Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 41–78

УДК 519.833.52
ББК 22.1

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АРБИТРАЖНЫХ СХЕМ И НТП ИГР

Сергей Л. Печерский
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: specher@emi.nw.ru

В статье определяются и исследуются свойства пропорциональных решений для игр с нетрансферабельными полезностями и арбитражных схем, в основе которых лежит использование пропорционального эксцесса. В частности, определяется *status quo*-пропорциональное решение для арбитражных схем. Доказана его согласованность (в смысле Харта–Мас-Коллела) и приведена аксиоматическая характеризация, использующая это свойство. Определено согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и дана его аксиоматическая характеризация. Доказано существование решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. Рассмотрены соотношения между некоторыми решениями арбитражных схем и НТП игр.

Ключевые слова: арбитражные схемы, НТП игры, пропорциональный эксцесс, *status quo*-пропорциональное решение, согласованность.

1. Введение

Пропорциональность в распределении восходит своими корнями к Аристотелю, но именно в последние годы при решении задач распределения прибыли (или убытка) заметно вырос интерес к пропорциональным принципам распределения. Согласно пропорциональному принципу участники получают выигрыши пропорционально своим вкладам, если все вклады и выигрыши положительны. Классическая кооперативная игра (игра с трансферабельными полезностями, или кратко ТП игра) двух лиц представляет собой простейшую задачу распределения прибыли (или затрат): в них единственной коалицией является коалиция всех (т. е. двух) игроков. Тем самым для игр двух лиц с положительными значениями характеристической функции v очевидным образом определено *пропорциональное решение*, которое предписывает игроку i выигрыш $x_i = v(\{1,2\})\frac{v(\{i\})}{v(\{1\})+v(\{2\})}$, $i = 1, 2$. Для игр с бóльшим числом игроков определение пропорционального дележа уже сталкивается с определенными трудностями, поскольку нет единого метода, учитывающего пропорциональность участия игроков в промежуточных коалициях. Поэтому формирование пропорциональных решений для ТП игр может быть реализовано в виде некоторых расширений пропорционального решения для игр двух лиц на игры с произвольным числом игроков и с положительными значениями характеристической функции. Первым из таких решений явилось пропорциональное n-ядро, введенное Лемэром [12], которое было определено таким же способом, как и обычное n-ядро, но вместо стандартного эксцесса $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$ он использовал относительный эксцесс $e_r(S, x, v) = \frac{v(S)-x(S)}{v(S)}$. Заметим сразу же, что относительный эксцесс ординально эквивалентен пропорциональному эксцессу, определяемому для любой положительной ТП игры v как $v(S)/x(S)$, поэтому n-ядра, соответствующие относительному и пропорциональному эксцессам, совпадают.

Следующим решением явилось пропорциональное решение, определенное независимо Б. Фельдманом [5] и К. Ортманом [14], которое можно назвать согласованным в смысле Харта–Мас-Колелла расширением пропорционального решения для положительных игр двух лиц на весь класс положительных кооперативных игр. В [3] Е. Яновская определила инвариантное относительно пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ решение для положительных ТП игр и дала аксиоматическую характеризацию одного из таких решений.

С еще бóльшими трудностями приходится сталкиваться при попытке определить пропорциональные решения для игр с нетрансферабельными полезностями (НТП игр). Хотя Э. Калаи в [9] определил пропорциональное решение для арбитражных схем, но пропорциональность в этом решении понималась как существование такого вектора p с положительными координатами, что из множества допустимых альтернатив выбиралась оптимальная по Парето точка, пропорциональная этому вектору p. Такое решение характеризовалось аксиомами слабой оптимальности по Парето, положительной однородности, строгой индивидуальной рациональности и сильной монотонности, причем добавление аксиомы симметричности приводило к эгалитарному решению. Учитывая, что при этом пропорциональное решение определялось для арбитражных схем с нулевой точкой *status quo*, то тем самым несколько терялся смысл «пропорциональности вкладам».

С определенной натяжкой к пропорциональному типу можно отнести решение Калаи–Смородинского [11], которое каждой арбитражной схеме (с нулевой точкой *status quo*) ставит в соответствие оптимальную по Парето точку множества допустимых альтернатив, лежащую на отрезке, соединяющем начало координат и «идеальную точку», i-я координата которой для каждого i представляет собой максимум полезности i-го агента на множестве допустимых альтернатив (разумеется, эта точка не обязана лежать в этом множестве). Решение Калаи-Смородинского (для случая нулевой точки *status quo*) характеризуется аксиомами оптимальности по Парето, симметричности, ковариантности относительно шкал и индивидуальной монотонности. Здесь стоит также упомянуть недавнюю работу С. Херреро и А. Виллара [7], в которой решение Калаи-Смородинского возникает в контексте задач распределения с нетрансферабельными полезностями.

При определении решений для НТП игр весьма существенную роль играет то обстоятельство, что если для ТП игр понятие пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ достаточно естественно, то в случае НТП игр возникает проблема определения не только пропорционального эксцесса, но и проблема, связанная с вопросом о том, каким должен быть вообще эксцесс в НТП случае, поскольку для НТП игр отсутствует какое-либо столь же естественное определение эксцесса, каковым в ТП случае является стандартный эксцесс $v(S) - x(S)$ или какие-то его вариации типа $(v(S) - x(S))/|S|$ или $(v(S) - x(S))/v(S)$.

Э. Калаи в [8] определил семейство функций эксцесса для НТП игр и, используя эти функции эксцесса, определил ε-c-ядро, k-ядро и n-ядро НТП игры, сохранив существенную часть структуры, которой обладают эти решения в ТП играх. Эти функции эксцесса удовлетворяют некоторым естественным условиям, которые представляются обязательными для таких функций. Однако, с одной стороны, эти условия являются слишком общими, а с другой стороны, их слишком мало, чтобы можно было выделить какой-то определенный эксцесс. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в [3].

Пропорциональный эксцесс для НТП игр (и его ординальный эквивалент, названный калибровочным эксцессом) был определен и аксиоматически охарактеризован в работах автора [1,2]. Пропорциональный эксцесс однозначно определяется пятью аксиомами, одна из которых говорит о том, что в случае, если НТП игра соответствует положительной ТП игре v, то эксцесс должен совпадать с пропорциональным, т. е. быть равным $v(S)/x(S)$. Мы кратко приводим соответствующие результаты в разделе 3.

Целью данной статьи является определение и исследование свойств пропорциональных решений для НТП игр (и в частности, для арбитражных схем), в основе которых лежит использование пропорционального эксцесса. Так, в частности, мы определяем и исследуем свойства *status quo*-пропорционального решения для арбитражных схем и приводим его аксиоматическую характеризацию. Интересно, что она совпадает с аксиоматикой арбитражного решения Нэша (но для другого семейства арбитражных схем). Далее мы рассматриваем свойство согласованности (в смысле Харта–Мас-Колелла) и даем аксиоматическую характеризацию *status quo*-пропорционального решения с помощью аксиомы согласованности. При этом возникает параллель с аксиоматикой Ленсберга арбитражного решения Нэша. Мы также определяем согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и даем его аксиоматискую характеризацию. Затем мы рассматриваем вопрос о существовании решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. Наконец, довольно любопытными представляются нам соотношения между некоторыми решениями арбитражных схем и НТП игр. Так например, с одной стороны, как мы уже упоминали выше, арбитражное решение Нэша и *status quo*-пропорциональное решение определяются одной системой аксиом (разумеется, для разных классов арбитражных схем), а с другой, весьма простые соотношения возникают в случае применения логарифмического преобразования к полезностям игроков.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 приводятся основные понятия и обозначения, используемые в тексте. В разделе 3 мы кратко останавливаемся на определении пропорционального эксцесса для НТП игр и на его свойствах. В разделе 4 мы определяем *status quo*-пропорциональное решение и приводим его аксиоматическую характеризацию без аксиомы согласованности. Раздел 5 посвящен аксиоматической характеризации этого решения с использованием аксиомы согласованности. Далее мы рассматриваем согласованное продолжение *status quo*-пропорционального решения на НТП игры и даем его аксиоматическую характеризацию. В разделе 7 доказано существование решений НТП игр, инвариантных относительно пропорционального эксцесса. В разделе 8 рассмотрены некоторые соотношения между арбитражными решениями.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – конечное множество игроков. *Коалиция* – это непустое подмножество S множества N. Для $S \subset N$ через $\mathbb{R}^S$ будем обозначать $|S|$-мерное евклидово пространство с осями, заиндексированными элементами из S. *Вектор выигрышей* для S – это вектор $x \in \mathbb{R}^S$. Для $z \in \mathbb{R}^N$ и $S \subset N$, z^S будет обозначать проекцию z на подпространство

$$\mathbb{R}^{[S]} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i = 0, \quad i \notin S\},$$

а z_S – ограничение z на $\mathbb{R}^S$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$. Неравенство $x \geq y$ означает, что $x_i \geq y_i$ для всех $i \in N$; мы пишем $x > y$, если $x_i > y_i$ для всех $i \in N$. Далее, мы обозначаем

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x \geq \mathbf{0}\},$$

$$\mathbb{R}^N_{++} = \{x \in \mathbb{R}^N : x > \mathbf{0}\},$$

где $\mathbf{0}$=(0,0,...,0). Покоординатное умножение мы обозначаем как $x * y$, т. е. $x * y = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, то $x + A = \{x + a : a \in A\}$ и $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. A называется *исчерпывающим*, если из $x \in A$ и $x \geq y$ следует $y \in A$. Множество A называется *ограниченным сверху*, если $A \cap (x + \mathbb{R}^N_+)$ ограничено для любого $x \in \mathbb{R}^N$. Граница множества A обозначается через ∂A. Внутренность множества A будет обозначаться int A, а относительная внутренность rel int A. Замкнутая выпуклая оболочка множества A обозначается через co A.

Игрой с нетрансферабельными полезностями (или кратко *НТП игрой*) называется пара (N, V), где N – множество игроков, а V – многозначное отображение, которое ставит в соответствие каждой коалиции $S \subset N$ множество $V(S)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]} = \{x \subset \mathbb{R}^N : x_i = 0, \quad i \notin S\}$;

(2) $V(S)$ – непустое, замкнутое, исчерпывающее и ограниченное сверху множество.

(Обычно предполагается, что $V(\emptyset) = \emptyset$.)

В тех случаях, когда из контекста будет ясно, о каком множестве игроков идет речь, мы для краткости будем обозначать игру через V, без упоминания множества игроков.

