Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 106–136

УДК 519.833.5
ББК 210.301

ЛОРЕНЦ-МАКСИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИГР С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ

Елена Б. Яновская
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Рассматриваются кооперативные игры с ограниченной кооперацией, задаваемой произвольным набором допустимых коалиций, включающим большую коалицию всех игроков. Для этого класса игр определяется уравнивающее решение (ESOS) [1] таким же способом, как и для произвольных игр с трансферабельными полезностями. Показывается, что если уравнивающее решение сбалансированной игры с ограниченной кооперацией пересекается с ее с-ядром, то оно является одноточечным и доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра, т. е. Лоренц-максимальным решением.

Более детально исследуется класс игр с коалиционной структурой, в которых допустимыми коалициями являются коалиции некоторого разбиения множеств игроков, их объединения и все подкоалиции каждой коалиции разбиения. Для таких игр определяется понятие выпуклости и определяется два типа эгалитарных решений – Лоренц-максимальное и Лоренц-максимальное типа Камийо – для выпуклых игр с коалиционной структурой. Приводятся аксиоматические характеризации обоих эгалитарных решений.

Ключевые слова: кооперативная игра, ограниченная кооперация, уравнивающее решение, эгалитарное решение Дутта–Рэя, Лоренц-максимальное решение.

1. Введение

В классических кооперативных играх с трансферабельными полезностями (N, v) характеристическая функция v определена на множестве всех коалиций, т. е. подмножеств множества игроков N. На практике, однако, не все коалиции могут быть образованы по тем или иным политическим, экономическим или техническим причинам. Наиболее популярной является ситуация, в которой задано разбиение множества игроков, и подкоалиции различных коалиций этого разбиения не могут быть образованы. Обобщением этой ситуации является иерархия управлений, задаваемая разбиениями множества игроков, содержащимися друг в друге.

Таким образом, одним из дальнейших направлений исследования кооперативных игр следует рассматривать их расширения на случай задания характеристической функции на произвольном наборе коалиций множества игроков. Такой класс игр будет называться *играми с ограниченной кооперацией.*

Теория решений для игр с ограниченной кооперацией началась с исследования игр с *коалиционной структурой*, определяемой некоторым разбиением множества игроков. Для таких игр были определены решения, обобщающие значение Шепли ([11], [9] и др.). Однако характеристические функции определялись на множестве всех коалиций, хотя и не все коалиции участвовали в определении решений.

В статье предлагается другой подход. Рассматриваются произвольные наборы допустимых коалиций, и только на них определяется характеристическая функция. Приведем формальное определение.

Определение 1.1. *Игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор допустимых коалиций, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ является классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП).

Решения классических ТП игр можно адаптировать для игр с ограниченной кооперацией двумя способами: или прямым переносом определений на игры с ограниченной кооперацией, если это возможно, или доопределением характеристической функции на всех недопустимых коалициях и затем применением классического решения для получившейся ТП игры.

Для значения Шепли и других линейных значений первый подход невозможен, так как определяющие их формулы для каждой игры зависят от значений характеристической функции на всех коалициях.

С другой стороны, пред n-ядро и решение Дутта-Рэя допускают переформулировки на случай игр с ограниченной кооперацией.

Эгалитарное решение Дутта-Рэя [5] определялось авторами как отображение, сопоставляющее ТП игре подмножество недоминируемых по Лоренцу векторов выигрышей из Лоренц-ядра. Лоренц-ядро игры сбалансированной игры содержит с-ядро, но в общем случае может оказаться пустым. Не вдаваясь в определение Лоренц-ядра, в которое заложена концепция эгалитаризма, отметим только, что для класса выпуклых ТП игр оно оказывается весьма наглядным. Каждой выпуклой ТП игре оно сопоставляет единственный вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра. Однако не любая сбалансированная игра обладает таким вектором в с-ядре, хотя может обладать эгалитарным решением Дутта-Рэя, не принадлежащим с-ядру.

В данной работе эгалитарная концепция решений ТП игр будет рассматриваться только в связи с с-ядром: а именно, эгалитарным решением сбалансированной игры будет называться вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу остальные векторы из с-ядра. Область существования такого решения оказывается более широкой, чем класс выпуклых ТП игр, но уже, чем класс всех сбалансированных игр. Следуя терминологии статьи [8], мы будем далее называть рассматриваемое решение Лоренц-максимальным.

Оказывается, что это решение можно определить и для игр с ограниченной кооперацией, многие его свойства сохраняются и для такой модели. Действительно, для игр с ограниченной кооперацией понятие с-ядра уже было определено,(см., напр, [10]), то на класс игр с ограниченной кооперацией и для игр с непустым с-ядром определение Лоренц-максимального решения переносится непосредственно.

Поэтому нахождение классов игр с ограниченной кооперацией, для которых Лоренц-максимальное решение не пусто, является основной целью данной статьи. Эта задача решается с помощью уравнивающего решения (Equal Split-Off Set – ESOS [1]), являющегося результатом применения алгоритма Дутта–Рэя [4] для любой ТП игры, и, совпадающего с Лоренц-максимальным решением и с решением Дутта–Рэя на классе выпуклых игр.

Упомянутый алгоритм может быть применен и к произвольным играм с ограниченной кооперацией, его результатом является некоторое, вообще говоря, многозначное решение. Однако даже если уравнивающее решение оказывается одноточечным, оно может не принадлежать с-ядру. С другой стороны, если с-ядро (классической) сбалансированной ТП игры совпадает с с-ядром некоторой выпуклой игры, то для такой игры Лоренц-максимальное решение существует. Таким образом, область определения решения Дутта-Рэя в классическом случае шире, чем класс выпуклых игр. Поэтому следует ожидать, что и для некоторых классов игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром Лоренц-максимальное решение существует.

Понятие выпуклости для игр с ограниченной кооперацией не определено, ввиду того что для допустимых коалиций S, T их объединение или пересечение могут оказаться не допустимо. Поэтому для класса игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром используется подход определения Лоренц-максимального решения с помощью уравнивающего решения. Именно, в этом классе находятся те игры, для которых уравнивающее решение состоит из единственного вектора, принадлежащего с-ядру (раздел 3). Показывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы результат алгоритма для рассматриваемой игры пересекался с ее с-ядром.

Более детально исследуются игры с коалиционными структурами, в которых набор допустимых коалиций состоит из коалиций разбиения множества игроков, их объединений и всех подкоалиций коалиций разбиения. Каждая игра с коалиционной структурой определяет *внешнюю* ТП игру, игроками которой являются коалиции разбиения и *внутренние* ТП игры, являющиеся подыграми исходной игры на коалициях разбиения. Показывается, что если все эти игры выпуклые, в исходной игре существует Лоренц-максимальное решение. Приводится его аксиоматическая характеризация с помощью свойств согласованности по Дэвису–Машлеру и совпадения решения для игр двух лиц с решением ограниченного эгалитаризма. Этот результат является непосредственным обобщением одной из аксиоматизаций решения эгалитарного Дутта–Рэя для выпуклых ТП игр [4].

Для игр с коалиционными структурами строится еще одно эгалитарное решение, принимающее в расчет неравноправное значение коалиций разбиения (верхний уровень) и их подкоалиций (нижний уровень). Построение этого решения аналогично обобщению Камийо [9] значения Шепли на игры с коалиционными структурами. Построение решения для каждой игры состоит из двух этапов: на первом шаге находится Лоренц-максимальное решение внешней игры, а на втором шаге находятся такие же решения подыгр на каждой коалиции разбиения, в которых значения больших коалиций заменены на соответствующую компоненту Лоренц-максимального решения внешней игры. Набор этих решений определяет решение исходной игры. Приводится аксиоматическая характеризация эгалитарного решения типа Камийо. Одна из аксиом, характеризующих решение, является ослаблением свойства согласованности, а вторая, наоборот, усиливает аксиому ограниченного эгалитаризма, распространяя ее на игры значения выигрышей коалиций для игр с коалиционными структурами, состоящими из двух коалиций.

Доказательства вспомогательных утверждений и один из примеров помещены в Приложении.

2. Эгалитарные решения кооперативных игр

2.1. Кооперативные игры с трансферабельными полезностями

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП) называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, удовлетворяющая условию $v(\emptyset) = 0$.

