ранее, для элементов из правой части (4.10) имеют место равенства:

$$\sum_{i\in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \sum_{i\in S} E^{\alpha,[1,k-1]}_i(\overline{\eta}(\cdot)),$$

$$\Pi^{k-1}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) = \Pi^{k-1}(\overline{\eta}(\cdot)).$$

Во втором слагаемом в правой части (4.10) под $E^{\alpha,[k,\infty)}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ понимается вектор $(E^{\alpha,1}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)),\dots,E^{\alpha,t}_i(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)))$, где

$E_i^{\alpha,j}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ – ожидаемый выигрыш игрока $i \in S$ в регуляризованной подыгре G_α^j, начинающейся с игрового элемента Γ^j.

Вычислим ожидаемый выигрыш коалиции S в подыгре G_α^j, начинающейся с шага k, и $\Gamma(k) = \Gamma^j$. Имеет место формула:

$$\sum_{i\in S} E_i^{\alpha,j}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)) =$$
$$\sum_{i\in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q)\sum_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_S^j)V^l(S), \quad (4.11)$$

поскольку, согласно определению ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$, игроки из коалиции $N \setminus S$ будут наказывать коалицию S, играя, начиная с шага $k+1$, в антагонистическую игру против коалиции S.

Так как ожидаемые выигрыши коалиции S в ситуациях $\widehat{\varphi}(\cdot)$ и $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ до шага $k-1$ совпадают, то в результате отклонения коалиция S может гарантировать себе увеличение выигрыша только за счет части игры $G_{\overline{\alpha}}$, начинающейся с шага k, т. е. за счет ожидаемого выигрыша в подыгре G_α^j, $j = 1,\dots,t$. Коалиция S в ситуации $(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot))$ может гарантировать себе с шага k следующий ожидаемый выигрыш :

$$\max_{\substack{x_S^j \in \prod_{i\in S} X_i^j \\ x_S^j \neq \overline{x}_S^j}} \left\{ \sum_{i\in S} K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_S^j) + (1-q)\sum_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_S^j)V^l(S) \right\}. \quad (4.12)$$

Ожидаемый выигрыш коалиции S в регуляризованной подыгре G_α^j в ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$ согласно определению ПРД может быть найден из уравнения:

$$\sum_{i\in S} E_i^{\alpha}(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))^{-1} \sum_{i\in S} \beta_i, \quad (4.13)$$

где $E_i^{\alpha}(\widehat{\varphi}(\cdot)) = (E_i^{\alpha,1}(\widehat{\varphi}(\cdot)),\dots,E_i^{\alpha,t}(\widehat{\varphi}(\cdot))$. Учитывая неравенство (4.7), из (4.12), (4.13) и рассуждений, приведенных выше, получаем справедливость неравенства:

$$E_S^{\alpha}(\widehat{\varphi}(\cdot)) \geqslant E_S^{\alpha}(\widehat{\varphi}(\cdot) \parallel \varphi_S(\cdot)).$$

Следовательно, ситуация $\widehat{\varphi}(\cdot)$ в стратегиях поведения (4.8) является сильным трансферабельным равновесием в $\overline{\alpha}$-регуляризации игры G.

Причем, ожидаемый выигрыш i-го игрока в игре $G_{\overline{\alpha}}$ в ситуации $\widehat{\varphi}(\cdot)$ равен $\overline{\alpha}_i$, где $\overline{\alpha}_i = \pi^0 \alpha_i$, вектор $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$ состоит из i-ых компонент дележей α^1, …, α^t, рассчитанных для кооперативных подыгр G^1, …, G^t соответственно. Утверждение теоремы доказано. $\square$

Следствие 4.1. *Если в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство*

$$\beta_i \geqslant (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))W_i,$$

где $W_i = (W_i^1, \ldots, W_i^t)$,
$W_i^j = \max\limits_{\substack{x_i^j \in X_i^j \\ x_i^j \neq \overline{x}_i^j}} \left\{ K_i^j(\overline{x}^j \parallel x_i^j) + (1-q) \sum\limits_{l=1}^{t} p(j,l;\overline{x}^j \parallel x_i^j) V^l(\{i\}) \right\}$, *тогда в регуляризованной игре $G_{\overline{\alpha}}$ существует ситуация равновесия по Нэшу с выигрышами $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.*