Часто бывает удобно вместо свойства (1) требовать, чтобы $V(S) \subset \mathbb{R}^S$. Легко видеть, что если $V(S) \subset \mathbb{R}^S$, то $\bar{V}(S) = V(S) \times \mathbf{0}_{N \setminus S} \subset \mathbb{R}^{[S]}$. И обратно, если $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]}$, то $V_S(S) \subset \mathbb{R}^S$, где $V_S(S)$ обозначает ограничение $V(S)$ на $\mathbb{R}^S$. Эквивалентность этих определений позволит нам использовать оба, отдавая предпочтение одному из них в зависимости от контекста, причем всегда будет ясно, о каком определении идет речь.

Следует упомянуть следующие специальные случаи.

ТП игра. ТП игру v можно рассматривать как НТП игру следующего вида:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : x(S) \leq v(S)\},$$

где $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Граница $V(S)$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^S$ с нормалью e_S, где $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Как было только что отмечено, можно эквивалентно определить НТП игру, полагая

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]} : x(S) \leq v(S)\}.$$

Арбитражная схема. Арбитражной схемой n лиц называется пара (q, Q), в которой $q \in \mathbb{R}^N$ является точкой *status quo*, $Q \subset \mathbb{R}^N$ и $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Интерпретация такой пары следующая: если игроки действуют самостоятельно, то единственным возможным исходом является вектор q, дающий полезность (выигрыш) q_i игроку $i = 1, 2, \ldots, n$. Если *все* игроки кооперируются, то потенциально возможен любой исход из множества Q. (Все промежуточные коалиции также приводят только к исходу q). Соответствующая НТП игра определяется следующим образом:

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \text{существует } y \in Q \text{ такой, что } x \leq y\},$$

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]} \ : \ x_i \leq q_i \text{ для любого } i \in S\}, \quad S \neq N.$$

3. Пропорциональный эксцесс для НТП игр

В этом разделе мы напомним кратко определение пропорционального эксцесса для случая НТП игр и приведем его свойства (подробное изложение можно найти в [1,2], а также в [3]).

3.1. Функции эксцесса и пространство $\mathfrak{G}_{N+}$

Мы рассматриваем пространство $\mathfrak{G}_{N+}$ всех «нормально-порожденных» НТП игр: грубо говоря (формальное определение будет дано ниже), игра V лежит в $\mathfrak{G}_{N+}$, если каждое множество $V(S)$ компактно порождено, содержит $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ в качестве относительно внутренней точки и совпадает с исчерпывающей оболочкой своей «положительной части» $V_+(S) = V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+$.

Для характеризации соответствующего НТП эксцесса мы вводим пять аксиом – аксиомы непрерывности, инвариантности относительно шкал (или масштабов измерения полезности), аксиомы MIN- и MAX-инвариантности и аксиому пропорциональности для ТП игр, которые описывают желательные свойства функции эксцесса. Аксиома непрерывности утверждает, что эксцесс (коалиции) должен быть непрерывным относительно x и V. Инвариантность относительно шкал требует, чтобы эксцесс не зависел от того, какая шкала выбрана для измерения полезности. Аксиомы MIN- и MAX-инвариантности утверждают, что эксцессы «игры-пересечения» ($V = V_1 \cap V_2$) и «игры-объединения» ($V = V_1 \cup V_2$) должны определяться, соответственно, минимумом и максимумом эксцессов игр-компонент. Наконец, аксиома пропорциональности для ТП игр требует, чтобы для НТП игры, соответствующей ТП игре, эксцесс совпадал с пропорциональным эксцессом.

Эти пять аксиом однозначно задают *пропорциональный эксцесс* $h_S(V, x)$, определяемый формулой

$$h_S(V, x) = 1/\gamma(V(S), x^S),$$

где $\gamma(W, .)$ – *калибровочная функция* (или *калибровочная функция Минковского*) множества W:

$$\gamma(W, x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda W\}.$$

Итак, определим интересующее нас пространство игр $\mathfrak{G}_{N+}$ формально. НТП игра $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ тогда и только тогда, когда для всех $S \subset N$

(a) $V(S)$ положительно порождено, т. е. $V(S) = (V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+) - \mathbb{R}^{[S]}_+$ и $V_+(S) = V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+$ является компактным множеством, и каждый луч $L_x = \{\lambda x : \lambda \geq 0\}$, $x \neq \mathbf{0}$ пересекает границу множества $V(S)$ не более одного раза.

(b) $\mathbf{0}$ является внутренней точкой множества $V^\wedge(S) = V(S) + \mathbb{R}^{[N \setminus S]}$.

Множество $V(S) \subset \mathbb{R}^{[S]}$ будем называть *игровым подмножеством*, если оно удовлетворяет условиям (a) и (b). Пространство всех игровых подмножеств $\mathbb{R}^{[S]}$, удовлетворяющих условиям (a) и (b), будем обозначать через $\mathfrak{G}^S_{N+}$.

Очевидно, что каждое множество $V_+(S)$ является *нормальным* множеством (или $\mathbf{0}$-исчерпывающим множеством), т. е. если $x \in V_+(S)$ и $\mathbf{0} \leq y \leq x$ (в $\mathbb{R}^{[S]}$), то $y \in V_+(S)$. Именно в этом смысле мы будем говорить об игре $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ как о *нормально порожденной.* Ясно также, что каждое $U \in \mathfrak{G}^S_{N+}$ является *звездным.* (Используемое нами в (a) определение несколько сильнее обычного определения звездности: звездное множество вещественного векторного пространства содержит выделенный элемент, центр, который можно соединить с любым другим элементом этого множества отрезком, который целиком лежит в этом множестве). Заметим, что для любого $V(S) \in \mathfrak{G}^S_{N+}$ и каждого $x \in \mathbb{R}^{[S]}_+$, $x \neq \mathbf{0}$ существует единственное число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda x \in \partial V(S)$.

Ясно, что если $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}_{N+}$, то игры $V_1 \cap V_2$ и $V_1 \cup V_2$, определенные как

$$(V_1 \cap V_2)(S) = V_1(S) \cap V_2(S), \quad (V_1 \cup V_2)(S) = V_1(S) \cup V_2(S),$$

также лежат в $\mathfrak{G}_{N+}$.

Далее, если $V(S) \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, $A \in \mathbb{R}^{[S]}_{++}$ и $A * V(S) = \{A * y : y \in V(S)\}$, то и $A * V(S) \in \mathfrak{G}^S_{N+}$.

Нетрудно проверить, что если игра V такова, что для любой коалиции S множество $V(S)$ нормально порождено, удовлетворяет (b) и обладает традиционным *свойством безуровневости*:

$$x, y \in \partial V(S) \cap \mathbb{R}^{[S]}_+, \ x \geq y \ \Rightarrow \ x = y,$$

то $V \in \mathfrak{G}_{N+}$.

Следует особо отметить случай ТП игры и соответствующей ей НТП игры.

ТП игра. Пусть v – положительная ТП игра, т. е. $v(S) > 0$ для любой S. Тогда соответствующую НТП игру $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ можно определить следующим образом

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]}_+ : x(S) \leq v(S)\} - \mathbb{R}^{[S]}_+.$$

Напомним определение функции эксцесса по Калаи, адаптируя его к нашему случаю. В частности, мы заменим свойство (C) равенства нулю на границе его аналогом (C'). Определим *функцию эксцесса* для коалиции $S \neq \emptyset$ как такую функцию $E_S : \mathfrak{G}_{N+} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, что:

(A) Если $x, y \in \mathbb{R}^N$ и $x_i = y_i$ для любого $i \in S$, то для любой игры V

$$E_S(V, x) = E_S(V, y). \tag{3.1}$$

(B) Если $x, y \in \mathbb{R}^N$ таковы, что $x_i < y_i$ для любого $i \in S$, то для любой игры V

$$E_S(V, x) > E_S(V, y). \tag{3.2}$$

(C') Для любой игры V,

$$\text{если } x \in \partial V(S), \text{ то } E_S(V, x) = 1. \tag{3.3}$$

(D) $E_S(V, x)$ непрерывна по обеим переменным x и V.

(Метрика на $\mathfrak{G}_{N+}$ задается с помощью метрики Хаусдорфа: для $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$

$$\rho(V, W) = \max_S \delta_S(V(S), W(S)),$$

причем метрика Хаусдорфа δ определяется следующим образом. Пусть A и B – подмножества $\mathbb{R}^S$, тогда $\delta_S(A, B) = \max(l(A, B), l(B, A))$, где

$$l(A, B) = \sup\{d(x, B) \,:\, x \in A\},$$

а d – евклидова метрика).

Будем говорить, что E_S *не зависит от других коалиций*, если для любых двух игр V и W таких, что $V(S) = W(S)$, и для любого $x \in \mathbb{R}^N$ имеет место равенство $E_S(V, x) = E_S(W, x)$.

Мы ограничиваемся рассмотрением только неотрицательных векторов x, поскольку любое разумное решение игры $V \in \mathfrak{G}_{N+}$, конечно же, должно быть неотрицательным. Мы рассматриваем только эксцессы, не зависящие от других коалиций, и поэтому, принимая во внимание свойство (A), будем далее рассматривать функции эксцесса, как функции на $\mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^{[S]}_+$ (или $\mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^N_+$).

Нам понадобятся также следующие обозначения: $IR(V) = \{x \in V(N) : \forall i \in N \; x_i \geq y_i$ для каждого $y \in V(i)\}$ – множество индивидуально рациональных точек в игре V;
$GR(V) = \{x \in V(N)$: не существует $y \in V(N)$ такого, что $y > x\}$ – множество (слабо) оптимальных по Парето точек в игре V;
$C(V) = \{x \in V(N)$: не существует S, $y \in V(S)$ таких, что $y_i > x_i$ $\forall i \in S\}$ – c-ядро игры V.

Наконец, напомним определение n-ядра и пред-n-ядра игры (см., например, [3]).

Пусть $\{E_S\}_S$ – некоторое семейство функций эксцесса, и пусть X является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^N$. Для любых $x \in X$ и игры V определим вектор $\theta(x)$ следующим образом:

$$\theta(x) = \theta(V, x) = (E_{S_1}(V, x), \ldots, E_{S_{2^n}}(V, x)),$$

где различные эксцессы расположены в порядке убывания (невозрастания). Компоненты $\theta(x)$ корректно определены и изменяются непрерывно для «хороших» функций эксцесса. Будем говорит, что $\theta(x)$ лексикографически меньше, чем $\theta(y)$, $\theta(x) \prec_{lex} \theta(y)$, если существует такое натуральное число q, что $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ для всех $i < q$ и $\theta_q(x) < \theta_q(y)$.