Для каждой ТП игры (N, v) множество *допустимых* векторов выигрышей обозначим через

$$X(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) \le v(N)\}, \tag{2.1}$$

а множество *эффективных* векторов выигрышей через

$$X^*(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) = v(N)\}. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathcal{G}_N$ класс всех ТП игр с множеством игроков N.

Определение 2.1. *Решением для класса $\mathcal{G}_N$ называется такое отображение $\sigma : \mathcal{G}_N \to \mathbb{R}^N$, что из $(N,v) \in \mathcal{G}_N$ следует $\sigma(N,v) \subset X(N,v,\Omega)$.*

Обозначим через $\mathcal{G}_N^b$ класс всех сбалансированных ТП игр с множеством игроков N, и пусть $\mathcal{G}^b = \bigcup\limits_{N \subset \mathcal{N}} \mathcal{G}_N^b$. С-ядро игры $(N,v) \in \mathcal{G}_N^b$ обозначим через $C(N,v)$.

Определение 2.2. *Решение на классе сбалансированных игр $\mathcal{G}_b$ называется Лоренц-максимальным решением ($L_{\max}$), если оно сопоставляет игре $(N,v) \in \mathcal{G}_N^b$ вектор $x = L_{\max}(N,v) \in C(N,v)$, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра.*

Очевидно, что Лоренц-максимальное решение существует не для всех сбалансированных игр, но если оно существует, то является одноточечным.

В работе [5] авторы определили эгалитарное решение для ТП игр, которое также может оказаться пустым для некоторых игр:

Определение 2.3. ([4], [5]) *Эгалитарным решением ТП игры называется множество ее векторов выигрышей из Лоренц-ядра*[1]*, не доминируемых по Лоренцу остальными векторами из этого ядра.*

В этой же статье они показали, что если эгалитарное решение существует, то оно одноточечно, и на классе выпуклых игр оно совпадает с Лоренц-максимальным решением, которое существует и единственно в этом классе.

Кроме того, они построили алгоритм нахождения эгалитарного решения в классе выпуклых игр. Этот алгоритм может быть применен к произвольной ТП игре, и результат работы этого алгоритма

[1] Определение Лоренц-ядра имеется в цитируемых статьях. Здесь оно не приводится, так как далее употребляться не будет.

приводит к еще одному эгалитарному решению, которое уже не пусто для всех ТП игр, но, в общем случае является многозначным:

Определение 2.4. *Уравнивающее решение (Equal Split Off Set) для класса $\mathcal{G}$ сопоставляет каждой ТП игре (N, v) множество $ESOS(N, v) \subset X^*(N, v)$, такое что $x \in ESOS(N, v)$ в том и только том случае, если*

$$x = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{T_2}, \dots \underbrace{a_k \dots, a_m}_{T_m}), \tag{2.3}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \subset N} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \dots, m$, *где*

$$v^j(S) = v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i\right) \tag{2.4}$$

для $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i$.

Таким образом, Дутта и Рэй в [5] доказали совпадение на классе выпуклых ТП игр трех решений: эгалитарного, Лоренц-максимального решения и уравнивающего решения.

В данной статье мы будем рассматривать Лоренц-максимальное решение на подклассах сбалансированных не выпуклых игр, и на классе выпуклых игр с ограниченной кооперацией.

Начнем с определения класса выпуклых игр. ТП игра (N, v) называется *выпуклой*, если для любых коалиций $S, T \subset N$ справедливо неравенство

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \tag{2.5}$$

Класс всех выпуклых ТП игр с произвольным *универсальным* множеством игроков $\mathcal{N}$ обозначим через $\mathcal{G}^c$. Если неравенства (2.5) выполняются только для непересекающихся коалиций $S \cap T = \emptyset$, мы получаем класс *супераддитивных* игр. Очевидно для игр двух лиц эти классы совпадают. Для класса супераддитивных игр известно решение *ограниченного эгалитаризма* (CE) Это решение сопоставляет каждой супераддитивной игре двух лиц (N, v), $N = \{i, j\}$ ближайший к диагонали вектор из с-ядра:

$$x = (x_i, x_j) = CE(N, v) \iff x \in C(N, v), x_i < x_j \rightarrow x_j = v(\{j\}). \tag{2.6}$$

Из Определения 2.2 следует, что Лоренц-максимальное решение зависит только от с-ядра игры. Поэтому оно существует и для более широких классов игр, чем класс выпуклых игр. Примером таких игр являются k-выпуклые игры [3]. Кроме того, существуют сбалансированные игры с одноточечным с-ядром, по определению являющимся $L_{\max}$-решением, но для которых уравнивающее решение не пересекается с с-ядром.

Задачу описания подклассов класса сбалансированных ТП игр, для которых существует Лоренц-максимальное решение можно сформулировать и для игр с ограничениями на кооперацию и непустыми с-ядрами. Она оказывается более сложной, так как характеристическая функция задается на произвольном наборе коалиций, и решение зависит не только от значений характеристической функции, но и от самого набора допустимых коалиций. Ее частичное решение будет приведено в следующем параграфе.

2.2. Игры с ограниченной кооперацией

Обозначим через $\mathcal{G}^r_N$ класс всех игр с ограниченной кооперацией и множеством игроков N. Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Как и для ТП игр, это означает, что если игра $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, то $N \subset \mathcal{N}$. Так как все последующие результаты (кроме раздела 4) будут справедливы для произвольного универсального множества игроков, будем обозначать класс игр $\mathcal{G}^r = \bigcup\limits_{N \subset \mathcal{N}} \mathcal{G}^r_N$ не выделяя универсальное множество игроков $\mathcal{N}$.

Для каждой игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией множества *допустимых* векторов и *эффективных векторов выигрышей* определяются так же, как и для ТП игр (2.1),(2.2), так как эти определения не зависят от наборов допустимых коалиций. Аналогично классическому случаю ТП игр определяются и *решения игр с ограниченной кооперацией.*

с-ядром игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) [10] называется множество

$$C(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \,|\, x(S) \geq v(S) \text{ для всех } S \in \Omega\}.$$

Если в игре с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром существует вектор, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра, мы будем называть этот вектор *Лоренц-максимальным решением* $L_{\max}$, как и для классических ТП игр.

Уравнивающее решение для класса игр с ограниченной кооперацией определяется аналогично Определению 2.5 для ТП игр, однако на каждом шаге алгоритма изменяется набор допустимых коалиций, поэтому приведем версию Определения 2.5 для игр с ограниченной кооперацией.

Определение 2.5. *Уравнивающее решение (Equal Split Off Set) для класса $\mathcal{G}_N^r$ сопоставляет каждой игре (N, v, Ω) из этого класса множество $ESOS(N, v, \Omega) \subset X^*(N, v)$, такое что $x \in ESOS(N, v, \Omega)$ в том и только том случае, если*

$$x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots \underbrace{a_k \ldots, a_m}_{T_m}), \tag{2.7}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \in \Omega} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{\substack{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i \\ \cup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \in \Omega}} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \ldots, m$,

$$v^j(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \notin \Omega, \\ v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i\right), & \text{если } \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \in \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

для $S \in \Omega$, $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_i$.

Заметим, что ввиду предположения $N \in \Omega$, Определение 2.5 корректно, и для каждой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ алгоритм (2.7) дает определение непустого конечнозначного решения.

Однако, как и для классического случая ТП игр, не для всех игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром уравнивающее решение пересекается с с-ядром.

В следующем разделе для игр с ограниченной кооперацией и с непустым с-ядром будут даны два способа проверки совпадения уравнивающего решения с Лоренц-максимальным решением.

3. Лоренц-максимальное решение для игр с ограниченной кооперацией

3.1. Определение и существование Лоренц-максимального решения для игр с ограниченной кооперацией

В этом параграфе мы будем рассматривать класс игр с $\mathcal{G}_c^r$ ограниченной кооперацией и непустыми с-ядрами.

Известно, что не все сбалансированные ТП игры обладают Лоренц-максимальным решением. Очевидно, аналогичный результат имеет место и для игр с ограничениями и непустыми с-ядрами. Следовательно, решение, задаваемое Определением 2.2, не удовлетворяет условию непустоты. Будем пытаться найти подкласс класса $\mathcal{G}_c^r$, для которого Лоренц-максимальное решение существует, с помощью уравнивающего решения для игр с ограниченной кооперацией, а именно, выяснением условий, при которых оно совпадает с Лоренц-максимальным решением.