Условие защиты от иррационального поведения. Для защиты игроков от потерь в случаях, когда кооперация распадается на некотором шаге игры, необходимо, чтобы для всех $i \in N$ и любого $k = 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство:

$$V(\{i\}) \leqslant E_i^{\alpha,[1,k]} + (1-q)^k \Pi^k(\overline{\eta}(\cdot)) V(\{i\}), \tag{4.14}$$

где $E_i^{\alpha,[1,k]}$ – математическое ожидание выигрыша i-го игрока на первых k шагах регуляризованной игры $G_{\overline{\alpha}}$.

Предполагается, что перед началом очередного шага игры игроки знают о том, распалась кооперация или нет, т. е. задержки информации в такой постановке не предполагается. В левой части неравенства (4.14) – значение характеристической функции $V(\{i\}) = (V^1(\{i\}), \ldots, V^t(\{i\}))$, рассчитанное для игрока i, где $V^j(\{i\})$ – значение характеристической функции для игрока i в подыгре G^j. В правой части неравенства (4.14) первое слагаемое равно ожидаемому выигрышу игрока i, если на первых k шагах игры игроки придерживаются кооперативного решения $\overline{\eta}(\cdot)$, второе слагаемое – ожидаемый выигрыш i-го игрока начиная с $(k+1)$-го шага, если с этого шага игрок i действует самостоятельно.

Утверждение 4.1. *В стохастической игре G для выполнения условия защиты от иррационального поведения достаточно, чтобы* *для всех $i \in N$ имело место неравенство:*

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_i - V(\{i\})) \geqslant 0, \tag{4.15}$$

где $\alpha_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^t)$, α_i^j – i-ая компонента дележа $\alpha^j \in I^j$.

Доказательство. Покажем, что условие (4.15) является достаточным для того, чтобы имело место неравенство (4.14) для любого $k = 1, 2, \ldots$. Доказательство проведем методом математической индукции.

Запишем неравенство (4.14) для $k = 1$:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.16}$$

Преобразуем неравенство (4.15), учитывая определение α_i через ПРД (4.4), получаем неравенство (4.16).

Предположим, что из справедливости неравенства (4.15) следует справедливость неравенства (4.14) при $k = l$. Запишем неравенство (4.14) для $k = l$:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + \ldots + (1-q)^{l-1}\Pi^{l-1}(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.17}$$

Докажем утверждение для $k = l+1$. Неравенство (4.14) при $k = l+1$ будет иметь вид:

$$V(\{i\}) \leqslant \beta_i + \ldots + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^{l+1}\Pi^{l+1}(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\}). \tag{4.18}$$

После преобразования правая часть неравенства (4.18) примет вид:

$$\begin{aligned}\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\,\{\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + \ldots \\ + (1-q)^{l-1}\Pi^{l-1}(\overline{\eta}(\cdot))\beta_i + (1-q)^l\Pi^l(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\})\}\end{aligned}$$

Учитывая неравенство (4.17), выражение в фигурных скобках не меньше $V(\{i\})$, следовательно, правая часть неравенства (4.18) не меньше, чем $\beta_i + (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot))V(\{i\})$. Учитывая определение ПРД (4.4), получаем неравенство (4.15), которое выполнено по условию утверждения. □

5. Пример

Рассмотрим стохастическую игру двух лиц. Параметры стохастической игры следующие:

1. Множество игроков $N = \{1, 2\}$.

2. Множество игровых элементов $\{\Gamma^1, \Gamma^2\}$, где $\Gamma^j = \langle N, X_1^j, X_2^j, K_1^j, K_2^j \rangle$ $(j = 1, 2)$, множество стратегий первого игрока – $X_1^j = \{x_{11}^j, x_{12}^j\}$, множество стратегий второго игрока – $X_2^j = \{x_{21}^j, x_{22}^j\}$, функции выигрышей запишем в виде биматрицы (игрок 1 выбирает строки, игрок 2 – столбцы). Для игрового элемента Γ^1 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (3; 5) & (1; 10) \\ (10; 4) & (7; 6) \end{pmatrix}.$$