N-ядром игры V (относительно X и данного семейства функций эксцесса $\{E_S\}_S$) – мы обозначаем его через $N(X, V)$ – называется множество векторов в X, для которых соответствующие вектора θ являются лексикографически наименьшими, т. е.

$$N(X, V) = \{x \in X : \theta(x) \preceq_{lex} \theta(y) \quad \text{для всех} \quad y \in X\}.$$

Если $X = IR(V) \cap GR(V)$, то $N(X, V) := N(V)$ называется n-ядром игры V. Если $X = GR(V)$, то $N(X, V) := PN(V)$ называется *пред-n-ядром* игры V.

3.2. Аксиомы и пропорциональный эксцесс

Итак, наша цель – обобщение пропорционального эксцесса $v(S)/x(S)$ на НТП игры. Пусть H_S – функция эксцесса, т. е. $H_S : \mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^{[S]}_{+} \to \mathbb{R}$. Введем пять следующих аксиом (чтобы несколько упростить обозначения, мы будем писать V вместо $V(S)$).

Непрерывность. $H_S(V, x)$ непрерывна по обеим переменным V и $x \neq \mathbf{0}$.

Инвариантность относительно шкал. Если $V \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, $A \in \mathbb{R}^{[S]}_{++}$ и $A * V = \{A * y : y \in V\}$, то

$$H_S(A * V, A * x) = H_S(V, x).$$

MIN-инвариантность. Пусть $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, тогда

$$H_S(V_1 \cap V_2, x) = \min\{H_S(V_1, x), H_S(V_2, x)\}.$$

MAX-инвариантность. Пусть $V_1, V_2 \in \mathfrak{G}^S_{N+}$, тогда

$$H_S(V_1 \cup V_2, x) = \max\{H_S(V_1, x), H_S(V_2, x)\}.$$

Пропорциональность для ТП игр. Если $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ соответствует положительной ТП игре v, т. е.

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{[S]}_+ : x(S) \leq v(S)\} - \mathbb{R}^{[S]}_+,$$

тогда $H_S(V, x) = \frac{v(S)}{x(S)}$.

Пусть $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ – произвольная игра. Определим функцию $h_S : \mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h_S(V, x) = 1/\gamma(V(S), x^S), \tag{3.4}$$

где $\gamma(W, y) = \inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda W\}$ – калибровочная функция (или калибровочная функция Минковского) множества W (см., например, [4]).

Теорема 3.1. *Существует единственная функция эксцесса $H_S : \mathfrak{G}^S_{N+} \times \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая аксиомам непрерывности, инвариантности относительно шкал, MAX-, MIN-инвариантности и пропорциональности для ТП игр, причем $H_S = h_S$, где h_S определена с помощью (3.4).*

Комментарии приведенных выше аксиом, доказательство этой теоремы, а также свойства пропорционального эксцесса, некоторые из которых мы упоминаем ниже, можно найти в [2] (см. также [3]).

3.3. Свойства пропорционального эксцесса

Мы не приводим здесь соответствующий пропорциональному эксцессу аналог теоремы Калаи [8] полностью, а сформулируем лишь ту ее часть, которая касается n-ядра и пред-n-ядра.

Теорема 3.2. *Пусть $\{h_S\}_S$ – семейство пропорциональных эксцессов и $V \in \mathfrak{G}_{N+}$. Тогда*

1) *Если $IR(V) \cap GR(V) \neq \emptyset$, то $N(V) \neq \emptyset$ и состоит из конечного числа точек.*

2) Для любой игры V $PN(V)$ непусто и состоит из конечного числа точек.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 3.1. *Пусть $V, V' \in \mathfrak{G}_{N+}$ – такие НТП игры, что $V(N) = V'(N)$ и $V'(S) = aV(S), \forall S \neq N$ для некоторого $a > 0$. Тогда $x \in PN(V) \Leftrightarrow x \in PN(V')$, где $PN(V)$ – пред-n-ядро игры V.*

Пример 3.1. Пусть $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ – безуровневая арбитражная схема, т. е. для некоторого $q \in \mathbb{R}^N_{++}$

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S \,:\, x_i \leq q_i \text{ для любого } i \in S\},$$

для любой $S \neq N$, $q \in \mathrm{int}V(N)$, причем $V(N)$ обладает свойством безуровневости, и существует такой $x \in V(N)$, что $x > q$. Тогда $N(V) = PN(V) = \lambda q$, где λ таково, что $\lambda q \in \partial V(N)$.

Следующее предложение является простым следствием определения пропорционального эксцесса и равенства $\gamma(V, x) = \gamma(A * V, A * x)$ для любого $A \in \mathbb{R}^S_{++}$.

Предложение 3.2. *n-ядро и пред-n-ядро ковариантны относительно масштабов измерения полезностей, т. е. если $A \in \mathbb{R}^N_{++}$, то для любой $V \in \mathfrak{G}_{N+}$, $N(AV) = A * N(V)$, и $PN(AV) = A * PN(V)$, где игра AV определяется равенством*

$$AV(S) = A * V(S) \quad \text{для любой } S.$$

4. *Status quo*-пропорциональное решение для арбитражных схем

В приведенном выше примере мы показали, что для безуровневой арбитражной схемы с положительной точкой *status quo* n-ядро и пред-n-ядро представляют собой оптимальную по Парето точку, пропорциональную точке *status quo*. Рассмотрим это арбитражное решение подробно.

Будем считать далее, что каждая арбитражная схема (q, Q) удовлетворяет следующим условиям:

(a) $Q \subset \mathbb{R}^N_+$ является компактным и норамальным ($\mathbf{0}$-исчерпывающим) множеством, т. е. из $x \in Q$, $y \in \mathbb{R}^N_+$, и $x \geq y$ следует $y \in Q$;

(b) Q – безуровневое множество, т. е.

$$x, y \in \partial Q, \quad x \geq y \;\Rightarrow\; x = y;$$

(c) $q \geq \mathbf{0}$ и существует такой $x \in Q$, что $x > q$.

Обозначим семейство всех арбитражных схем с множеством игроков N и удовлетворяющих свойствам (a)–(c) через Ω^N. Если же в свойстве (c) требуется $q > 0$, то соответствующее семейство будем обозначать через Ω^N_+.

Арбитражным решением F на $\Sigma \subset \Omega^N$ называется отображение $F : \Sigma \to \mathbb{R}^N_+$, которое ставит в соответствие каждой арбитражной схеме (q, Q) из Σ ее решение $F(q, Q)$.

Для арбитражной схемы $(q, Q) \in \Omega^N_+$ определим решение PS следующим образом: пусть

$$\mu(q, Q) = \max\{t \in \mathbb{R}_+ : tq \in Q\},$$

и $PS(q, Q) = \mu(q, Q)q$. Это решение будем называть *status quo*-пропорциональным или кратко *sq*-пропорциональным (чтобы отличать его от упомянутого выше пропорционального решения Калаи [9]).

Пусть F – арбитражное решение. Рассмотрим следующие аксиомы.

Оптимальность по Парето (PO). $F(q, Q) \in \pi Q$, где πQ обозначает множество оптимальных по Парето точек множества Q.

Ковариантность относительно шкал (SC). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^N_{++}$. Тогда для любой арбитражной схемы (q, Q)

$$F(\lambda * q, \lambda * Q) = \lambda * F(q, Q),$$

где $*$ обозначает покоординатное умножение.

Анонимность (AN). Если τ – произвольная перестановка множества N, то

$$F(\tau^* q, \tau^* Q) = \tau^* F(q, Q),$$

где τ^* – это преобразование $\mathbb{R}^N$, индуцированное τ, т. е.

$$\tau^*(x) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}).$$

Сильная монотонность (SM). Если $Q' \supset Q$, то $F(q, Q') \geq F(q, Q)$.

Следующее предложение следует немедленно из определения.

Предложение 4.1. *SQ-пропорциональное решение удовлетворяет аксиомам PO, SC, AN и SM.*

Теорема 4.1. *SQ-пропорциональное решение является единственным решением на Ω_+^N, удовлетворяющим аксиомам PO, SC, AN и SM.*

Доказательство. Пусть F – арбитражное решение, удовлетворяющее указанным аксиомам. Рассмотрим произвольную арбитражную схему (e, Q), где $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $x = \mu e$, где $\mu = \max\{t \in \mathbb{R}_+ : te \in Q\}$, и пусть $F(e, Q) \neq x$.

Рассмотрим арбитражную схему (e, Q^{Π}), где

$$Q^{\Pi} = \bigcup_{\tau \in \Pi} \tau^* Q,$$

и Π обозначает множество всех перестановок множества N. Очевидно, что множество Q^{Π} инвариантно относительно любых перестановок множества N, поэтому $F(e, Q^{\Pi}) = \lambda e$ для некоторого $\lambda > 0$. Следовательно, $\lambda e = x$. Действительно, с одной стороны, $x \in Q^{\Pi}$, а с другой, не может быть, чтобы $F(e, Q^{\Pi}) > x$, поскольку $F(e, Q^{\Pi}) \in \tau^* Q$ для любой перестановки τ, но $\mu e \in \tau^* Q$ для любой τ, а поэтому $\mu \neq \max\{t \in \mathbb{R}_+ : te \in Q\}$.

Поскольку $Q^{\Pi} \supset Q$, то $x = F(e, Q^{\Pi}) \geq F(e, Q)$. Однако (в силу безуровневости) это возможно только, если $F(e, Q) = x$. Поскольку Q выбиралось произвольно, то из SC следует доказываемое утверждение. □

Легко видеть, что в приведенной только что теореме аксиому сильной монотонности SM можно заменить аксиомой независимости от посторонних альтернатив IIA.

Независимость от посторонних альтернатив (IIA). Для любых арбитражных схем $(q, Q), (q, Q') \in \Omega^N$, если $Q' \subset Q$ и $F(q, Q) \in Q'$, то $F(q, Q') = F(q, Q)$.