Определим следующий класс $\mathcal{G}_{ec}^r \subset \mathcal{G}_c^r$ игр с ограниченной кооперацией:

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{ec}^r \iff ESOS(N, v, \Omega) \cap C(N, v, \Omega) \neq \emptyset,$$

и, соответственно,обозначим через $\mathcal{G}_{ec_N}^r \subset \mathcal{G}_{ec}^r$ его подкласс с множеством игроков N.

Напомним определение доминирования по Лоренцу. Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ через x^* обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами x, но расположенными в порядке возрастания: $x_1^* \leq x_2^* \leq \ldots \leq x_n^*, n = |N|$. *Кривой Лоренца* вектора x называется вектор $L(x) \in \mathbb{R}^N$, компоненты которого равны $L_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*, k = 1, \ldots, n$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$. Вектор x *доминирует по Лоренцу* вектор y, $x \succ_{Lor} y$, если $L(x) \geq L(y)$, и $L(x) \neq L(y)$.

Приведем несколько свойств доминирования по Лоренцу.

Предложение 3.1. *Пусть $y \in \mathbb{R}^N$ – произвольный вектор, и для некоторых $1 \leq j_1 < j_2 \leq |N|$ $L_{j_1}(y) = a < b = L_{j_2}(y)$. Тогда для всех $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) \leq a + (b - a) \cdot \frac{j - j_1}{j_2 - j_1}$.*

Лемма 3.1. *Пусть* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ *– произвольная игра,* $x \in ESOS$ (N, v, Ω)*. Тогда* $x \succ_{Lor} y$ *для всех* $y \in X(N, v)$*, таких что* $L(y) \neq L(x)$ *и* $y(R_k) \geq v(R_k)$ *для* $k = 1, \ldots, m$*, где вектор* x *имеет представление (2.7), а* $R_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} T_j$*.*

Следствие 3.1. *Если для игры* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{ec}^r$ *вектор* $x \in ESOS(N, v, \Omega)$ $\cap C(N, v, \Omega)$*, то* $x \succ_{Lor} y$ *для всех* $y \in C(N, v, \Omega), y \neq x$

Следствие 3.1 показывает, что в классе $\mathcal{G}_{ec}^r$ уравнивающее решение совпадает с $L_{\max}$-решением, и в этом классе Лоренц-максимальное решение не пусто.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$ – произвольный вектор. Обозначим через $\mathcal{G}_N^{rx} \subset \mathcal{G}_{ec_N}^r$ класс игр, для которых $x = L_{\max}(N, v, \Omega)$.

Представим x в виде

$$x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots \underbrace{a_k \ldots, a_m}_{T_m}), \tag{3.1}$$

где $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$, и обозначим $R_j = \bigcup\limits_{l=1}^{j} T_l$, $j = 1, \ldots, m$.

Тогда классы $\mathcal{G}_N^{rx}$ можно охарактеризовать следующим образом:

Предложение 3.2. *Для того чтобы игра* (N, v, Ω) *принадлежала классу* $\mathcal{G}_N^{rx}$ *необходимо и достаточно выполнение равенств* $v(R_j) = x(R_j), j = 1, \ldots, m$*, и неравенств* $v(S) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} a_j s_j$ *для остальных коалиций* $S \in \Omega$*, где* $S_j = S \cap T_j, s_j = |S_j|$*, а коалиции* R_j, T_j*, и числа* $a_j, j = 1, \ldots, m$ *определены в представлении (3.1).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^{rx}$. Тогда $x = L_{\max}(N, v, \Omega)$, и $x \in C(N, v, \Omega)$. Из равенства $x = L_{\max}(N, v)$ следуют равенства $x(R_j) = v(R_j), j = 1, \ldots, m$, а из $x \in C(N, v, \Omega)$ следует равенство $x(S) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j s_j \geq v(S), S \in \Omega$.

Достаточность. Пусть (N, v, Ω)– произвольная игра, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда $x \in C(N, v, \Omega)$ и по Следствию 3.1 вектор x доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра. Следовательно, $x = L(N, v, \Omega)$ и $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^{rx}$. □

Таким образом, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограничениями, для которых уравнивающее решение совпадает с Лоренц-максимальным решением, описывается следующим образом:

$$\mathcal{G}^r_{ec} = \bigcup_{N \subset \mathcal{U}} \Big\{ (N, v, \Omega) \,|\, x \in ESOS(N, v, \Omega) \Longleftrightarrow x(R_j) = v(R_j), i, j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{m} a_j s_j \geq v(S) \, \forall S \in \Omega \Big\}, \tag{3.2}$$

в представлении (3.1) вектора x.

Формула (3.2) описывает класс игр $\mathcal{G}^r_{ec}$ не столь явно, как например, определение класса выпуклых игр. Однако из Утверждения 3.2 следует, что для того чтобы проверить, принадлежит ли игра (N, v, Ω) к этому классу, достаточно найти множество $ESOS(N, v, \Omega)$ и, в случае если оно одноточечно, $ESOS(N, v, \Omega) = x$, проверить сбалансированность ТП игры (N, v_x), где

$$v_x(S) = \begin{cases} v(S) & \text{если } S \in \Omega, \\ x(S) & \text{если } S \notin \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Эта процедура не сложнее, чем проверка выпуклости ТП игры. Следовательно, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограниченной кооперацией, для которых уравнивающее решение совпадает с Лоренц-максимальным решением, определен корректно. Более того, для частного случая классических ТП игр, когда набор Ω состоит из всех коалиций, соответствующий подкласс класса $\mathcal{G}^r_{ec}$ оказывается шире, чем класс выпуклых игр.

Замечание 3.1. Лоренц-максимальное решение может существовать и в играх с ограниченной кооперацией, не принадлежащих классу $\mathcal{G}^r_{ec}$. Примером является следующая игра (N, v, Ω) трех лиц: $\Omega = N, \{1,2\}, \{1,3\}$, $v(N) = v(1,2) = v(1,3) = 1$. В этой игре с-ядро состоит из единственного дележа $x = (1,0,0)$, являющегося DR-решением. Однако $ESOS(N, v, \Omega) = (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2)$. Нахождение класса всех игр, обладающих Лоренц-максимальным решением, является открытой задачей.

3.2. Согласованность Лоренц-максимального-решения для игр с ограниченной кооперацией

В этом пункте мы проверим, какие свойства Лоренц-максимального решения, которыми оно обладает в классе выпуклых ТП игр, сохраняются и для игр с ограниченной кооперацией. Будем рассматривать свойства Лоренц-максимального решения во всем классе $\mathcal{G}^r_c$, хотя оно может оказаться пустым для некоторых игр из этого класса. Очевидно, что Лоренц-максимальное решение в играх с ограниченной кооперацией анонимно.

Покажем, что Лоренц-максимальное решение в классе $\mathcal{G}^r_{ec}$ удовлетворяет свойству согласованности в определении Дэвиса–Машлера [2] для произвольного универсального множества игроков $\mathcal{N}$.

Для заданной игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией *редуцированной игрой* на множество игроков $S \subset N$ относительно вектора выигрышей $x \in X(N, v)$ называется игра $(S, v^x_S, \Omega_S) \in \mathcal{G}^r_S$, где

$$v^x_S(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S) \text{ если } T = S, \\ \max\limits_{\substack{Q: T\cup Q \in \Omega \\ Q \subset N\setminus S}} (v(T \cup Q) - x(Q)), \qquad \text{если } T \subsetneq S, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\Omega_S = \{T \subset S \,|\, T \in \Omega \text{ или } \exists Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega\}$.

Решение σ называется *согласованным в определении Дэвиса–Машлера* для класса $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{G}^r$, если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$, вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ и коалиции $S \subset N$ редуцированная игра $(S, v^x_S, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$ и выполняется соотношение $x_S \in \sigma(S, v^x_S, \Omega_S)$.