Для игрового элемента Γ^2 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (2; 4) & (2; 8) \\ (7; 3) & (5; 4) \end{pmatrix}.$$

3. Вероятности перехода из игрового элемента Γ^1 можно представить в виде биматрицы

$$\begin{pmatrix} (0{,}7; 0{,}3) & (0{,}4; 0{,}6) \\ (0{,}4; 0{,}6) & (0{,}3; 0{,}7) \end{pmatrix},$$

где элемент (k, l) матрицы содержит вероятности перехода из Γ^1 в игровые элементы Γ^1, Γ^2 соответственно, при условии, что игрок 1 выбирает стратегию номер k, а игрок 2 стратегию номер l в игровом элементе Γ^1.

Вероятности перехода из игрового элемента Γ^2 можно представить в виде биматрицы

$$\begin{pmatrix} (0{,}9; 0{,}1) & (0{,}4; 0{,}6) \\ (0{,}2; 0{,}8) & (0{,}3; 0{,}7) \end{pmatrix}.$$

4. Вероятность окончания игры $q = 1/365$.

5. Вектор начального распределения вероятностей $\pi^0 = (1/2, 1/2)$.

Используя (2.6) и (3.1), получаем кооперативное решение $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)$, где $\overline{\eta}_1(\Gamma^1) = x_{12}^1$, $\overline{\eta}_1(\Gamma^2) = x_{11}^2$, $\overline{\eta}_2(\Gamma^1) = x_{21}^1$, $\overline{\eta}_2(\Gamma^2) = x_{22}^2$.

Вычислим значения характеристических функций для подыгр по формулам (3.3) и (3.4), получаем

$$V(\{1\}) = \begin{pmatrix} 2045{,}4 \\ 2043{,}4 \end{pmatrix}, \quad V(\{2\}) = \begin{pmatrix} 1680{,}4 \\ 1678{,}4 \end{pmatrix}, \quad V(\{1, 2\}) = \begin{pmatrix} 4236{,}4 \\ 4232{,}4 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (3.2), находим значения характеристической функции $\overline{V}(\cdot)$: $\overline{V}(\{1\}) = 2044{,}4$; $\overline{V}(\{2\}) = 1679{,}4$; $\overline{V}(\{1,2\}) = 4234{,}4$. В качестве дележа возьмем вектор Шепли. Рассчитаем вектор Шепли для каждой подыгры, получаем

$$Sh_1 = \begin{pmatrix} 2300{,}7 \\ 2298{,}7 \end{pmatrix}, \quad Sh_2 = \begin{pmatrix} 1935{,}7 \\ 1933{,}7 \end{pmatrix},$$

где $Sh_i = (Sh_i^1, Sh_i^2)$, Sh_i^j – это i-ая компонента вектора Шепли, рассчитанного для подыгры G^j по характеристической функции $V^j(\cdot)$, $j = 1, 2$, $i \in N$. Тогда, учитывая вектор начального распределения вероятностей π^0, находим дележ для игры G: $\overline{Sh} = (\overline{Sh}_1, \overline{Sh}_2) = (2299{,}7; 1934{,}7)$.

По формуле (4.4) определим компоненты ПРД:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}.$$

Проведем регуляризацию стохастической игры G, используя ПРД и определение (4.3). В $\overline{Sh}$-регуляризованной игре выигрыши игроков в игровом элементе Γ^1 будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (3; 5) & (1; 10) \\ (7{,}5; 6{,}5) & (7; 6) \end{pmatrix},$$

в игровом элементе Γ^2 выигрыши будут следующими:

$$\begin{pmatrix} (2; 4) & (5{,}5; 4{,}5) \\ (7; 3) & (5; 4) \end{pmatrix}$$

Можно сказать, что в $\overline{Sh}$-регуляризованной стохастической игре имеет место позиционная состоятельность выбранного игроками кооперативного соглашения.