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *SQ-пропорциональное решение является единственным решением на Ω_+^N, удовлетворяющим аксиомам PO, SC, AN и IIA.*

Обратим внимание на следующее. Если рассматривать арбитражные схемы с *нулевыми* точками *status quo*, то в определении арбитражной схемы точку *status quo* можно не указывать вообще, и в этом случае арбитражная схема определяется только множеством допустимых альтернатив Q. При этом арбитражное решение Нэша (для соответствующих выпуклых и компактных арбитражных схем Q) задается, как известно, той же самой системой аксиом, разумеется, для другого семейства арбитражных схем (с нулевыми точками *status quo* и выпуклыми компактными множествами Q).

Теорема 4.3. *Решение F удовлетворяет аксиомам PO, SC, AN и IIA тогда и только тогда, когда для любых Q, $F(Q) = NS(Q)$, где NS – арбитражное решение Нэша, т. е.*

$$NS(Q) = \arg\max\{\prod_{i\in N} x_i : \ x \in Q\}.$$

Если рассматривать произвольные токи *status quo*, то для характеризации арбитражного решения Нэша нужно добавить еще аксиому ковариантности относительно сдвига TC.

Замечание 4.1. Вообще говоря, все сказанное выше остается в силе и для арбитражных схем, в которых не обязательно существует $x \in Q$ такой, что $x > q$. Разумеется, в этом случае теряется индивидуальная рациональность решения, и поэтому рассматривать арбитражные схемы без этого условия достаточно бессодержательно. Однако в общем случае НТП игр условия этого типа уже не являются обязательными. Так в разделе 6, в котором мы рассматриваем продолжение sq-пропорционального решения на НТП игры, нет ограничений типа индивидуально рациональной монотонности игры V, а именно: $V(S) \times V(i) \subset V(S \cup i)$.

5. Согласованность *status quo*-пропорционального решения для арбитражных схем

Значительная часть аксиоматической теории для арбитражных схем развивалась в предположении фиксированного числа игроков. Однако, модель существенно обогатилась за счет введения переменного числа агентов. Были сформулированы аксиомы, описывающие как могут или как должны решения реагировать на изменения числа агентов, и тем самым появились новые системы аксиом, определяющие решения. Так, в частности, Ленсберг [13] использовал аксиому согласованности для характеризации арбитражного решения Нэша.

Для формулировки соответствующих результатов нам понадобятся некоторые дополнительные определения, которые мы приведем ниже.

5.1. Аксиомы

Пусть $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел и пусть $\mathcal{P}$ обозначает семейство непустых, конечных подмножеств множества $\mathcal{N}$. Элементы $\mathcal{P}$ будем обозначать через $N, N', \ldots$. Множество $\mathcal{N}$ можно представлять себе, как множество потенциальных игроков, а $\mathcal{P}$ – это семейство всех подмножеств таких игроков, которые предположительно могут стать участниками некоторой арбитражной схемы (игры).

Пусть $N \in \mathcal{P}$ – непустое конечное множество игроков. Нам понадобится еще одно обозначение: для $x, y \in \mathbb{R}^N$ через $[x, y]$ (или $[y, x]$) будем обозначать отрезок вида $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^N : \ z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \ \lambda \in [0, 1]\}$.

Далее мы будем в основном придерживаться обозначений Ленсберга, внося в них соответствующие модификации, поскольку в [13] точки *status quo* – нулевые.

Пусть $N \in \mathcal{P}$. Обозначим через Ω^N семейство всех арбитражных схем с множеством игроков N, удовлетворяющих свойствам (a)–(c).

Арбитражным решением называется отображение

$$F : \bigcup_{N \in \mathcal{P}} \Omega^N \to \bigcup_{N \in \mathcal{P}} \mathbb{R}^N_+,$$

которое ставит в соответствие каждому $N \in \mathcal{P}$ и каждой арбитражной схеме $(q, Q) \in \Omega^N$ точку $F(q, Q)$ множества Q, которая называется решением арбитражной схемы (q, Q).

Приведем теперь аксиомы, которые будут использоваться ниже. Мы формулируем их в форме, подходящей для случая переменного множества игроков.

Оптимальность по Парето (PO). Для любого $N \in \mathcal{P}$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ из $F(q, Q) = x$ следует, что не существует $y \in Q$ такого, что $y \geq x$, $y \neq x$.

Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $|N| = |N'|$ обозначим через $\Gamma^{N,N'}$ семейство взаимно-однозначных отображений $\delta : N \to N'$. Иногда будет удобно рассматривать $\delta \in \Gamma^{N,N'}$ как функцию из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^{N'}$, определенную формулой $y = \delta(x)$, если $y_{\delta(i)} = x_i$ для каждого $i \in N$. Для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ определим также $\delta(q, Q) \equiv (\delta(q), \delta(Q))$.

Анонимность (AN). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $|N| = |N'|$, для любого $\delta \in \Gamma^{N,N'}$ и каждой $(q, Q) \in \Omega^N$

$$F(\delta(q, Q)) = \delta(F(q, Q)).$$

Для любого $N \in \mathcal{P}$ обозначим через Λ^N семейство таких отображений $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^{N'}$, что для любого $\lambda \in \Lambda^N$ существует такой $a \in \mathbb{R}^N_{++}$, что для любого $i \in N$ и любого $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lambda_i(x) = a_i x_i.$$

Нам будет удобно также использовать следующие обозначения для $\lambda \in \Lambda^N$ и $(q, Q) \in \Omega^N$:

$$\lambda(q, Q) \equiv (\lambda(q), \lambda(Q)).$$

Ковариантность относительно шкал (SC). Для любого $N \in \mathcal{P}$, любой арбитражной схемы $(q, Q) \in \Omega^N$ и любого $\lambda \in \Lambda^N$

$$F(\lambda(q, Q)) = \lambda(F(q, Q)).$$

Независимость от посторонних альтернатив (IIA). Для любого $N \in \mathcal{P}$, для любых $(q, Q), (q, Q') \in \Omega^N$, если $Q' \subset Q$ и $F(q, Q) \in Q'$, то $F(q, Q') = F(q, Q)$.

Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через H^x_N гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$ вида

$$H^x_N = \{y \in \mathbb{R}^N : \ y_{N' \setminus N} = x_{N' \setminus N}\}.$$

Мы обозначаем также для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $x \in \mathbb{R}^{N'}$, ограничение x на $\mathbb{R}^N$ через x_N. Для $Q \subset \mathbb{R}^{N'}$ и $x \in Q$ обозначим $t^x_N(Q)$ проекцию множества $H^x_N \cap Q$ на $\mathbb{R}^N$.

Теперь мы можем сформулировать аксиомы согласованности, которые аналогичны аксиомам Ленсберга [13], но используют ненулевые точки *status quo*.

Двусторонняя устойчивость (B.STAB). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$ и $|N| = 2$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ и любой $(r, R) \in \Omega^{N'}$, если $q = r_N$ и $Q = t_N^x(R)$, где $x = F(r, R)$, то $F(q, Q) = x_N$.

Следующая аксиома представляет собой усиление предыдущей.

Многосторонняя устойчивость (M.STAB). Для любых $N, N' \in \mathcal{P}$ таких, что $N \subset N'$, для любой $(q, Q) \in \Omega^N$ и любой $(r, R) \in \Omega^{N'}$ если $q = r_N$ и $Q = t_N^x(R)$, где $x = F(r, R)$, то $F(q, Q) = x_N$.

Будем обозначать для любого $N \in \mathcal{P}$ через Ω_0^N семейство всех арбитражных схем из Ω^N, удовлетворяющих свойствам (a) и (c) с выпуклыми Q и $q = \mathbf{0}$. В этом случае каждую арбитражную схему (q, Q) можно обозначать просто через Q. Через Ω_+^N будем, как и раньше, обозначать семейство арбитражных схем в Ω^N, удовлетворяющих свойствам (a)–(c) и $q > \mathbf{0}$.

Мы не приводим здесь оригинальные аксиомы Ленсберга, поскольку они легко получаются из приведенных простой заменой ненулевой точки *status quo* q на $\mathbf{0}$ с учетом того, что $\lambda_i(\mathbf{0}) = 0$.

5.2. Согласованность

Основной результат Ленсберга представляет следующая теорема [13].

Теорема 5.1. *Решение на Ω_0 удовлетворяет аксиомам PO, AN, SC и M.STAB тогда и только тогда, когда оно является арбитражным решением Нэша.*

Обратимся теперь к sq-пропорциональному решению.

Предложение 5.1. *sq-пропорциональное решение на Ω_+ удолетворяет аксиомам PO, SC, AN и M.STAB.*

Доказательство. PO, SC и AN следуют из определения sq-пропорционального решения. Проверим выполнение M.STAB.

Так как sq-пропорциональное решение удовлетворяет SC, мы можем рассматривать для каждого $N \in \mathcal{P}$ арбитражные схемы вида (e_N, Q). Тогда $PS(e_N, Q) = \mu e_N$ для некоторого числа $\mu > 0$.

Пусть теперь $N, N' \in \mathcal{P}$ таковы, что $N \subset N'$ и $(e_{N'}, R) \in \Omega_+^{N'}$. Определим арбитражную схему (q, Q) следующим образом: $q = e_N$ и $Q = t_N^{\mu e_{N'}}(R)$, где $\mu e_{N'} = PS(e_{N'}, R)$. Ясно, что $\mu e_N \in t_N^{\mu e_{N'}}(R)$ оптимально по Парето и, следовательно, $\mu e_N = PS(e_N, Q)$. $\square$

Следствие 5.1. SQ-*пропорциональное решение удовлетворяет B.STAB.*

Предложение 5.2. *Если решение F на Ω_+ удовлетворяет PO, AN, SC и B.STAB, то для любых $N \in \mathcal{P}$ с $|N| = 2$ и любых $(q, Q) \in \Omega_+^N, F(q,Q) = PS(q,Q)$.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathcal{P}$ с $|N| = 2$, и пусть $(q, Q) \in \Omega_+^N$. Не умаляя общности, мы можем считать (по аксиоме AN), что $N = \{1, 2\}$ и (в силу SC) что $q = e_N$.

Мы построим такую арбитражную схему $(r, R) \in \Omega_+^{N'}$ с $|N'| = 3$, что $r = e_{N\prime}, PS(r, R) = \mu e_{N'}$ для некоторого μ и $t_N^{\mu e_{N'}}(R) = Q$.

В силу AN мы можем считать, что $N' = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим множество $Q \subset \mathbb{R}_+^N$. По свойству (c) найдется такой $x \in \partial Q$, что $x = \mu e_N$, причем $\mu > 1$. Положим $\varepsilon = \mu - 1$. Тогда $x = (1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В силу условия безуровневости множество ∂Q можно представить следующим образом:

$$\partial Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : \ x_2 = f(x_1)\}$$

для некоторой непрерывной строго убывающей функции f.