Для ТП игр имеется усиление свойства согласованности: если решение φ для некоторого класса ТП игр $\mathcal{G}$ является согласованным и для любых игры $(N, v) \in \mathcal{G}$, коалиции $S \subset N$, и вектора $x \in \varphi(N, v)$ выполняется равенство $(\varphi(N, v))|_{x_{N\setminus S}} = \varphi(S, v^x_S)$, где

$$\varphi(N, v)|_{x_{N\setminus S}} = \{y \in \mathbb{R}^S \,|\, (y_S, x_{N\setminus S}) \in \varphi(N, v),$$

то решение называется *сильно согласованным.*

Обратным к свойству согласованности решений ТП игр является следующее: решение φ называется *обратно согласованным* [12] на классе ТП игр $\mathcal{G}$, таком что для любой игры из этого класса все ее редуцированные игры относительно векторов выигрышей, принадлежащих решению φ, принадлежат этому же классу, называется обратно согласованным, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ и любых игроков $i, j \in N$ для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ справедливы соотношения $(x_i, x_j) \in \varphi(\{i, j\}, v^x_{i,j})$, то вектор $x \in \varphi(N, v)$.

Теорема 3.1. *Лоренц-максимальное решение согласовано в определении Дэвиса–Машлера в классе* $\mathcal{G}^r_c$

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_c$ – произвольная игра, для которой существует Лоренц- максимальное решение $x = L_{\max}(N, v, \Omega) \in C(N, v, \Omega) = C(N, v_x)$, где характеристическая функция v_x определена в (3.3). Тогда $x \succ_{Lor} y$ для всех $y \in C(N, v, \Omega) \setminus \{x\}$. Пусть $i \in N$ – произвольный игрок. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus \{i\}, v^x_{N\setminus\{i\}}, \Omega_{N\setminus\{i\}})$ на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

Так как с-ядро ТП игр согласовано по Дэвису–Машлеру [12], $x^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$, где $(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$ – редуцированная игра игры (N, v_x) на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

По определению редуцированной игры (3.4)

$$C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x) = C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega_S). \tag{3.5}$$

Покажем, что $x^i \succ_{Lor} y^i$ для всех $y^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega_S)$.

Из сильной согласованности с-ядра [14] на классе сбалансированных ТП игр и из равенства (4.4) следует$(y^i, x_i) \in C(N, v_x)$, откуда мы получаем

$$x \succ_{Lor} (y^i, x_i). \tag{3.6}$$

Из равенства (3.6) следует $x^i \succ_{Lor} y^i$ (см. Замечание 2 в статье [8]). Следовательно, $x^i = L_{\max}(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x, \Omega_{N\setminus\{i\}})$. □

Однако, в отличие от выпуклых ТП игр, Лоренц-максимальное решение на классе сбалансированных игр не удовлетворяет свойству обратной согласованности (пример см. в Приложении). Поэтому оно не удовлетворяет ему и в классе игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром. А именно это свойство Лоренц-максимального решения в классе выпуклых игр использовалось в доказательстве следующей теоремы, дающей аксиоматическую характеризацию Лоренц-максимального решения в классе выпуклых ТП игр:

Теорема 3.2. ([5], [4]) *В классе выпуклых ТП игр $\mathcal{G}^c$ Лоренц-максимальное решение является единственным непустым решением, удовлетворяющим свойствам согласованности и ограниченного эгалитаризма (CE) в классе игр двух лиц.*

Лоренц-максимальное решение на классе выпуклых ТП игр имеет еще одну аксиоматическую характеризацию с использованием согласованности в определении Харта–Мас-Колелла [6]. Это свойство согласованности нельзя определить для общего класса игр с ограниченной кооперацией, так как в определении редуцированных игр используются решения подыгр, которые могут и не существовать. Так как в последующем изложении мы будем использовать только согласованность в определении Дэвиса–Машлера, будем обозначать ее просто термином «согласованность».

4. Игры с ограниченной кооперацией, порожденной разбиением

4.1. Игры с коалиционной структурой

В теории кооперативных игр известны модели, называемые *кооперативными играми с коалиционной структурой (КС)*. Такая игра задается тройкой $(N, v, \mathcal{B})$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_k)$ – разбиение множества N. Решения кооперативных игр с КС определяются так же, как для классических ТП игр, но с учетом разбиений как первого уровня кооперации. Наиболее известным одноточечным решением для кооперативных игр с КС является значение Оуэна [11], являющегося модификацией значения Шепли для этого класса игр.

Существуют различные подходы к определению набора допустимых коалиций для игр с КС. Некоторые авторы рассматривают КС для дополнительного ограничения на множество допустимых векторов выигрышей: суммарный выигрыш игроков каждой коалиции разбиения не должен превышать соответствующего значения характеристической функции [13]. При этом все коалиции считаются допустимыми.

Оуэн [11] также рассматривал полностью заданную кооперативную ТП игру (N, v) и разбиение $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_r)$ на множестве игроков. Однако фактически значение Оуэна зависит только от значений характеристической функции на коалициях S, имеющих вид

$$S = \bigcup_{J \subset \{1,\ldots,k\}} B_i \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \tag{4.1}$$

Следовательно, можно считать, что значение Оуэна является решением игры с ограниченной кооперацией, допустимый набор коалиций Ω которой состоит из коалиций, определенных в (4.1).

Другой модификацией значения Шепли для кооперативных игр с КС является значение Камийо [9]. Это значение зависит от меньшего набора допустимых коалиций, чем значение Оуэна, а именно, от коалиций S, имеющих вид

$$S \subset B_i, i = 1, \ldots, k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1,\ldots,k\}} B_j, \tag{4.2}$$

т. е. набор допустимых коалиций в этом случае состоит из коалиций разбиения и их объединений, а также от всех подкоалиций каждой коалиции разбиения.

Оказывается, что для такого набора коалиций можно определить понятие выпуклости игр и определить, кроме Лоренц-максимального решения, еще одно эгалитарное решение, являющееся его модификацией. Более того, свойство выпуклости кооперативных игр с КС и наборами допустимых коалиций вида (4.2) позволяет дать аксиоматические характеризации этих решений. Это будет сделано в настоящем параграфе.

4.2. Выпуклые игры с коалиционными структурами

Рассмотрим класс кооперативных игр с КС $\mathcal{G}_{cs} \subset \mathcal{G}^r$, определяемый допустимыми наборами коалиций вида (4.2), т. е. $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{cs}$, если существует такое разбиение $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ множества N, что

$$\Omega = \{S \subset N \mid S \subset \mathcal{B} \text{ или } S \subset B_j, j = 1, \ldots, k\}. \tag{4.3}$$

Мы будет обозначать такие наборы коалиций $\Omega(\mathcal{B})$.

Для каждой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ с КС, определяемой набором допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ для некоторого разбиения $\mathcal{B}$ множества N, определим *внешнюю игру* $(\mathcal{B}, v)$, множество игроков которой совпадает с множеством коалиций разбиения, а характеристическая функция определяется характеристической функцией исходной игры, и поэтому имеет то же обозначение v, и *внутренние игры* $(B_j, v), l = 1, \ldots, m$, являющиеся подыграми исходной игры на каждой коалиции разбиения. По определению набора $\Omega(\mathcal{B})$ внутренняя и внешние игры являются классическими ТП играми.

Определение 4.1. *Игра с КС* $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ *называется выпуклой, если ее внешняя и все внутренние игры выпуклые.*

Обозначим через $\mathcal{G}^c_{cs} \subset \mathcal{G}_{cs}$ класс выпуклых игр с КС. Будем доказывать, что все игры этого класса обладают $L_{\max}$-решением.

Начнем с применения алгоритма Дутта–Рэя к произвольной выпуклой игре с КС

$$\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B})). \tag{4.4}$$

Пусть

$$a_1 = \max_{S \in \Omega(\mathcal{B})} \frac{v(S)}{|S|}, \tag{4.5}$$

и пусть максимум в (4.5) достигается на коалиции $T_1 \in \Omega$. Определим игру $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$, где $\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B})_{N \setminus T_1}$, в соответствии с Определением 2.5. Характеристическая функция v^1 определяется в зависимости от вида коалиции T_1. Эта коалиция либо является объединением коалиций разбиения $\mathcal{B}$, либо подкоалицией коалиции $B_j, j = 1, \ldots, k$.