Проверим условие стратегической устойчивости. Выпишем неравенства (4.7) из Теоремы 4.1. Вычислим $F(S)$ для всех $S \subset N$, получаем $F(\{1\}) = (2042{,}2; 2043{,}4)$, $F(\{2\}) = (1680{,}4; 1679{,}6)$. Тогда проверка справедливости неравенств (4.7) сводится к проверке справедливости следующих неравенств:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} -0{,}72 \\ 0{,}48 \end{pmatrix} = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(\{1\}),$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 4.5 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0.48 \\ -0.32 \end{pmatrix} = (\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))F(\{2\}).$$

Условия Теоремы 4.1 выполнены, значит, можно говорить о стратегической устойчивости выбранного игроками кооперативного решения.

Проверим условие защиты от иррационального поведения. Достаточное условие для защиты от иррационального поведения из Утверждения 4.1 выполнено, поскольку оно сводится к проверке справедливости следующих неравенств:

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_1 - V(\{1\})) = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$(\mathbb{I} - (1-q)\Pi(\overline{\eta}(\cdot)))(\alpha_2 - V(\{2\})) = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

В рассмотренном численном примере стохастической игры при условии проведения регуляризации выполнены три принципа устойчивой кооперации.

Благодарности

Исследование, представленное в работе, было начато в 2002 году под руководством профессора, доктора физико-математических наук Леона Аганесовича Петросяна. Выражаю искреннюю сердечную благодарность руководителю моей кандидатской диссертации, заведующему кафедрой математической теории игр и статистических решений, руководителю Центра теории игр в г. Санкт-Петербург Л.А. Петросяну за постановку интересной задачи, полезные замечания в работе над статьями и внимательное отношение при любых обстоятельствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грауэр Л. В., Петросян Л. А. *Многошаговые игры* // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 667–677.

2. Петросян Л. А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Л.: Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. 1977. Вып. 19. С. 46–52.

3. Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Сборник статей. Труды института математики и механики. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.

4. Петросян Л. А., Данилов Н. А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. №1. С. 46–54.

5. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 1. С. 102–117.

6. Парилина Е. М. *Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 4. С. 93–110.

7. Altman E., El-Azouzi R., Jimenez T. *Slotted Aloha as a stochastic game with partial information* // Proceedings of Modeling and Optimization in Mobile, Ad-Hoc and Wireless Networks (WiOpt '03). Sophia Antipolis. France. March 2003.

8. Amir R. *Stochastic games in economics: The latter-theoretic approach* // Stochastic Games and Applications in A. Neyman and S. Sorin (eds.) NATO Science Series C, Mathematical and Physical Sciences. 2003. Vol. 570. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Chap. 29. P. 443–453.

9. Baranova E. M., Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game theory and Applications. 2006. V. XI. P. 7–17.

10. Dutta P. *A Folk Theorem for Stochastic Games* // Journal of Economic Theory. 1995. V. 66. P. 1–32.

11. Grauer L. V., Petrosjan L. A. *Strong Nash Equilibrium in Multistage Games* // International Game Theory Review. 2002. V. 4. N. 3. P. 255–264.

12. Herings P. J.-J., Peeters R. J. A. P. *Stationary Equlibria in Stochastic Games: Structure, Selection, and Computation* // Journal of Economic Theory. 2004. V. 118. N. 1. P. 32–60.

13. Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Games* // Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L. A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan. 2006. P. 139–146.

14. Shapley L. S. *Stochastic Games* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 1953. V. 39. P. 1095–1100.

15. Yeung D. W. K. *An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games*// International Game Theory Review (IGTR). 2006. V. 08. Is. 04. P. 739–744.

16. Yeung D. W. K., Petrosjan L. A. *Subgame consist cooperative solutions in stochastic differential games* // J. optimiz. theory and appl. 2004. V. 120. N. 3. P. 651–666.

STABLE COOPERATION IN STOCHASTIC GAMES

Elena M. Parilina, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (barlena@gmail.com).

Abstract: The paper considers stochastic games with random duration in the class of stationary strategies. The cooperative version for such class of the stochastic game is constructed. The cooperative solution is found. Conditions of stable cooperation for stochastic games are obtained. Principles of stable cooperation include three conditions: subgame consistency, strategic stability and condition of irrational behavior proofness of the cooperative agreement. Also the paper considers the example for which the cooperative agreement is found and the conditions of dynamic stability are checked.

Keywords: cooperative stochastic game, time consistency, subgame consistency, payoff distribution procedure, strategic stability, condition of irrational behavior proofness.