Пусть $f(0) = \alpha$ и $f^{-1}(0) = \beta$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\alpha \le \beta$. Заметим также, что, в силу безуровневости $\alpha > 1+\varepsilon$. Пусть теперь $\gamma : \{1, 2\} \to \{2, 3\}$ и $\gamma' : \{2, 3\} \to \{3, 1\}$. Обозначим $Q^{23} = \gamma(Q)$ и $Q^{31} = \gamma'(Q^{23})$. Пусть $R_1 \subset \mathbb{R}_+^{N'}$ определяется как $R_1 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, где

$$Q_1 = Q^{23} \times \{\mu e_{\{1\}}\}, Q_2 = Q^{31} \times \{\mu e_{\{2\}}\}, Q_3 = Q \times \{\mu e_{\{3\}}\}.$$

По построению $\mu e_{N'} \in R_1$ (см. Рис. 1).

Наша цель состоит в построении множества R как некоторой «оболочки» множества R_1. Для этого рассмотрим сначала произвольное $a \in [0, 1+\varepsilon]$. Тогда это a определяет (в силу безуровневости) в точности две точки $y(a) \in \partial Q_1$ и $z(a) \in \partial Q_3$ (мы рассматриваем Q_1, Q_2, Q_3 как двумерные множества) такие, что $y_2(a) = z_2(a) = a$ (заметим, что $y(a) = z(a)$ для $a = 1 + \varepsilon$). Пусть теперь

$$P_2 = \bigcup_{a \in [0, 1+\varepsilon]} P(a),$$

где $P(a)$ – это отрезок $[z(a), y(a)]$.

Аналогично определяем множества P_1 и P_3.

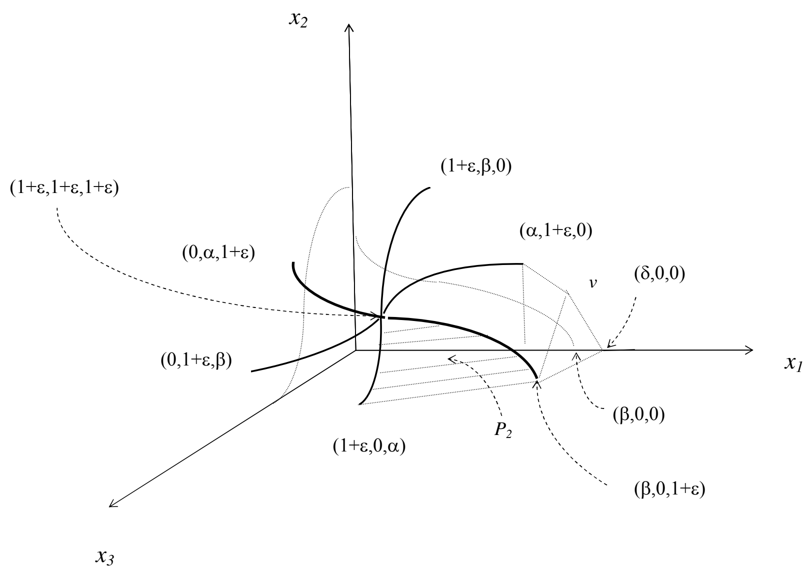

Рис. 1. Построение множества *R*

Дальнейшее построение разбивается на три шага.

(1) Рассмотрим для каждого $b \in [1+\varepsilon, \alpha]$ (напомним, что в силу безуровневости $\alpha > 1+\varepsilon$) две точки $z(b) \in \partial Q_3$ и $w(b) \in \partial Q_2$ (они определяются однозначно) с $z_1(a) = w_1(b) = b$. Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

(2) Так как $\alpha > 1+\varepsilon$ (в силу безуровневости), то $f(\alpha) < 1+\varepsilon$. Пусть $v = (\beta, f(\alpha), 0)$. Рассмотрим отрезок $S_3 = [(\alpha, 1+\varepsilon, 0), v]$. Тогда каждый $b \in [\alpha, \beta]$ определяет две точки$z(b) \in \partial Q_3$ и $w(b) \in S_3$ с $z_1(b) = w_1(b)$. Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

Если $\alpha = \beta$, то мы опускаем этот шаг и полагаем $v = (\alpha, 1+\varepsilon, 0)$.

(3) Возьмем теперь точку $h = (\delta, 0, 0)$ с $\delta > \beta$, и рассмотрим два отрезка $S_3' = [v, h]$ и $S_2 = [(\beta, 0, 1+\varepsilon), h]$. Тогда каждый $b \in [\beta, \delta]$ определяет две точки $z(b) \in S_2$ и $w(b) \in S_3'$ с $z_1(b) = w_1(b)$ (для $b = \delta$ они совпадают). Положим $E(b) = [z(b), w(b)]$.

Определим теперь $E_1 = \bigcup\limits_{b\in[1+\varepsilon,\delta]} E(b)$.

Аналогично определяем множества E_2 и E_3.

Определим, наконец, R как нормальную оболочку множества $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

Проверим теперь, что R обладает всеми свойствами, требуемыми для принадлежности арбитражной схемы $(e_{N'}, R)$ семейству $\Omega_+^{N'}$.

Нормальность (**0**-исчерпываемость) следует из построения. Проверим безуровневость. Рассмотрим сначала множество P_2. Возьмем произвольный $x_2 = a < 1+\varepsilon$. Ясно, что отрезок $P(a) = [y(a), z(a)] \subset P_2$, и он параллелен плоскости $x_2 = 0$. Далее, $y_1(a) = 1+\varepsilon$ и $z_3(a) = 1+\varepsilon$ для любого a. Каждую точку в $P(a)$ можно единственным образом представить в виде $u(a) = \lambda y(a) + (1-\lambda)z(a)$ для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Поэтому любые две различные точки $u^1(a), u^2(a) \in P(a)$ отличаются и первыми, и третьими координатами. Следовательно, не существует отрезка в P_2, параллельного оси x_1 или x_3.

Предположим теперь, что существует отрезок I в P_2, параллельный оси x_2. Это означает, что для любой точки $v \in I$ мы имеем $v_1 = c_1$ и $v_3 = c_3$ для некоторых чисел $c_1, c_3 > 1+\varepsilon$. Рассмотрим две различные точки $v^1, v^2 \in I$. Тогда

$$v^1 = \lambda_1 y(a_1) + (1-\lambda_1)z(a_1), v^2 = \lambda_2 y(a_2) + (1-\lambda_2)z(a_2)$$

для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ и $a_1, a_2 > 1+\varepsilon$.

Предположим $a_1 < a_2$. Так как f строго убывает, то $y_3(a_1) > y_3(a_2)$, $y_1(a_1) = y_1(a_2) = 1+\varepsilon, z_1(a_1) > z_1(a_2)$ и $z_3(a_1) = z_3(a_2) = 1+\varepsilon$. Тогда

$$c_1 = \lambda_1(1+\varepsilon) + (1-\lambda_1)z_1(a_1) = \lambda_2(1+\varepsilon) + (1-\lambda_2)z_1(a_2),$$

$$c_3 = \lambda_1 y_3(a_1) + (1-\lambda_1)(1+\varepsilon) = \lambda_2 y_3(a_2) + (1-\lambda_2)(1+\varepsilon).$$

Из первого равенства следует, что $\lambda_2 < \lambda_1$, а из второго, что $\lambda_2 > \lambda_1$, и мы приходим к противоречию. Разумеется, все сказанное верно и для множеств P_1 и P_3.

Доказательство того, что E_1 (а также E_2 и E_3) не содержит отрезков, параллельных осям, аналогично только что приведенному, однако здесь следует учесть не только монотонность функции f, но также и построение отрезков S_2, S_3 и S_3' (см. шаги (2) и (3) выше).

Таким образом, множество R таково, что арбитражная схема $(e_{N'}, R) \in \Omega_+^{N'}$ (напомним, что точка $x = (1+\varepsilon, 1+\varepsilon, 1+\varepsilon)$ лежит в R). Так как R инвариантно относительно поворотов осей, $F(e_{N'}, R) = x$.

Проверим теперь, что $t_N^{\mu e_{N'}}(R) = Q$. Нам достаточно показать, что каждый $v \in \partial Q_3$ оптимален по Парето в R. Для этого возьмем произвольную точку $v \in \partial Q_3$. Если $x_1 > 1+\varepsilon$, то $y_1 \leq 1+\varepsilon$ для любого $y \in E_2 \cup R_1 \cup E_3$. Для любого $y \in (E_1 \cup R_3)$ мы имеем $y_3 < x_3$ или $y_3 = x_3$, но в последнем случае $y_1 < x_1$, или если $y_1 > x_1$, то $y_2 < x_2$ (так как f строго убывает).

Рассмотрим, наконец, произвольный $y \in R_2, y \neq x$. Тогда $y \in [y(a), z(a)]$ для некоторого $a \in [0, 1+\varepsilon]$. Если $y = z(a)$, то $z_1(a) < x_1$, или $z_1(a) > x_1$, но $z_2(a) < x_2$.

Пусть теперь $y \neq z(a)$. Если $a > x_2$, то $y_2 < x_2$. Если $a \leq x_2$, то $z_1(a) \leq x_1, y_1(a) = 1+\varepsilon$. Тогда

$$y_1 = \lambda y_1(a) + (1-\lambda) z_1(a) = \lambda(1+\varepsilon) + (1-\lambda) z_1(a) < x_1$$

для любого $\lambda \in (0, 1]$ (поскольку $x_1 > 1+\varepsilon$).

Случай $x_1 < 1+\varepsilon$ аналогичен.

Как уже говорилось выше, $F(e_{N'}, R) = \mu e_{N'}$. Тогда в силу B.STAB $F(e_N, Q) = F(e_N, t_N^{\mu e_{N'}}(R)) = \mu e_N$. □

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Решение F на Ω_+ удовлетворяет PO, AN, SC и B.STAB, тогда и только тогда, когда оно является status quo-пропорциональным решением.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $N' \in \mathcal{P}$, и пусть $(r, R) \in \Omega_+^{N'}$. В силу AN мы можем считать $q = e_{N'}$. Пусть $x = F(e_{N'}, R)$. Тогда, в силу B.STAB, для любого $N \subset N', |N| = 2$ мы имеем $F(e_N, Q) = x_N$, где $Q = t_N^x(R)$. Из Предложения 5.2 следует, что $F(e_N, Q) = PS(e_N, Q) = \mu e_N$ для некоторого μ. Следовательно $x_i = x_j = \mu$ для $i, j \in N$ и каждого $N \subset N'$. Следовательно $x_i = x_j = \mu$ для всех $i, j \in N'$, а поэтому $x = \mu e_{N'}$. □

Очевидно, что аксиому B.STAB можно заменить более сильной аксиомой M.STAB. В этом случае арбитражное решение Нэша и *sq*-пропорциональное решение характеризуются одной и той же системой аксиом. Различие состоит в том, что первое определено на Ω_0, а второе на Ω_+.