В первом случае, когда максимум в (4.5) достигается на коалиции $T_1 = \bigcup\limits_{\substack{j \in J \\ J \subset \{1,\ldots,k\}}} B_j$, из Определения 2.5 следует, что

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \in \mathcal{B}, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneq B_j \text{ для некоторой } B_j \cap \mathrm{B} = \emptyset. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рассмотрим второй случай, когда максимум в (4.5) достигается на некоторой подкоалиции коалиции разбиения. Пусть $T_1 \subset B_j$ – одна из таких коалиций. Тогда в игре $\Gamma^1 = (N \setminus S, v^1, \Omega^1)$

$$\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B})_{N\setminus T_1} = \{S \in \mathcal{B} \setminus B_j, \text{ и } S \subset B_i, i \neq j, S \subset B_j \setminus S\}.$$

Для таких коалиций

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega^1, S \cap B_j = \emptyset,, \\ v(B_j) - a_1|T_1|, & \text{если } S = B_j \setminus T_1, \\ v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \subsetneqq B_j, \\ v(\mathrm{B}) - a_1|S|, & \text{если } S = (\mathrm{B} \setminus B_j) \cup (B_j \setminus T_1), \\ & \text{где } \mathrm{B} \subset \mathcal{B}, B_j \subset \mathrm{B}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Используя формулы (4.6),(4.7), получаем следующий результат:

Лемма 4.1. *Игра* $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ *является выпуклой игрой с КС.*

Следовательно, алгоритм корректно определен для выпуклых игр с КС, и в результате за конечное число шагов мы получим вектор $x = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2,}_{T_2}, \dots, \underbrace{a_m, \dots, a_m}_{T_m})$, где $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$, и игроки упорядочены в соответствии с убыванием выигрышей.

Заметим, что на некотором шаге алгоритма соответствующий максимум может достигаться на нескольких коалициях. В случае классической выпуклой игры максимум в этом случае достигается и на объединении этих коалиций, и именно это свойство позволяет доказать, что алгоритм приводит к единственному вектору выигрышей. В рассматриваемом случае игр с КС объединение двух допустимых коалиций может оказаться не недопустимым. Поэтому, не доказывая единственности вектора – результата применения алгоритма, будем брать в качестве x произвольный вектор из набора возможных. Поэтому упорядочение чисел $a_1, \dots, a_m$ в определении вектора x оказываются нестрогими.

Каждая коалиция $S \subset N, S \notin \Omega(\mathcal{B})$ может быть представлена единственным образом как объединение максимальных допустимых коалиций следующим образом:

$$S = \bigcup_{j \in J_1} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2} S_j, \tag{4.8}$$

где $J_1, J_2 \subset \{1, 2, \ldots, k\}, J_1 \cap J_2 = \emptyset, J_2 \neq \emptyset$.

ТП игра $\Gamma_{ae} = (N, v_{ae})$, где

$$v_{ae}(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega, \\ v(\bigcup\limits_{j \in J_1} B_j) + \sum\limits_{j \in J_2} v(S_j), & \text{если } S \notin \Omega \text{ имеет вид (4.8)} \end{cases} \tag{4.9}$$

называется *аддитивным расширением* игры $N, v, \Omega)$.

Лемма 4.2. *Если игра $\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$, то ее аддитивное расширение $\Gamma_{ea} = (N, v_{ae})$ является выпуклой ТП игрой.*

Применим теперь алгоритм Дутта–Рэя к игре Γ_{ae}. Тогда на первом шаге максимум $\max\limits_{S \subset N} \frac{v_{ae}(S)}{|S|}$ будет достигаться на той же коалиции T_1 (хотя, возможно, и не только на ней), что и максимум в (4.5). Рассмотрим игру $(N \setminus T_1, (v_{ae})^1)$, где

$$(v_{ae})^1(S) = v_{ae}(S \cup T_1) - a_1|T_1| \text{ для всех } S \subset N \setminus T_1. \tag{4.10}$$

Лемма 4.3. $(v_{ae})^1 = (v^1)_{ae}$, *где игра $(N \setminus T_1, (v^1)_{ae})$ является аддитивным расширением игры с КС $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$.*

Теорема 4.1. *В классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ выпуклых игр с КС Лоренц-максимальное решение не пусто.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную выпуклую игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Для сохранения обозначений пусть она совпадает с игрой Γ (4.4). Из Леммы 4.1 следует, что игра с КС $(N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ выпуклая, а из Лемм 4.2 и 4.3 следует, что ТП игра $(N \setminus T_1, (v_{ae})^1)$ выпуклая. Следовательно, и на всех остальных шагах алгоритма $j = 2, 3, \ldots, m$ справедливы равенства $v^j_{ae}(S) = (v^j)_{ae}(S)$ для всех $S \subset N \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} T_1$, откуда и получается равенство $DR(N, v_{ae}) = DR(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. □

Из Теоремы 4.1 следует, что класс $\mathcal{G}^c_{cs} \subset \mathcal{G}^r_{ec}$, и класс ТП игр, характеристические функции которых являются аддитивными расширениями игр из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, содержится в классе выпуклых ТП игр. Поэтому из Теоремы 4.1 следует, что $L_{\max}$-решение в классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ согласовано в определении Дэвиса–Машлера. Очевидно, что для $|N| = 2$

$\mathcal{G}^c_{cs_N} = \mathcal{G}^r_{ec} =$ классу супер-аддитивных (выпуклых) ТП игр двух лиц, и DR-решение для этого класса совпадает с решением ограниченного эгалитаризма (CE) [4].

Эти свойства позволяют построить аксиоматическую характеризацию Лоренц-максимального решения для класса выпуклых игр с КС, аналогичную характеризации этого решения решения для выпуклых ТП игр (Теорема 3.2).

Теорема 4.2. *В классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ выпуклых игр с КС Лоренц-максимальное решение является единственным решением, удовлетворяющим одноточечности, согласованности и ограниченному эгалитаризму для игр двух лиц.*

Доказательство. Ввиду Теоремы 4.1 и установленных свойств $L_{\max}$-решения для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, достаточно доказать только его единственность в этом классе. Пусть σ – произвольное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам, указанным в формулировке теоремы, $x = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. По свойствам CE и согласованности решения σ все редуцированные игры $(\{i,j\}, v^x, \Omega_{\{i,j\}})$ исходной игры на двухэлементные множества игроков $\{i,j\}, i,j \in N$ относительно вектора x являются супераддитивными, и игра $(\{i,j\}, v^x, \Omega_{\{i,j\}})$ является классической ТП игрой для любых $i,j \in N$.

Покажем, что $x \in C(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Пусть $S \in \Omega(\mathcal{B}), S \neq N$ – произвольная коалиция, и пусть $j \notin S, i \in S$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i,j\}, v^x)$ на множество игроков $\{i,j\}, i \in S$. По свойству CE решения σ $(x_i, x_j) \in C(\{i,j\}, v^x)$, и $x_i \geq v^x(\{i\})$. По определению редуцированной игры (3.4)

$$v^x\{i\} = \max_{\substack{\{i\}\cup Q \in \Omega \\ Q:\ i,j \notin Q}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)). \tag{4.11}$$

Из $x_i \geq v^x(\{i\})$ и равенства (4.11) следует, что $x(\{i\} \cup Q) \geq v(\{i\} \cup Q)$ для всех Q, по которым берется максимум в (4.11). Так как коалиция $S \setminus \{i\}$ удовлетворяет этим условиям на Q, то $x(S) \geq v(S)$. Коалиция $S \in \Omega(\mathcal{B})$ была выбрана произвольной в наборе $\Omega(\mathcal{B})$, поэтому $x \in C(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Покажем теперь, что для любых $i,j \in N$ редуцированная игра $(\{i,j\}, v^x)$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой

$(\{i,j\}, v^x_{ae})$ аддитивного расширения (N, v_{ae}). Рассмотрим следующие случаи:

1) $i, j \in B_t, t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда по (3.4)

$$v^x(\{i\}) = \max_{Q \subset B_t \setminus \{i,j\}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)),$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q \subset N \setminus \{i,j\}} (v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q)). \tag{4.12}$$

Если $Q \notin B_t \setminus \{i,j\}$, то $Q = Q_1 \cup Q_2$, где $Q_1 \subset B_t$, $Q_2 \cap B_t = \emptyset$. По определению аддитивного расширения (4.9) и принадлежности x c-ядру игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, справедливо неравенство

$$v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q) \le v_{ae}(\{i\} \cup Q_1) - x(Q_1), \tag{4.13}$$

из которого следует равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.