6. Согласованное пропорциональное решение для НТП игр

В этом разделе мы рассмотрим согласованное решение для НТП игр, которое для случая двух игроков совпадает со *status quo*-пропорциональным решением.

Для начала мы напомним определение редуцированной игры в смысле Харта–Мас-Колелла [6].

Для любого решения (на некотором семействе НТП игр) φ, игры (N, V), и подмножества $T \subset N$, редуцированная игра (T, V_T^φ) определяется следующим образом:

$$V_T^\varphi(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^S : \ (x, \varphi_i(S \cup (N \backslash T), V)_{i \in N \backslash T}) \in V(S \cup (N \backslash T))\}$$

для любых $S \subset T$. Таким образом, $V_T^\varphi(S)$ представляет собой S-сечение $V(S \cup (N \backslash T))$, когда координаты (выигрыши) всех игроков вне T зафиксированы на уровне выигрышей, предписываемых решением в подыгре $S \cup (N \backslash T)$.

Решение φ называется *согласованным*, если

$$\varphi_j(T, V_T^\varphi) = \varphi_j(N, V)$$

для всех игр (N, V) и всех $j \in T \subset N$.

Отметим, что B.STAB – это конечно же, согласованность в этом смысле.

Легко видеть, что если $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}^{nl}$, то редуцированные игры также лежат в соответствующем семействе игр. Здесь верхний индекс nl означает, что для рассматриваемых НТП игр выполнено условие безуровневости.

Определим искомое решение P индуктивно. Пусть $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}^{nl}$ – произвольная игра. Положим для $i \in N$

$$v_i = \max\{x : \ x \in V(i)\}.$$

Для дальнейшего изложения нам будет удобно положить также $\mu_i = 1$ для каждого i.

Теперь для каждых $i, j \in N$ определим

$$\mu_{ij} = \max\{\mu > 0 : \ \mu(\mu_i v_i, \mu_j v_j) \in V(i, j)\},$$

и $w^{ij} = \mu_{ij}(\mu_i v_i, \mu_j v_j) \in \partial V(i,j)$, т. е. w^{ij} является sq-пропорциональным решением арбитражной схемы $((v_i, v_j), V(i,j))$.

Далее, для любых $i, j, k \in N$ определим

$$\mu_{ijk} = \max\{\mu > 0 : \ \mu(\mu_i \mu_{ij} \mu_{ik} v_i, \mu_j \mu_{ij} \mu_{jk} v_j, \mu_k \mu_{ik} \mu_{jk} v_k) \in V(i,j,k)\}.$$

Тогда

$$w^{ijk} = \mu_{ijk}(\mu_i \mu_{ij} \mu_{ik} v_i, \mu_j \mu_{ij} \mu_{jk} v_j, \mu_k \mu_{ik} \mu_{jk} v_k) \in \partial V(i,j,k).$$

Для произвольного подмножества $S \subset N$ определяем

$$\mu_S = \max\{\mu > 0 : \ \mu((\prod_{T \neq S : i \in T \subset S} \mu_T v_i)_{i \in S}) \in V(S)\},$$

и

$$w^S = \mu_S((\prod_{T \neq S : i \in T \subset S} \mu_T v_i)_{i \in S}) \in \partial V(S).$$

Положим, наконец, $P(N, V) = w^N$.

Предложение 6.1. *Решение P обладает свойством согласованности.*

Доказательство. Нам достаточно проверить согласованность для $T = N \backslash \{m\}$ для произвольного игрока $m \in N$. В этом случае редуцированная игра определяется следующим образом:

$$V_T^P(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^S : \ (x, P_m(S \cup \{m\}, V)) \in V(S \cup \{m\})\}$$

для любых $S \subset N \backslash \{m\}$.

По определению

$$P_m(S \cup \{m\}, V) = \prod_{K : m \in K \subset S \cup \{m\}} \mu_K v_m.$$

Легко видеть, что для проверки согласованности P достаточно проверить, что

$$x = (\prod_{K : i \in K \subset S \cup \{m\}} \mu_K v_i)_{i \in S} \in V(S \cup \{m\}).$$

Это, однако, немедленно следует из определения решения. □

Очевидно также, что решение P ковариантно относительно шкал.

Теорема 6.1. *Существует единственное согласованное решение на $\mathfrak{G}_{N+}^{nl}$, совпадающее в случае НТП игр двух лиц с sq-пропорциональным решением. Этим решением является P.*

Доказательство. Доказательство практически повторяет доказательство Леммы 6.8 в [6], касающейся решения Калаи-Самета (мы остановимся на этом решении ниже в разделе 8). Пусть P и R – два решения, удовлетворяющих требуемым свойствам. Предположим, по индукции, что они совпадают для всех игр с не более, чем $n-1$ игроками. Пусть (N, V) – игра n лиц, и пусть $i, j \in N, i \neq j$.

Рассмотрим две редуцированные игры $(\{i,j\}, V^P_{\{i,j\}})$ и $(\{i,j\}, V^R_{\{i,j\}})$. Для упрощения обозначений, обозначим их через V^P и V^R. Ясно, что они совпадают для одноэлементных коалиций (по индукции, т. к. существенны только $n-1$ игроков). Следовательно, поскольку P является sq-пропорциональным для игр двух лиц, $P_i(V^P) \gtrless P_i(V^R)$ тогда и только тогда, когда $P_j(V^P) \gtrless P_j(V^R)$.

Далее, $P = R$ для игр двух лиц, а кроме того, и P, и R согласованы. Поэтому

$$P_i(V) = P_i(V^P) \gtrless P_i(V^R) = R_i(V^R) = R_i(V)$$

тогда и только тогда, когда $P_j(V) \gtrless R_j(V)$. Это верно для любых двух игроков, причем и $P(V)$, и $R(V)$ оптимальны по Парето. Следовательно, $P(V) = R(V)$. $\square$

Будем называть решение P *согласованным пропорциональным решением.*

Прежде чем сформулировать следствие из этой теоремы, напомним формулировки аксиом анонимности, ковариантности относительно шкал и сильной монотонности для случая НТП игр. (Аксиома оптимальности по Парето очевидна). Пусть F – решение на $\mathfrak{G}_{N+}^{nl}$.

Анонимность (AN). Пусть τ – произвольная перестановка множества N. Тогда τ индуцирует преобразование пространства $\mathbb{R}^N$, а значит и игры $(N, V) : \tau x = (x_{\tau^{-1}(i)})_{i \in N}$. Решение F называется анонимным, если для любой перестановки τ множества N имеет место равенство

$$\tau(F(V, N)) = F(N, \tau V).$$

Ковариантность относительно шкал (SC). Решение F называется ковариантным относительно шкал, если для любой игры (N, V) имеет место равенство $F(N, \lambda * V) = \lambda * F(N, V)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}^N_{++}$.

Сильная монотонность (SM). Если две игры (N, V) и (N, W) таковы, что $V(N) \supset W(N)$ и $V(S) = W(S)$ для всех $S \neq N$, то $F(V) \geq F(W)$.

Следствие 6.1. *Решение P является единственным согласованным решением на $\mathfrak{G}^{nl}_{N+}$, удовлетворяющим аксиомам PO, AN, SC и SM.*

Доказательство немедленно следует из согласованности, Предложения 5.2 и Теоремы 6.1.

7. Решение для НТП игр, инвариантное относительно пропорционального эксцесса

В [3] Е. Яновская определила значение для положительных ТП игр, инвариантное относительно пропорционального эксцесса, аналогично тому, как определяются ковариантные относительно сдвигов решения. В данном разделе мы обобщим одно из таких значений на случай НТП игр.

Напомним определение и некоторые свойства значения для положительных ТП игр, инвариантного относительно пропорционального эксцесса. Обозначим класс положительных ТП игр через $\mathcal{G}_+$. Через $\mathcal{G}_{N+} \subset \mathcal{G}_+$ будем обозначать класс положительных игр с множеством игроков N.

Значение Φ для класса $\mathcal{G}_{N+}$ назовем *инвариантным относительно пропорционального эксцесса*, если для двух произвольных игр (N, v), $(N, w) \in \mathcal{G}_{N+}$ и любых векторов выигрышей $x \in X(N, v), y \in X(N, w)$ из равенств

$$\frac{v(S)}{x(S)} = \frac{w(S)}{y(S)} \text{ для всех } S \subset N$$

следует

$$x = \Phi(N, v) \iff y = \Phi(N, w). \tag{7.1}$$

(Здесь $X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N_{++} : x(N) = v(N)\}$).

Очевидно, что определение (7.1) эквивалентно определению ковариантности относительно сдвига для случая классического эксцесса.

Очевидно, что для значений, инвариантных относительно пропорционального эксцесса, свойство линейности не выполняется. Поэтому заменим его более слабой аксиомой.

Ограниченная линейность. Значение Ψ для некоторого класса игр $\mathcal{G}_N$ называется *ограниченно линейным*, если для любых игр $(N, v_k) \in \mathcal{G}_N$ для $k = 1, \ldots, m$ с одним и тем же значением $\Psi(N, v_k) = x$ из того, что их линейная комбинация $(N, \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, принадлежит этому же классу $\mathcal{G}_N$, следует, что она имеет то же самое значение:

$$\Psi(N, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k) = x.$$

Свойство ограниченной линейности значения Ψ означает, что для каждого вектора выигрышей $x \in \mathbb{R}^N$ это значение линейно на подклассе игр V^x с постоянным значением x :

$$V^x = \{(N, v) \in \mathcal{G}_N \ : \Psi(N, v) = x\}.$$

Назовем подкласс игр $\mathcal{G}'_N \subset \mathcal{G}_N$ *замкнутым относительно ковариантных преобразований*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}'$ из этого класса игры $(N, av + b)$ также принадлежат этому классу для всех $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Следующая лемма проясняет связь между свойствами линейности и ограниченной линейности.

Лемма 7.1. *Если значение Ψ для класса игр $\mathcal{G}'_N$, замкнутого относительно ковариантных преобразований, удовлетворяет свойствам ограниченной линейности и ковариантности, то оно линейно.*

С помощью двух последних аксиом приведем аксиоматическую характеризацию одного значения для класса положительных игр.

Теорема 7.1. (Яновская, [3]). *Для того чтобы значение Ψ для класса положительных игр $\mathcal{G}_{N+}$ удовлетворяло аксиомам эффективности, анонимности, ограниченной линейности, положительной однородности и инвариантности относительно пропорционального эксцесса, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие неотрицательные и не тождественно равные нулю числа $w(s), s \leq n-1, n =$*

$|N|$, *что для каждой игры* $(N,v) \in \mathcal{G}_{N+}$

$$\Psi(N,v) = \arg \max_{x \in X(N,v)} \prod_{S \subsetneq N} x(S)^{w(s)v(S)}. \tag{7.2}$$

Заметим, что функция в правой части (7.2) непрерывна и вогнута, если $w(s)v(S) \geq 0$, и это неравенство строгое хотя бы для одного $s = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, максимум в (7.2) достигается в единственной *положительной* точке, и значение Ψ определено корректно.

Можно показать (см. упомянутое выше доказательство), что для каждой игры $(N,v) \in \mathcal{G}_{N+}$ значение Ψ можно представить в виде

$$\Psi(N,v) = \arg \max_{x \in X(N,v)} \sum_{S \subsetneq N} w(s)v(S) \ln x(S), \tag{7.3}$$

и, следовательно, вектор $x = \Psi(N,v)$ должен являться решением следующей системы уравнений:

$$\sum_{S:S \ni i} w(s) \frac{v(S)}{x(S)} = \sum_{S:S \ni j} w(s) \frac{v(S)}{x(S)} \text{ для всех } i,j \in N. \tag{7.4}$$

В случае $w(S) = 1 \; \forall \, S$ будем называть такое решение пропорционально инвариантным или кратко p.i-решением, а в общем случае системы весов w – p.i(w)-решением.

Теперь мы можем перейти к определению аналога этого решения для НТП игр.

Определение 7.1. *Решение* ψ *(возможно, многозначное) на* $\mathfrak{G}_{N+}$ *назовем инвариантным относительно пропорционального эксцесса, если для любых двух игр* $(N,V),(N,W) \in \mathfrak{G}_{N+}$ *и любых* $x \in \partial V_+(N)$, $y \in \partial W_+(N)$ *из равенств*

$$h_S(V,x) = h_S(W,y) \;\; \forall S \subset N$$

следует

$$x \in \psi(N,V) \iff y \in \psi(N,W).$$

Прежде чем перейти к вопросу существования инвариантного относительно пропорционального эксцесса решения для НТП игр, покажем, что sq-пропорциональное решение является таковым в случае арбитражных схем.

Предложение 7.1. *Status quo-пропорциональное решение для арбитражных схем инвариантно относительно пропорционального эксцесса.*

Доказательство. Пусть (q, Q) и (q^1, Q^1) – две арбитражные схемы, V и V^1 – соответствующие НТП игры (заметим, что $V_S = P_{q^S}$, где $P_z = \{y \in \mathbb{R}^S : y \leq z\}$ для $z \in \mathbb{R}^S_{++}$). Пусть $x \in \partial Q$, $y \in \partial Q^1$, $x = \mu(q, Q)q$ и $h_S(V, x) = h_S(V^1, y)$ для любой $S \subset N$. Ясно, что $h_S(V, x) = 1/\mu(q, Q)$. Тогда $h_S(V^1, y) = 1/\mu(q, Q)$ для каждого $S \subset N$. В частности, $y_1 = \mu(q, Q)q^1_1, \ldots, y_n = \mu(q, Q)q^1_n$. Так как $y \in \partial Q^1$, то $\mu(q, Q) = \mu(q^1, Q^1)$, и y является sq-пропорциональным решением для арбитражной схемы (q^1, Q^1). □

В основу определения инвариантного относительно пропорционального эксцесса решения для НТП игр мы положим равенство (7.4).

Теорема 7.2. *Для любой игры $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}$ существует $x \in \partial V_+(N)$, являющийся решением системы*

$$\sum_{S: i \in S} h_S(V, x) = \sum_{S: j \in S} h_S(V, x) \quad \forall i, j \in N, \tag{7.5}$$

а значит, существует и инвариантное относительно пропорционального эксцесса решение игры V.

Доказательство. Отметим, что если x является решением указанной системы (при этом не обязательно даже, чтобы $x \in \partial V_+(N)$), то λx также является ее решением для любого $\lambda > 0$.

Поэтому, не умаляя общности, мы можем считать, что множество $\partial V_+(N)$ представляет собой стандартный симплекс, т. е.

$$\partial V_+(N) = T^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_i y_i = 1\}.$$

Рассмотрим произвольную игру $(N, V) \in \mathfrak{G}_{N+}$. Для любого вектора $y \in T^{n-1}$ и любой коалиции $S \neq \emptyset$ найдется единственное положительное число $\lambda^{(S)}_y$ такое, что $\lambda^{(S)}_y y \in \partial V(S)$. Заметим, что $\lambda^{(S)}_y$ непрерывно зависит от y.

Пусть $y \in \partial V_+(N)$. Определим положительную ТП игру $V_y \in \mathfrak{G}_{N+}$, в которой для любой коалиции $S \neq \emptyset$

$$\partial V_y(S) = \{z \in \mathbb{R}^S_+ : e_S(z - \lambda^{(S)}_y y) = 0\} - \mathbb{R}^S_+.$$

(Напомним, что мы именно так определяли НТП игру, соответствующую ТП случаю для игр из $\mathfrak{G}_{N+}$.) Иными словами, часть границы множества $V_y(S)$, лежащая в $\mathbb{R}^S_+$, представляет собой пересечение гиперплоскости в $\mathbb{R}^S$ с единичной нормалью, проходящей через точку $\lambda^{(S)}_y y$, и положительного ортанта $\mathbb{R}^S_+$. Ясно, что V_y можно рассматривать как элемент пространства $\mathbb{R}^{2^n}_+$, причем V_y как элемент пространства $\mathbb{R}^{2^n}_+$ непрерывно зависит от y.

В этом случае для игры V_y определено единственное p.i.-значение, которое мы обозначим через $\Psi(V_y)$.

В соответствии с (7.3) $\Psi(V_y)$ является единственным решением задачи максимизации функции

$$Q(N, V_y) = \sum_{S \subsetneqq N} V_y(S) \ln z(S)$$

на множестве $X(N, V_y) = \{z : z \in T^{n-1}\}$. Заметим, что если хотя бы для одного $i \in N$ $z_i \to 0$, то $Q(N, V_y) \to -\infty$.

Далее, поскольку для любого $z \in T^{n-1}$ и любой коалиции S мы имеем $z(S) \leq 1$, то все слагаемые в этой сумме неположительны (поскольку игра V_y положительна). Поэтому для любого $y \in T^{n-1}$ мы имеем

$$\max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} V_y(S) \ln z(S) \geq \max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} (\max_{y \in T^{n-1}} V_y(S)) \ln z(S) \geq$$

$$\geq \max_{z \in T^{n-1}} \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln z(S) \geq \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln(s/n) = a,$$

где $v(S) = \max\limits_{y \in T^{n-1}} V_y(S) > 0, s = \mid S \mid$.

Следовательно, для любого $y \in T^{n-1}$ решение задачи максимизации функции $Q(N, V_y)$ лежит в (выпуклом) компакте

$$T_a = \{z \in T^{n-1} : \sum_{S \subsetneqq N} v(S) \ln z(S) \geq a\} \subset T^{n-1}_o,$$

где T^{n-1}_o обозначает относительную внутренность множества T^{n-1}.

Нетрудно заметить, что это решение, как решение соответствующей системы (7.4), непрерывно зависит от y на T_a.

Таким образом мы построили непрерывное отображение симплекса T^{n-1} в себя: $y \mapsto \Psi(V_y)$. Следовательно, по теореме Брауэра о неподвижной точке найдется такой y, что $y = \Psi(V_y)$.

Покажем теперь, что точка y определяет инвариантное относительно пропорционального эксцесса решение игры V. Действительно, с одной стороны, $\gamma_S(V(S), y) = 1/\lambda_y^{(S)}$, но, с другой, поскольку для пропорционального эксцесса выполнена аксиома пропорциональности для ТП игр, то $h_S(V_y(S), y) = \frac{e_S\lambda_y^{(S)}y}{e_Sy}$, а значит y является решением системы (7.5). $\square$

Таким образом мы построили решение ψ на $\mathfrak{G}_{N+}$, ставящее в соответствие каждой игре V множество $\psi(V)$ решений системы (7.5), которое мы далее будем также называть p.i-решением. Обратим внимание на то, что это решение, в отличие от ТП случая, не обязано быть одноточечным. (Аналогично ТП случаю решение, соответствующее системе весов w, которое также, очевидно, существует, назовем p.i(w)-решением).

Следующие предложения немедленно следуют из определения и предыдущей теоремы.

Предложение 7.2. *Если $V \in \mathfrak{G}_{N+}$ соответствует ТП игре, то $\psi(V) = \Psi(v)$.*

Предложение 7.3. *P.i-решение ψ обладает свойствами эффективности, анонимности и положительной однородности.*

Для того, чтобы сформулировать свойство, аналогичное свойству ограниченной линейности для ТП игр (см. выше), введем операцию на $\mathfrak{G}_{N+}$, которую мы обозначим через $\oplus_d$ и определим следующим образом. Пусть $A, B \in \mathfrak{G}_{N+}^S$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^S$ существует ровно две точки $y \in \partial A$ и $z \in \partial B$ такие, что $y = \lambda_x x$ и $z = \mu_x x$ для некоторых положительных чисел λ_x и μ_x. Тогда определим *сумму по направлениям* множеств A и B как множество

$$A \oplus_d B = comp\{\bigcup_x (\lambda_x + \mu_x)x\},$$

где $compF$ обозначает замкнутую исчерпывающую оболочку множества F. (Заметим, что поскольку $\lambda_{tx} = \lambda_x/t$, то объединение можно брать не по всем $x \in \mathbb{R}_+$, а только по $x \in T^{n-1}$.)