2) $i \in B_t, j \in B_r, t, r \in \{1, \dots, k\}$, $t \neq r$. Тогда

$$v^x(\{i\}) = \max_{\substack{Q \subset B_t \\ i \notin Q}} (v(\{i\} \cup Q) - x(Q)),$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q \subset N \setminus \{i,j\}})(v_{ae}(\{i\} \cup Q) - x(Q).$$

Аналогично случаю 1) получаем равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.

Очевидно, что $v^x(\{i,j\}) = v^x_{ae}(\{i,j\}) = x_i + x_j$. Следовательно, редуцированные игры совпадают и, по согласованности решения σ, $(x_i, x_j) = L_{\max}(\{i,j\}, v^x) = L_{\max}(\{i,j\}, v^x_{ae})$.

Из обратной согласованности $L_{\max}$-решения в классе выпуклых ТП игр [4] следует, что $x = L_{\max}(N, v_{ae})$, и из Теоремы 4.1 мы получаем требуемый результат $x = L_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. $\square$

В следующем разделе приведем другое решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, с похожими свойствами.

4.3. Лорен-максимальное решение типа Камийо для класса выпуклых игр с коалиционной структурой

Для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где набор $\Omega(\mathcal{B})$ порожден разбиением $\mathcal{B}$ как определено в (4.4), рассмотрим внешнюю игру $(\mathcal{B}, v^*)$ (см. раздел 4.2) и внутренние игры $(B_i, v_i), i = 1, \dots, k$, являющиеся соответствующими подыграми игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Камийо [9] определил следующее двухшаговое решение для игр с КС: Для произвольной игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, на первом шаге находится значение Шепли (Sh) внешней игры $(\mathcal{B}, v)$, и пусть $x = Sh(\mathcal{B}, v)$. Далее значения характеристических функций больших коалиций B_i внутренних игр $(B_i, v), i = 1, \ldots, k$ заменяются на x_i. Такие модифицированные внутренние игры обозначим через (B_i, v_i^x). На втором шаге находятся значения Шепли игр (B_i, v_i^x). Обозначим $y_i^x = Sh(B_i, v_i^x), i = 1, \ldots, k$. Вектор $(y_i^x, \ldots, y_k^x) \in X^*(N, v)$ называется *Камийо-Шепли значением* игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

В этом разделе мы рассмотрим выпуклые игры с КС и заменим значение Шепли в предыдущем определении на Лоренц-максимальное решение. Тогда мы получим непустое одноточечное решение для этого класса, так как внешняя и все внутренние (и также модифицированные внутренние) игры выпуклые, и для них существуют $L_{\max}$-решения. Назовем получившееся решения для игр с КС *Лоренц-максимальным решением типа Камийо* ($L_{\max}^K$).

Это решение отличается от определенного в предыдущем разделе $L_{\max}$-решения для игр с КС. Покажем это на примере

Пример 4.1. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{1\}\{2, 3\}$. Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $v(N) = 4, v(\{1\} = 1.5, v(\{2, 3\} = 2, v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$. Очевидно, эта игра выпуклая. Лоренц-максимальное решение для этой игры равно $L_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = (1.5, 1.25, 1.25)$. Однако $L_{\max}^K(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = (2, 1, 1)$.

Приведенный пример показывает, что Лоренц-максимальное решение является «более эгалитарным» с точки зрения равноправия всех игроков. $L_{\max}^K$-решение сначала «уравнивает» в смысле доминирования по Лоренцу выигрыши коалиций разбиения, а на втором уровне уравнивает выигрыши игроков внутри коалиций разбиения.

Очевидно, $L_{\max}^K$-решение анонимно и принадлежит с-ядру. Однако, в отличие от Лоренц-максимального решения (см. раздел 4.2), оно не является согласованным в определении редуцированной игры (3.4).

Пример 4.2. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{B} = (B_1, B_2,)\ B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{4, 5, 6\}$.

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{для } S = \{i\}, i \in N, \text{ и } S \subsetneqq B_2,\ S = \{1,3\}, \{2,3\} \\ 1, & \text{для } S = \{4,5,6\}, \\ 1.5, & \text{для } S = \{1,2,3\}, \{1,2\}, \\ 4, & \text{для } S = N. \end{cases}$$

Легко видеть, что игра $\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ является выпуклой игрой с КС. $L_{\max}$-решение внешней игры $\Gamma_{ou} = (\{B_1, B_2\}, v))$, $v(B_1) = 1.5$, $v(B_2) = 1, v(N) = 4$ равно $L_{\max}(\Gamma_{ou}) = (2,2)$, а $L^K_{\max}(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = x = (3/4, 3/4, 1/2, 2/3, 2/3, 2/3)$. Рассмотрим редуцированную игру Γ^{x_3}, когда игрок 3 покидает игру с выигрышем 1/2. В этой игре $\mathcal{B}_{N\setminus\{3\}} = (B_1 \setminus \{3\}, B_2)$. Характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v^x_4(S) = \begin{cases} 0, & \text{для } S = \{i\}, i = 1,2,4,5,6 \text{ и } S \subsetneqq B_2. \\ 1.5, & \text{для } S = \{1,2\}, \\ 1, & \text{для } S = \{4,5,6\} \\ 3.5, & \text{для } S = \{1,2,4,5,6\}. \end{cases}$$

Тогда $L^K_{\max}(\Gamma^{x_3}) = (7/8, 7/8, 7/12, 7/12, 7/12) \neq x_{N\setminus\{3\}}$.

Однако, ввиду того что $L^K_{\max}$-решение является результатом двухшагового нахождения Лоренц-максимальных решений классических выпуклых ТП игр, естественно ожидать, что оно удовлетворяет некоторому иному, возможно более слабому, свойству согласованности. Таким свойством оказывается свойство коалиционной согласованности, когда согласованность выполняется только для редуцированных игр, образованных уходом целых коалиций разбиения или их объединениями.

Определение 4.2. *Одноточечное решение Φ для класса $\mathcal{G}_{cs}$ игр с КС называется коалиционно согласованным с смысле Дэвиса–Машлера, если для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, и коалиции $B_j \in \mathcal{B}$ из $x = \Phi(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ следует выполнение равенства*

$$x_{N\setminus B_j} = \Phi_{N\setminus B_j}(N, v, \mathcal{B}) = \Phi(N \setminus B_j, v_x^{N\setminus B_j}, \mathcal{B} \setminus B_j),$$

где редуцированная игра определена следующим образом:

$$v_x^{N\setminus B_j}(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_j), \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i)\}, & \text{если } S = \bigcup\limits_{J\subset\{1,\ldots,k\}, j\neq i} B_j \end{cases} \quad (4.14)$$

В этом определении предполагается, что разбиение $\mathcal{B}$ состоит более чем из одной коалиции.

Так как коалиционная структура двухточечного множества $\{i,j\}$ состоит либо из единственной коалиции $\{i,j\}$, либо из одноточечных множеств $\{i\},\{j\}$, любая выпуклая игра двух лиц с КС совпадает с выпуклой ТП игрой двух лиц. Таким образом, в обоих случаях свойство CE определяется одним и тем же способом, и для игр этого класса $L_{\max}(N,v) = L_{\max}^K(N,v) = CE(N,v)$.

Однако если число игроков более двух, а число коалиций разбиения равно одному или двум, то определение $L_{\max}^K$-решения учитывает неравноправие коалиций разбиения и коалиций, содержащихся в единственной коалиции разбиения. Это свойство формулируется в виде следующего CE свойства для игр с КС:

Определение 4.3. *Одноточечное решение σ для класса $\mathcal{G}_{cs}^r$ игр с КС, содержащих две коалиции разбиения и удовлетворяющие коалиционной согласованности, удовлетворяют свойству коалиционного ограниченного эгалитаризма (CCE), если для любой игры $(N,v,\Omega(\mathcal{B}))$ $\in \mathcal{G}_{cs}^r$, $\mathcal{B} = (B_i, B_j)$ и $x = \sigma(N,v,\Omega(\mathcal{B}))$ из неравенства $x(B_i) > x(B_j)$ следует равенство $x(B_i) = v(B_i)$.*

Заметим, что это определение совпадает со свойством CE для случая игр двух лиц.