Пусть теперь $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$. Определим игру $V \oplus_d W$, положив для любой коалиции S

$$(V \oplus_d W)(S) = V(S) \oplus_d W(S).$$

Очевидно, что $V \oplus_d W \in \mathfrak{G}_{N+}$. Легко видеть также, что в случае ТП игр сумма по направлениям соответствует сложению значений характеристических функций. Наконец, из определения сложения по направлениям следует, что

$$h_S(V \oplus_d W, x) = h_S(V, x) + h_S(W, x).$$

Замечание 7.1. Следует подчеркнуть, что рассматриваемое сложение по направлениям отличается от *инверсной суммы* звездных множеств, при которой происходит сложение калибровочных функций соответствующих множеств. Определение инверсной суммы можно найти, например, в [3].

Теперь мы можем сформулировать аналог свойства ограниченной линейности, при этом нас будут интересовать суммы вида $aV \oplus_d (1 - a)W$ для $0 < a < 1$.

Предложение 7.4. *Пусть* $V, W \in \mathfrak{G}_{N+}$, *и пусть* $x \in \psi(V) \bigcap \psi(W)$. *Тогда* $x \in \psi(aV \oplus_d (1 - a)W)$ *для любого* $0 < a < 1$.

Доказательство немедленно следует из определений и упомянутых выше свойств сложения по направлениям.

8. Логарифмическое преобразование полезностей и некоторые соотношения между решениями

В заключение мы кратко, используя логарифмическое преобразование полезностей игроков, рассмотрим некоторые простые соотношения между арбитражными решениями и решениями НТП игр.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ фиксировано и $x \in \mathbb{R}^N_{++}$. Обозначим через

$$LN(x) = (\ln(x_1), \ln(x_2), \ldots, \ln(x_n)).$$

Мы можем определить теперь арбитражную схему

$$LN(q, Q) = (LN(q), LN(Q)),$$

полагая

$$LN(Q) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) : \exists x \in Q : y \leq LN(x)\}.$$

Заметим, что для того, чтобы сохранить положительность, мы должны ограничиться арбитражными схемами (q, Q) с $q \geq e_N$ и q-исчерпывающими множествами Q. Поэтому если мы обозначим $Q_q^+ = comp(Q \cap (q + \mathbb{R}_+^N))$, определим $LN(q, Q) = (r, R)$, где $r = LN(q)$ и $R = LN(Q_q^+)$
$\cap\, \mathbb{R}_+^N$, то мы избежим возникающей проблемы.

Однако для нашего обсуждения это не является центральным вопросом, поскольку ковариантность относительно шкал решения Нэша и sq-пропорционального решения позволяют рассматривать арбитражные схемы, обладающие только что упомянутыми свойствами. Кроме того, наибольший интерес для нас представляет структура соотношений между решениями.

Рассмотрим решение Нэша. Очевидно, что для любого $Q \in \Omega_0^N$

$$LN(NS(Q)) = US(LN(Q)),$$

где US – (симметричное) утилитарное решение, т. е. решение, которое ставит в соответствие каждой арбитражной схеме точку множества достижимых векторов полезностей, максимизирующую суммарную полезность игроков.

(Здесь заметим следующее. Арбитражное решение Нэша определено для арбитражных схем с выпуклыми множествами Q и (сильно) оптимально по Парето для каждой арбитражной схемы. Поэтому, в силу вогнутости ln, все (сильно) оптимальные по Парето точки переходят в крайние точки множества $LN(Q)$. Поэтому утилитарное решение будет определяться однозначно.)

Напомним также, что утилитраное решение не зависит от точки *status quo* и может быть охарактеризовано с помощью аксиом оптимальности по Парето, симметричности, положительной однородности и аддитивности (см., например, [15]).

Рассмотрим теперь sq-пропорциональное решение. Легко видеть, что

$$LN(PS(q,Q)) = ES(LN(q,Q)),$$

где ES – эгалитарное решение, определенное для арбитражной схемы (r,R) как

$$ES(r,R) = r + \delta e_N,$$

где $\delta = \max\{t > 0 : \ r + te_N \in R\}$.

Действительно, пусть $x = PS(q,Q)$. Это означает, что $x = \mu q$, где $\mu = \max\{t > 0 : \ tq \in Q\}$. Тогда $\ln x_i = \ln \mu + \ln q_i$ для любого i. Поэтому $z = LN(x) = LN(q) + \delta e_N$, где $\delta = \ln \mu$.

Эгалитарное решение для арбитражных схем с $q = \mathbf{0}$ и выпуклыми исчерпывающими множествами Q характеризуется аксиомами (слабой) оптимальности по Парето, сильной монотонности, симметричности и положительной однородности (см. [9]). (Определение решения Нэша и эгалитраного решения для $q \neq \mathbf{0}$ требует аксиомы сдвига).

Мы уже отмечали выше, что арбитражное решение Нэша и sq-пропорциональное решение характеризуются одной и той же системой аксиом, но для различных семейств арбитражных схем.

Обратимся теперь к введенному выше согласованному пропорциональному решению. Нетрудно проверить, что при логарифмическом преобразовании полезностей оно переходит в симметричное эгалитарное решение Калаи-Самета.

А именно, для любой игры $(N,V) \in \mathfrak{G}^{nl}_{N+}$ мы можем определить НТП игру $LN(V)$ следующим образом:

$$LN(V)(S) = \{y \in \mathbb{R}^S : \exists x \in V_{++}(S) : y \leq LN(x)\}.$$

Напомним определение симметричного эгалитарного решения E (см. [10]).

Для данной игры V определим вначале $D(V,\emptyset) = 0$ и $Z(V,\emptyset) = 0$. Далее для каждой коалиции S

$$Z(V,S) = \sum_{T \subsetneq S} D(V,T)$$

и

$$D(V,S) = e_S \max\{t : \ (Z(V,S) + te_S) \in V(S)\}.$$

Наконец, определим

$$E(V) = \sum_{S \subset N} D(V, S).$$

Следующее предложение немедленно следует из определений согласованного пропорционального решения и решения Калаи-Самета и равенства $LN(PS(q, Q)) = ES(LN(q, Q))$.

Предложение 8.1. *LN(P(V))=E(LN(V)).*

Следующие свойства также следуют из определений.

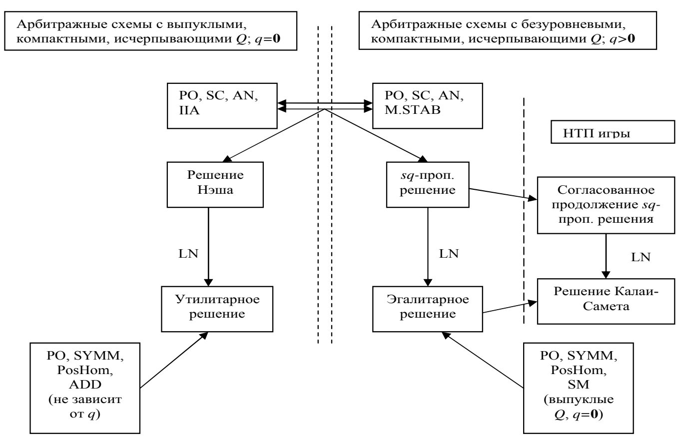

Рис. 2. Соотношения между арбитражными решениями

Предложение 8.2. *(1) Согласованное пропорциональное решение обладает свойством сильной независимости от посторонних альтернатив, т. е. для двух игр V, W и коалиции S, если $V(T) = W(T)$ для любой $T \neq S, W(S) \subset V(S)$, и $P(S,V) \in W(S)$, то $P(V) = P(W)$.*

(2) Если $V(N) = W(N)$ и для любого $i \in N, P(N \setminus \{i\}, V) = P(N \setminus \{i\}, W)$, то $P(V) = P(W)$.

В заключение мы приведем схему (см. Рис. 2), иллюстрирующую приведенные связи между арбитражными решениями и указанными решениями НТП игр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Печерский С.Л. *Функции эксцесса для кооперативных игр без побочных платежей: аксиоматический подход.* Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. 2000. СПб:Наука. С. 65–82.

2. Печерский С.Л. , *Калибровочный эксцесс для игр с нетрансферабельными полезностями: альтернативный подход.* Экономические исследования: теория и приложения. 2002. СПб: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге. С. 229–258.

3. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге. 2004.

4. Рокафеллар Р.Т. *Выпуклый анализ.* М: Мир. 1973.

5. Feldman B., *The proportional value of a cooperative game.* Mimeo. Seudder Kemper Investments, Chicago. 1999.

6. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989 V. 57. P. 589–614.

7. Herrero C., Villar A. *The rights egalitarian solution for NTU sharing problem* // Int. J. of Game Theory. 2009. V. 39. P. 137–150.

8. Kalai E. *Excess functions for cooperative games without sidepayments* // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 29. No. 1. P. 60–71.
9. Kalai E. *Proportional solutions to bargaining situations: interpersonal utility comparisions* // Econometrica. 1977. V. 45. P. 1623–1630.
10. Kalai E., Samet D. *Monotonic solutions to general cooperative games* // Econometrica. 1985. V. 53. P. 307–327.
11. Kalai D., Smorodinsky M., *Other solutions to Nash's bargaining problem* // Econometrica. 1975. V. 45. P. 513–518.
12. Lemaire J. *Cooperative game theory and its insurance applications* // Austin Bull. 1991. V. 21. P. 17–40.
13. Lensberg T. *Stability and the Nash solution* // J. Econ. Theory. 1988. V. 45. P. 330–341.
14. Ortmann K. *The proportional value for positive cooperative games* // Math. Meth. Oper. Res. 2000. V. 51. P. 235–248.
15. Pechersky S. *The Linear Bargaining Solution* // Russian Contribution to Game Theory and Equilibrium Theory. Berlin: Springer. NY: Heidelberg. 2006. P. 153–164.

PROPORTIONAL SOLUTIONS FOR BARGAINING GAMES AND NTU GAMES

Sergei L. Pechersky, St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, Dr.Sc., prof. (specherv@emi.nw.ru).

Abstract: The paper studies the properties of proportional solutions for bargaining games and NTU games based on the proportional excess. The *status quo*-proportional solution for bargaining games is defind. It's consistency (in Hart–Mas-Collel sense) is proved, and an axiomatic characterization with consistency property is given. A consistent continuatuon of the solution to NTU game is defind, and the uniqueness theorem is proved. Some relations between bargaining and NTU solutions are given.
Keywords: bargaining games, NTU games, proportional excess, *status quo*-proportional solution, consistency.