Приведем теперь аксиоматическую характеризацию $L_{\max}^K$-решения для класса выпуклых игр с КС.

Теорема 4.3. *Единственным одноточечным решением для класса $\mathcal{G}_{cs}^c$, удовлетворяющим свойством непустоты, CCE для разбиений, состоящих из двух коалиций, CE для игр двух лиц, CCONS, и согласованности для разбиения, состоящих из одной коалиции, является Лоренц-максимальное решение типа Камийо.*

Доказательство. Свойство коалиционной согласованности $L_{\max}^K$-решения фактически означает согласованность решения внешней игры

Из того факта, что для первым шагом нахождения $L^K_{\max}$-решения является нахождение $L_{\max}$-решения внешней игры, которое является согласованным, решение $L^K_{\max}$ обладает свойством коалиционной согласованности.

Остальные свойства непосредственно следует определения $L^K_{\max}$-решения и уже доказанных свойств $L_{\max}$-решения.

Пусть теперь Φ – произвольное одноточечное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам теоремы.

Рассмотрим класс $\mathcal{G}'$ выпуклых ТП игр, таких что любая игра $(K, v) \in \mathcal{G}'$ является внешней игрой некоторой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ с $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k), k = |K|$. Очевидно, что класс $\mathcal{G}'$ совпадает с классом всех выпуклых ТП игр $\mathcal{G}^c$. Обратно, для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ ее внешняя игра принадлежит классу $\mathcal{G}$. Следовательно, по Теореме 3.2, коалиционной согласованности и свойству коалиционного ограниченного эгалитаризма решения Φ, для любой игры из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$ решение Φ ее внешней игры совпадает с $L_{\max}$-решением. Пусть $x = \Phi(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$. Мы доказали справедливость равенств

$$x(B_i) = \Phi_i(K, v) = (L_{\max})_i(K, v), i \in K. \tag{4.15}$$

Рассмотрим внутреннюю игру (B_i, v^x), где характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v^x(S) = \begin{cases} x(B_i) & \text{если } S = B_i, \\ v(S) & \text{если } S \subsetneq B_i. \end{cases}$$

По определению (3.4) согласованности решения для класса $\mathcal{G}_{cs}$, эта игра совпадает с редуцированной игрой игры Γ на множество игроков B_i относительно вектора выигрышей x. Следовательно, по согласованности решения $\Phi(B_i, v^x)$ и по Теореме 3.2 получаем равенства

$$x_{B_i} = \Phi(B_i, v^x) = L_{\max}(B, v^x), i \in K. \tag{4.16}$$

Равенства (4.15) и (4.16) завершают доказательство теоремы. □

5. Приложение

Доказательство Предложения 3.1. Предположим, что для некоторого $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) > a + (b-a) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}$. Тогда

$$L_j(y) - L_{j_1}(y) = \sum_{l=j_1+1}^{j} y_l^* > \frac{j-j_1}{j_2-j_1} \cdot (b-a).$$

Так как компоненты y_l^* не убывают с ростом l,

$$y_j^* > \frac{b-a}{j_2-j_1}, \tag{5.1}$$

и для всех $l > j$ неравенство (5.1) также справедливо. Следовательно,

$$\sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > (b-a)\frac{j_2-j_1}{j_2-j_1} = b-a,$$

т. е.

$$b = L_{j_2}(y) = L_{j_1}(y) + \sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > a + b - a,$$

что невозможно. $\square$

Доказательство Леммы 3.1. Пусть вектор x имеет вид (2.7), а вектор y удовлетворяет условиям леммы. Тогда

$$L_j(x) = \sum_{k=n-j+1}^{n} x_k. \tag{5.2}$$

Из неравенств $x(R_k) \leq y(R_k)$ следуют неравенства $x(N \setminus R_k) \geq y(N \setminus R_k), k = 1, \ldots, m$, а из (5.2) мы получаем равенство $x(N \setminus R_k) = L_{|N \setminus R_k|}(x)$. Следовательно, $y(N \setminus R_k) \geq L_{|N \setminus R_k|}(y)$, откуда следуют неравенства

$$L_j(y) \leq L_j(x) \text{ для } j = |N \setminus R_k|, k = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Обозначим $j_1 = |N \setminus R_k|, j_2 = |N \setminus R_{k-1}|$ для некоторого произвольного $k = 1, \ldots, m-1$. Тогда для $j \in (j_1, j_2)$

$$L_j(x) = L_{j_1}(x) + (L_{j_2}(x) - L_{j_1}(x)) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}. \tag{5.4}$$

По Утверждению 3.1 справедливы неравенства

$$L_j(y) \le L_{j_1}(y) + (L_{j_2}(y) - L_{j_1}(y)) \cdot \frac{j - j_1}{j_2 - j_1} \text{ для } j \in (j_1, j_2). \quad (5.5)$$

Из неравенств (5.3),(5.5) и равенства (5.4) следует неравенство $L_j(y) \le L_j(x)$. Так как $k = 1, \dots, m-1$ и $j \in (j_1, j_2)$ были выбраны произвольно, $L_j(x) \ge L_j(y)$ для всех $j \in N$. □

Доказательство Следствия 3.1. Представим x в виде (2.7), и пусть $y \in C(N, v, \Omega)$ – произвольный вектор. Если $L(x) \neq L(y)$, то $x \succ_{Lor} y$ по Лемме 3.1.

Остается показать, что для $y \neq x$ $L(y) \neq L(x)$. Для всех $k = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $y(R_k) \ge x(R_k)$. Предположим, что $y_{T_1} \neq x_{T_1}$. Тогда найдется такое $j \in T_1$, что $y_j > a_1 = \max\limits_{i \in N} x_i$, откуда следует $L(x) \neq L(y)$.

Пусть теперь $y_{R_{k-1}} = x_{R_{k-1}}$ для некоторого $k = 2, \dots, m$, а $y_{T_k} \neq x_{T_k}$. Тогда найдется такое $j \in T_k$, что $y_j > x_j = a_k$, и в этом случае также равенство $L(x) = L(y)$ невозможно. □

Доказательство Леммы 4.2. Пусть $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, и $S, T \subset N, S \cap T \neq \emptyset$. Представим коалиции S, T в виде (4.8):

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{j \in J_1} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2} S_j, \\ T &= \bigcup_{j \in J_3} B_j \cup \bigcup_{j \in J_4} S_j, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $J_i \subset \{1, \dots, k\}, i = 1, 2, 3, 4$, $(J_1 \cup J_2) \cap (J_3 \cup J_4) \neq \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} S \cup T &= \bigcup_{j \in J_1 \cup J_3} B_j \cup \bigcup_{j \in J_2 \cup J_4} T_j, \\ S \cap T &= \bigcup_{j \in J_1 \cap J_3} B \cup \bigcup_{j \in J_2 \cap J_4} T_j. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Используя формулы (5.6),(5.7), получим равенство

$$v_{ae}(S) + v_{ae}(T) = v\Big(\bigcup_{j \in J_1} B_j\Big) + \sum_{j \in J_2} v(S_j) + v\Big(\bigcup_{j \in J_3} B_j\Big) + \sum_{j \in J_4} v(T_j). \quad (5.8)$$

В правой части равенства (5.8) стоит сумма значений характеристической функции v от допустимых коалиций из $\Omega(\mathcal{B})$. Так как игра $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ выпуклая, справедливы неравенства

$$v\Big(\bigcup_{j\in J_1} B_j\Big) + v\Big(\bigcup_{j\in J_3} B_j\Big) \le v\Big(\bigcup_{j\in J_1\cup J_3} B_j\Big) + v\Big(\bigcap_{j\in J_1\cap J_3} B_j\Big), \tag{5.9}$$

$$\sum_{j\in J_2} v(S_j) + \sum_{j\in J_4} v(T_j) \le \sum_{j\in J_2\setminus J_4} v(S_j) + \sum_{j\in J_4\setminus J_2} v(T_j) + \sum_{j\in J_2\cap J_4} v(S_j\cap T_j) \tag{5.10}$$

Из равенства (5.8) и неравенств (5.9) и (5.10) следует неравенство

$$v(S) + v(T) \le v(S\cup T) + v(S\cap T),$$

завершающее доказательство. □

Доказательство Леммы 4.3. Пусть $S \subset \Omega^1$ – произвольная коалиция. Тогда очевидно, что $(v^1)_{ae}(S) = (v_{ae})^1(S)$. Теперь пусть $S \subset N\setminus T_1, S \notin \Omega^1$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $T_1 \subsetneqq B_l$. Если $S \subset N\setminus T_1, S\notin \Omega^1$, то S разлагается на коалиции из Ω^1 следующим образом:

$S = \mathrm{B}' \cup Q$, где $\mathrm{B}' = \bigcup\limits_{j\in J_1} B'_j$, $Q = \bigcup\limits_{j\in J_2} S_j$, $B'_j = B_j$ для $j \ne l$, $B'_l = B_l\setminus T_l$, $S_j \in B'_j, J_1, J_2 \subset \{1,\dots,k\}, J_1\cap J_2 = \emptyset$.

1a) $l \in J_1$. Тогда

$$(v^1_{ae}(S) = v^1(\mathrm{B}') + \sum_{j\in J_2} v^1(S_j) = v(\mathrm{B}) - a_1|T_1| + \sum_{j\in J_2} v(S_j). \tag{5.11}$$

1b) $l \notin J_1, J_2$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\mathrm{B}) + \sum_{j\in J_2} v(S_j) = v(\mathrm{B}) + \sum_{j\in J_2} v(S_j) + v(T_1) - a_1|T_1|. \tag{5.12}$$

1c) $l \in J_2$. Тогда $v^1(S_l) = v(S_l\cup T_l) - a_1|T_1|$,

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\mathrm{B}) + \sum_{\substack{j\in J_2\\ j\ne l}} v(S_j) + v(S_j\cup T_l) - a_1|T_1|. \tag{5.13}$$

Равенства (5.11)–(5.13) доказывают лемму для случая 1.

2. $T_1 = \mathrm{B}_1 = \bigcup\limits_{j\in J_1\subset\{1,\dots,k\}} B_j$. В этом случае, если $S\subset N\setminus T_1, S\notin\Omega^1$, то S разлагается на коалиции из Ω^1 следующим образом:

$S = \text{В}_2 \cup Q$, где $\text{В}_2 = \bigcup\limits_{\substack{j\in J_2\subset\{1,\dots,k\}\\ J_2\cap J_1=\emptyset}} B_j$, $Q = \bigcup\limits_{j\in J_3} S_j$, $S_j \subsetneqq B_j$, $J_3 \cap (J_1 \cup J_2) = \emptyset$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S) = v(\text{В}_2 \cup T_1) + \sum_{j\in J_3} v(S_j) - a_1|T_1| = v_{ae}(S \cup T_1) - a_1|T_1| = (v_{ae})^1(S).$$

□

Пример, показывающий отсутствие обратной согласованности Лоренц-максимального решения на классе сбалансированных игр:

Пример 5.1. Рассмотрим игру четырех лиц (N, v), $N = \{1, 2, 3, 4\}$ со следующей характеристической функцией:

$$\begin{gathered} v(1) = 0.5, v(2) = v(3) = 1, v(4) = 0, v(1,2) = 2, v(1,3) = v(3,4) = 3,\\ v(2,3) = 5, v(1,4) = v(2,4) = 1, v(S) = 3 \text{ для } S : |S| = 3,\ v(1,2,3,4) = 6. \end{gathered}$$

Эта игра сбалансированная, но не выпуклая. Нетрудно проверить, что Лорнец-максимальное решение $L(N, v) = (0.5, 2.5, 2.5, 0.5) \in C(N, v)$. Рассмотрим вектор $x = (0.9, 2.1, 2.9, 0.1) \in C(N, v)$ и покажем, что для всех редуцированных игр двух лиц относительно вектора x соответствующие проекции этого вектора являются решениями ограниченного эгалитаризма для этих игр:

$$\{i, j\} \subset N \implies (x_i, x_j) = CE(\{i, j\}, v^x_{ij}).$$

Прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} &v^x_{23}(3) = v(3,4) - x_4 = 2.9 = x_3 > x_2 \Longrightarrow (x_2, x_3) = CE(\{2,3\}, v^x_{23}),\\ &v^x_{13}(3) = v^x_{34}(3) = 2 - 2.1 = 2.9 = x_3 > x_1 \Longrightarrow (x_1, x_3) = CE((\{1,3\}, v^x_{13}),\\ &v^x_{34}(3) = 2 - 2.1 = 2.9 = x_3 > x_4 \Longrightarrow (x_3, x_4) = CE(\{3,4\}, v^x_{34}),\\ &v^x_{12}(2) = 3 - 0.9 = 2.1 = x_2 > x_1 \Longrightarrow (x_1, x_2) = CE(\{1,2\}, v^x_{12}),\\ &v^x_{24}(2) = 5 - 2.9 = 2.1 = x_2 > x_4 \Longrightarrow (x_2, x_4) = CE(\{2,4\}, v^x_{24}),\\ &v^x_{14}(1) = 3 - 2.1 = 0.9 = x_1 > x_4 \Longrightarrow (x_1, x_4) = CE(\{1,4\}, v^x_{14}). \end{aligned}$$

Однако $x \neq L(N, v)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. *The equal split-off set for cooperative games* // Game Theory and Mathematical Economics. Banach Center Publications, v.71. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa. 2006. P. 39–46.

2. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistic Quarterl. 1965. V. 12. P. 223–259.

3. Driessen T. *k-convex n-person games and their cores* // Zeitschrift für Operations Research. Series A. 1986. V. 30. P. 49–84.

4. Dutta B. *The egalitarian solution and the reduced game properties in convex games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 153–159.

5. Dutta B., Ray D. *A concept of egalitarianism under participation constraints* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 615–630.

6. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 589–614.

7. Hokari T., van Gellekom A. *Population monotonicity and consistency in convex games: Some logical relations* // International Journal of Game Theory. 2002. V. 31. P. 593–607.

8. Hougaard J.L., Peleg B., Thorlund-Petersen L. *On the set of Lorenz-maximal imputations in the core of a balanced game* // International Jouranl of Game Theory. 2001. V. 30. P. 147–165.

9. Kamijo Y. *A two-step value for cooperative games with coalitional structures* // International Game Theory Review. 2009. V. 11. P. 207–214.

10. Llerena F. *An axiomatization of the core of games with restricted cooperation* // Economic Letters. 2007. V. 95. P. 80–84.

11. Owen G. *Values of games with a priori unions* // Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.) Springer-Verlag. Berlin. 1977. P. 76–88.

12. Peleg B. *On the Reduced Game Property and its Converse* // Int. Journal of Game Theory. 1986. V. 15. P. 187–200. *A Correction.* Int. Journal of Game Theory. 1987. V. 16.

13. Peleg B., Sudhölter P. it Introduction to the Theory of Cooperative Games. Kluwer Academic Publishers. Boston. 2003. 380pp.

14. Yanovskaya E. *Strongly consistent solutions to balanced TU games* // Int. Game Theory Review. 1999. V. 1. N 1. P. 63–85.

LORENZ-MAXIMAL SOLUTIONS FOR GAMES WITH A RESTRICTED COOPERATION

Elena B. Yanovskaya, St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics of RAS, St. Petersburg, Dr.Sc., Prof. (eyanov@emi.nw.ru).

Abstract: Cooperative games with a restricted cooperation, defined by an arbitrary collection of feasible coalitions are considered. For this class the Equal Split-Off Set (ESOS) [1] is defined by the same way as for cooperative games with transferable utilities (TU). For the subclass of these games with non-empty cores the Lorenz-maximal solution is also defined by the same way as for TU games. It is shown that if the ESOS of a game with a restricted cooperation intersects with its core, then it is single-valued and Lorenz dominates other vectors from the core, i.e. it coincides with the Lorenz-maximal solution. Cooperative games with coalitional structure for which the collection of feasible coalitions consists of the coalitions of partition, their unions, and subcoalitions of the coalitions of the partition, are investigated more in detail. For these games the convexity property is defined, and for convex games with coalitional structure existence theorems for two egalitarian solutions – Lorenz maximal and Lorenz-Kamijo maximal – are proved. Axiomatic characterizations for both these solutions are given.

Keywords: cooperative games, restricted cooperation, The Equal Split-off set, the Dutta–Ray solution, Lorenz-maximal solution.